

## RECONSTRUCCIÓN DEL FRENTE DE ONDA DE UN ESPEJO DEFORMADO MECANICAMENTE A PARTIR DE LA DESCOMPOSICIÓN DE LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y SERIES DE FOURIER

Juan José Cadavid <sup>\*†</sup>, René Restrepo <sup>\*</sup>, Jairo Coy <sup>\*</sup>, Esteban Toro <sup>\*</sup>, Santiago Alarcón <sup>\*</sup>

*\*Grupo de Óptica Aplicada, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Carrera 49 N° 7 Sur - 50, Medellín, Colombia.*

Recibido 26 Noviembre 2013; aceptado 22 Julio 2014

Disponible en línea: 18 Diciembre 2014

Resumen: Éste trabajo presenta la comparación realizada entre la descomposición en polinomios de Zernike y series de Fourier de un frente de onda aberrado. Éste último presentó un resultado más acertado por el manejo en la información de la aberración con mínimos costos computacionales para los diez primeros polinomios, mientras que la reconstrucción polinómica de Zernike permitió implementar una mayor cantidad de polinomios con una disminución de los errores RMS en la superficie del frente de onda.

*Palabras clave:* Aberración de frente de onda, Series de Fourier, Polinomios de Zernike.

## RECONSTRUCTION OF A MECHANICALLY DEFORMED MIRROR WAVEFRONT BASED ON DECOMPOSITION OF ZERNIKE POLYNOMIALS AND FOURIER SERIES

Abstract: This paper presents a comparison between Zernike polynomial and Fourier series decomposition of an aberrated wavefront. The last one, showed comparable results with less computational resources, whilst Zernike polynomial reconstruction allowed using more polynomials in order to reduce the wavefront surface RMS error.

*Keywords:* Wavefront aberration. Fourier series, Zernike polynomials.

### 1. INTRODUCCIÓN

La óptica adaptativa surge como una alternativa antes las constantes exigencias que se tienen en el mundo científico, especialmente en la astronomía donde se necesita cada vez más resolución en las imágenes obtenidas del universo (Bonet, 1999). Parte de esta calidad se pierde por diferentes contribuciones debido a las aberraciones, estas pueden ser pasivas, dependientes de la fabricación misma de elementos ópticos, o elementos opto-mecánicos, pero también las turbulencias atmosféricas con cambios activos

contribuyen a estas aberraciones, incluso inestabilidades termo-elásticas cambiantes producen deformaciones en los elementos del sistema formador de imagen produciendo aberraciones que mutan en el tiempo (Sánchez-Blanco *et al.*, 2007).

En este trabajo abordaremos las aberraciones pasivas debido a factores opto-mecánicos, sin embargo, el desarrollo planteado sirve para la implementación futura de un sistema de óptica adaptativa en lazo cerrado y en tiempo real. Para esto, a la optomecánica se le ha delegado la labor

---

<sup>†</sup> Autor al que se le dirige la correspondencia:

Tel. (+574) 2619500 ext 9321.

E-mail: [jcadav22@eafit.edu.co](mailto:jcadav22@eafit.edu.co) (Juan José Cadavid).

de unificar la precisión en la óptica con la mecánica de las estructuras en los sistemas ópticos con un creciente rigor para interpretar los posibles efectos que se tienen en los diferentes procesos de manufactura de elementos ópticos.

Las deformaciones en los sistemas ópticos son el resultado de diferentes factores que actúan sobre éste y que logran variar de manera sustancial a las propiedades ópticas. Estos factores principalmente provienen de las interacciones mecánicas con los elementos ópticos (Doyle et al., 2002), y dependiendo de su efecto sobre el sistema, logra afectar de manera diferente el comportamiento de la luz a manera de aberración.

Las aberraciones corresponden a las variaciones del frente de onda, de tal forma que presenta desfases espaciales en los diferentes puntos de éste con respecto a un frente de onda de referencia. La estimación del frente de onda, debe ser presentada en funciones características de aberraciones típicas, donde algunas de ellas puedan ser compensadas.

Dentro de las funciones base para la expansión del frente de onda, se encuentran los monomios de Taylor, las series de Fourier y los polinomios de Zernike (Dai, 2006a). Sin embargo, no era factible definir qué método funcionaba mejor, por el hecho que inicialmente no existía una conexión directa entre las bases matemáticas de los métodos, sin embargo, algunos autores han propuesto un método auxiliar y bidireccional entre las bases de expansión Fourier y Zernike (Dai, 2006b).

Éste trabajo realiza una comparación directa entre la reconstrucción con los polinomios de Zernike y la reconstrucción a partir de la transformada de Fourier, ambos sobre una superficie deformada mecánicamente en un espejo, obtenida a partir de la triangulación de Delaunay de los nodos de deformación calculadas a partir de un análisis de elementos finitos (FEM).

## 2. DESARROLLO ANALÍTICO

La expansión Zernike del frente de onda se encuentra definida como:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^N c_i Z_i(\rho, \theta), \quad (1)$$

Donde  $W(\rho, \theta)$  corresponde a la función del onda,  $c_i$  son los coeficientes de expansión y  $Z_i$  son los polinomios de Zernike de un sólo índice (Noll, 1976). Éste índice  $i$  es determinado partir de la relación:

$$j = \frac{n(n+2)+m}{2}, \quad (2)$$

Donde  $n$  es el orden radial y  $m$  es la frecuencia azimutal. A partir de los índices, los polinomios de Zernike están definidos como:

$$Z_i(\rho, \theta) = N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \Theta^m(\theta), \quad (3)$$

Donde  $N_n^m$  corresponde a la constante de normalización,  $R_n^{|m|}(\rho)$  es la parte radial en coordenadas polares, y  $\Theta^m(\theta)$  es la parte angular azimutal (Porter, 2008). Cada una de estas partes, se encuentran definidas como:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}}, \quad (4)$$

$$R_n^{|m|}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-|m|/2} \frac{(-1)^s (n-s)! \rho^{n-2s}}{s! [(n+|m|)/2-s]! [(n-|m|)/2-s]!}, \quad (5)$$

$$\Theta^m(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2} \cos(|m|\theta) & (m > 0) \\ 1 & (m = 0) \\ -\sqrt{2} \sin(|m|\theta) & (m < 0) \end{cases}. \quad (6)$$

Los polinomios de Zernike toman sentido únicamente sobre un círculo unidad, de tal forma que:

$$Z_i(\rho, \theta) = P(\rho) Z_i(\rho, \theta), \quad (7)$$

Donde  $P(\rho)$  corresponde a la función pupila definida entre  $[-1, 1]$  Los polinomios de Zernike componen una base ortogonal sobre el círculo unidad puesto que satisfacen la ecuación de ortogonalidad:

$$\iint_{\text{Circulo}} Z_i(\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{\pi} \delta_{mm} \delta_{mm}, \quad (8)$$

Donde  $\delta_{mn}$  corresponde al delta de Kronecker. El factor  $\pi$  es utilizado como factor de normalización en las funciones de onda. De lo anterior, cualquier función de aberración de onda definida sobre el círculo unidad, puede ser expresada como una sumatoria ponderada de coeficientes (Fricker, 2008). A partir de la relación de ortogonalidad, se puede deducir los coeficientes de expansión con la relación:

$$c_i = \frac{1}{\pi} \iint W(\rho, \theta) P(\rho) Z_i(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (9)$$

Realizando una comparación teórica con las series de Fourier, las funciones de onda se encuentran definidas por:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{M^2} a_i(k, \phi) \exp\left[ j \frac{2\pi}{M} k \rho \cos(\theta - \phi) \right], \quad (10)$$

Donde  $k$  y  $\phi$  corresponden a las coordenadas polares en el dominio de las frecuencias y  $M$  es el tamaño de la matriz del frente de onda. Luego los coeficientes de expansión de Fourier se deducen de (10), como se presenta en (11);

$$a(k, \phi) = \sum_{i=1}^{M^2} W(\rho, \theta) \exp\left[ -j \frac{2\pi}{M} k \rho \cos(\theta - \phi) \right]. \quad (11)$$

La bidireccionalidad entre los coeficientes de expansión Fourier y Zernike (Dai, 2008), para el primer caso, se obtiene al sustituir (10) en (9), obteniendo:

$$c_i = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{M^2} a(k_i, \phi_i) U_i^*(k_i, \phi_i), \quad (12)$$

Para el caso de Zernike a Fourier, se obtiene al sustituir (11) con (1), como se presenta en (13);

$$a(k, \phi) = \sum_{i=1}^N c_i U_i(k, \phi). \quad (13)$$

La transformada de Fourier analítica de los polinomios de Zernike  $Z_i(\rho, \theta)$ , denotada como  $U_i(k, \phi)$  está definida a partir de la expresión:

$$U_i(k, \phi) = (-1)^{n/2+|m|} \sqrt{n+1} \frac{J_{n+1}(2\pi k)}{k} \Theta^m(\phi), \quad (14)$$

Donde  $j^2 = -1$ ,  $J_n$  es el n-ésimo orden de la función Bessel de primera clase. Estas funciones también cumplen la condición de ortogonalidad implícita en las funciones Bessel.

### 3. MÉTODO

El análisis que se realizó, se hizo a partir de las siguientes consideraciones. La función pupila es definida en un radio unitario, de tal forma que no se considera el comportamiento de la reconstrucción con otro tipo de radios. Para la organización y ortonormalidad de los polinomios y sus respectivas transformadas, se implementó el estándar ANSI Z80.28-2004 para la representación del frente de onda. Para efectos de la comparación de los resultados, se normalizó tanto las deformaciones de la superficie al igual que el RMS del frente de onda.

A partir de la triangulación de Delaunay de los nodos de deformación provenientes de un estudio FEM, se obtuvo la superficie discreta con la que el frente de onda fue reconstruido, usando la definición de los descrita en (3) con un número de polinomios Zernike igual a 150, para todos los casos evaluados. Para determinar los coeficientes de expansión, se resolvió, para cada elemento de la matriz de pendientes, el sistema matricial (Porter, 2008) definido en (15), a partir del método de la descomposición en valores singulares (SVD):

$$S = Zc, \quad (15)$$

Donde  $S$  es el vector de pendientes,  $Z$  es la matriz de derivadas de los polinomios Zernike,  $c$  es el vector de coeficientes de expansión.

Implementando la pseudo inversa  $Z^\dagger$ , usando el SVD, se calcularon los valores de los coeficientes de expansión Zernike. Con el vector de coeficientes e implementando la suma ponderada de polinomios, se realizó la reconstrucción del frente de onda con la exclusión de los términos piston y los tilts. Con la matriz del frente de onda reconstruido, se realizó un análisis del RMS de la desviación de la superficie respecto a la original, definido como:

$$RMSD = \sqrt{\frac{\sum_{\rho=0}^1 \sum_{\theta=0}^{2\pi} (W(\rho, \theta) - W_R(\rho, \theta))^2}{M}}, \quad (16)$$

Donde  $W(\rho, \theta)$  es el frente de onda obtenido a partir de la triangulación y  $W_R(\rho, \theta)$  es el frente de onda reconstruido.

El RMS del error del frente de onda respecto a uno ideal, se calculó a partir de la relación:

$$RMS_{WFE} = \sqrt{\frac{\iint W(\rho, \theta)^2 \rho d\rho d\theta}{\iint \rho d\rho d\theta}} \quad (17)$$

Con los coeficientes obtenidos, se analizaron las características de las aberraciones más relevantes sobre el sistema óptico, determinando el coeficiente de mayor peso y asociándolo al número polinomial.

Implementando el método de la transformada de Fourier para los polinomios Zernike, a partir de la Transformada de Fourier discreta se obtiene a  $U_i(k, \phi)$ . Ésta misma transformación fue implementada en el vector de las pendientes del frente de onda, S, para obtener el vector de los coeficientes de expansión,  $a(k, \phi)$  de Fourier.

Resolviendo el sistema en (12), calculando la conjugada de  $U_i(k, \phi)$  se logró obtener los coeficientes de expansión Zernike. Implementando éste vector, se realizó la reconstrucción del frente de onda sin la consideración de los términos piston o tilt. Para el frente de onda obtenido, el análisis del RMS fue realizado para la comparación con Zernike.

#### 4. RESULTADOS Y COMPARACIÓN

Tras la obtención de la superficie modelada con FEM, se realizó la reconstrucción a partir de los polinomios de Zernike, obtenido el frente de onda presentado en la [Fig. 1](#):

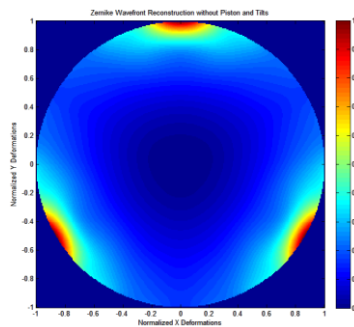


Fig. 1. Superficie reconstruida con los nodos extraídos de elementos finitos.

Las zonas del RMSD normalizado, se presenta en la [Fig. 2](#), donde las zonas de mayor tonalidad, correspondiente a los emplazamientos de sujeción, presentan el mayor error.

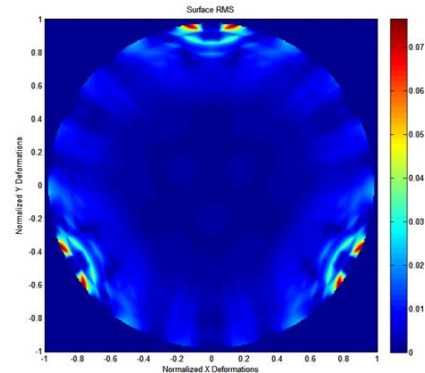


Fig. 2. Zonas del RMSD de la reconstrucción

Tras un análisis del RMS respecto a un frente de onda referencial plano, se obtiene que la superficie modelada por FEM, posee un valor de 0.219306, y la reconstrucción respecto al mismo frente de onda referencial, presenta un valor de 0.226139. La desviación promedio entre las superficies reconstruida y modela en FEM, correspondió a un 0.95%, evidenciando una reconstrucción adecuada.

Dentro de los primeros diez polinomios utilizados, aparecen los mayores pesos localizados en el polinomio 10, contribuyendo a un astigmatismo secundario; que es una aberración de cuarto orden. Como contribución secundaria, el polinomio 5 presenta una aberración secundaria correspondiente a un astigmatismo de  $0^\circ - 90^\circ$ .

Como caso evaluativo del método, se utilizó una superficie simulada [\[Ver Fig. 3a\]](#), en la que presenta una topografía que incluye picos y valles en las zonas centrales. Su reconstrucción [\[Ver Fig. 3b\]](#), a través de los polinomios de Zernike, presenta variaciones, particularmente en las zonas más distantes en la pupila.

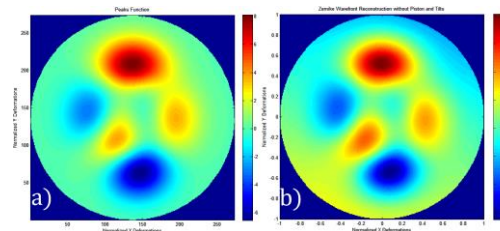


Fig. 3. Superficie simulada a) y reconstrucción con Zernike b).



A partir de la evaluación de los errores en la reconstrucción, la desviación promedio es del 7.59%. Las zonas de mayor desviación se localizan en la parte meridional y septentrional [Ver Fig. 4].

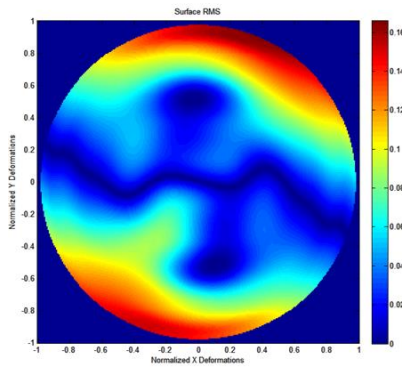


Fig. 4. Zonas del RMSD de la reconstrucción.

Utilizando la bidireccionalidad descrita en (13) y con la transformada discreta de Fourier (FFT), la reconstrucción modal del frente de onda se presenta en la Fig.5.

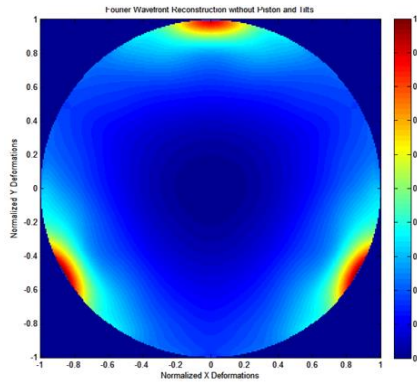


Fig. 5. Reconstrucción Fourier de la superficie modelada en FEM.

Tras el análisis del RMS respecto a un frente de onda referencial plano con la reconstrucción, se obtuvo un valor de 0.228870. La desviación promedio entre las superficies reconstruida con Fourier y modela en FEM, correspondió a un 2.18%, manteniendo características similares a la topografía modelada, donde la desviación mayor, nuevamente se presentan en los puntos de sujeción. En la Fig. 6, se presenta las zonas del RMSD de la superficie reconstruida con Fourier.

De manera análoga, con la superficie utilizada para evaluar el método con Zernike, fue implementado con la reconstrucción de Fourier, [Ver Fig. 7a] donde se observa un comportamiento de la topografía similar al obtenido en la Fig.3b y

las desviaciones [Ver Fig. 7b], mayores en la zona meridional y septentrional. El RMSD es del 7.58%, cercano al obtenido con Zernike.

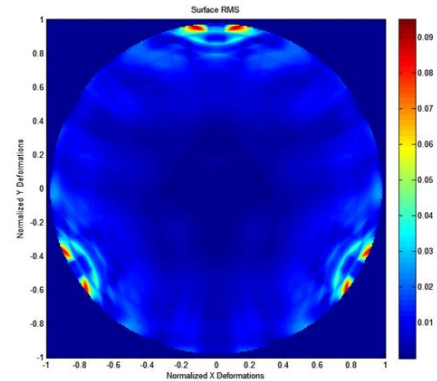


Fig. 6. Zonas del RMSD de la reconstrucción con Fourier.

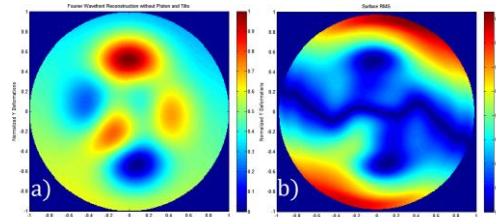


Fig. 7. Superficie simulada a) y reconstrucción con Fourier b).

Comparando el espectro de los pesos ponderados entre ambos métodos [Ver Fig. 8], se observa que las contribuciones de los pesos más relevantes tienen la misma magnitud y el mismo comportamiento. Sin embargo, las contribuciones menores presentan variaciones que se atribuyen a errores cómputo, debido a los procesos de discretización.

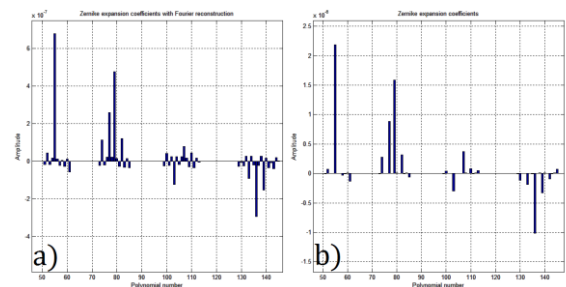


Fig. 8. Espectros de pesos ponderados a partir del polinomio 50, a) Fourier y b) Zernike

Comparando la eficiencia computacional entre ambos métodos [Ver Fig. 9], aumentando el número de polinomios (Cada punto equivale a 5 polinomios), el tiempo de cómputo aumenta y el

error de desviación disminuye de manera asintótica.

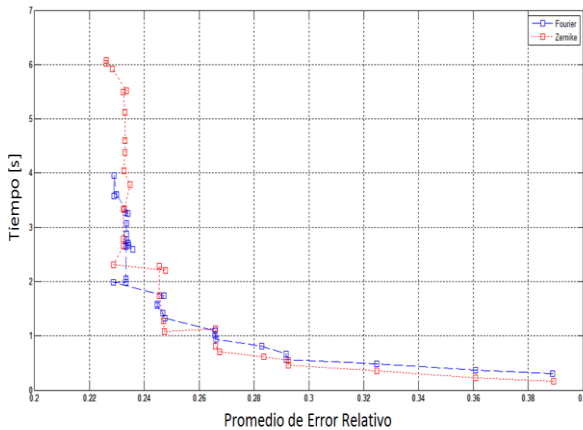


Fig. 9. Zonas del RMSD de la reconstrucción.

## 5. CONCLUSIONES

Con la comparación se obtuvo, que la precisión con Fourier es mucho menor respecto a Zernike, mientras Fourier presenta un gasto computacional 1.71 veces menor. La corrección del frente de onda por el aumento de polinomios para ambas bases, poseen el mismo comportamiento para el RMS de aberración de onda. Para superficies pocos suaves, la topografía de la reconstrucción, pierde precisión por la pronunciación de los picos y valles, por la frecuencia azimutal asociada en las deformaciones de orden superior. Con los resultados obtenidos, el siguiente paso consistiría en implementar un sistema activo para observaciones astrofísicas donde la atmosfera produzca cambios en el frente de onda de manera activa, utilizando cómputo en paralelo.

## REFERENCIAS

Bonet, J. A. (1999). High spatial resolution imaging in solar physics. *Motions in the solar atmosphere. Astrophysics and space science library.*, **239**, 1-34.

Dai, Guang-Ming (2006a). Zernike aberration coefficients transformed to and from Fourier series coefficients for wavefront representation. *Optics letters*, **31** (4), 501-503.

Dai, Guang-Ming (2006b). Comparison of wavefront reconstructions with Zernike polynomials and Fourier transforms. *Journal of refractive surgery*, (**32**), 943-948.

Dai, Guang-Ming (2008). *Wavefront Optics for Vision Correction*, capítulo 3. SPIE Press. Fremont, California.

Doyle, K., Genberg, V., & Michels, G. (2002). *Integrated Optomechanical Analysis*. Bellingham: SPIE Press.

Fricker, Paul (2008). Analyzing LASIK optical data using Zernike functions. *Matlab Digest.*, **91544V00**, 1-6.

Noll, Robert J (1976). Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, **66** (3), 207-211.

Porter, Jason, Queener, Hope M., Lin, Julianna E., Thorn, Karen y Awwal, Abdul (2008). *Adaptive Optics for Vision Science - principles, practices, design, and applications*. Wiley-Interscience. United States of America.

Sanchez-Blanco, E., & Bello, D. (2007). *Technical Note: GTCOA. System. Wavefront sensor. ADR. La Laguna, Tenerife*.

## SOBRE LOS AUTORES

### Juan José Cadavid

Estudiante de Ingeniería Física de la Universidad EAFIT. Área de interés investigativo: Óptica computacional, Instrumentación óptica.

### René Restrepo

Profesor e ingeniero mecánico de la Universidad EAFIT, con maestría en física e informática de la Universidad de La Laguna, Tenerife, España. Candidato a Doctor del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA) y la Universidad Complutense de Madrid. Área de interés investigativo: Óptica aplicada en sistema de precisión.

### Jairo Coy

Veterinario y zootecnista de la Universidad Agraria de Colombia. Estudiante en especialización en procesos biotecnológicos y químicos y estudiante de Ingeniería Física de la Universidad EAFIT. Área de interés investigativo: Óptica computacional, Instrumentación óptica.

### Esteban Toro

Estudiante de Ingeniería Física de la Universidad EAFIT.

### Santiago Alarcón

Estudiante de Ingeniería Física de la Universidad EAFIT.