

# ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE ALGUNAS TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS USADAS EN LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES

JUAN DE DIOS VÉLEZ MUÑOZ



UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
MEDELLÍN-COLOMBIA  
2018

# ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE ALGUNAS TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS USADAS EN LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES

JUAN DE DIOS VÉLEZ MUÑOZ

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ciencias Naturales y  
Matemáticas

Asesor

JOHNSON GARZÓN REYES

Doctor en Ciencias Naturales-Física



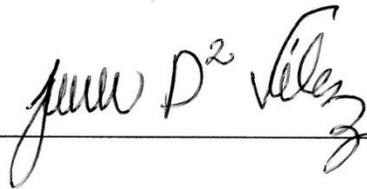
UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
MEDELLÍN-COLOMBIA  
2018

13 de diciembre de 2018

Yo, Juan de Dios Vélez Muñoz,

“Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad” Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

Firma



A handwritten signature in black ink, written over a horizontal line. The signature is cursive and reads "Juan D<sup>o</sup> Vélez Muñoz".

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa sus agradecimientos a:

El Supremo Ser, por todas las bondades recibidas.

A mi familia, por el constante apoyo, por ser el motor de todos mis proyectos.

A la Universidad Pontificia Bolivariana, por acogerme y fortalecer mis conocimientos.

Al Prof. Dr. Johnson Garzón Reyes, director de mi trabajo de grado por su sabia dirección.

## RESUMEN

### TÍTULO:

ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE ALGUNAS TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS USADAS EN LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES\*

### AUTOR:

Juan De Dios Vélez Muñoz\*\*

### PALABRAS CLAVE:

Compresión de imágenes, Transformada de Fourier, Transformada de Walsh-Hadamard, Transformada del Coseno, Transformada Wavelet.

### DESCRIPCIÓN:

El proceso de compresión de imágenes consiste en optimizar la cantidad de datos usados para la representación de una imagen, sin que este procedimiento implique pérdidas significativas o degradaciones suficientes para dañar la imagen dada. Esto permite que el almacenamiento y la transmisión de la información sean eficientes y por tanto el manejo en general. Para comprimir una imagen se usan diferentes técnicas, algoritmos, herramientas computacionales y transformadas matemáticas, para lo cual en el presente trabajo se realiza un análisis comparativo entre las transformadas de Fourier, Walsh-Hadamard, coseno y wavelet, las cuales corresponden a las transformadas más comunes usadas para la compresión de imágenes. El objetivo principal de este análisis comparativo, es el identificar las ventajas y limitaciones que poseen estas transformadas en el proceso de compresión de imágenes, por tal razón, se realiza una descripción de los fundamentos matemáticos de cada transformada, una implementación computacional mediante el programa MATLAB y se propone un parámetro de comparación en términos de eficiencia. Se espera que este análisis pueda aportar elementos diferenciadores al momento de implementar dichas transformadas en la compresión de imágenes, del mismo modo facilite el entendimiento del desempeño de cada transformada en términos teóricos y prácticos.

---

\* Trabajo de grado de maestría

\*\* Director: Prof.Dr. Johnson Garzón Reyes, Grupo de Óptica y Espectroscopía, Centro de Ciencia Básica, Escuela de Ingeniería, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia.

## SUMMARY

### TITLE:

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN SOME MATHEMATICAL TRANSFORMATIONS USED IN THE COMPRESSION OF IMAGES\*

### AUTHOR:

Juan De Dios Vélez Muñoz\*\*

### KEYWORDS:

Compression of images, Fourier transform, Walsh-Hadamard transform, Cosine transform, Wavelet transform.

### DESCRIPTION

The process of image compression consists of optimizing the amount of data used for the representation of an image, without this procedure implying significant losses or degradations sufficient to damage the given image. This allows the storage and transmission of information to be efficient and therefore management in general. To compress an image different techniques, algorithms, computational tools and mathematical transformations are used, for which in the present work a comparative analysis between the Fourier, Walsh-Hadamard, cosine and wavelet transforms is carried out, which correspond to the most common transforms used for image compression. The main objective of this comparative analysis is to identify the advantages and limitations that these transformations have in the process of image compression, for this reason, a description of the mathematical foundations of each transformation is made, a computational implementation through the MATLAB program and a comparison parameter in terms of efficiency is proposed. It is expected that this analysis can provide differentiating elements when implementing these transformations in the compression of images, In the same way, it facilitates the understanding of the performance of each transformation in theoretical and practical terms.

---

\* Master's degree work

\*\* Director: Prof. Dr. Johnson Garzón Reyes, Optics and spectroscopy group, Basic Science Center, Engineering School, Bolivarian Pontifical University, Medellin, Colombia.

## Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN GENERAL.....	11
CAPITULO 1 .....	13
ACERCAMIENTO TEÓRICO A LAS TRANSFORMADAS BÁSICAS DE LA IMAGEN.....	13
1.1. Transformadas matemáticas .....	13
1.1.1. Propiedades del espacio vectorial .....	13
1.1.2. Condiciones para obtener una transformación lineal .....	15
1.2. Definición de transformada integral unidimensional .....	16
1.2.1. Definición y propiedades de los núcleos de las transformaciones .....	17
1.3. Transformadas bidimensionales.....	18
1.4. La transformada de Fourier .....	19
1.4.1. Propiedades algebraicas de la Transformada de Fourier .....	20
1.4.2. Propiedades analíticas de la Transformada de Fourier .....	21
1.5. La transformada rápida de Fourier (TFF) .....	22
1.5.1 Propiedades de la transformada rápida de Fourier .....	22
1.5.2. Algunas aplicaciones de la transformada de Fourier .....	26
1.6. La transformada discreta coseno unidimensional y bidimensional.....	27
1.6.1. Propiedades de la TDC .....	29
1.6.2. Formas de implementar el algoritmo de la transformada discreta de coseno .....	31
1.7. Transformada de Hadamard .....	33
1.7.1. Propiedades de la Transformada de Hadamard .....	34
1.8. Transformada de Walsh.....	34
1.8.1. Propiedades de la Transformada de Walsh .....	37
1.9. Transformada Wavelet: Transformada de Haar .....	37
1.9.1. Wavelet en una dimensión .....	38
1.9.2. Funciones bases para la wavelet de Haar unidimensional .....	40
1.9.3. Transformada wavelet de Haar bidimensional.....	44
1.9.4. Algunas aplicaciones de la transformada wavelet.....	46
CAPITULO 2 .....	48
IMÁGENES DIGITALES .....	48

2.1. Aspectos generales sobre las imágenes.....	49
2.2. Geometría de las imágenes.....	50
2.3. Aspectos generales de las imágenes digitales .....	52
2.4. Muestreo y cuantificación .....	53
2.5. Relaciones básicas entre píxeles .....	54
2.5.1. Relación de adyacencia .....	54
2.5.2. Relación de vecindad .....	55
2.5.3. Relación de conectividad .....	56
2.5.4. Relación de distancia .....	56
2.5.5. Relaciones lógico-aritméticas .....	57
2.6. Aplicaciones del procesamiento digital de imágenes.....	57
2.7. Aspectos generales del filtro digital.....	58
2.8. Filtros en el dominio espacial y en dominio de la frecuencia. ....	59
2.9. Filtros pasaaltos, pasabajos y pasabandas.....	60
2.10. Compresión de imágenes.....	60
2.11. Formas de medir la eficiencia de la compresión. ....	61
CAPITULO 3 .....	63
IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL.....	63
3.1 Compresión y filtrado .....	65
CAPITULO 4 .....	72
ANÁLISIS COMPARATIVO, RESULTADOS OBTENIDOS Y CONCLUSIÓN. ....	72
4.1. Análisis comparativo: señal a ruido (SNR) y error cuadrático medio ERMS. ....	73
4.2. Análisis comparativo: Factor de compresión.....	75
4.3. Análisis cualitativo: comparación de la calidad de la imagen resultante con respecto a la imagen original. ....	76
Discusión de resultados .....	78
Globalización de la eficiencia de las métricas.....	80
Conclusiones generales.....	82
Referencias.....	85

## Lista de tablas

<i>Tabla 1. Resultados obtenidos en la implementación computacional: Razón Señal a Ruido (SNR).</i> .....	73
<i>Tabla 2. Resultados obtenidos en la implementación computacional: Factor de compresión (FC).</i> .....	75
<i>Tabla 3. Orden en la eficiencia de cada Transformada con respecto a la calidad de la imagen resultante.</i> .....	76
<i>Tabla 4. Globalización de la eficiencia de las métricas.</i> .....	81
<i>Tabla 5. Resultados globales de eficiencia.</i> .....	81

## Lista de figuras

<i>Figura 1. Imágenes bases de una DCT- 2D.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2. Funciones bases caja de la transformada wavelet de Haar.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 3. Wavelet de Haar para <math>W_1</math>.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 4. De escena 3-D a la imagen 2-D.....</i>	<i>51</i>
<i>Figura 5. Representación espacial de una imagen. ....</i>	<i>53</i>
<i>Figura 6. Relación de vecindad.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 7. Transformada de Fourier, filtros pasa bajo, pasa alto.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 8. Compresión usando la Transformada de Fourier. Tasa de compresion 1:4, 1:16 y 1:64.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 9. Transformada Discreta de Coseno, filtros pasa bajo, pasa alto.....</i>	<i>67</i>
<i>Figura 10. Compresión usando la Transformada Discreta de Coseno. Tasa de compresion 1:4, 1:16 y 1:64. ....</i>	<i>68</i>
<i>Figura 11. Transformada de Walsh-Hadamard, filtros pasa bajo, pasa alto. ....</i>	<i>69</i>
<i>Figura 12. Compresión usando la Transformada de Walsh-Hadamard. Tasa de compresion 1:4, 1:16 y 1:64. ....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 13. Compresión usando la Transformada Wavelet de Haar 2D al nivel-1. .</i>	<i>71</i>

## INTRODUCCIÓN GENERAL

El análisis de señales y la compresión de imágenes ocupan un espacio sobresaliente en el desarrollo de la ciencia y la tecnología, por este motivo es importante hacer una revisión teórica sobre aquellas herramientas que optimizan tales procesos. En este trabajo se realiza un estudio comparativo, sobre las transformadas matemáticas que son consideradas básicas para comprimir una imagen, las cuales son Transformada de Fourier, Transformada discreta de coseno, Transformada de Walsh-Hadamard y la Transformada wavelet de Haar 2D al nivel 1, buscando medir la eficiencia de cada una en dicho proceso.

Identificar la cantidad de datos que se usan para representar un determinado volumen de información de una imagen, es uno de los parámetros más importantes en el proceso de compresión de una imagen porque en este proceso se busca facilitar el tratamiento, la transmisión y el almacenamiento de las imágenes. La aplicación de cada transformada en un proceso de compresión presenta ventajas y limitaciones y la razón entre ellas hará posible la aplicación en un contexto de almacenamiento de datos o en un contexto que involucre representaciones físicas de una señal. No todas las transformadas utilizadas en la compresión de imágenes, pueden ser utilizadas para la descripción de un fenómeno físico.

La interpretación de una transformada requiere de un análisis detallado del dominio y de la representación de las variables de entrada y de salida una vez se aplique la transformada, dicha aplicación dependerá del relacionamiento que existe entre las variables de entrada y las variables de salida en un contexto definido, de ahí que sea necesario un detallado estudio sobre la estructura de cada transformada matemática y su implicación en el proceso de compresión de imágenes.

La compresión de imágenes puede darse de dos maneras diferentes: con y sin pérdida de información. La compresión con pérdida admite la eliminación de cierta parte de la información a cambio de mayor capacidad de almacenamiento, en la eliminación sin pérdida no se admite que la información sufra pérdidas. En este

trabajo se busca medir qué tan eficiente es cada transformada en los procesos de compresión y filtrado, observando cómo afecta la reducción de coeficientes a diferentes tasas la compresión de una imagen y cómo se ve afectada la calidad de la misma. Por lo anterior, este estudio se desarrolla en cuatro capítulos a saber: en el capítulo uno se hace una descripción teórica de los fundamentos matemáticos de cada transformada, teniendo en cuenta la propia construcción del concepto de transformada, las propiedades y condiciones algebraicas que involucran tal construcción y las características prácticas de cada una.

En el capítulo 2, se realiza un acercamiento conceptual a las imágenes digitales, sus componentes y las relaciones que hay entre ellos, la geometría y la formación de las imágenes, así como una descripción del procesamiento digital de imágenes, específicamente la compresión y el filtrado de las mismas. Finalmente se presentan tres métricas para valorar la eficiencia de cada transformada matemática cuando se usan para la compresión de una imagen, las cuales son: Proporción señal a ruido (SNR), tasa de compresión (TC) y factor de compresión (FC),

En el capítulo 3, se usa un software matemático llamado Matlab, el cual permitirá desarrollar la implementación computacional de cada transformada en el proceso de compresión de una imagen. Se realizará el proceso de filtrado y compresión a diferentes tasas, usando para tal fin un código común de ejecución en el mencionado software. Es necesario aclarar, que para implementar computacionalmente la transformada wavelet de Haar 2D al nivel 1, se usará el interfaz gráfico de usuario que ofrece el toolbox de Matlab, en donde es posible realizar el proceso de manera directa.

Finalmente en el capítulo 4, se realiza un análisis comparativo entre las imágenes obtenidas en el proceso de compresión en términos de eficiencia, usando las métricas mencionadas, determinando cuál transformada es más óptima. Los valores para (FC) y (SNR) se obtienen de manera directa mediante Matlab. Para comparar las tasas de compresión (TC), se usa un análisis cualitativo de la calidad de las imágenes obtenidas mediante la compresión con respecto a la imagen original.

## CAPITULO 1

### ACERCAMIENTO TEÓRICO A LAS TRANSFORMADAS BÁSICAS DE LA IMAGEN

#### 1.1. Transformadas matemáticas

El concepto de aplicación en matemáticas es el más elemental para realizar un acercamiento a la definición de transformada. Dados dos conjuntos funcionales  $W$  y  $V$ , es decir, que sus elementos pertenezcan a un espacio funcional (espacio vectorial que lleva funciones de  $W$  a  $V$ ), se define una aplicación (también conocida como función) entre ellos sí se cumple que:

$$\forall w \in W, \exists v \in V / f(w) = v \quad (1)$$

Ahora bien, para que una aplicación alcance la categoría de transformada debe cumplir las propiedades del espacio vectorial que se definen sobre un conjunto funcional  $W$  y bajo dos operaciones en dicho conjunto. La operación interna  $\oplus$  llamada suma, actúa en los elementos de  $W$  y la operación externa  $\otimes$  conocida como producto por un escalar, que relaciona a  $W$  con otro conjunto con estructura de campo, también llamado cuerpo, (estructura algebraica en la cual las operaciones mencionadas pueden desarrollarse) de modo que se satisfacen las propiedades que se relacionan a continuación:

##### 1.1.1. Propiedades del espacio vectorial

**Propiedad de cerradura en la operación  $\oplus$ .**

$$si \forall u, w \in W \rightarrow u \oplus w \in W \quad (2)$$

**Propiedad conmutativa en la operación  $\oplus$ .**

$$u \oplus w = w \oplus u, \forall u, w \in W \quad (3)$$

**Propiedad asociativa en la operación  $\oplus$ .**

$$u \oplus (w \oplus v) = (u \oplus w) \oplus v, \forall u, w, v \in W \quad (4)$$

**Elemento neutro en la operación  $\oplus$ .**

$$\exists 0 \in W / u \oplus 0 = 0 \oplus u = u, \forall u \in W \quad (5)$$

**Elemento opuesto en la operación  $\oplus$ .**

$$\forall u \in W, \exists -u \in W / u \oplus -u = 0 \quad (6)$$

**Propiedad de cerradura en la operación  $\otimes$ .**

$$\text{si } \forall u \in W, c \in R \rightarrow c \otimes u \in W \quad (7)$$

**Propiedad distributiva en la operación  $\otimes$ .**

$$c \otimes (u \oplus w) = c \otimes u \oplus c \otimes w, \forall c \in R, \forall u, w \in W \quad (8)$$

**Propiedad distributiva de la operación  $\otimes$  respecto de la operación  $\oplus$ .**

$$(c \oplus d) \otimes u = c \otimes u \oplus d \otimes u, \forall c, d \in R, \forall u \in W \quad (9)$$

**Propiedad distributiva de la operación  $\otimes$  .**

$$c \otimes (d \otimes u) = cd \otimes u, \forall c, d \in R, \forall u \in W \quad (10)$$

**Elemento neutro en la operación  $\otimes$ .**

$$1 \otimes u = u, \forall u \in W \quad (11)$$

Se concluye que  $W$  es cerrado bajo la suma vectorial  $\oplus$  y bajo la multiplicación por escalares  $\otimes$ . Si se admite que los escalares incluidos anteriormente sean complejos, entonces se tiene un espacio vectorial complejo.

### 1.1.2. Condiciones para obtener una transformación lineal

Otra consideración importante que se debe tener en cuenta para que una aplicación sea una transformada, es que la aplicación que relaciona los dos conjuntos funcionales debe ser una transformación lineal, esto es, que cumpla las condiciones de aditividad y de homogeneidad descritas a continuación:

#### Condición de aditividad

$$f(u + vu') = f(u) + wf(u'), \forall u, u' \in V \quad (12)$$

#### Condición de homogeneidad

$$f(\lambda * vu) = \lambda * wf(u), \forall \lambda \in K, \forall u \in V \quad (13)$$

Cumpléndose en los dos  $k$ -espacios vectoriales,  $(W, w \otimes, w \oplus)$  y  $(V, v \otimes, v \oplus)$ .

De lo anterior se puede decir que una transformación lineal  $L$ , cambia a  $W$  en  $V$ . De acuerdo a Kolman y Hill (2006), "cuando se da el caso en el que  $W = V$ , entonces la transformación se conoce como operador lineal sobre  $W$ ", esto es,

$$L: W \rightarrow W \quad (14)$$

La aplicación lineal además debe respetar la estructura topológica de  $K$ -espacio vectorial, esto significa que debe existir un isomorfismo entre los dos espacios  $W$ ,  $V$ , tal que la mencionada aplicación lineal sea biyectiva. Más precisamente si  $L$ , es la aplicación lineal entonces es necesario que  $L$  y  $L^{-1}$  sean continuas, es decir,

$$L: W \rightarrow V/L, L^{-1} \quad (15)$$

Garantizándose de esta manera la conservación de la estructura topológica. Otra forma de sustentar dicha conservación es comprobando la existencia de dos constantes mayores que cero  $m$  y  $M$ , tales que:

$$m\|x\| \leq \|L(x)\| \leq M\|x\|, x \in W \quad (16)$$

Otra condición notoria tiene que ver con la relación que existe entre la transformada y el fenómeno (generalmente físico) al cual se está vinculando, por ejemplo, cuando las funciones que se van a “transformar” representan alguna manifestación del entorno físico, la transformada permite asociar alguna propiedad que está vinculada a ese hecho físico, de manera notoria. Garay (1998), clarifica esta asociación con un ejemplo, usando para ello la derivación. Se nota de manera inmediata que verifica los criterios matemáticos para ser una transformada, pero además, se observa que cuando se implementa sobre la función de interés, (que mide alguna magnitud que generalmente varía con el tiempo) la derivada, es decir, la transformada de la función de interés, permite entender que tan rápido o lento es el cambio.

## 1.2. Definición de transformada integral unidimensional

Dentro de las aplicaciones o transformaciones lineales se encuentran las transformaciones integrales, las cuales son funciones  $f(x)$ , definidas en un intervalo  $I$ , que puede ser finito o infinito,  $a \leq x \leq b$ , , teniendo una función fija  $K(s, x)$  de la variable  $x$  y un parámetro  $s$ , se puede definir la transformada integral de la siguiente manera:

$$T[f(x)] = \int_a^b K(s, x)f(x)dx = F(s) \quad (17)$$

$F(s)$  es llamada transformada directa de la función  $f(x)$ ,  $K(s, x)$  es el subespacio vectorial de la transformación lineal, conocido como núcleo de la transformada, que se define formalmente a continuación.

### 1.2.1. Definición y propiedades de los núcleos de las transformaciones

Dados dos  $K$ -espacios vectoriales y la transformación lineal  $f: V \rightarrow W$ , se conoce como núcleo de  $f$  al conjunto formado por:

$$N(f) = \{v \in V / f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \quad (18)$$

El conocimiento de este subespacio permite determinar si  $f$  es inyectiva. En la expresión (17), el núcleo integral de la transformación es la función  $K(s, x)$ , y la transformación  $T$  es lineal para cualquier núcleo dado. Las transformadas admiten una transformada inversa, si la función núcleo integral de la misma, es semejante a la que tiene la transformada inicial, esto es:

$$T[f(x)]^{-1} = \int_a^b K^*(s, x)F(s)ds = f(x) \quad (19)$$

De acuerdo a Polyanin y Manchirov (2008), en la igualdad expuesta en (17), se deben cumplir ciertas propiedades en el núcleo, tales como:

#### Propiedad 1

El conjunto formado por  $N(f)$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

#### Propiedad 2

Si  $V'$  es un subespacio vectorial de  $V$ , entonces

$$V' = L(\{v_1, \dots, v_m\}) \rightarrow f(V') = L(\{f(v_1), \dots, f(v_m)\}) \quad (20)$$

De esta expresión se desprende que  $f(V')$  es un subespacio vectorial de  $W$ .

La manera en la que las transformadas integrales abordan un problema dado es descomponiendo la función de interés en sumas infinitas que tengan la forma  $K(s, x)$ , (que como ya se mencionó es la función fija conocida como núcleo integral de la transformación), de manera conveniente para resolver el problema.

Un aspecto muy útil que presentan es que cambian una función de entrada  $f(x)$  con una variable definida, en otra función de salida con variable diferente. Las transformadas integrales más usuales en matemáticas, ingeniería y ciencias naturales, son la transformada de Fourier, transformada de Laplace, de Hilbert, Coseno, Seno, de Hankel, wavelet, entre muchas otras, que permiten encontrar fácilmente la solución para un problema complejo.

### 1.3. Transformadas bidimensionales.

De la misma forma que una señal unidimensional es representada por una serie ortogonal de funciones base, también llamados núcleos, las imágenes (arreglos bidimensionales) se pueden representar mediante un conjunto discreto de funciones bases. Considérese la imagen  $u(m, n)$ , cuyo tamaño es  $M, N$  entonces se define la transformada bidimensional directa e inversa respectivamente:

$$v(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \cdot a_{kl}(m, n); 0 \leq k \leq M - 1; 0 \leq l \leq N - 1 \quad (21)$$

$$u(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k, l) \cdot a_{k,l}^*(m, n); 0 \leq m \leq M - 1; 0 \leq l \leq N - 1 \quad (22)$$

Donde los coeficientes  $a_{kl}$  son elementos de una matriz unitaria  $A$ , también conocida como matriz de transformación y representan como se vio en el caso unidimensional el núcleo de la transformada.

De las igualdades anteriores se puede concluir con que una señal o imagen en un dominio dado, por ejemplo, el dominio espacial puede ser representado en el dominio espectral (frecuencia) y viceversa. Así la imagen  $u(m, n)$ , se puede expresar en términos del dominio de la frecuencia  $(k, l)$ , mediante las variables  $(k, l)$ .

### 1.4. La transformada de Fourier

Sea  $f$  una función de variable real,  $f: R \rightarrow C$ , si  $f$  es absolutamente integrable (condición necesaria para garantizar la existencia de la transformada), esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad (23)$$

Entonces se define la transformada de Fourier de la función  $f$  para una variable,  $w \in R$ , así:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx, \text{ siempre que } f \in L^1(R) \quad (24)$$

Duoandikoetxea (2003) manifiesta que esta definición puede presentar otros aspectos de acuerdo a la preferencia de los autores. En ocasiones el exponente  $-ixw$  se escribe como  $-2\pi i x \xi$ , sin que esto represente problemas para el cálculo. Esta transformada realiza una descomposición de la función dada en componentes básicos, por tanto, las frecuencias discretas que forman una sucesión aparecen en un rango continuo de frecuencias, de modo que a cada frecuencia  $w$ , le corresponde un coeficiente  $\hat{f}(w)$ , siendo éste, un número complejo, cuyo módulo es la amplitud y su argumento es la fase. La descomposición de la función inicial  $f$  en componentes se conoce como análisis y al proceso de reconstruirla mediante inversión se conoce como síntesis o transformada inversa de Fourier y se define:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw \rightarrow \mathfrak{S}^{-1}[\hat{f}(w)] = f(x), \text{ si } \mathfrak{S}[f(x)] = \hat{f}(w) \quad (25)$$

A las funciones  $e^{-iwx}$ ,  $e^{iwx}$ , se les conoce como el núcleo de las transformadas, además de estar presentes en las dos, son conjugadas entre sí y dependientes del producto de las variables  $x, w$ . La transformada de Fourier está basada en estos núcleos los cuales son usados para describir el comportamiento de ondas, Weber y Arfken (2005).

### 1.4.1. Propiedades algebraicas de la Transformada de Fourier

#### Linealidad

La linealidad es una propiedad que garantiza que en la transformada de Fourier se cumple los criterios de aditividad y homogeneidad descritos en las ecuaciones (12) y (13), que se resumen mediante la expresión siguiente, sabiendo que  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \quad (26)$$

#### Conjugación

Es una propiedad referente a la simetría de la señal en el tiempo como la simetría de su transformada de Fourier en el dominio de las frecuencias. Se define formalmente como sigue:

$$\overline{(\hat{f})^\xi} = \widehat{\overline{f(-\xi)}} \quad (27)$$

#### Traslación

Un desplazamiento en la función que representa la señal (unidimensional) o matriz que representa la imagen (bidimensional), no afecta el módulo de la transformada de Fourier, esto es posible gracias a que:

$$\text{si } Thf(x) = f(x + h) \rightarrow (Thf)^\xi = \hat{f}(\xi)e^{2xiht} \quad (28)$$

#### Modulación

De acuerdo a Aristizábal y Ramírez (2006), en la multiplicación de una señal (función) por otra se busca hacer un escalado de una en la otra, proceso conocido como modulación en amplitud, cuando esta operación se lleva a cabo en el dominio de las frecuencias equivale a la convolución de las transformadas de Fourier de las señales. Matemáticamente,

$$\text{Si } g(x) = f(x)e^{2xihx} \rightarrow \hat{g}(\xi) = \left( T - h \hat{f} \right) (\xi) \quad (29)$$

### Dilatación y Rotación

Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ , se define  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , mediante la regla  $g(x) := f(\lambda x)$ , de modo que para cada  $\xi$  en  $\mathbb{R}$  se cumple:

$$g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x) \quad \lambda > 0 \rightarrow \widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda \xi) \quad (30)$$

La propiedad de rotación señala que si la imagen se rota un ángulo  $\varphi$ , la transformada de Fourier de esa imagen también rota un ángulo  $\varphi$ . Haciendo uso de coordenadas polares se debe satisfacer la siguiente proposición:

$$\text{si } f(r, \theta) \leftrightarrow F(w, \alpha) \text{ entonces } f(r, \theta + \varphi) \leftrightarrow F(w, \theta + \varphi)$$

De la misma manera también satisface las siguientes propiedades analíticas:

#### 1.4.2. Propiedades analíticas de la Transformada de Fourier

Si  $f$  es una función uniformemente continua entonces se debe cumplir:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\| \quad (31)$$

Además si  $f$  y  $f'$  son integrables entonces:

$$(f')^\xi = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi) \quad (32)$$

Puesto que  $x, f(x)$  es integrable y  $\widehat{f}$  es derivable entonces se tiene que:

$$(-2\pi i x f)^\xi = \left( \widehat{f} \right)'(\xi) \quad (33)$$

La transformada cumple igualmente el lema de Riemman-Lebesgue, el cual señala que la transformada de Fourier de  $\widehat{f}$  tiende a cero cuando  $\xi$  tiende a infinito, esto es,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0 \quad (34)$$

Del mismo modo se satisface que si  $f$  y  $g$  son integrables, entonces:

$$\int f \hat{g} = \int \hat{f} g \quad (35)$$

### 1.5. La transformada rápida de Fourier (TFF)

Es un algoritmo que elimina gran parte de los cálculos repetidos que tiene que realizar la transformada discreta de Fourier, optimizando con este método el tiempo y reduciendo significativamente el costo de dicho proceso, Schmidt (2013).

Considérese la definición de Transformada de Fourier en forma discreta (TDF) de la siguiente manera:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (36)$$

Con  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , donde  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ .

Para realizar cálculos directos se requieren  $N$  productos complejos y  $N-1$  adiciones complejas para cada  $k$ , de modo que el cálculo directo tiene el orden  $O(N^2)$ . Cuando  $N$  es suficientemente grande, la TDF no es eficiente, por tanto, se utiliza la TFF, que resuelve el problema mediante la descomposición iterativa de TDF más simples. Utiliza para tal fin las siguientes propiedades teniendo en cuenta que  $N$  es potencia de 2.

#### 1.5.1 Propiedades de la transformada rápida de Fourier

**Propiedad 1** (Simetría conjugada compleja)

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad (37)$$

**Propiedad 2** (Periodicidad en  $n, k$ )

$$W_N^{kn} = W_N^{k(N+n)} = W_N^{(k+N)n} \quad (38)$$

La TFF, divide la TDF a calcular en dos transformadas discretas de Fourier, de acuerdo a la paridad de los términos:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \quad (39)$$

con  $r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \quad (40)$$

Esto permite expresar la TDF dada de N muestras, en la suma de dos TDF de N/2 muestras, obteniendo finalmente:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] (W_{\frac{N}{2}})^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] (W_{\frac{N}{2}})^{rk} \quad (41)$$

De esa manera se puede seguir realizando subdivisiones obteniendo dos pares de transformadas discretas de Fourier de  $\frac{N}{4}$  muestras, y siguiendo de esa forma se obtienen  $p = \log_2 N$  divisiones.

### Propiedad 3 (Separabilidad)

Permite la obtención de la secuencia original o de su transformada a partir de dos pasos usando la transformada de Fourier unidimensional.

De esta manera se puede llegar a  $X[k, l]$ , de la siguiente manera:

$$X[k, l] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} X[ml] W_N^{kn}, \text{ con } X[ml] = \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \cdot W_N^{kn} \quad (42)$$

**Propiedad 4** (Traslación)

$$u(m, n)W\left[\frac{n(k_0m + l_0n)}{N}\right] \leftrightarrow F(k - k_0, l - l_0) \quad (43)$$

$$u(m - m_0, n - n_0) \leftrightarrow F(k, l) \left[\frac{n(m_0k + n_0l)}{N}\right] \quad (44)$$

El movimiento en  $u(m, n)$  no altera el módulo de su transformada, Fiallo (2002).

**Propiedad 5** (Distributividad y escalado)

$$F[au_1(m, n) + bu_2(m, n)] = aF[u_1(m, n)] + bF[u_2(m, n)] \quad (45)$$

$$F[u_1(m, n)u_2(m, n)] \neq F[u_1(m, n)]AF[u_2(m, n)] \quad (46)$$

La transformada de Fourier y su inversa son distributivas con respecto de la suma pero no con respecto del producto. Además si  $a, b$  son dos escalares se verifica que:

$$au(m, n) \leftrightarrow aF(k, l); u(am, bn) \leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{k}{a}, \frac{l}{b}\right) \quad (47)$$

**Propiedad 6** (Valor medio)

$$\bar{u}(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \quad (48)$$

Haciendo uso de la expresión correspondiente a  $F(0,0)$ :

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \quad (49)$$

Por tanto, las expresiones se relacionan mediante:

$$\bar{u}(m, n) = \frac{1}{N} F(0,0) \quad (50)$$

**Propiedad 7** (Convolución y correlación)

$$f(m, n) * g(m, n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(i, j) g(m - i, n - j) \quad (51)$$

Cuya transformada es:

$$f(m, n) * g(m, n) \leftrightarrow F(k, l) \cdot G(k, l); \quad f(m, n) \cdot g(m, n) \leftrightarrow F(k, l) * G(k, l) \quad (52)$$

De lo anterior se puede concluir que la transformada de Fourier convierte la operación de convolución en una operación más simple como lo es el producto de funciones. Esta característica es ampliamente fructífera en términos de aplicabilidad de la TF.

La correlación de dos funciones  $f(m, n)$  y  $g(m, n)$  por su parte posee la siguiente definición:

$$f(m, n) \circ g(m, n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f^*(i, j) g(m + i, n + j) \quad (53)$$

La transformada de Fourier de la correlación es:

$$f(m, n) \circ g(m, n) \leftrightarrow F^*(k, l) \circ G(k, l); \quad f^*(m, n) \cdot g(m, n) \leftrightarrow F(m, n) \circ G(m, n) \quad (54)$$

Seguendo a Fiallo (2002), uno de los principales aportes de la correlación en el procesamiento digital de imágenes tiene que ver con el reconocimiento de patrones, en donde el inconveniente consiste en encontrar el mayor parecido entre una imagen desconocida y un conjunto de imágenes conocidas.

De la Fraga (2001) manifiesta que una de las razones que hacen tan importante al análisis de Fourier para el procesamiento digital de señales, es el hecho de poseer este algoritmo que le permite obtener eficientemente la TDF.

En conclusión, se puede entender que la transformada de Fourier es un lenguaje alternativo para analizar funciones en el dominio de la frecuencia de una función, o en el dominio espacial-temporal, y al ser reversible, garantiza que puede transformarse en cualquier dominio dado el otro. En palabras de Garay (1998) "estamos hablando de ambas caras de una misma moneda", usando la teoría de señales en su discurso, manifiesta que tanto el espectro como la función original poseen toda la información sobre la señal y se usa una u otra según sea conveniente.

Es importante tener en cuenta las propiedades que posee a la hora de abordar un problema dado ya que son ellas las que garantizan el tratamiento de la función original.

### **1.5.2. Algunas aplicaciones de la transformada de Fourier**

La aplicación de esta teoría se da tanto en campo de las disciplinas aplicadas como las teóricas. En física y matemáticas se usa desde la teoría de números y geometría hasta la mecánica cuántica, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes, para evaluar series no triviales, para resolver problemas de flujo de calor, de ondas, teoría de campos, teoría de señales y tomografía, tratamiento y digitalización de imágenes. Gonzales (2015), manifiesta que esta transformada es una poderosa herramienta para el campo del procesamiento de las imágenes, mediante su implementación se puede realizar análisis de imágenes, filtrado, reconstrucción y compresión.

De acuerdo a López (2006) los problemas presentes en el tratamiento matemático de señales se abordan mediante la transformada de Fourier, obedeciendo a la siguiente estructura, un sistema recibe una señal  $f$  y entrega como

salida una función  $g$ , siendo  $f$  y  $g$  ambas dependientes del tiempo, bajo estas circunstancias se requiere de:

- La identificación del sistema, siempre que sean conocidas  $f$  y  $g$ .
- El cálculo de la señal de salida  $g$ , si se conoce el sistema y la función  $f$ .
- El filtrado de la señal, siendo el sistema el elemento que actúa como filtro.

El campo de aplicación es muy amplio y a la par del avance tecnológico, se han desarrollado importantes herramientas matemáticas que se acomodan cada vez mejor a las necesidades que se presentan en el mundo. Los métodos han evolucionado, teniendo como base la idea de Fourier y su descomposición en señales elementales. Hoy se tienen métodos de mayor alcance como la transformada de wavelet y otros, Cortés, Cano y Chávez (2007).

### 1.6. La transformada discreta coseno unidimensional y bidimensional

La transformada discreta coseno (TDC) unidimensional directa e inversa, se define respectivamente de la siguiente manera:

$$C(k) = a(k) = \sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \quad (55)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$u(m) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k) C(k) \cos \frac{(2x+1)k\pi}{2N} \quad (56)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Donde los términos  $a(k) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N}$  forman la función básica de la transformada del coseno y los elementos  $a$  tanto para el caso directo e inverso, corresponden a la siguiente expresión:

$$\alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (57)$$

Para el caso bidimensional se cumplen las siguientes igualdades para la transformada del coseno, directa e inversa respectivamente:

$$C(k, l) = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} \quad (58)$$

Con  $k, l = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

$$u(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha(k)\alpha(l)C(k, l) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} \quad (59)$$

Con  $m, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Donde los términos  $\alpha(k)\alpha(l) \cos \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N}$ , se conocen como funciones básicas de la transformada discreta del coseno y los elementos  $\alpha$  en ambos casos son:

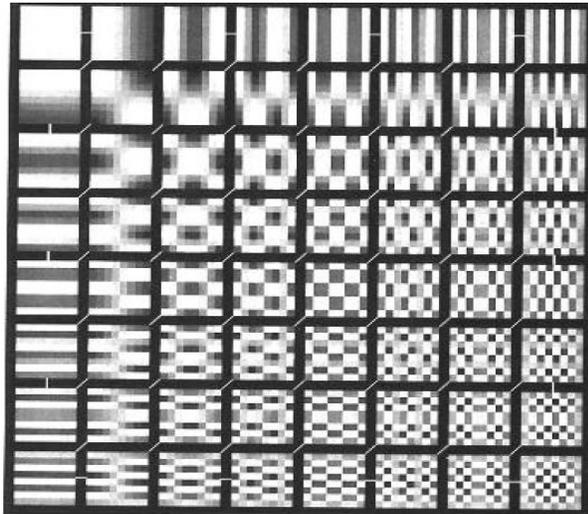
$$\alpha(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & 1 \leq k \leq N - 1 \end{cases} \quad (60)$$

Para calcular la DCT 2D basta con aplicar la transformada unidimensional a cada fila de la matriz imagen y luego a cada columna del resultado. Esta característica hace que la DCT 2D sea separable en las dos dimensiones, tal como se verá en la propiedad 5.

De acuerdo a Aledo (2013), la DCT 2D descompone el bloque de imagen en una suma de frecuencias espaciales. Toma cada bloque 8x8 y lo divide en 64 señales de una base ortogonal y cada una de ellas posee una y solo una de las frecuencias espaciales que comprenden el espectro de la señal de entrada.

El coeficiente que posee frecuencia cero en las dos dimensiones se le conoce como coeficiente DC, (corriente continua) y los restantes 63 coeficientes de corriente alterna (AC).

En términos generales, cuando se observan las funciones bases para la transformada de coseno, para  $N=8$ , se aprecia la distribución de las frecuencias. Hacia la derecha la variación de las mismas en vertical y hacia abajo la variación frecuencial en horizontal, lo cual quiere decir que las funciones bases orientadas verticalmente corresponden a las frecuencias verticales y las funciones bases orientadas horizontalmente, corresponden a las frecuencias horizontales.



*Figura 1. Imágenes bases de una DCT 2D.*

### 1.6.1. Propiedades de la TDC

#### Propiedad 1

La matriz transformada discreta de coseno es real y ortogonal, esto implica que la matriz es unitaria.

$$C = C^*; C^{-1} = C^T \rightarrow C^{*T} = C^{-1} \quad (61)$$

## Propiedad 2

La TDC no es la parte real de la transformada discreta de Fourier, pero se puede verificar que la TDC de una secuencia está vinculada con la TDF de su extensión simétrica.

## Propiedad 3

La TDC tiene excelente compresión energética para datos altamente correlacionados. Mastriani (2009) señala que la efectividad de un método de transformación, puede ser medida por la capacidad de compactación de los datos de entrada en la menor cantidad posible de coeficientes. En este caso, la TDC presenta una su capacidad de compactación energética muy alta.

## Propiedad 4

Descorrelacion (Propiedad de la imagen). Las transformaciones de la imagen deben principalmente remover la redundancia entre pixeles vecinos, esto implica coeficientes transformados descorrelacionados, los cuales se codifican de manera independiente.

## Propiedad 5

Separabilidad. La expresión (58) que es la definición de transformada discreta de coseno se puede escribir aplicando la propiedad de separabilidad como sigue:

$$C(k, l) = \alpha(k)\alpha(l) \sum_{m=0}^{N-1} \cos \left[ \frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right] \sum_{n=0}^{N-1} \cos u(m, n) \frac{(2n+1)l\pi}{2N} \quad (62)$$

con  $k, l = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Cuya ventaja principal es que permite calcular  $C(k, l)$  en dos pasos, compuestas por operaciones sucesivas en una dimensión sobre filas y columnas de la imagen, Mastriani (2009).

## Propiedad 6

Simetría. Al observar la ecuación (59), es evidente que las operaciones sobre las filas y columnas son idénticas, en este caso se dice que la transformación es simétrica.

### 1.6.2. Formas de implementar el algoritmo de la transformada discreta de coseno

De acuerdo con Paredes (1997), la transformada discreta de coseno presenta diversas aplicaciones y gracias a esta característica se han desarrollado muchos algoritmos para su implementación. Para la clasificación de éstos algoritmos, se deben categorizar atendiendo a su método de aproximación de la siguiente manera:

Calculo indirecto: se usa la transformada discreta de Fourier y la transformada Walsh-Hadamard para llegar a implementar la transformada discreta del coseno, presenta una desventaja considerable porque en el proceso de cálculo se usan muchas operaciones innecesarias.

Calculo recursivo: mediante esta técnica se busca llegar a la construcción de una matriz transformada discreta coseno TDC de orden superior, a partir de una matriz TDC de orden inferior.

Factorización directa: “estos algoritmos requieren factorización matricial, teóricamente una matriz unitaria puede factorarse siempre en matrices menos densas, obteniéndose ganancia en velocidad en el proceso de cálculo de la TDC, pues requiere de un número menor de operaciones” Paredes (1997).

De la misma manera que la Transformada Fourier usa la base  $e^{iwx}$  para representar una señal, la transformada discreta de coseno representa dicha señal en términos de tipo coseno, mediante senoidales de diferentes amplitudes y frecuencias.

Esto es posible debido a que existe una relación común entre las transformadas bidimensionales de Fourier, Coseno, y Walsh-Hadamard, la cual se describe a continuación:

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) g(x, y, u, v); \quad f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v) h(x, y, u, v) \quad (63)$$

Las características de cada transformada dependen de cada núcleo  $g(x, y, u, v)$ ,  $h(x, y, u, v)$ , directo e inverso respectivamente.

Muñoz (1997), señala que todas las imágenes típicas tienen información redundante, situación que es aprovechada por la TDC en la compresión de imágenes, puesto que permite una mayor concentración de la información visual, usando para tal fin aquellos coeficientes que representen la imagen con valores no correlacionados entre sí y descartando aquellos que brindan poca información sobre la misma (buscando que los valores de representación de la imagen no entreguen valores repetidos), esto implica que la cantidad de términos para dicha representación disminuya considerablemente y que el proceso de compresión de la imagen sea más óptimo.

Ibarra (2012) señala algunas de las características más útiles de la transformada del coseno en el mencionado proceso, tales como, la buena capacidad de compactación de la energía al dominio transformado, esto significa una mayor cantidad de concentración de información en pocos coeficientes transformados, del mismo modo la transformación es independiente de los datos, también manifiesta que existen fórmulas para el cálculo rápido de los algoritmos, y que esta transformada produce pocos errores en los límites de los bloques de las imágenes.

### 1.7. Transformada de Hadamard

La transformada de Hadamard (TH) y su inversa se definen para el caso unidimensional respectivamente de la siguiente manera:

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (64)$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (65)$$

El núcleo de la transformada en cualquier forma (directa e inversa) se define:

$$h(x, u) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) b_i(u)} \quad (66)$$

Este hecho se justifica debido a que este tipo de transformación es ortogonal, simétrica, separable y real. La expresión que generaliza los términos  $b_k(z)$  es el  $k$ -ésimo bit de la representación binaria de  $z$ . Este término aparece también en la Transformada de Walsh (TW), como se verá más adelante.

Para el caso bidimensional (igual que unidimensional) la sumatoria de la exponencial presente en los núcleos es manejada en forma binaria y toman la siguiente forma:

$$g(x) = (x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (67)$$

$$h(x) = (x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (68)$$

Por tanto la transformada de Hadamard bidimensional se define en términos de la siguiente igualdad:

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x) b_i(u) + b_i(y) b_i(v)]} \quad (69)$$

Y su transformada inversa es:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]} \quad (70)$$

Ashraghi (2000), sugiere que la transformada de Hadamard se puede entender como una extensión de la transformada de Walsh, debido a que el núcleo de la TH usa las mismas entradas que la (TW) haciendo un cambio en términos del ordenamiento de filas y columnas, siendo esta la única diferencia entre las dos transformadas.

### 1.7.1. Propiedades de la Transformada de Hadamard

#### Propiedad 1

Es real, simétrica, ortogonal y separable.

#### Propiedad 2

Puesto que la transformada consta solo de valores 1 y -1 no se necesita multiplicar para realizar su cálculo, de modo que el número de sumas y restas puede reducirse de  $N^2$  a  $N \log_2 N$ , por lo cual se considera una transformada rápida.

#### Propiedad 3

Posee una alta compactación de energía para imágenes altamente correlacionadas.

## 1.8. Transformada de Walsh

En la tesis de Ashraghi (2000), se define la transformada de Walsh (TW) de la siguiente manera:

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-j}(u)} \quad (71)$$

Siendo el núcleo de esta transformada la expresión:

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-j}(u)} \quad (72)$$

Dado que el núcleo de la TW es simétrico y ortogonal, el núcleo inverso es el mismo, a excepción del factor  $\frac{1}{N}$ , que aparece en la expresión (71).

De esta manera, el núcleo para la TW inversa es:

$$h(x, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-j}(u)} \quad (73)$$

Usando el núcleo anterior se puede construir la TW inversa así,

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \quad (74)$$

Siguiendo el mismo análisis se puede extender la definición para el caso bidimensional, usando para tal fin el siguiente núcleo para la TW directa:

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{N-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (75)$$

Dando lugar a la TW bidimensional directa:

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{N-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (76)$$

El núcleo de la TW inversa  $h(x, y, u, v)$ , es el mismo que para el caso de la TD directa, por tanto se llega a la expresión que corresponde a la definición de TW inversa,

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{N-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u)+b_i(y)b_{n-1-i}(v)]} \quad (77)$$

Dado que los núcleos de la TW cumplen con la propiedad de separabilidad y simetría entonces es verificable que a partir de la aplicación de la TW unidimensional repetidamente se puede llegar a las mismas conclusiones a las cuales llegaría la TW bidimensional.

Una característica distintiva de la TW con respecto a la TF es que usa funciones básicas (-1) y 1 mientras que la TF utiliza funciones trigonométricas. Esto tiene implicaciones importantes en términos de aplicabilidad, siendo la TW usada con mayor frecuencia en el análisis de señales y procesamiento de imágenes, porque presenta una mayor ventaja computacional que la TF, resumidas en la facilidad de implementación en hardware y reducción de operaciones. Se observa que una de las aplicaciones fundamentales y que permiten una mayor calidad de vida en personas que usan prótesis, tienen que ver con el reconocimiento de patrones de señales biológicas y la interpretación que permite ejecutar el movimiento en la extremidad artificial, Hamza, Debbal y Bereksi-Reguig (2010).

La razón por la cual se habla de la transformada de Walsh-Hadamard (TWH) es que al observar los núcleos de cada transformada por separado se llega a la conclusión que la única diferencia es la ordenación de los mismos. “La Transformada de Walsh-Hadamard (WHT) es una transformada ortogonal, similar a la transformada de Fourier, que hace corresponder a una secuencia numérica otra secuencia formada por funciones de Walsh, en lugar de funciones sinusoidales” Gayoso, Hernández, Montoya y Orúe, (2014). Entre otras característica especiales de la (WHT) es que permite el cálculo rápido, posee una buena compactación de la energía para imágenes altamente correlacionadas.

Cabe resaltar que dicha transformada tiene importantes utilidades en múltiples procedimientos, por ejemplo, Doniak (2006), realiza un estudio acerca de la transformada de Walsh-Hadamard aplicado a algunos sistemas de transmisión, en este estudio se observa como la transformada mencionada favorece de manera significativa este proceso, permitiendo mejoras significativas adquiridas como resultados de evaluar el desempeño mediante simulaciones.

### **1.8.1. Propiedades de la Transformada de Walsh**

#### **Propiedad 1**

En una dimensión existe únicamente para vectores cuyos tamaños sean potencias enteras de 2. Para la transformada bidimensional se define para imágenes cuyo tamaño sea potencia entera de 2.

#### **Propiedad 2**

El almacenamiento de los datos requiere una menor capacidad que otras transformadas, esto es posible gracias a que es real.

#### **Propiedad 3**

La convolución y la correlación no son eficientes en esta transformada, pero posee un alcance significativo en la compresión de imágenes.

#### **Propiedad 4**

Se compone de funciones cuyos valores son 1 y -1.

#### **Propiedad 5**

Es simétrica, ortogonal y separable.

#### **Propiedad 6**

Se puede obtener mediante el algoritmo de la FFT haciendo el núcleo igual a 1

### **1.9. Transformada Wavelet: Transformada de Haar**

El análisis wavelet tiene un amplio campo de aplicaciones, por ejemplo en medicina es usado como recurso importante en el análisis de señales biomédicas y tratamiento de imágenes, se encuentra presente en campos de la electrocardiografía, electroencefalografía y electromiografía, Muñoz y Orozco (2013). Se observa que una de las aplicaciones fundamentales y que permiten una mayor calidad de vida en personas que usan prótesis, tienen que ver con el

reconocimiento de patrones de señales biológicas y la interpretación que permite ejecutar el movimiento en la extremidad artificial. Shimmack y Mercorelli (2015).

Así mismo en el campo de la ingeniería está tomando cada vez más fuerza para el análisis vibratorio, se encuentra un número muy significativo de investigaciones y trabajos que categorizan a la transformada de wavelet como un método eficiente de comprensión de señales para identificar fallas, comportamientos y otros factores o condiciones trascendentes en construcciones, Rodríguez (2008). En términos generales, las wavelets se emplean en múltiples campos, en numerosas ramas de la física que van desde mecánica cuántica hasta astrofísica, y en el procesamiento de imágenes y tratamiento señales.

Algunos autores como Celeste (2005) señalan que esta técnica es ampliamente efectiva ya que permite identificar discontinuidades, bordes entre otros y que uno de los aspectos más sobresalientes de la transformada wavelet es que permite la reconstrucción de la información con poca pérdida de la misma, además de altas tasas de compresión eligiendo la wavelet adecuada el proceso se realiza con efectividad y bajo costo.

### **1.9.1. Wavelet en una dimensión**

La transformada wavelet es una poderosa herramienta matemática que permite la representación de una secuencia, señal o imagen como la descomposición en versiones de una componente general, de igual forma pero de menor resolución.

Muchos autores como Mastroiani (2009) coinciden en que la función base de Haar, es la más simple de todas las bases wavelet, por tanto, se aprovechará ese hecho para discutir la forma en que una función de una dimensión puede ser descompuesta en términos de wavelets de Haar, técnica usada para la compresión de funciones unidimensionales. En primer lugar, se tomará el ejemplo que se da en la tesis del autor mencionado anteriormente, para ilustrar en detalle la forma en la que procede la transformada wavelet.

Considérese una señal/imagen (1-D) de entrada  $u = [9\ 7\ 3\ 5]$  de 4 píxeles, el proceso consiste en promediar los componentes (píxeles) de a pares obteniendo de esta manera una nueva señal/imagen (1-D),  $v = [8\ 4]$ , con una resolución más baja exactamente 2 píxeles. Es evidente que al realizar tal proceso hay pérdida de información, por tanto, se consideran unos parámetros llamados *coeficiente de detalle* cuya finalidad es la de recuperar la información faltante. En este ejemplo, el primer píxel de  $u$  se recupera sumando al primer píxel de  $v$  1 y el segundo píxel de  $u$ , se recupera restando 1 al primer píxel de  $v$ , de modo que el coeficiente de detalle para recuperar la información de  $[9\ 7]$  es 1.

De forma análoga se procede con los otros dos píxeles y se observa que el coeficiente de detalle es -1, ya que  $4 + (-1) = 3$  y  $4 - (-1) = 5$ , obteniéndose de esa forma la imagen original. Se ha conseguido descomponer  $u$  en una señal/imagen (1-D) de más baja resolución y dos coeficientes de detalle  $[1\ -1]$ , se puede seguir con este procedimiento hasta llegar a lo que se conoce como la base de Haar unidimensional, que consta de los coeficientes de promedio, seguidos de los coeficientes de detalles y finalmente la resolución creciente. Si se repite el proceso con  $v = [8\ 4]$ , se llega a un coeficiente de promedio 6, cuya resolución es un píxel, que tiene por coeficiente de detalle 2, puesto que  $6 + 2 = 8$ ;  $6 - 2 = 4$ .

De este modo se puede determinar que  $u = [9\ 7\ 3\ 5]$ , (señal/imagen original), tiene como Transformada wavelet (base de Haar):  $[6\ 2\ 1\ -1]$ . Cabe resaltar que la transformada posee 4 componentes, mismos que la señal/ imagen original, lo cual sugiere que no hay pérdida o ganancia de información. El hecho de almacenar la transformada wavelet de la imagen, en lugar de la imagen original, tiene como ventaja la posibilidad de eliminar coeficientes de detalles que son muy pequeños en magnitud, de tal manera que al reconstruir la imagen, los errores que se obtienen son mínimo. Esto se conoce como compresión con pérdida, Walker (2008).

### 1.9.2. Funciones bases para la wavelet de Haar unidimensional

Una imagen puede ser representada como funciones constantes por partes, definidas en un intervalo semiabierto  $[0,1)$ ; para una imagen mono-píxel (una función constante sobre todo el intervalo), se considera un espacio vectorial  $V^0$  que la contiene, se hace lo mismo para una función bi-píxel, que tiene dos partes constantes sobre los intervalos  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  y  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ , teniendo a  $V^1$  como el espacio vectorial de todas esas funciones que están en ellos. Siguiendo de ésta manera se tiene que el intervalo  $[0,1)$  tendrá  $2^j$  sub-intervalos iguales en donde se definen las funciones de partes constantes contenidas en un espacio vectorial  $V^j$ .

Es evidente que los elementos de  $V^j$  son funciones definidas sobre el intervalo unidad, de modo que esas funciones también se encuentran contenidas en el espacio vectorial  $V^{j+1}$ , ya que se cumple  $V^j \subset V^{j+1}$ , del mismo modo, es válido afirmar que los espacios  $V^j$  están anidados, esto es  $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots$

La base del espacio  $V^j$  es llamada función de escala  $\phi$ , una base sencilla es la función caja escalada y trasladada:

$$\phi_i^j(x) = \phi(2^j x - i), i = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (78)$$

Donde,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \forall 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \forall \text{otro caso} \end{cases} \quad (79)$$

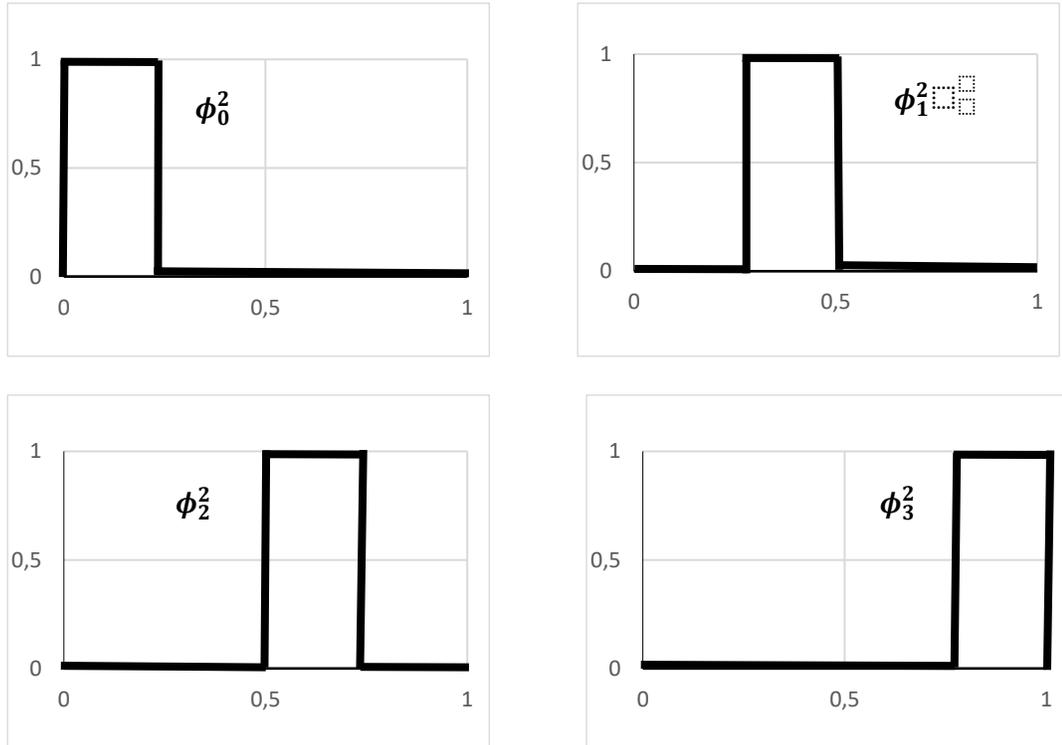
El producto interno estándar se define en  $V^j$ , considerando dos elementos  $f$  y  $g \in V^j$ , en donde se satisface la siguiente igualdad:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \quad (80)$$

Se requiere de un nuevo espacio vectorial  $W^j$ , que sea complemento ortogonal de  $V^j$  en  $V^{j+1}$ , esto significa que todas las partes de una función en  $V^{j+1}$  que no pueden ser representadas en  $V^j$ , pueden mediante  $W^j$  (llamada wavelet) ser

representadas. Las wavelets son el conjunto de funciones linealmente independientes  $\psi_i^j(x)$  generadas en  $W^j$ .

Se ilustra a continuación las bases caja para  $V^2$ :



*Figura 2. Funciones bases caja de la transformada wavelet de Haar.*

### 1.9.2.1. Propiedades de las funciones bases de las wavelets

#### Propiedad 1

Las funciones bases  $\psi_i^j(x) \in W^j$  y  $\phi_i^j(x) \in V^j$  son una base para  $V^{j+1}$ .

#### Propiedad 2

$\psi_i^j(x) \in W^j$  es ortogonal con  $\phi_i^j(x) \in V^j$  mediante el producto interno.

Las wavelets de Haar son las wavelets correspondientes a las bases caja, las cuales están dadas por:

$$\psi_i^j(x) = \psi(2^j x - i); \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (81)$$

Donde,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \forall x, 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \forall x, \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \forall \text{ otro caso} \end{cases} \quad (82)$$

La ilustración de la wavelet de Haar para  $W^1$  es:

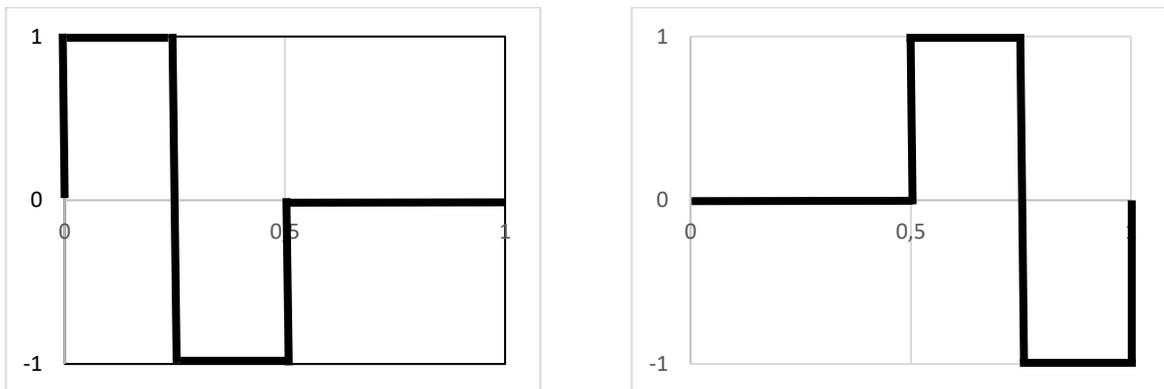


Figura 3. Wavelet de Haar para  $W^1$

Al seguir desarrollando el ejemplo mencionado anteriormente, en búsqueda de representar la imagen original en términos de las funciones bases  $\phi_0^0, \psi_0^0, \psi_0^1, \psi_1^1$  de los espacios vectoriales  $V^0, W^0$  y  $W^1$ , se inicia escribiendo la función  $\Xi(x)$  que representa la imagen original (cuyos pixeles son [9 7 3 5]) como combinación lineal de funciones cajas, las cuales son bases para  $V^2$ , de la siguiente manera:

$$\Xi(x) = c_0^2 \phi_0^2(x) + c_1^2 \phi_1^2(x) + c_2^2 \phi_2^2(x) + c_3^2 \phi_3^2(x) \quad (83)$$

Donde los coeficientes  $c_0^2, \dots, c_3^2$ , son los píxeles de la imagen y las funciones  $\phi(x)$  son las funciones cajas mencionadas. Ahora la función  $\Xi(x)$  se expresa en términos de los espacios vectoriales  $V^1$  y  $W^1$ , usando las funciones bases de esos espacios vectoriales, es decir,  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  así:

$$\Xi(x) = c_0^1 \phi_0^1(x) + c_1^1 \phi_1^1(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x) \quad (84)$$

Donde  $c_0^1$  y  $c_1^1$  son el promedio de los píxeles de la imagen original,  $d_0^1$  y  $d_1^1$  son los coeficientes de detalles, ósea [8 4 1 – 1]. Finalmente se escribe  $\Xi(x)$  como la suma de las funciones bases  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  de los espacios vectoriales  $V^0, W^0$  y  $W^1$ :

$$\Xi(x) = c_0^0 \phi_0^0(x) + d_0^0 \psi_0^0(x) + d_0^1 \psi_0^1(x) + d_1^1 \psi_1^1(x) \quad (85)$$

Los términos  $\phi_0^0, \psi_0^0, \psi_0^1$  y  $\psi_1^1$ , están representado el promedio total, los coeficientes de detalles y los dos tipos de posibles detalle más finos, en una función definida en  $V^2$ . Los coeficientes obtenidos [6 2 1 – 1] son conocidos como la transformada wavelet de Haar.

### 1.9.2.2. Propiedades de la base de Haar

**Propiedad 1** (Ortogonalidad), dos vectores  $a$  y  $b$  son ortogonales en un espacio de Hilbert (generalización del espacio euclidiano), si su producto interno es cero, esto es,  $\langle a, b \rangle = 0$ , de tal forma que el conjunto de vectores en el cual se cumple tal condición, se llama conjunto ortogonal.

**Propiedad 2** (Normalización), consiste en la obtención del vector unitario de modulo unidad, en la dirección del vector  $\vec{a}$ . Esto es  $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ .

Estas dos propiedades permiten que las bases sean ortonormales, lo cual es importante en el proceso de compresión de imágenes.

### **1.9.3. Transformada wavelet de Haar bidimensional.**

Las wavelets bidimensionales se pueden entender como la generalización de las wavelets unidimensionales, los pixeles de la imagen se transforman usando la descomposición estándar o se puede usar la descomposición no estandarizada.

#### **1.9.3.1. Descomposición estándar**

Se sabe que las imágenes son la proyección del espacio 3-D en el espacio 2-D, esta proyección se puede realizar gracias a que cada punto del espacio se puede llevar a un lugar en el plano, usando para tal fin vectores y funciones. De igual forma, se puede comprender el proceso de representación de una imagen como un arreglo bidimensional de tamaño  $M \times N$ , también conocidas como matrices imagen, donde cada elemento de ella recibe el nombre de pixel.

Entendiendo la representación de la imagen como una matriz, se puede describir la descomposición estándar como la aplicación de la transformada wavelets unidimensional a cada fila de pixeles de la matriz, cuyo resultado producirá una matriz transformada en términos de filas. Este proceso entrega unos coeficientes de detalle para cada fila y un valor medio, y también ha de ser tratada nuevamente como una imagen, esto quiere decir que se aplicara nuevamente la transformada wavelets unidimensional, pero en esta ocasión a las columnas. Este proceso permite obtener todos los coeficientes de detalle a excepción de un único valor promedio global.

#### **1.9.3.2. Descomposición no estandarizada**

Consiste en la aplicación de operaciones de manera alterna entre filas y columnas, inicia con la aplicación de un paso de promedio par sobre las filas de pixeles. El siguiente paso es aplicar el mismo proceso de cálculo para el promedio par sobre las columnas, (obsérvese que es solo un paso), para obtener la transformada wavelet se debe continuar con el este procedimiento de manera

recursiva, usando para ello únicamente el cuadrante que posea ambos promedios, es decir ambas direcciones.

Para construir las bases de las funciones de Haar bidimensional, se debe tener en cuenta los dos métodos de descomposición de la imagen, en el caso de la descomposición estándar, se obtienen coeficientes para una base formada en la construcción estándar de una base de dos dimensiones. De la misma manera, los coeficientes que se obtienen durante una construcción no estandarizada son para funciones bases obtenidas en la construcción no estandarizada.

### **1.9.3.3. Construcción estándar de funciones bases de wavelets bidimensionales de Haar**

Para realizar la construcción estándar de la base wavelet en dos dimensiones se requiere hacer todos los posibles productos tensoriales de las funciones base en una dimensión. El proceso de construcción estándar de una base ortonormal (ortogonal y normalizada) unidimensional origina una base ortonormal bidimensional.

### **1.9.3.4. Construcción no estándar de funciones bases de wavelets bidimensionales de Haar**

Considérese la función  $\phi\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ , conocida como función de escala en dos dimensiones, además, tres funciones wavelets definidas de la siguiente manera:

$$\phi\psi(x, y) = \phi(x)\psi(y) \quad (86)$$

$$\psi\phi(x, y) = \psi(x)\phi(y) \quad (87)$$

$$\psi\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (88)$$

Sobre estas funciones se define el nivel de escalado mediante un exponente  $j$ , así como los subíndices  $l, k$ , indican las traslaciones verticales y horizontales. La

función base no estandarizada es una función de escalado la cual es única y se define como sigue:

$$\phi\phi_{0,0}^0(x, y) = \phi\phi(x, y) \quad (89)$$

La función de escalado anterior se aplica a lo largo de las traslaciones y escalas de las tres wavelets (83), (84) y (85). Para normalizar las wavelets que se obtienen se precisa usar un coeficiente  $2^j$ , dando lugar a una base ortonormal:

$$\phi\psi_{kl}^j(x, y) = 2^j \phi\psi(2^j x - k, 2^j y - l) \quad (90)$$

#### 1.9.4. Algunas aplicaciones de la transformada wavelet

Márquez (2013), indica en su tesis que la transformada wavelet tiene su principal aplicación en la compresión de imágenes, haciendo especial énfasis en que sus propiedades favorecen de manera importante la optimización, y su técnica es superior en eficiencia que otras herramientas matemáticas para abordar el proceso de comprimir una imagen. Igual conclusión se encuentra en la comparación que hecha en el trabajo de Villegas, Salazar y Puetaman (2007) entre las mismas transformadas mencionadas, usadas en el procesamiento de señales, pero en esta ocasión mediante la minimización de error entre la imagen original y la recuperada después de la compresión, donde se puede apreciar como el método de Fourier presenta limitaciones en el tratamiento de las imágenes en la aproximación lineal, mismas que son superadas por la transformada wavelet.

Otra aplicación interesante es presentada por Morales y Torres (2006), en su investigación usan la transformada wavelet en la verificación de la identidad. Las imágenes de huellas digitales son comprimidas mediante técnicas wavelet, se realiza un análisis multiresolución y se guardan las imágenes en un software de almacenamiento. Esta tecnología permite optimizar procesos de orden público y servicios para los cuales sea necesario obtener identidades.

En los trabajos como el de Tischer, Thomson y Marulanda (2007) se compara el desempeño de algunas técnicas matemáticas en la resolución de unos problemas que tienen que ver con la naturaleza de señales y análisis vibratorio, obteniendo como resultado la validación de todas las técnicas usadas, en cuanto a su utilidad, sin embargo, la transformada de wavelet posee un mayor alcance en tanto que permite reunir y estudiar de manera más eficiente los datos.

## **CAPITULO 2**

### **IMÁGENES DIGITALES**

Una imagen se puede representar de muchas formas, y cada sistema de representación utiliza la manera más adecuada para extraer características principales del objeto y llevarlo a una forma gráfica de representación. De acuerdo a Ashragui (2000), la mayoría de las imágenes son representadas en el dominio espacial, ya que es la forma más directa y fácil, sin embargo, cuando se requiere estudiar un sistema capturándolo por medio de una imagen, se hace necesario obtener el máximo de características posible y al realizar un análisis sobre ellas, se observa que en la mayoría de los casos, la representación en el dominio de la frecuencia posee un mayor alcance de captura de esas características.

Se tiene que todos los tipos de representación de las imágenes tienen en común las variables, cuando se realiza la representación mediante una función en el dominio del espacio, se puede comprender la variación de la amplitud con respecto a la posición, mientras que la representación de la imagen mediante una función en el dominio de la frecuencia permite observar que tan a menudo ocurren dichas variaciones.

En este trabajo se estudia la transformación de una función que representa a una imagen del dominio espacial al dominio de las frecuencias y viceversa, mediante las transformadas matemáticas TF, TC, TW, TH, TWH, y su aplicación en la compresión de imágenes. Para tales efectos, se ha hecho una descripción teórica de los fundamentos de las mismas, y se busca a continuación llevar a cabo una implementación computacional mediante el programa Matlab, que es una herramienta de programación avanzada que permite entre muchas otras cosas, realizar el procesamiento digital de imágenes, específicamente la compresión de las mismas.

## 2.1. Aspectos generales sobre las imágenes

El entendimiento de los procesos de captura visual de información de los elementos que se perciben con los sentidos, de análisis y representación de la misma, ha sido tema de discusión desde tiempos inmemoriales. Fiallos (2002), plantea que el problema de la formación de la imagen a través de los sentidos, se puede abordar fácilmente si se analizan los tres pilares de su fundamentación, los cuales son: naturaleza de las señales que se perciben, el medio en el que se transmiten y la decodificación que se hace de la señal mediante el cerebro, que hace las veces de herramienta receptora.

La asociación del concepto de mapa espacial con imagen, es un factor clave para el estudio del proceso formación de la imagen, un ejemplo importante, que demuestra la necesidad de esta asociación es el caso de los humanos, cuyo órgano visual hace un trabajo excepcional en términos de captura, en donde una señal luminosa, con intensidad mínima y con un rango de frecuencia espectral determinado, está siendo asociado con una imagen en particular.

Otros tipos de asociación, que tienen que ver específicamente con la propagación de la señal en un determinado medio, permite entender la percepción en ambientes totalmente distintos para el ser humano, tal es el caso de los animales que usan ecolocación como recurso de percepción, en este caso, las ondas sonoras y ocasionan un mapa espacial o imagen que les permite desplazarse sin problemas en completa oscuridad, usando un órgano distinto (al del ser humano) del sistema sensorial.

Existen ciertas condiciones para las cuales el sistema visual humano, no puede realizar una captura, análisis, representación y decodificación de un elemento del medio que le rodea, para formar una imagen del mismo. Tales condiciones tienen que ver específicamente con la iluminación, por ejemplo, los rayos x, el infrarrojo. En estos casos, para la formación de la imagen bajo esas condiciones de

iluminación, es indispensable que el sensor (que no es órgano humano) no presente ningún problema a la hora de capturar y decodificar la información.

La posibilidad de poder formar una representación visual de un elemento, también tiene que ver con la cantidad de información que se puede extraer del mismo, en un determinado entorno, mediante una herramienta de captura o sensor. Esta extracción tiene sus raíces en la relación que existe entre la materia y las ondas electromagnéticas que son el medio de transmisión, la relación mencionada se puede estudiar fácilmente dada la naturaleza física de dicha interacción.

En la tesis de Fiallos (2002), se sostiene la idea de que toda sustancia tiene su huella digital, mediante su espectro electromagnético. De modo que al analizar una escena, mediante un sensor sensible a determinadas bandas de frecuencia, lo que se observará será la información necesaria para graficar la respuesta espectral de dicha escena.

## **2.2. Geometría de las imágenes**

El mencionado autor, se refiere a las imágenes como la proyección del mundo 3-D, es decir, las escenas, en el 2-D, (o sea las imágenes), en el primer sistema coordenado ocurren las escenas, las cuales son capturadas y llevadas a un sistema cartesiano bidimensional, atendiendo a dos criterios fundamentales para la formación de las imágenes:

- Qué determina dónde aparece la imagen de un punto.
- Qué determina el brillo de un punto de la imagen con respecto a la radiancia del objeto.

Para responder tales cuestiones se debe tener en cuenta la perspectiva por proyección y la intensidad luminosa en la imagen 2-D.

En primer lugar, para lograr comprender fácilmente el problema de la determinación de la posición de un punto en la imagen, se considera un agujero ideal conocido como ojo de aguja, que está ubicado frente al plano de la imagen con distancia constante, de modo que solo la luz que pasa por el ojo de la aguja alcanza la imagen, dado que la luz se propaga en línea recta, cada punto de la imagen es correspondido con una dirección particular de un rayo de luz, mediante el ojo de la aguja.

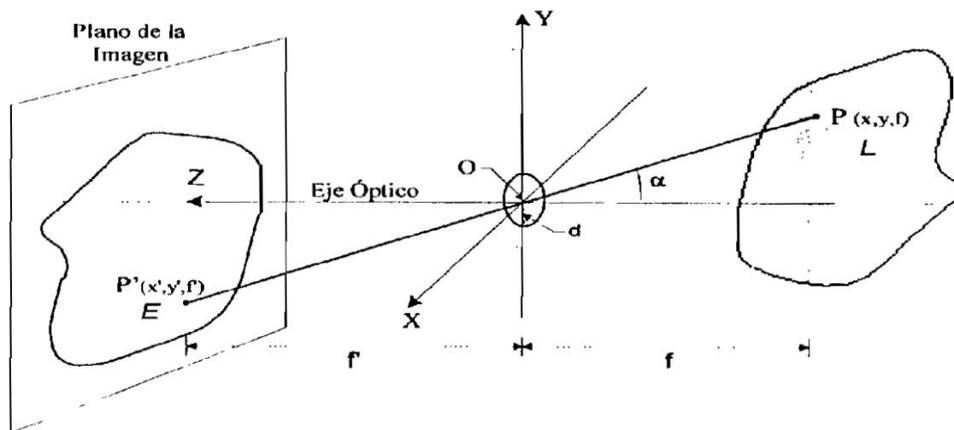


Figura 4. De escena 3-D a la imagen 2-D.

Fuente: Fiallos, E., (2002). Implementación de la transformada Karhunen-Loéve, para la compresión de imágenes monocromáticas. (p. 5).

Si se introduce un sistema coordenado haciendo que el origen del mismo coincida con el ojo de la aguja, teniendo además como condición que el eje z esté alineado con el eje de observación y señale hacia la imagen, entonces para determinar la posición de un punto  $P'$  de un punto  $P$  que pertenece a la escena, se tiene que tener en cuenta lo siguiente:

$r(x, y, z)$  y  $r'(x, y, z)$ , Son los vectores que unen los puntos  $P$  y  $O$ , y  $O$  con  $P'$ , respectivamente, además el rayo que conecta  $P$  con  $P'$ , forma un ángulo  $\alpha$  con el

eje óptico o eje  $z$ , tal y como se aprecia en la figura 3, cumpliéndose las siguientes igualdades:

$$\cos(\alpha) = -\frac{r \cdot \hat{z}}{\|r\|} \quad (91)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{f'}{\|r'\|} \quad (92)$$

$$-\frac{\|r\|}{r \cdot \hat{z}} = \frac{\|r'\|}{f'} \quad (93)$$

Si se usan las componentes se llega a concluir que:

$$\frac{x'}{f'} = \frac{x}{z} \quad y \quad \frac{y'}{f'} = \frac{y}{z} \quad (94)$$

Expresiones que permiten determinar la posición de un punto de una escena en 3-D a un sistema coordenado bidimensional.

Para dar respuesta al segundo interrogante sobre qué determina el brillo de un punto de la imagen con respecto a la radiancia del objeto, se hace uso de la siguiente igualdad, que explica la relación entre la radiancia en un punto y la intensidad luminosa en el punto correspondiente de la imagen:

$$E = L \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{f}\right)^2 \cos^4 \alpha \quad (95)$$

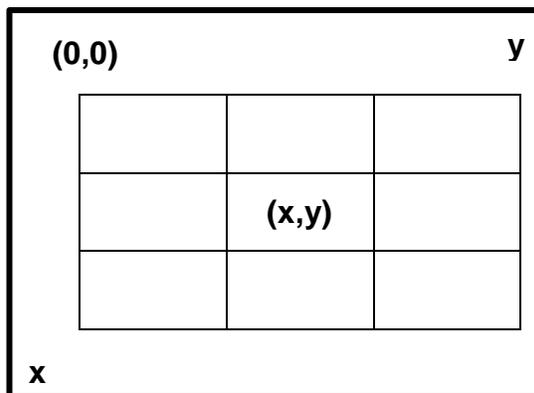
Donde  $E$  es la intensidad luminosa del punto captado,  $L$  es la radiancia en un punto,  $d$  es el diámetro de la lente y  $f$  es la distancia al plano de la imagen.

### 2.3. Aspectos generales de las imágenes digitales

Se había considerado anteriormente que en el tratamiento digital de imágenes se utiliza una función de dos variables  $f(x, y)$ , (llamada función de intensidad luminosa

bidimensional), para definir y representar imágenes, donde  $x, y$ , son coordenadas espaciales que determinan el nivel de gris en un punto dado, (también conocido como la amplitud de  $f$  en ese punto), cuyos valores de intensidad son cantidades finitas y discretas, además se cumple que el valor de  $f$  para cualquier punto  $(x, y)$ , es proporcional al brillo.

Tal y como aparece en Gonzales y Wood (2002), estas imágenes reciben el nombre de imágenes digitales y cada una de ellas se compone de una cantidad finita de elementos llamados píxeles, ubicables en un sistema cartesiano y con un valor definido para cada uno.



*Figura 5. Representación espacial de una imagen.*

## 2.4. Muestreo y cuantificación

Una matriz imagen es un arreglo bidimensional, (matriz de tamaño  $M \times N$ ), que representa aproximadamente una imagen continua; puesto que cada elemento de la matriz imagen, conocido como pixel, es un valor discreto, los cuales están igualmente espaciados y ordenados en la matriz mencionada, entonces a cada elemento de la matriz se puede asociar un elemento de la imagen.

De esa manera, una imagen continua  $f(x, y)$  será:

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \dots & f(0, N - 1) \\ f(1,0) & f(1,1) \dots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix}_{M \times N} \quad (96)$$

Se usa un código binario (unos y ceros) llamados bits, para representar los píxeles de la imagen, y a cada pixel le corresponde un valor tonal y una posición específica. El proceso de digitalizar las coordenadas espaciales recibe el nombre de muestreo de la imagen, y la digitalización de la amplitud se denomina cuantificación del nivel de gris, Fiallos (2002).

De acuerdo a Esqueda (2002), la relación matemática de correspondencia entre los píxeles de la matriz y la imagen se logra, como consecuencia del vínculo de la función intensidad luminosa  $f(x, y)$  y del sistema de representación de una imagen, que se puede escribir como una función de la forma:

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (97)$$

## 2.5. Relaciones básicas entre píxeles

Si se denomina  $V$  al conjunto de valores de niveles de gris,  $p, q$  píxeles de una imagen y  $f(x, y)$ , la imagen propia, entonces entre las relaciones básicas entre los píxeles son adyacencia, vecindad, conectividad, distancia y operaciones lógico-aritméticas.

### 2.5.1. Relación de adyacencia

Hace referencia a la conexión que existe entre dos píxeles en tanto estén unidos, ya sea compartiendo una frontera o teniendo común una esquina. Este tipo de relación permite determinar con claridad el concepto de pixel vecino.

### 2.5.2. Relación de vecindad

Dos pixeles son vecinos si cumplen alguna de las siguientes condiciones: ser vecinos directos, es decir, que compartan frontera, ser vecinos indirectos, de modo que compartan una de sus esquinas, tener 4-vecinos, ya que todo pixel cuyas componentes son  $(x, y)$ , tiene 4 vecinos directos, dos horizontales y dos verticales, cuyas componentes son:

$(x + 1, y); (x - 1, y); (x, y + 1); (x, y - 1)$ , este conjunto de pixeles se conoce como  $N_4(p)$ , también 4-vecinos de  $p$ , los cuales están a una distancia unitaria.

Ser vecino diagonal, lo cual se denota como  $N_D(p)$ , evidentemente existen también 4 pixeles que son vecinos diagonales de  $p$ , cuyas componentes son:

$(x + 1, y + 1); (x + 1, y - 1); (x - 1, y - 1); (x - 1, y + 1)$ , tal y como se puede observar en la figura:

$(x - 1, y - 1)$	$(x - 1, y)$	$(x - 1, y + 1)$
$(x, y - 1)$	$(x, y)$	$(x, y + 1)$
$(x + 1, y - 1)$	$(x + 1, y)$	$(x + 1, y + 1)$

*Figura 6. Relación de vecindad.*

El conjunto de todos los pixeles que pertenecen a la unión de la 4-vecindad de  $p$  y los vecinos diagonales de  $p$ , originan una vecindad llamada 8-vecindad de  $p$ , esto significa que:

$$N_4(p) \cup N_D(p) = N_8(p) \quad (98)$$

### 2.5.3. Relación de conectividad

Para determinar la conectividad de dos píxeles es preciso tener en cuenta si existe algún tipo de adyacencia entre los mismos, así como reconocer algún tipo de similitud entre los niveles de grises. Existen tres tipos de conectividad los cuales son 4-conectividad, 8-conectividad y m-conectividad.

Dados dos píxeles  $p, q$ , con valores  $V$  (niveles de grises), tienen 4-conectividad si  $q \in N_4(p)$ . Para que tengan 8-conectividad se debe cumplir que  $q \in N_8(p)$ , de igual manera para que los píxeles tengan m-conectividad es necesario que  $q \in N_4(p)$ ,  $q \in N_D(p)$  además que:

$$N_4(p) \cap N_4(q) = \emptyset \quad (99)$$

### 2.5.4. Relación de distancia

La relación de distancia cuantifica la separación que existe entre dos puntos (píxeles) de una imagen. Dados tres píxeles  $(x, y), q(s, t), r(u, v)$ , se puede establecer una función  $D$  llamada función de distancia, entre ellos si se satisface que:

$$D(p, q) \geq 0, \text{ si } D(p, q) = 0 \rightarrow p = q \quad (100)$$

$$D(p, q) = D(q, p) \quad (101)$$

$$D(p, r) \leq D(p, q) + D(q, r) \quad (102)$$

Bajo las anteriores condiciones se pueden establecer tres tipos de distancias, las cuales se relacionan a continuación:

#### Distancia Euclidiana

Para los píxeles  $p$  y  $q$  la distancia euclidiana entre ellos se calcula de la siguiente manera,

$$D_c(p, q) = \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} \quad (103)$$

### Distancia Manhattan

También se conoce como distancia de bloques  $D_4$ , Utiliza únicamente los vecinos de 4 orden, definiéndose así,

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t| \quad (104)$$

### Distancia tablero de ajedrez

La definición de la distancia tablero de ajedrez conocida como  $D_8$ , tiene mucha similitud con la definición de  $D_4$ , la cual tiene la siguiente forma,

$$D_8(p, q) = \text{Max}(x - s, y - t) \quad (105)$$

#### 2.5.5. Relaciones lógico-aritméticas

De acuerdo a Esqueda (2002), las operaciones aritméticas más usuales en el procesamiento digital de imágenes, o entre píxeles, son suma, resta, multiplicación y división. Dados dos píxeles  $p, q$ , entonces se tiene,

$p + q$  suma.

$p - q$  resta.

$p * q$  multiplicación

$p \div q$  división.

En el caso de los operadores lógicos,

*AND*:  $p \text{ AND } q$  ; *OR*:  $p \text{ OR } q$ ; *complemento*:  $\text{NOT } p$ .

## 2.6. Aplicaciones del procesamiento digital de imágenes

Una herramienta muy importante en el procesamiento digital de imágenes, es el filtrado, proceso que se realiza con el ánimo de mejorar la calidad de la imagen,

resaltando zonas específicas o eliminando ruidos de las mismas. Los filtros digitales se pueden hacer en el dominio espacial o en el dominio de la frecuencia.

## 2.7. Aspectos generales del filtro digital

Para dar una definición de filtrado, es fundamental recordar la definición de operación de convolución, puesto que el filtrado se define como una convolución entre una imagen de entrada y la función filtro. Se denomina convolución de dos funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , a una tercera función  $f(t)$ , tal que dicha función satisface la siguiente igualdad:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) \quad (106)$$

A partir de la anterior definición y teniendo en cuenta la función de intensidad luminosa, que se ha tomado para representar una imagen,  $f(x, y)$ , (donde las coordenadas espaciales, representan la posición de un punto determinado en el interior de la matriz imagen), y considerando una imagen resultante o de salida  $f'(x, y)$  y un sistema de filtrado  $W$ , cuya respuesta  $w(m, n)$ , (cuyas componentes pertenecen a la matriz filtro, que en general han de ser diferentes de las pertenecientes a la matriz imagen), se puede dar una definición de filtrado mediante la siguiente operación:

$$f'(x, y) = w(m, n) * f(x, y) = \sum_{m=-k}^k \sum_{n=-l}^l w(m, n) f(x-m, y-n) \quad (107)$$

Donde  $w$ , es la matriz deslizante cuyo tamaño es  $(2k+1) \times (2l+1)$ , y a sus elementos se les conoce como coeficientes de peso y el entorno  $[-k, k] \times [-l, l]$  es llamado ventana de filtro, y cuando se tiene que  $k = l$ , dicha ventana de filtrado es cuadrada. Las componentes  $(x, y)$  son las filas y columnas de la imagen, Ariza, Alcalá y Pinilla (1997).

Considérese la matriz deslizante  $W$ :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \quad (108)$$

La cual dará lugar una imagen de salida de la siguiente forma:

$$f'(x, y) = W_{11}f(x-1, y-1) + W_{12}f(x-1, y) + W_{13}f(x-1, y+1) + \\ W_{21}f(x, y-1) + W_{22}f(x, y) + W_{23}f(x, y+1) + W_{31}f(x+1, y-1) + \\ W_{32}f(x+1, y) + W_{33}f(x+1, y+1) \quad (109)$$

Cuando los valores  $k$  y  $l$  se hacen cada vez mayores, entonces el entorno de cada celda influye progresivamente en la celda resultante de la imagen, lo cual quiere decir que la imagen filtrada tendrá un cambio de apariencia.

## 2.8. Filtros en el dominio espacial y en dominio de la frecuencia.

La ecuación (104) define el filtrado en dominio espacial, esto significa que la operación de filtrado se realiza sobre la matriz imagen, la cual es un sistema matricial de coordenadas que definen la imagen, también se suele llamar dominio espacial.

Cuando la imagen original, se representa en un sistema bidimensional distinto, siendo la función que define la naturaleza de la imagen, continua, y asumiendo que los ejes cartesianos son la amplitud y frecuencia, entonces la dirección de un punto cualquiera en la imagen queda determinada en términos de un nuevo dominio, conocido como dominio de la frecuencia, (proceso que se consigue mediante las transformadas matemáticas). La grafica de una función en el dominio de la frecuencia en función de la frecuencia angular, se conoce como espectro de magnitud de la función en el dominio espacial.

Cuando una función en el dominio espacial es representada en el dominio de la frecuencia, lo que se consigue es “explicar la composición de frecuencias de la superposición de diversas funciones simples, de igual forma que la representación de  $f(x)$  frente a  $x$  define dicha función en el dominio espacial”, Ariza, Alcalá y Pinilla (1997).

### **2.9. Filtros pasaaltos, pasabajos y pasabandas.**

Los filtros en el dominio espacial tienen influencia directa en el dominio de las frecuencias, ya que cuando se habla de filtros pasaaltos, pasabajos y pasabandas, se hace referencia a las frecuencias (altas o bajas) que retienen, teniendo en cuenta la influencia que originan en la imagen en el dominio de las frecuencias. El proceso de filtrado en el dominio de las frecuencias consiste en aplicar la función  $W$  (función de filtrado frecuencial), como máscara a la matriz imagen (imagen de entrada) en el espacio frecuencial.

Los filtros pasaaltos resaltan las características de la imagen tales como bordes, realce de detalles finos, además permite el paso de frecuencias a partir de una frecuencia específica hacia arriba. Para el caso de los filtros pasabajos, en oposición al anterior caso, permite el paso de bajas frecuencias, proceso que se traduce en un suavizado de la imagen. Reduce el ruido de la imagen a cambio de pérdida de calidad de la misma.

Los filtros pasabanda son la combinación de los dos filtros anteriores, permiten el paso de frecuencias que están en un determinado rango de frecuencias, es decir, una frecuencia de corte superior y otra inferior. Cortes, J., Cano, H., y Chávez, J., (2008).

### **2.10. Compresión de imágenes**

La compresión es el proceso mediante el cual una imagen puede ser representada usando una cantidad de datos menor, esto implica una reducción en

los coeficientes de la matriz imagen que son redundantes. Desde la estadística, la compresión de imágenes se puede considerar como el proceso que permite la construcción de una imagen dada, a partir de los datos que la conforman, tal que dichos datos no estén correlacionados.

De acuerdo a Ruiz y García (2000), la compresión es fundamental en la transmisión y almacenamiento de datos, pero es preciso que las imágenes sean comprimidas antes de realizar tales procesos, además de hacer el proceso de descompresión para obtener la imagen original o una aproximada representación de la misma.

La compresión se puede clasificar en dos categorías las cuales son compresión con pérdidas llamada (lossy) y compresión sin pérdidas (conocida como error – free). En el primer caso, el proceso de compresión implica pérdidas en la información que compone la imagen. Esto es posible en el caso de las imágenes ya que las imágenes presentan información redundante y ruidos, de tal forma que la mencionada pérdida de información no altera significativamente la calidad de la imagen de salida. Cuando se implementa la compresión sin pérdidas se conserva la totalidad de los componentes de la información, este tipo de compresión es especialmente útil para la información que se presenta en forma binaria

### **2.11. Formas de medir la eficiencia de la compresión.**

Existen diversas métricas para la eficiencia de la compresión, en este trabajo se usa la relación señal a ruido (SNR), la tasa de compresión (TC) y el factor de compresión (FC).

### 2.11.1. Relación señal a ruido (SRN)

La proporción SNR (Signal to Noise Ratio) es una forma de medir el ruido presente en una imagen. Se expresa normalmente en decibelios y está definida de la siguiente manera:

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \frac{S}{R} \quad (110)$$

Donde S es la potencia promedio de la señal y R es la potencia promedio del ruido que la contamina.

### 2.11.2. Tasa de compresión

$$TC = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \quad (111)$$

Donde  $\alpha$  es el tamaño de la imagen antes de comprimir y  $\beta$  es el tamaño después del mencionado proceso.

Cuando se cumple que  $\alpha = \beta$ , es evidente que no hay compresión. Para el caso en el que  $\alpha < \beta$ , es claro que  $TC < 0$ , de manera que durante el proceso de compresión se ha llegado a expandir la información que compone la imagen y finalmente cuando se satisface que  $\alpha > \beta$ , entonces  $0 < TC < 1$ , lo cual quiere decir que hay compresión de los datos.

### 2.11.3. Factor de compresión

Calcula la proporción existente entre  $\alpha$  y  $\beta$ , y se simboliza (X: 1).

$$X = \frac{\alpha}{\beta} \quad (112)$$

## CAPITULO 3

### IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

En este capítulo se realizará la implementación computacional mediante el software Matlab, (abreviatura de MATrix LABoratory, laboratorio de matrices), herramienta de software matemático con lenguaje propio, (lenguaje M), aprovechando entre sus múltiples elementos el análisis y tratamiento de señales. En este caso se trabajará con señales bidimensionales (imágenes). Se realizará filtrado y compresión de una imagen usando las transformadas matemáticas descritas teóricamente en el capítulo primero, bajo diferentes tasas de compresión, a saber, 1:4, 1:16 y 1:64.

Las transformadas que se aplican mediante Matlab vienen establecidas como herramientas propias del software, por lo tanto a la matriz que representa la imagen, se aplica el código que corresponde a la transformada en cuestión, se diseña un filtro sobre la imagen y finalmente se comprime con las tasas de compresión descritas anteriormente.

Para la transformada wavelet de Haar 2D al nivel 1, que es la wavelet que se utilizará en este análisis comparativo, se usa la función *wavemenu*, herramienta que contiene todos los elementos necesarios para realizar el análisis de compresión de imágenes mediante la familia de transformadas wavelets. La imagen resultante de ese proceso será comparada con las demás.

La compresión de imágenes para la transformada Wavelet de Haar, se realiza mediante la wavelet -toolbox de Matlab, que posee una gran variedad de funciones que permiten realizar procesamiento digital de señales unidimensionales o bidimensionales a través de la interfaz gráfica de usuario. En la toolbox se encuentran las funciones wavelet continua y discreta (CWT, DWT) que en esencia son la base del análisis wavelet, ofreciendo análisis mono y multinivel en la descomposición y reconstrucción de una señal, también es posible mediante esta

herramienta calcular la energía de una descomposición mediante wavelet, así como la exploración de familias wavelets.

El primer paso que se efectúa al estar en el entorno de Matlab, es desde la ventana de comando llamar a la *wavemenu*, la cual corresponde al nombre de la interfaz gráfico de usuario, que relaciona a la wavelet-toolbox. Una vez se origine la interfaz, se elige el tipo de análisis que se necesite para este caso se usará el TWO-DIMENSIONAL que corresponde a las imágenes. Entre las más importantes aplicaciones que tienen las wavelets, se encuentran la compresión de señales y la eliminación de ruido de las mismas.

La compresión de imágenes en el toolbox de Matlab realiza el proceso de la siguiente forma: elige una wavelet para descomponer, aplica el proceso de umbralización y finalmente reconstruye. Cuando se está en el entorno 2-D, se precisa cargar una imagen y aparece por defecto la wavelet de Haar, se elige el nivel y se presiona la opción analizar. El espacio de operación de la imagen, lleva la imagen original a una descomposición en el nivel 1 de la wavelet discreta de Haar, para entregar finalmente una imagen sintetizada, la cual surge a partir de la wavelet de Haar inversa.

Antes de dar la orden de analizar, se pueden cambiar las opciones para realizar tal proceso, modificando el tipo de wavelet, el nivel de descomposición, así como el tipo de umbralización.

La imagen original se compara con las obtenidas mediante el proceso de compresión en cada transformada mediante la razón señal/ruido (SNR), las tasas de compresión (TC) y los factores de compresión (FC), métricas de eficiencia elegidas para llevar a cabo la comparación.

### 3.1 Compresión y filtrado



Figura 7. Transformada de Fourier, filtros pasa bajo, pasa alto.



Figura 8. *Compresión usando la Transformada de Fourier. Tasa de compresion 1:4, 1:16 y 1:64.*

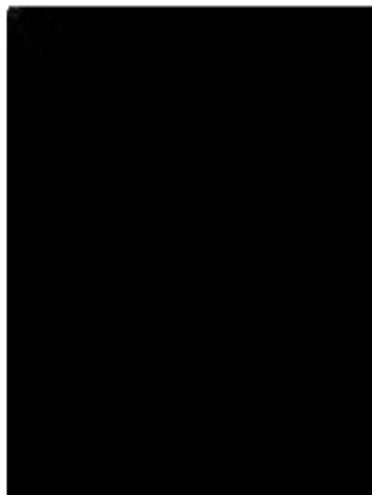
**Imagen Original****T.D. Coseno de la imagen original****T.Inv.Coseno con pasa bajo****T.Inv.Coseno con pasa alto**

Figura 9. Transformada Discreta de Coseno, filtros pasa bajo, pasa alto.



Figura 10. Compresión usando la Transformada Discreta de Coseno. Tasa de compresión 1:4, 1:16 y 1:64.

**Imagen Original**



**TWH de Imagen Original**



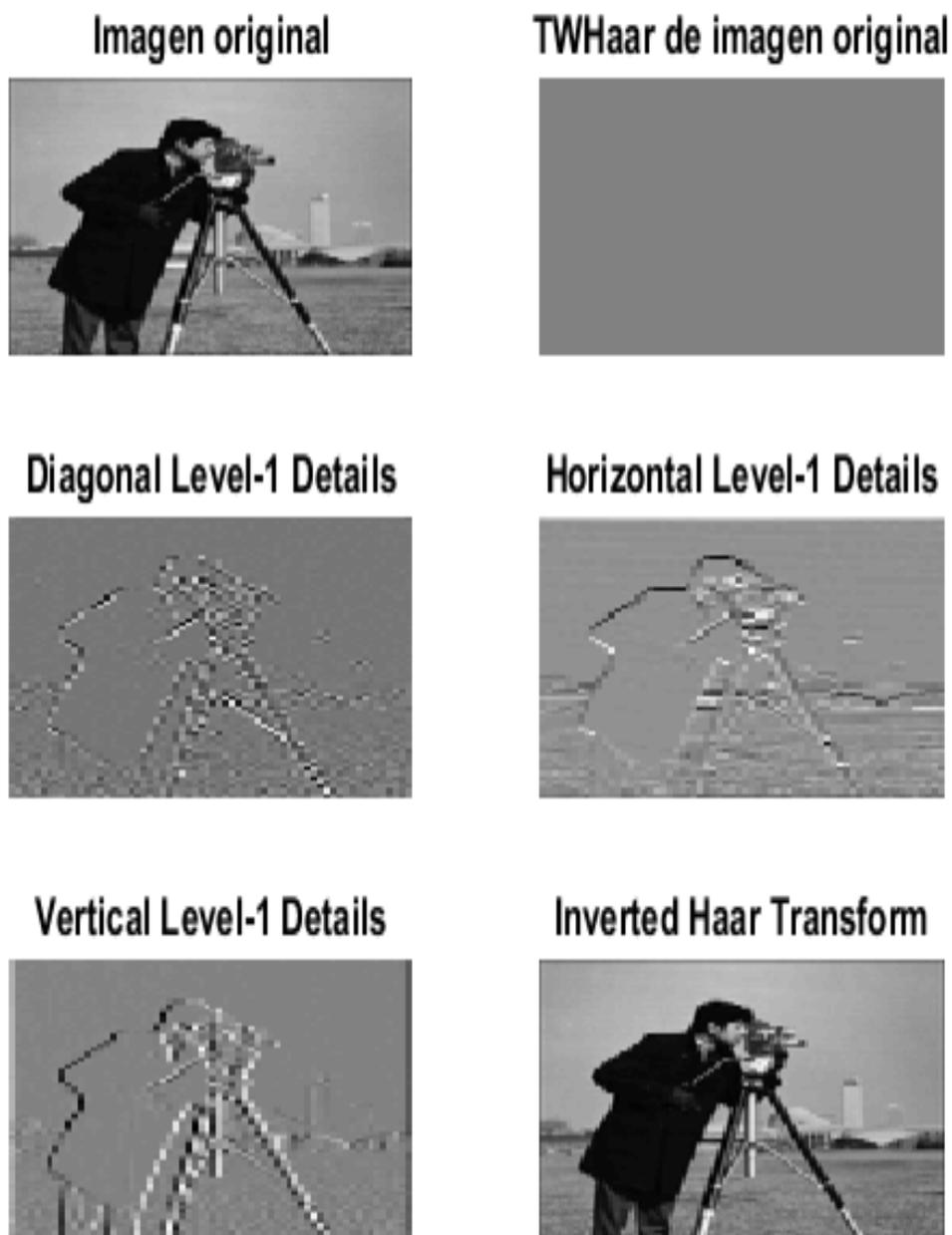
**T.I Walsh-Hadamard con pasa bajo T.lwalsh-hadamard con pasa alto**



*Figura 11. Transformada de Walsh-Hadamard, filtros pasa bajo, pasa alto.*



Figura 12. Compresión usando la Transformada de Walsh-Hadamard. Tasa de compresión 1:4, 1:16 y 1:64.



*Figura 13. Compresión usando la Transformada Wavelet de Haar 2D al nivel-1.*

## CAPITULO 4

### ANÁLISIS COMPARATIVO, RESULTADOS OBTENIDOS Y CONCLUSIÓN.

Para llevar a cabo la comparación de la eficiencia de las transformadas matemáticas usadas en el proceso de compresión y filtrado de una imagen, se usan como herramientas de medida las tasas de compresión (TC), el factor de compresión (FC) y la relación señal a ruido SNR entre la imagen original y las imágenes obtenidas mediante los procesos de filtrado y compresión.

La proporción SNR (señal a ruido), permite establecer una relación de medida entre la potencia de la señal original (2D en este caso) y la potencia del ruido que la contamina o daña, se mide en decibelios (dB) y se calcula haciendo uso del error medio cuadrático RMS de la siguiente manera:

$$\lambda_{RSM} = \left[ \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f(x, y) - f_r(x, y)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (113)$$

Donde  $f(x, y)$ , es la imagen original y  $f_r(x, y)$ , es la imagen procesada mediante la transformada. Básicamente el RMS, estima el promedio de los errores al cuadrado existente entre  $f(x, y)$  y  $f_r(x, y)$ .

A partir de (110) se puede obtener la expresión que permite calcular la proporción SNR:

$$SNR = \frac{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f_r(x, y)]^2}{\lambda_{RSM}} \quad (114)$$

#### 4.1. Análisis comparativo: señal a ruido (SNR) y error cuadrático medio ERMS.

Tabla 1. Resultados obtenidos en la implementación computacional: Razón Señal a Ruido (SNR).

TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS	TASA DE COMPRESIÓN	ERROR	SNR
FOURIER	(F <sub>1</sub> - TIF)	1.2763e+3	1.6e-3
	(F <sub>1</sub> - ITC 1: 4)	1.2760e+3	1.6e-3
	(F <sub>1</sub> - ITC 1: 16)	1.02751e+3	1.7e-3
	(F <sub>1</sub> - ITC 1: 64)	1.2730e+3	1.8e-3
COSENO	(F <sub>1</sub> - TICOS)	89.8613	218.2435
	(F <sub>1</sub> - COSTC 1: 4)	131.7765	101.5455
	(F <sub>1</sub> - COSTC 1: 16)	255.1796	27.0412
	(F <sub>1</sub> - COSTC 1: 64)	492.2361	7.1559
WALSH-HADAMARD	(F <sub>1</sub> - ITWH)	1.3272e+3	7.4195e-10
	(F <sub>1</sub> - IWH 1: 4)	1.3272e+3	3.1688e-10
	(F <sub>1</sub> - IWH 1: 16)	1.3272e+3	2.2531e-11
	(F <sub>1</sub> - IWH 1: 64)	1.3272e+3	1.1939e-12
WAVELET	(F <sub>1</sub> - TWHAAR)	1.3515	9.6632e+5

Los resultados obtenidos mediante la razón señal a ruido (SNR), demuestran que la transformada wavelet de Haar posee el valor más alto para esta proporción (9.6632e+05), a su vez ésta transformada posee el valor mínimo para el error cuadrático medio (1.3515), métricas que sugieren la superioridad de la wavelet de Haar frente a las otras tres transformadas. La información de la tabla también

permite apreciar que la transformada del coseno produce bajo la SNR valores superiores a la transformada de Fourier y la transformada de Walsh-Hadamard, en todas las tasas de compresión que se consideraron para la comparación, así mismo, los valores que se observan para el error cuadrático medio de la transformada del coseno son menores que los que se producen en las transformadas mencionadas (TF y TW-H) en todas las tasas de compresión, aspecto que permite inferir que su eficiencia en este estudio solo es superada por los valores alcanzados por la wavelet de Haar, ocupando en esta métrica de eficiencia el segundo lugar.

Para el caso de la transformada de Fourier se puede concluir que con respecto a esta métrica de eficiencia, supera a la transformada de Walsh-Hadamard tanto en SNR como en los valores para el error cuadrático medio, dado que los errores cuadráticos medios de la TF son menores que los que resultan mediante la implementación de la TW-H, en todas las tasas de compresión, característica que le otorga el tercer lugar en términos de eficiencia en el proceso de compresión, realizado para este estudio.

Finalmente los valores resultantes para el error cuadrático medio de la transformada de Walsh-Hadamard en todas las tasas de compresión, son los más elevados, así como los valores para la SNR obtenidos son los más bajos, situación que permite determinar que en esta métrica de eficiencia posee los valores menos óptimos.

#### 4.2. Análisis comparativo: Factor de compresión.

Tabla 2. Resultados obtenidos en la implementación computacional: Factor de compresión (FC).

<b>TRANSFORMADAS MATEMATICAS</b>	<b>TASAS DE COMPRESIÓN</b>	<b>FACTOR DE COMPRESIÓN (X:1)</b>
<b>FOURIER</b>	1:4	(1,07:1)
	1:16	(1,16:1)
	1:64	(1,13:1)
<b>COSENO</b>	1:4	(1,01:1)
	1:16	(1,2:1)
	1:64	(1,34:1)
<b>WALSH-HADAMARD</b>	1:4	(1,47:1)
	1:16	(1,56:1)
	1:64	(1,59:1)
<b>WAVELET DE HAAR</b>	<b>COEFICIENTES DE DETALLE(H,V,D)</b>	(5,62:1)

El factor de compresión (X: 1), o razón entre el tamaño de la imagen original y el tamaño de la imagen comprimida, indica que el resultado final o imagen comprimida, ocupa X veces menos el espacio de la imagen original. En la tabla comparativa se aprecia que la transformada wavelet de Haar posee un factor de compresión de (5,62:1), lo cual indica que la imagen resultante mediante el proceso de compresión ocupa 5,62 veces menos espacio que la imagen original, valor que permite deducir que dicha transformada es más eficiente.

En las tres tasas de compresión implementadas en el estudio comparativo, se puede apreciar que bajo la métrica factor de compresión (FC), la transformada de Walsh-Hadamard supera todos los valores obtenidos implementando las transformadas del coseno y Fourier, aspecto que la ubica en el segundo lugar en términos de eficiencia en este estudio. Cabe señalar que a pesar de este resultado, la imagen resultante sufre pérdidas significativas.

La transformada de coseno presenta valores mayores para el factor de compresión, en las tasas de compresión 1:16 y 1:64, siendo superada en la tasa de compresión 1:4 por la transformada de Fourier. Por lo anterior, se puede concluir en términos de eficiencia con respecto a la transformada de Fourier que posee los valores mínimos mediante esta métrica y por consiguiente la eficiencia de esta transformada ocupa el último lugar en este estudio.

### 4.3. Análisis cualitativo: comparación de la calidad de la imagen resultante con respecto a la imagen original.

Tabla 3. Orden en la eficiencia de cada Transformada con respecto a la calidad de la imagen resultante.

	TASAS DE COMPRESIÓN		
TRANSFORMADAS MATEMÁTICAS	1:4	1:16	1:64
FOURIER	3°	3°	3°
COSENO	2°	2°	2°
WALSH-HADAMARD	4°	4°	4°
WAVELET DE HAAR	COEFICIENTES DE DETALLE		
	DIAGONAL	HORIZONTAL	VERTICAL
	1°	1°	1°

Para llevar a cabo el análisis cualitativo de las imágenes resultantes mediante el proceso de compresión, se usa como criterio de comparación la imagen original y cada una de las imágenes comprimidas a las siguientes tasas de compresión 1:4, 1:16 y 1:64, se valora el efecto que ocasiona el mencionado proceso en las características de la imagen original bajo cada transformada y finalmente se

establece una relación de orden en términos de calidad de las imágenes originadas, usando las cuatro transformadas matemáticas de este estudio. Las características de la imagen tienen que ver con pérdidas de detalles, contrastes y contornos, así como todo ruido que surge con cada tasa de compresión.

De este modo, y atendiendo a los resultados presentes en las figuras 8, 10, 12 y 13, se puede concluir tal como indica la tabla, que la transformada wavelet de Haar produce una imagen resultante muy similar a la imagen original (ver figura 13), por tanto, la calidad de la misma no se ve alterada de manera significativa, siendo esta razón la que permite determinar que es la mejor opción en este análisis para llevar a cabo el proceso de compresión. Seguidamente se encuentran las imágenes comprimidas que se obtienen implementando la transformada de coseno, cuyas características se ven alteradas de manera significativa desde la primera tasa de compresión aplicada, y a medida que se implementan las otras, los elementos de la imagen se distorsionan de manera considerable.

Cuando se analizan las imágenes producidas con la transformada de Fourier se observa que la calidad de las mismas no es aceptable en todas las tasas de compresión. Para la tasa de compresión 1:4, gran parte de la información global de la imagen se pierde al aplicar el filtro pasa bajo, así como información perteneciente a los detalles. Al implementar la transformada de Fourier con las otras dos tasas de compresión usando filtros pasa bajo, se observa que las imágenes resultantes presentan una gran distorsión, no siendo posible el reconocimiento de las características de la imagen original en dichas imágenes.

Finalmente, Para el caso de la transformada de Walsh-Hadamard, se produce un efecto mosaico en todas las imágenes resultantes bajo las tasas de compresión en estudio, aspecto que la ubica en el último lugar en términos de calidad de la imagen, ya que desde la primera tasa de compresión la imagen original aparece dividida (ver figura 12).

## Discusión de resultados

Los resultados presentados en las tablas de comparación para este trabajo, así como las imágenes obtenidas en cada procedimiento, demuestran que lo más conveniente para el proceso de compresión de imágenes digitales, es el uso de la wavelet de Haar 2D al nivel 1, ya que, al medir la eficiencia de las transformadas matemáticas estudiadas e implementadas computacionalmente para tal proceso, la proporción SNR para la wavelet de Haar, es mayor que los resultados para SNR, obtenidos mediante las demás transformadas que se analizaron, (TF, TDC, TW-H). Del mismo modo, el factor de compresión (FC) de la wavelet de Haar es mayor que el obtenido por las demás transformadas, y al comparar cualitativamente la calidad de la imagen obtenida con esta transformada respecto a la imagen original, se aprecia que no hay diferencias visuales considerables.

Al implementar la wavelet de Haar 2D al nivel 1 de descomposición, con método de umbralización por niveles, removiendo los ceros cercanos, el porcentaje de ceros disminuye al 37,77%, con el 100% de la energía de la imagen retenida, lo que significa que la cantidad de coeficientes que se usan para representar la imagen disminuye considerablemente, siendo una característica importante que la calidad de la imagen no se ve alterada significativamente, a pesar de la mencionada reducción. La figura 12, demuestra la optimización de la información que representa a la imagen original mediante la compresión con la wavelet de Haar 2D al nivel 1. Se observa del mismo modo, que el error que produce esta transformada es el menor entre todas las que se implementaron.

Por otro lado se puede apreciar que las imágenes comprimidas bajo las tasas de compresión estudiadas usando las demás transformadas, no son aceptables en términos de calidad, situación que se puede observar claramente en la eficiencia de cada una de ellas. Por ejemplo, en el caso de la transformada discreta de coseno, las imágenes resultantes correspondientes a las tasas de compresión 1:16 y 1:64 que se obtienen durante los proceso de filtrado y compresión, originan niveles de

distorsión muy significativos, los cuales crean una pérdida casi total de la imagen original. Para el caso de la tasa de compresión 1:4, la imagen conserva la forma pero se evidencia niveles significativos de distorsión. Estos resultados cualitativos concuerdan con los valores obtenidos para el factor de compresión de esta transformada, ya que es menor con respecto a la transformada de Walsh-Hadamard y con respecto a la wavelet de Haar.

Los valores que se encuentran en las tablas comparativas que corresponden a la transformada de Fourier y Walsh-Hadamard, presentan valores mínimos para la SNR y máximos para el error, lo cual se puede traducir en bajo rendimiento en términos de eficiencia o de reducción de coeficientes para la representación de la imagen y baja calidad de la misma, siendo la transformada de Walsh-Hadamard la transformada que origina un menor resultado SNR y un máximo valor para el error. El análisis comparativo usando como elemento de medida el factor de compresión (FC), permite observar que la transformada de Walsh-Hadamard ocupa el segundo lugar en términos de eficiencia, sin embargo, la calidad de la imagen se ve altamente afectada, lo cual se puede explicar debido a la carencia que posee de elementos trigonométricos, aspecto que origina un efecto mosaico, tal como se aprecia en la imagen 11, cuyas tasas de compresión son 1:4, 1:16 y 1:64. Tanto mayor sea la cantidad de coeficientes eliminados para representar la imagen original, mayor será el mencionado efecto.

Los resultados para la transformada de Fourier, mediante las tasas de compresión, se pueden apreciar en la figura 8, donde la calidad de la imagen se ve distorsionada a partir de la primera tasa de compresión aplicada, 1:4, y aumenta el nivel de distorsión a medida que se implementan las otras tasas de compresión, esto es 1:16 y 1:64. Bajo esas condiciones, la imagen resultante no entrega resultados óptimos en términos de calidad dado que la imagen original se pierde, aspecto que se puede evidenciar mediante el factor de compresión, ya que en general, los valores obtenidos son los más bajos entre todas las transformadas usadas. Cabe señalar a pesar de lo anterior, que en el análisis cualitativo, la

transformada de Fourier entrega una calidad de la imagen más aceptable que la transformada de Walsh-Hadamard.

En suma, se ha llegado a concluir mediante el estudio y la posterior comparación de las imágenes resultantes y valores obtenidos en el filtrado y compresión de imágenes, que la eficiencia de la wavelet de Haar 2-D al nivel 1, en tales procesos es superior. Para llegar a dicho argumento se utilizó como herramientas de medidas la proporción SNR, (proporción señal a ruido), la calidad de la imagen resultante a distintas tasas de compresión (TC) y el factor de compresión (FC). De acuerdo a los resultados generales de las imágenes y siguiendo el orden obtenido en el análisis cualitativo, se evidencia que la transformada discreta de coseno, es la transformada que ocupa el segundo lugar, seguida por la transformada de Fourier y por último la transformada de Walsh-Hadamard.

A una conclusión similar han llegado diversos autores como Elgendi, Kumar, Gou, Rutledge, Coe, Zemp, Schuurmans y Adatia (2015), corroborando que la transformada wavelet, permite optimizar procesos de análisis de comportamientos de señales y tratamiento imágenes, ofreciendo resultados superiores a los ofrecidos por las demás transformadas matemáticas.

### **Globalización de la eficiencia de las métricas**

Para presentar los resultados de las métricas (SNR, FC y Valoración cualitativa) en función de las tasas de compresión (1:4, 1:16 y 1:64) obtenidas en el proceso de compresión de manera global, se ha promediado los resultados obtenidos de las transformada en cada una de las métricas consideradas. Del mismo modo, dichos valores se promedian para presentar un desempeño general de eficiencia. Cabe aclarar que, para la métrica calidad de la imagen, se tiene en cuenta que es una valoración dependiente de la observación de factores específicos tales como, pérdida de detalles, contrastes y contornos. En esta valoración se asigna 1 al mejor

resultado, 0.75 al segundo, 0.5 al tercero y finalmente 0.25 al cuarto. De manera general los resultados se presentan de forma general en las siguientes tablas.

Tabla 4. Globalización de la eficiencia de las métricas.

GLOBALIZACIÓN DE LA EFICIENCIA DE LAS MÉTRICAS				
TRANSFORMADAS	SNR	FC	CALIDA DE LA IMAGEN	EFICIENCIA
Fourier	1,675e-3	112e-2	5e-1	5,40558333e-2
Coseno	8,8496525e+1	11833e-4	7,5e-1	3,0143275e+1
Walsh-Hadamard	2,71e-10	154e-2	2,5e-1	5,97e-01
Wavelet de Haar	9,66e+05	562e-2	1	3,22E+05

Tabla 5. Resultados globales de eficiencia.

TRANSFORMADAS	EFICIENCIA
Wavelet de Haar	3,22E+05
Coseno	3,0143275e+1
Fourier	5,40558333e-1
Walsh-Hadamard	5,97E-01

## Conclusiones generales

El proceso de compresión de imágenes mediante las transformadas matemáticas implementadas computacionalmente en este estudio comparativo, así como las características teóricas que presentan dichas transformadas, posibilitan valorar de manera significativa la eficiencia de cada una en el mencionado tratamiento de imágenes. Los resultados obtenidos usando los parámetros de comparación descritos anteriormente, (SNR, FC y Comparación cualitativa en términos de calidad de la imagen resultante) permiten establecer el siguiente orden en términos de desempeño en el proceso de compresión de imágenes:

1. La transformada wavelet de Haar 2-D (nivel 1 de descomposición).
2. La transformada discreta del coseno.
3. La transformada de Fourier.
4. La transformada de Walsh-Hadamard.

El fundamento matemático presente en la forma de cada transformada ha sido descrito en términos de la estructura algebraica que poseen, así como la relación general presente entre ellas, tanto para el caso unidimensional como para el caso bidimensional, que es el que se estudió en este análisis comparativo. Dicha relación general se define en las ecuaciones 21 y 22. A partir de esta relación se aprecia que la esencia de cada transformada es el núcleo que la conforma, de modo que una imagen (arreglo bidimensional) a la cual se le aplica una de las transformadas matemáticas, se modifica de acuerdo a las características y propiedades de su núcleo, en el dominio de las frecuencias.

Los efectos que se observan con la aplicación de cada transformada matemática sobre una imagen implementando el algoritmo de compresión que la representa, en el dominio de las frecuencias, en función de las distintas tasas de compresión, ocasionan cambios significativos tales como pérdida de detalles, contrastes y contornos en la imagen recuperada mediante la transformada inversa. Por ejemplo, la transformada de Fourier, produce niveles de distorsiones muy altos, de modo que

no es posible reconocer características de la imagen original. Este efecto es poco aceptable en términos de calidad de la imagen, debido a que gran parte de la información global se pierde al aplicar el filtro pasa bajo, similarmente ocurre con la información de los detalles.

Para el caso de la transformada de Walsh-Hadamard, se observa un efecto mosaico en las imágenes resultantes bajo las tasas de compresión en estudio, de tal manera que la imagen original se divide en función de las tasas de compresión, tal como se aprecia en la figura 12. Como característica secundaria la franja que se puede visualizar presenta marcadas distorsiones en los bordes, aspecto que impide el reconocimiento de las características de la imagen original.

La transformada discreta de coseno por su parte, origina ruidos que afectan tanto el contorno, como los detalles, de modo que bajo la primera tasa de compresión (1:4), se empieza a perder información significativa de la imagen original. A medida que se aplican las distintas tasas de compresión, se observa que la imagen adquiere niveles importantes de distorsión. A pesar de los mencionados aspectos, el análisis cualitativo realizado permite establecer que esta transformada es más eficiente con respecto de las dos anteriores.

La transformada wavelet de Haar 2-D (nivel 1 de descomposición) presenta efectos importantes en la imagen resultante, tales como reducción de la cantidad de coeficientes que representan la imagen original, sin que este proceso implique pérdidas significativas en la imagen que se recupera con la transformada inversa. Al visualizar la figura 13, se puede apreciar que no existen diferencias marcadas entre la imagen original y la que se obtiene después de realizar el proceso de compresión usando la transformada inversa de Haar. La anterior característica y el hecho de obtener valores superiores en términos de eficiencia mediante las métricas de valoración de calidad de la imagen permiten afirmar que en este análisis comparativo, la transformada wavelet de Haar es más eficiente. Esta implementación computacional permite apreciar de forma directa los aspectos

teóricos descritos anteriormente, así como las ventajas y limitaciones de cada transformada en términos de eficiencia y calidad de las imágenes resultantes.

El impacto que este trabajo busca se puede entender como un aporte de elementos diferenciadores en los procesos de compresión y filtrado en el dominio de las frecuencias, tales como:

Efectos en las imágenes resultantes, obtenidas con la implementación computacional a través de las cuatro transformadas matemáticas.

Identificación de aspectos específicos de cada transformada tales como propiedades, estructuras matemáticas y en general características que permitan elegir una u otra transformada.

Herramienta de divulgación, en términos de aplicación de las transformadas básicas de la imagen en el proceso de compresión y filtrado de las mismas.

## Referencias

Aledo, D., (2013), Compresión de imágenes optimizadas en consumo energético para redes inalámbricas. (Tesis de maestría), Madrid España, Universidad Politécnica de Madrid.

Aristizábal, D. y Ramírez, C., (2006), Conceptos básicos del procesamiento digital de imágenes usando orquídeaJAI. Medellín, Universidad Nacional de Colombia.

Alcalá, A., Pinilla, C., y Ariza, F., (1997), Filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia. Revista de teledetección, (pp. 1-3)

Arfken, G., Weber, J, (2005), *Mathematical Methods for physicists*. Virginia, Estados Unidos, Elsevier Academic Press.

Ashraghi, H., (2000), Procesamiento digital de imágenes monocromáticas mediante el uso de al transformada rápida de Walsh. (Tesis de pregrado), Quito, Ecuador. Escuela Politécnica Nacional.

Celeste, C. (2005). Compresión de imágenes con pérdida. Método de la transformada wavelet. Trabajo Práctico Final CPDSI.

Cortes, J., Cano, H., y Chavez, J., (2007), *del análisis de Fourier a las wavelets - transformada continua wavelet (cwt)*. Scientia et Technica Año XIII, No 37. Universidad Tecnológica de Pereira. P.133-136.

Cortes, J., Cano, H., y Chavez, J.,(2008). Fundamentos y aplicación del muestreo en señales ubicadas en las bandas altas del espectro. Scientia et Technica [en línea] 2008, XIV (septiembre). Universidad Tecnológica de Pereira. P.40.

Doniak, M. (2006). Estudo da transformada de walsh-hadamard aplicada à transmissão ofdm. (Grau de Mestre em Engenharia Elétrica).Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Brasil.

Duoandikoetxea, J., (2003). *Lecciones sobre las Series y transformadas De Fourier*. Managua, Nicaragua, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

Elgendi M, Kumar S, Guo L, Rutledge J, Coe JY, Zemp R, et al. (2015). Detection of Heart Sounds in Children with and without Pulmonary Arterial Hypertension — Daubechies Wavelets Approach. PLoS ONE 10(12): e0143146. doi:10.1371/journal.pone.0143146

Esqueda, J., (2002), Fundamentos de procesamiento de imágenes. Tijuana, México, Universidad Autónoma de Baja California, Mexico.

Fiallos, E., (2002), Implementación de la transformada Karhunen-Loève para la compresión de imágenes monocromáticas. (Tesis de pregrado). Quito, Ecuador. Escuela Politécnica Nacional.

Garay, J. (1998). *Transformadas matemáticas en teoría de señales*. Zaragoza, España. Academia de ciencias exactas, físicas, químicas y naturales de Zaragoza.

Gayoso, V., Hernández, F., Hernández, L., Montoya, F., y Orúe, A. (2014). La transformada de Walsh-Hadamard y otros parámetros en la autenticación biométrica. RECSI, 2, 185-189.

González, J.,(2015), Métodos de algunas transformadas integrales para determinar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. (Tesis de pregrado) Pereira, Risaralda. Universidad Tecnológica de Pereira.

González, R. y Woods, R.(2002), *Digital Image Processing*. Tennessee, Estados Unidos. Pearson international edition education.

González, V. (2000) Compresión reversible y transmisión de imágenes (tesis doctoral). Universidad de Almería, Almería España.

Hamza, L., Debbal, S., y Bereksi-Reguig, F. (2010) Choice of the wavelet analyzing in the phonocardiogram signal analysis using the discrete and the packet wavelet transform. Expert Systems with Applications 37 (2010) 913–918

Ibarra, M. (2012). Transformada discreta coseno. México D.F, México. Universidad Nacional Autónoma de México.

Kolman, B., Hill, D., (2006). *Algebra lineal (octava edición)*, México, México, Pearson educación.

López, J., (2006), *La transformada de Fourier: propiedades y aplicaciones*. Madrid, España. Universidad de Granada.

Márquez, P. (2013). Procesamiento digital de señales mediante la teoría de Wavelets (trabajo de grado inédito). Universidad pontificia Comillas, Madrid, España.

Mastriani, M., *Decorrelación espacial rápida y de alta eficiencia para compresión de imágenes con pérdidas*. (Tesis de doctorado), Buenos Aires, Argentina. Universidad de Buenos Aires.

Morales, Y. J.;Torres, C. O. Correlación Digital De Imágenes Comprimidas Por Transformada Wavelet Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas, Vol. 7, Núm. 1, 2009, pp. 1-5 Universidad de Pamplona Colombia.

Muñoz, J.,(1997), *Compresión de ECG en tiempo real con el DSP TMS320C25*. (Tesis de Pregrado), Valencia, España. Universitat de Valencia.

Paredes, W., (1997), *Mejoramiento de imágenes monocromáticas usando la transformada discreta de coseno*. (Tesis de pregrado), Quito, Ecuador. Escuela Politécnica Nacional.

Polyanin, A., Manchirov, A, (2008) *Handbook of integral equations (second edition)*, Moscú, Rusia. Chapman & Hall/CRC.

Orozco, A. y Muñoz, P. (2013). Detención de latidos cardiacos patológicos y normales utilizando transformada por paquetes Wavelet, máquinas de soporte vectorial y perceptrón multicapa. *Tecnológicas*, 31, 73-91.

Rodríguez, J. (2008). Detención de la presencia de grietas cerradas en elementos tipo viga mediante la transformada de Wavelet (Trabajo de grado inédito). Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba.

Ruiz, V., y García, I., (2000), *Compresión de imágenes usando la transformada de Hadamard*, Almería, España, Universidad de Almería.

Salazar, H., Pueteman, G., y Villegas, J. (2007). Compresion de imágenes usando wavelets (tesis de maestría). Universidad Eafit, Medellín Colombia.

Schmidt, A., (2013), *FFT: Transformada rápida de Fourier*, Bahía Blanca, Argentina, Universidad Nacional del Sur.

Tischer, H., Thomson, P. y Marulanda, J, (2007). Comparación de tres transformadas para distribuciones tiempo-frecuencia por medio de su aplicación a registro de vibraciones ambientales. *Ingeniería y competitividad*, 9(2), 21-32.

Walker, J., (2008) *A primer on wavelets and their scientific applications*. Taylor & Francis Group, LLC, Eau Claire, Wisconsin, U.S.A.