DISEÑO DE UN LABORATORIO DE MATEMÁTICAS PARA EL FORTALECIMIENTO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE EN EL GRADO QUINTO: PENSAMIENTO NUMÉRCIO Y VARIACIONAL

RAMIRO DE JESÚS TOBÓN

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

2018

DISEÑO DE UN LABORATORIO DE MATEMÁTICAS PARA EL FORTALECIMIENTO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE EN EL GRADO QUINTO: PENSAMIENTO NUMÉRCIO Y VARIACIONAL

RAMIRO DE JESÚS TOBÓN TOBÓN

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ASESORA

LUZ DARY CASTELLANOS PRADA

MAGÍSTER EN CIENCIAS - MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2018

30 de septiembre de 2017

Ramiro de Jesús Tobón Tobón

"Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad" Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

Firma Ramiro de J Tobón T

DEDICATORIA

A mi esposa Dina Adela Ruiz Pérez, que, con su apoyo incondicional, comprensión, perseverancia y motivación constante para hacer las cosas con entereza, permitieron la culminación de este nuevo proyecto de vida.

A mis padres, quienes me apoyaron incondicionalmente en mi formación personal y profesional sin desfallecer un solo instante. Que Dios los tenga en su gloria.

A Martin Emilio Ruiz Vélez, por enseñarme el verdadero sentido de la vida, por su sabiduría, rectitud, y el constante apoyo que me brindó durante su existencia. Que Dios lo tenga en su gloria.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por iluminar mi camino, darme fortaleza y asertividad para sobrellevar todas las adversidades que se presentaron en el transcurso de la maestría.

A la Secretaría de Educación de Antioquia por el apoyo y fortalecimiento académico mediante el programa de Becas de Maestría que han hecho realidad el sueño de muchos docentes de Antioquia. Gracias por su noble gestión y dignificar la profesión docente

A la Universidad Pontificia Bolivariana, especialmente a la Escuela de Ingenierías, por darme la oportunidad de hacer parte de su comunidad académica, como magister en ciencias Naturales y Matemática.

A Luz Dary Castellanos Prada, asesora del trabajo de grado, por su valioso tiempo, apoyo, experiencia, dedicación y consejos brindados para la realización de este trabajo de tesis de maestría.

A los profesores y compañeros de la maestría en Ciencias Naturales y Matemática, especialmente a Juliana Isabel Lezcano por su entereza, liderazgo, perseverancia y compromiso con quien compartí saberes, tristezas, alegrías, haciendo de esta maestría una inolvidable y fructífera experiencia que quedara marcada para toda mi existencia.

Al programa Todos a Aprender por los aportes académicos brindados durante estos dos años que he hecho parte de este proyecto educativo desempeñando el rol de tutor. Gracias por contribuir a que mi enseñanza sea de carácter profesional, didáctica y asertiva.

A docentes y estudiantes con quienes he aplicado esta propuesta didáctica, gracias por creer en ella y participar activamente en cada uno de los laboratorios abordados.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

GLOSARIO

Axioma: Proposición verdadera que se acepta sin demostración.

Cambio y Variación: El cambio es una característica que no permanece, se modifica y se altera; mientras que el concepto de variación hace referencia a la cuantificación de dicho cambio.

Corolario: Verdad que se deriva como consecuencia de un teorema y que para su demostración no es necesario un razonamiento nuevo.

Definición: Enunciado proposicional que determina y delimita lo que es esencial en un objeto.

Demostración: Argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática.

Lema: Teorema necesario para demostrar otro teorema.

Ley: En matemáticas, una ley es el resultado de definir ciertas cantidades y relaciones y luego desarrollar conclusiones lógicas de esa definición.

Números Piramidales: Es el conjunto de números naturales que resultan de la suma sucesiva de los números cuadrados. Los primeros cinco números piramidales son: $1, 5, 14, 30, 55$.

Números Poligonales: Un número poligonal es un número natural que puede ser representado por medio de puntos consecutivos para formar un polígono regular, empezando por el uno. A este conjunto de números pertenecen los números triangulares, cuadrados, oblongos, pentagonales, hexagonales, entre otros.

Patrón o regularidad: Un patrón es una sucesión repetida de elementos (auditivos, gestuales, gráficos…) que se forman a partir de un núcleo generador siguiendo una regla; en algunas sucesiones el núcleo se repite periódicamente, en otras el núcleo crece o decrece de forma regular.

Proposición: Enunciado lógico al que se le asigna un valor de verdad, falso o verdadero.

Recíproco: Teorema que se deriva de otro teorema, tomando como hipótesis la tesis del teorema anterior y como tesis la hipótesis del mismo.

Regularidad numérica: Una regularidad numérica, es una serie o sucesión de elementos que se forman mediante un patrón o regla que permite definir o determinar mediante el análisis cada elemento de una progresión.

Secuencia matemática: Una secuencia o sucesión es un conjunto de elementos encadenados o sucesivos que guardan una relación entre sí de acuerdo con un patrón definido y con orden determinado, por lo general moviéndose hacia un resultado particular, se nombran con una letra y un subíndice (n) cuyo valor depende del lugar que el término ocupa en la sucesión.

Teorema: Proposición verdadera que requiere demostración para su aceptación.

RESUMEN

El laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje en el grado quinto es una propuesta que tiene como objetivo generar condiciones favorables que propicien en los educandos el agrado por esta área. La construcción del laboratorio se ha pensado como una propuesta divertida, en la que el juego, la narración de cuentos con sentido matemático, el intercambio de saberes, la manipulación de material concreto y el uso de las nuevas tecnologías se convierten en una herramienta para la construcción del conocimiento y la base para mejorar los niveles de calidad de la educación de los estudiantes.

Esta propuesta, busca que el estudiante sea el centro de la clase, e invita a realizar actividades en equipo bajo la orientación del docente, quien se convierte en un mediador del proceso. Cada temática expuesta en el laboratorio se ha estructurado de acuerdo con los Lineamientos de Educación Nacional, los Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje e integra los cinco pensamientos matemáticos (el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional); además, contiene material incluyente, divertido, manipulativo y claro que ofrece pautas a los maestros para crear espacios donde prime el aprendizaje significativo.

Con estas nuevas metodologías se favorece la autonomía, la organización y el autoaprendizaje en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos tanto de estudiantes como docentes; proporcionando características únicas en aspectos teóricos y prácticos.

Palabras clave: Laboratorio de matemáticas, enseñanza y aprendizaje, didáctica de matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Abordar la enseñanza de la matemática en la educación básica primaria de una forma adecuada es un requisito fundamental desde los lineamientos curriculares de 1998 propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN); sin embargo, en su enseñanza, sobre todo en los primeros años escolares, se han evidenciado falencias en los procesos y en el desarrollo de prácticas apropiadas que vinculen y motiven a los estudiantes a partir de experiencias significativas que potencien su formación inicial en todo lo relacionado con esta área.

Fomentar en las aulas de clase el agrado por las matemáticas, implica repensar la manera de enseñarlas de tal forma que no solo se incluya en los planes de estudio procesos como la modelación, comunicación, la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos, sino que se vivencie en los salones de clase el desarrollo de habilidades que motive al estudiante a pensar matemáticamente.

Romper con estos paradigmas, donde prima la enseñanza tradicional basada en la aplicación algorítmica de fórmulas, procedimientos rutinarios de ejercicios, repetición y memorización de tablas, es una cuestión que requiere ser analizada. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del siglo XXI requiere de maestros comprometidos con el área, capaces de diseñar y aplicar actividades con enfoques exploratorios que permitan al estudiante investigar y obtener sus propias conjeturas.

Las nuevas generaciones requieren de métodos de enseñanza y aprendizaje que cumplan con pautas de calidad pertinentes, que ayuden al desarrollo del pensamiento lógico frente a las situaciones que debe afrontar en su cotidianidad, por esto, se debe propender por la creación de estrategias donde estudiante y maestro sean protagonistas de nuevos saberes, a partir de la interacción constante y el estudio permanente de nuevos modelos pedagógicos.

Es en este sentido, puede ser que la utilización de un laboratorio para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas cobra gran relevancia, en gran medida porque posibilita el trabajo conjunto donde se conjuga el intercambio de saberes, intereses, fortalezas y debilidades; además, mejora permanentemente el autoaprendizaje de los educandos a través de la creación de ambientes adecuados para su desarrollo.

Luego de hacer un análisis reflexivo de las pruebas externas (Saber, Aprendamos y Supérate) en el grado quinto de la Institución Educativa Rural Ezequiel Sierra y el Centro Educativo Rural Bobal la Playa con relación al año 2015 se evidenciaron falencias considerables en los desempeños de los estudiantes en el área de matemáticas. Para ayudar a remediar esta debilidad, se consideró diseñar un laboratorio de matemáticas, como estrategia pedagógica para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes; teniendo en cuenta los ejes temáticos, los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (EBC), los lineamientos curriculares, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y las matrices de referencia propuestas por el Ministerio de educación Nacional (MEN).

Como punto de partida, se hizo un análisis de los ejes temáticos para este grado y una reflexión de cómo abordar estos contenidos desde diferentes estrategias metodológicas que pudieran motivar a los estudiantes por el área. De este análisis surge la necesidad de implementar un laboratorio donde el uso de elementos concretos, herramientas didácticas, materiales tangibles y las nuevas tecnologías se convirtieran en una pieza fundamental en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La implementación del laboratorio ha sido de gran impacto, ya que, se evidenciaron mejoras en los desempeños académicos de los estudiantes y las pruebas externas (saber, Aprendamos y Supérate) de los años 2015 y 2016; conjuntamente han generado mejores ambientes de aula donde el docente se convierte en un líder pedagógico y los estudiantes en el centro del proceso de formación, ya que cuentan con materiales impresos, los cuales se han venido utilizando durante la implementación.

En síntesis, este trabajo de profundización se estructura en seis capítulos distribuidos de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se presenta la justificación, los objetivos, las hipótesis de investigación y la metodología; los cuales, se han constituido en elementos fundamentales de este proyecto.

El segundo capítulo, presenta los fundamentos teóricos que dan sustento a este trabajo, se plantea una reflexión sobre la importancia de los laboratorios de matemáticas en el aula de clase y se dan a conocer algunos referentes nacionales e internacionales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediada por los laboratorios, los cuales son insumos y fundamentos de este trabajo.

En el tercer capítulo, denominado “La teoría de los números: Un mundo fascinante por explorar” se hace un recuento de cómo Georg Cantor (1845-1918) rompe con algunos paradigmas matemáticos sobre los números naturales que se tenían para la época, e introduce nuevas ideas relacionadas con la forma de ver y estudiar el concepto de conjunto.

El cuarto capítulo, presenta una aproximación al concepto de variación y cambio desde los números naturales en la educación básica primaria. Se plantea una reflexión acerca del estudio de los fenómenos que cambian como temática poco abordada en la enseñanza – aprendizaje según análisis del ICFES a nivel nacional; además, se hace un recuento histórico del pensamiento variacional desde los primeros asentamientos humanos hasta la actualidad.

En el quinto capítulo, se abordan cuatro laboratorios que en su conjunto forman el macro laboratorio de matemáticas como eje central de este trabajo de grado. Cada guía responde a un tema específico del área y se ha estructurado a partir de cuatro momentos; el momento uno, denominado apertura o exploración; el momento dos, denominado desarrollo o estructuración de la clase; el momento tres, denominado cierre o transferencia y momento cuatro, denominado para aprender más.

Cada laboratorio cuenta con su respectiva fundamentación teórica, orientaciones didácticas, una guía para el estudiante y unos anexos enumerados de manera independiente y no secuencial dado que cada uno es autocontenido y responde a unos objetivos propios. De este modo cuando el docente o estudiante utilice alguno de los laboratorios lo puede hacer de manera independiente sin acudir a los otros, pues cada uno responde a unas necesidades y temáticas específicas.

En este sentido, cada juego y actividad de los laboratorios se ha diseñado para que los estudiantes evidencien y experimenten la matemática de una forma más lúdica y divertida, y así puedan responder a los objetivos y temas de estudio que conforman el laboratorio que se propone en este trabajo; el cual a su vez se articula con los derechos básicos de aprendizaje, los estándares de competencias matemáticas y los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional, proporcionando a los estudiantes y maestros características únicas en aspectos teóricos y prácticos. Las actividades son estructuradas con el fin de despertar el espíritu creativo, la capacidad de innovación, la autonomía, la organización y planeación; fortaleciendo el saber hacer, el saber convivir, el saber ser y el saber conocer.

El sexto capítulo, contiene las conclusiones que se deducen después del desarrollo de la propuesta del laboratorio de matemáticas, a partir de la experiencia que se adquirió al aplicar algunos de estos laboratorios en el aula.

Es importante tener presente que, para desarrollar las acciones pedagógicas previamente planificadas, se hizo necesario una serie de anexos, haciendo que este trabajo se tornara un poco extenso, pero realmente no se pudieron evitar porque son parte fundamental de los laboratorios.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se hace una síntesis de la propuesta del trabajo de grado donde se aborda la justificación, los objetivos y la metodología.

1.1 Justificación.

La matemática en todos los niveles educativos es una de las áreas en las que más se ha evidenciado bajos rendimientos académicos tanto local, regional como nacional, debido a la poca relación entre los contenidos con las problemáticas y necesidades del contexto, a políticas equivocadas y mal enfocadas de entes gubernamentales y a fallas curriculares. Además, las condiciones económicas, la lejanía de algunas instituciones y la falta de compromiso de las familias en el proceso formativo; repercute en bajos rendimientos académicos y resultados insatisfactorios en las pruebas externas. Por estos motivos surgen dificultades que desmotivan a los estudiantes por el área, incluso antes de iniciar su proceso de aprendizaje llegan predispuestos a las aulas de clase.

Las nuevas generaciones necesitan métodos de enseñanza y aprendizaje que cumplan con pautas de calidad pertinentes, que ayuden al desarrollo de un pensamiento lógico frente a las situaciones que debe afrontar en su cotidianidad, por esto, se debe propender por la creación de estrategias donde estudiante y maestro sean protagonistas de nuevos saberes, a partir de la interacción constante y el estudio permanente de nuevos modelos pedagógicos.

Es indispensable romper con los modelos educativos tradicionales, a través de prácticas educativas innovadoras que vinculen las competencias actitudinales de los estudiantes y fortalezcan su capacidad crítica en la construcción de su conocimiento, donde se aprovechen sus aprendizajes. De esta forma, llegará a comprender, argumentar, representar y comunicar sus enseñanzas en la resolución de problemas, consiguiendo ser un sujeto matemáticamente competente.

Por esta razón, es de vital importancia desarrollar habilidades innovadoras que permitan la afinidad entre los procedimientos aritméticos y las necesidades de los estudiantes, donde la enseñanza de la matemática se convierta en un punto clave de la educación y deje de ser un paradigma. Así se logrará en los aprendices la motivación, la comprensión, el alcance de las competencias matemáticas y el desarrollo del pensamiento.

En gran medida la comprensión matemática se ha quedado en sistemas de algoritmos y fórmulas permeadas por clases magistrales, donde no se han tenido en cuenta los cambios y las evoluciones del contexto. En este sentido, el aula de clase debe convertirse en un lugar de experimentación en el cual, el estudiante sea un sujeto activo en el proceso educativo; por esto se propone la creación de un laboratorio de matemáticas que ayude y sea un soporte para que los estudiantes de la Institución Educativa Ezequiel Sierra del municipio de Guarne y el Centro Educativo Rural Bobal la Playa del municipio de Necoclí, aprendan las temáticas con agrado y encuentren en ellas relaciones y las articulen con su entorno, generando un pensamiento matemático que vislumbre la capacidad intelectual de los estudiantes y les permita enfrentarse a los desafíos de la sociedad moderna y globalizada.

Es de vital importancia que el aprendizaje sea significativo, por eso, los laboratorios de matemáticas son una estrategia para mejorar las prácticas pedagógicas en el aula, además ayudan a propiciar y dinamizar la construcción de nuevos conocimientos desde la profundización de los saberes.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general.

Diseñar un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado quinto de la Institución Educativa Rural Ezequiel Sierra del municipio de Guarne y el Centro Educativo Bobal La Playa de del municipio de Necoclí.

1.2.2 Objetivos específicos.

- Identificar los ejes temáticos que se deben abordar en el grado quinto.
- Desarrollar el marco teórico de los fundamentos matemáticos de cada uno de los ejes temáticos a abordar.
- Valorar de qué manera se puede utilizar el material didáctico en la enseñanza de las matemáticas del grado quinto.
- Implementar diferentes materiales didácticos que le permitan al estudiante la exploración y la vivencia de algunos contenidos temáticos del grado quinto.
- Elaborar un manual de instrucciones de los materiales didácticos que se encuentren en el laboratorio de matemáticas para contextualizar a los docentes en su correcta utilización y los temas que pueden enseñar con cada uno de ellos.

1.2.3 Metodología

Este proyecto se realizó en tres etapas. En la primera, se estudió y profundizó en la fundamentación teórica de los ejes temáticos del grado quinto, los derechos básicos de aprendizaje, los lineamientos y estándares curriculares, los cuales ayudaron a determinar los contenidos apropiados para el diseño del laboratorio.

En la segunda etapa, se realizó la valoración de las diferentes actividades y materiales que podían ser utilizados en el laboratorio; permitiendo así la construcción y/o adaptación entre los materiales concretos de los temas seleccionados. Para que los estudiantes tuvieran una verdadera apropiación de los conceptos matemáticos. Además, se diseñaron diferentes laboratorios con su respectiva fundamentación teórica, orientaciones didácticas, actividades y juegos, los cuales permitieron orientar el proceso educativo y la correcta utilización del material.

En la tercera etapa, se fueron implementando las actividades planteadas a medida que se fue desarrollando el laboratorio como parte de la metodología de trabajo de las aulas de clase, lo cual permitió validar la propuesta en todo momento.

CAPITULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1. Los laboratorios en la enseñanza de las matemáticas.

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que dan sustento a este trabajo. En primer lugar, se parte de la revisión y análisis de los antecedentes, justificación, planteamiento del problema y objetivos del trabajo de grado “Diseño de un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje” propuesto por Juliana Isabel Lezcano Escudero en la Escuela Normal Superior Santa Terecita de Sopetrán y Edinson de Jesús Velázquez Monsalve en el Centro Educativo Rural Cachumbal de Yolombó; luego se plantea una reflexión sobre la importancia de los laboratorios de matemáticas en el aula de clase. Posteriormente se dan a conocer algunos referentes nacionales e internacionales sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediada por los laboratorios, los cuales son insumos y fundamentos de este trabajo.

2.2. Importancia de los laboratorios de matemáticas en el aula de clase.

La implementación de un laboratorio en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, haciendo uso de materiales tangibles y herramientas tecnológicas cobra gran importancia en la forma de enseñar y aprender los conceptos de esta ciencia. Permear las clases con estrategias didácticas e innovadoras genera en los estudiantes motivación por esta área y rompe con los paradigmas donde su enseñanza es vista como un cúmulo de algoritmos y fórmulas aplicables que en muchas ocasiones no se relacionan con su cotidianidad.

Por otra parte, la enseñanza herrada de la matemática, especialmente en los primeros años escolares, genera apatía hacia su estudio, y la hace ver como una ciencia monótona y carente de aplicabilidad.

En este orden de ideas, para lograr un aprendizaje significativo, el profesor debe comprender que “las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos” (MEN, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006). Además, le corresponde re-direccionar y promover el desarrollo significativo de los conceptos matemáticos de manera que permee el nivel de aprendizaje del estudiante; para ello, es fundamental que el profesor se apoye en estrategias de enseñanza eclécticas, en el trabajo dinámico y colaborativo, en comunidades de aprendizaje, en herramientas lúdicas y en el uso de tecnologías.

Por consiguiente, como lo señala (De Guzman, 2007), "es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, que la matemática es aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil".

En este sentido, la implementacion de un laboratorio para la enseñanza-aprendizaje de las matematicas cobra gran importancia y redirecciona la práctica pedagógica, a partir de la cual, los estudiantes actúen, midan, clasifiquen, definan, infieran, predigan, experimenten, visualicen, controlen variables, hagan observaciones sistemáticas, descubran relaciones y conexiones, y las comuniquen. Estableciendo así una relación dialéctica entre materiales manipulativos y actividades matemáticas.

Entendiendo así, que la utilización de los materiales produce una actividad manipulativa en quienes los usan y, a su vez, se convierten en elementos generadores de actividad mental, dinámicas que se contraponen con la pasividad externa que manifiestan los estudiantes que escuchan la explicación de un profesor (Arce, 2004).

2.3. Referentes nacional e internacional en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediada por laboratorios.

El diseño de laboratorios de matemáticas como estrategia pedagógica, ha sido utilizado en diferentes instituciones a nivel nacional e internacional como método de enseñanza en el aula para un mejor aprendizaje de las matemáticas, ya que estos brindan estrategias novedosas y agradables a los educandos. Cabe destacar que las investigaciones sobre este tema no son muy comunes, pues nos encontramos ante un área de poco interés para los estudiantes y en muchas ocasiones para los docentes.

En este trabajo se toma como referencia el estudio de algunos laboratorios, los cuales exponen la importancia de la enseñanza de las matemáticas desde la creación de nuevas metodologías, y han permitido mejorar las prácticas académicas. Estos proyectos se describen a continuación:

Diseño de un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza y aprendizaje. Este proyecto aportó al mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes de grado quinto de la básica primaria de la Institución educativa Escuela Normal Superior Santa Teresita y el C.E.R la Cruz, a partir del aprendizaje significativo de las matemáticas y se fundamentó en la implementación y utilización de materiales concretos, juegos, herramientas tecnológicas y demás actividades, respondiendo así a objetivos concretos.

Mejoramiento del desempeño en matemáticas. Esta guía es la cuarta de una serie sobre prácticas educativas que mejoran el aprendizaje en matemáticas y recopila una síntesis de investigaciones sobre temas educativos de importancia internacional. Las prácticas sugeridas en el folleto reflejan una mezcla de estrategias emergentes y otras usadas durante mucho tiempo (Grows & Cebulla, 2000).

Esta recopilación resume una serie de investigaciones que sustenta cada práctica educativa, describe cómo puede aplicarse la investigación en el aula de clases y fórmula una lista de los estudios más importantes que fundamentan la práctica en la enseñanza de la matemática.

Laboratorio de matemáticas. Este proyecto partió del planteamiento que hizo referencia a que el conocimiento era producto de una continua, paulatina y progresiva construcción, y que la actividad de quien asumía el aprendizaje era parte sustancial del proceso constructivo; es decir, el constructor era el participante y la actividad el medio que permitía la construcción del conocimiento. Manteniendo en continua "actividad" al participante fue uno de los retos didácticos más acuciantes, retos que se asumieron en esta propuesta educativa (Arce, 2004).

“Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, aplicada en escuelas críticas”. Esta experiencia fue aplicada en el aula para dar cuenta de las transferencias y los niveles de rendimiento que alcanzaron los estudiantes en el aprendizaje de la geometría, a partir de la metodología propuesta en el laboratorio (Modelo de Van Hiele y el uso del software Cabri). Duró aproximadamente dos meses. (Lastra, 2005).

Esta investigación analizaba el impacto generado por las diferentes estrategias metodológicas, el uso de la tecnología, el rol del profesor, y del estudiante, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría a partir de la implementación de un laboratorio.

Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología, EFIT y EMAT: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. EFIT y EMAT (Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología) son modelos de innovación educativa, cuya pieza principal es el uso de entornos tecnológicos de aprendizaje, que permitieron a los estudiantes experimentar nuevas formas de apropiación del conocimiento y abrieron espacios de comunicación e interacción social en el aula, en los que se entablaron conversaciones significativas de matemáticas y de ciencia, entre estudiantes y entre maestro - estudiantes. (Rojano, 2006).

Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Este trabajo inició con la definición, principios y postulados del constructivismo. Luego refirió sus implicaciones en Matemática Educativa e hizo hincapié en la definición de práctica pedagógica, formulando un rediseño en la creación de ambientes de aprendizaje y en el establecimiento de competencias por parte de los docentes.

Esta propuesta pedagógica propició el uso de las TIC con énfasis en el principio de la tecnología que propuso el Consejo Estadounidense de Profesores de Matemática (NCTM); además realzó el papel de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza efectiva de la matemática, enfatizó en el uso de las TIC con enfoque constructivista, y presentó un ejemplo, a través del Aprendizaje por Proyectos (APP), explicando sus ventajas (Castillo , 2008).

De la investigación al aula: prácticas de laboratorio utilizando calculadora. Este trabajo presentó el diseño de dos secuencias didácticas en forma de prácticas de laboratorio, fundamentadas en resultados de investigaciones en matemática educativa de corte socioepistemológico.

Con el desarrollo de esta propuesta se favoreció el uso inteligente de la tecnología (calculadoras graficadoras) en el aula de matemáticas, y se propició un acercamiento entre docente y estudiante de matemáticas con la investigación en matemática educativa (Buendía & Samayoa, 2009, págs. 1483 - 1490).

El laboratorio de matemáticas y la Metodología Estudio de Clase (MEC).

Esta propuesta educativa se basó en el fortalecimiento de competencias matemáticas en estudiantes de educación básica y media, por medio de la formación docente, mediante el diseño e implementación de proyectos pedagógicos que primaran el uso de materiales didácticos y software educativo a través de la metodología Estudio de clase, bajo un curso B-Learning (Ramírez, 2013).

La conformación equipos de estudio, con maestros de matemáticas de varias instituciones del departamento, para que compartieran intereses en torno a la búsqueda de alternativas o soluciones a necesidades o problemáticas de clase.

Para la realización de este trabajo se conformaron equipos de estudio, con maestros de matemáticas de varias instituciones del departamento del Quindío, con el objetivo de compartir intereses en torno a la búsqueda de alternativas o soluciones a necesidades o problemáticas de clase.

Como resultado de la ejecución de este proyecto y con el propósito de fortalecer el desarrollo de competencias en los estudiantes y la formación docente, se estableció el club de matemáticas departamental con ocho estudiantes de cada una de las instituciones beneficiadas del proyecto y con participación directa de los docentes y estudiantes de matemáticas de la universidad del Quindío.

El huerto como laboratorio de matemáticas: Aprendizaje de los números racionales positivos.

El objetivo de la presente investigación fue incorporar al trabajo de aula, el huerto como laboratorio vivo, que permita experiencias formativas significativas, aplicando una enseñanza transversal, al integrar algunos conceptos matemáticos y biológicos con algunos objetivos de educación ambiental, buscando contribuir a la comprensión de los números racionales en los estudiantes de séptimo de la Institución Educativa Alfonso López Pumarejo, municipio de Palmira, Valle del Cauca (Cuenca, 2014).

Este trabajo de grado tuvo como fundamento incorporar al aula de clase el huerto como laboratorio vivo, con el objetivo de vincular a la práctica pedagógica experiencias formativas significativas, utilizando conceptos integrados con ciencias y educación ambiental, buscando contribuir a la comprensión de los números racionales positivos en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Alfonso López Pumarejo, del municipio de Palmira, Valle del Cauca.

Laboratorios matemáticos para la enseñanza desarrolladora del componente numérico variacional en los estudiantes del grado quinto. Con este trabajo de grado se realizó un estudio teórico tendencial sobre el proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas en primaria. Todo esto llevó a plantear una propuesta para la enseñanza de las matemáticas como los laboratorios matemáticos. También se lograron los siguientes resultados: cada vez es más evidente el uso de estrategias innovadoras que atraigan al estudiante, lo motiven y lo hagan protagonista de su aprendizaje, es esencial dar un giro a la educación y los materiales didácticos son un medio para lograr este giro (Padilla & Mosquera, 2016).

CAPITULO 3

LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS: UN MUNDO FASCINANTE POR EXPLORAR.

3.1. Cantor y la magia de los números

Desde el inicio de la humanidad, el ser humano sintió la necesidad de agrupar sus pertenencias para cuantificarlas de una forma más acertada. El solo hecho de asentarse en un lugar específico, creó la necesidad de emplear un método de conteo con el único objetivo de proteger sus pertenencias. Rastros históricos que datan de aproximada mente 4000 años a. C. han dejado ver como el hombre de las cavernas empleaba de una forma intuitiva el concepto de conjunto utilizando solo unos cuantos números.

Esta escritura de los números en huesos, madera, piedra, y en paredes de las cavernas se limitaba a una marca por cada elemento y solo servía para representar cantidades muy pequeñas.

Este concepto intuitivo que tenían los primitivos de contar y comparar el número de elementos de ciertas colecciones de objetos cada vez más grandes, los condujo a buscar una mejor forma de representar o agrupar los números, un símbolo representaba un grupo, por ejemplo, de 10 en 10 como lo hicieron los egipcios.

Con el trascurrir del tiempo se fue desarrollando una aritmética básica cimentada en las operaciones de suma y resta; en casos especiales utilizaban la multiplicación y la división. Con el desarrollo de la humanidad se hizo necesario establecer símbolos y reglas matemáticas, fue así como a partir del siglo XIX que la Teoría de Conjuntos cobró gran importancia y se empezó a desarrollar en forma rigurosa y sistemática.

A mediados del siglo XIX, el matemático ruso Georg Cantor (1845-1918) rompió con algunos paradigmas matemáticos que se tenían para la época, e introdujo nuevas ideas matemáticas relacionadas con la forma de ver y estudiar el concepto de conjunto. Cantor estructuró la teoría de conjuntos, a partir de dos ideas; la correspondencia uno a uno o apareo y la de conjunto contable o enumerable.

Para iniciar la construcción de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos propuesta por George Cantor, se debe partir de la siguiente hipótesis:

Hipótesis: Existen conjuntos y los conjuntos tienen elementos, los cuales se relacionan a partir del axioma de extensión.

Axioma de extensión. Si cada elemento de un conjunto A es un elemento de un conjunto B y cada elemento del conjunto B es un elemento del conjunto A, entonces $A = B$. En otras palabras, se dice que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Simbólicamente,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Si consideramos los conjuntos:
$A = \{ Estudiantes\ de\ Antioquia\}$,
$B = \{ Estudiantes\ de\ la\ IER\ Ezequiel\ Sierra\ de\ Guarne\}$.
Como $B \subset A$ y $B \neq A$, se dice que B es una especificación de A y se escribe $B = \{x \in A; x\ es\ estudiante\ de\ la\ IER\ Ezequiel\ Sierra\ de\ Guarne\}$

Axioma de especificación. A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de A que cumplen $S(x)$.

Este nuevo axioma admite la construcción de subconjuntos de un conjunto dado y permite iniciar la construcción de los números naturales; para eso se debe aceptar que:

1. Existe un conjunto A con elementos.
2. Sea $B = \{x \in A; x \neq x\}$.

Como no hay un elemento de A que no sea igual a sí mismo, se concluye que B es un conjunto sin elementos, llamado (conjunto vacío) y se denota con el símbolo $\emptyset$. Entonces se dice que existe un único conjunto sin elementos llamado conjunto vacío, y se denota con el símbolo $\emptyset$. Este conjunto será el punto de referencia para la construcción de los números naturales. Como $B = \emptyset$, se tiene que $C = \{\emptyset\}$ es un conjunto no vacío, ya que contiene un elemento; estableciéndose así el número uno.

Ahora, como $B = \emptyset$ y $C = \{\emptyset\}$, se obtiene el conjunto D conformado por los elementos $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; este nuevo conjunto se denota con el número dos. Como dos existe, se puede construir un nuevo conjunto a partir de $B = \emptyset$, $C = \{\emptyset\}, D = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y obtener así el conjunto $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\ \{\emptyset\}\ \}\ \}$ que representa al *cardinal* 3.

Hasta el momento, cada número se ha obtenido mediante la adición del número anterior, visto como conjunto. Pero esto no garantiza que existan todos los números naturales, apenas garantiza que existen todos aquellos números que, con paciencia, se puedan seguir construyendo. Teniendo como base la aplicación del axioma de extensión y el axioma de especificación se puede seguir la construcción de los números naturales a partir del teorema de unión.

3.2. Construcción de otros números naturales por medio del teorema de unión

Para obtener los otros números naturales $\{4, 5, 6, 7, 8, ...\}$ hay que analizar nuevas definiciones y aceptar otros axiomas.

Definiremos la unión y la intersección entre dos conjuntos, la cual permitirá enunciar el axioma de unión y el axioma del infinito.

Definición 1. Se define la unión entre dos conjuntos $A\ y\ B$ como:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo:

Si $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y
$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\ impar\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definición 2. Se define la intersección entre dos conjuntos $A\ y\ B$ como:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x/x \in A \wedge \in B\}$$

Ejemplo:

Si $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ primo\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ par\}$, entonces

$A \cap B = \{2\}$.

Axioma de unión. Para toda colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección dada.

Si C es una colección de conjuntos entonces hay un conjunto V tal que $\forall A \in C$ y $\forall x \in A$ donde $x \in V$. Por el axioma de especificación se logra definir el conjunto $\{x \in V ; x \in \mathrm{A}$ para algún $A \in C\}$.

Este conjunto se conoce como la unión de los elementos de C y se denota por $\cup_{A \in C} A$. Ahora se puede formar la unión de conjuntos.

Si se tiene un conjunto A, se puede definir el sucesor de A y denotarlo con A^+, donde $\mathrm{A}^+ = \mathrm{A} \cup \{\mathrm{A}\}$; es decir, para obtener a A^+ se debe considerar todos los elementos de A y adicionarle a A como elemento.

Aplicando la definición: Un conjunto S se dirá que es sucesor si $0 \in S$ y toda vez que $A \in S$ entonces $A^{+} \in S$.

Se establece ahora el siguiente axioma:

Axioma del Infinito. Existe un conjunto de sucesores.

Del anterior axioma se establece que el conjunto $D = \{S; S\ es\ un\ conjunto\ sucesor\}$ es no vacío.

Sea ahora C una colección de conjuntos. Se define la intersección de los elementos de C como el conjunto $\{x \in \cup_{AC} A; x \in A, \forall A \in C\}$. Este conjunto se indica con $\bigcap_{A \in C} A$. La definición de la intersección se pudo hacer por medio de los axiomas de la unión y de especificación. Es decir, no se necesitó de un nuevo axioma para construirla.

Lema 4. 1. Si A y B son conjuntos de sucesores entonces $A \cap B$ es un conjunto de sucesores.

Demostración. Como $0 \in A$ y $0 \in B$ entonces $0 \in A \cap B$. Si ocurre que $n \in A \cap B$ entonces $n \in A$ y $n \in B$. Como A y B son conjuntos sucesores $n^{+} \in A$ y $n^{+} \in B$ y luego $n^{+} \in A \cap B$.

Corolario 4. 1. $\bigcap_{A \in D} A$ es un conjunto de sucesores.

Definición 3. La intersección $\bigcap_{A \in D} A$, se llama el conjunto de los números naturales y se denotará ω.

3.3. La potenciación y sus propiedades

Definición 4. La potenciación es una operación aritmética que se utiliza para expresar de forma abreviada una multiplicación repetida de una misma cantidad. Es decir, si se tiene un mismo número multiplicado varias veces se puede enunciar esa operación en forma de potencia: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-veces} = a^n$, donde a se llama base, y n se llama exponente. En esta sección son considerados todos como números naturales.

Leyes formales de la potenciación.

- **Ley uniforme:** La potencia n-ésima de un número natural existe y es única.

Si se elevan ambos números de una igualdad a una misma potencia, se obtiene otra igualdad.

Si $a = b$ y $n > 1$ entonces $a^n = b^n, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- **Ley de la Monotonía:** Elevando ambos miembros de una desigualdad a una misma potencia, distinta de cero se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la dada. Dados $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$ se tiene que:

$$a > b \Longrightarrow a^n > b^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a < b \Longrightarrow a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota. La potenciación de números naturales *no es asociativa*, ya que depende de la forma como se asocien los operandos.

$$(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$$

Ejemplo.

$$(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$$
$$8^2 \neq 2^9$$

- **Ley distributiva:** La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división, pero no lo es con respecto a la adición y a la sustracción.

Distributiva con respeto a la multiplicación y a la división.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \ \ y \ \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ donde } b \geq 1 \text{ y } n > 1$$

No distributiva con relación a la adición y a la sustracción

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$
$$(a-b)^n \neq a^n - b^n$$

Nota. La propiedad conmutativa no se cumple en la potenciación, exceptuando los casos donde la base y el exponente tienen el mismo valor o son equivalentes. Se dice que no es conmutativa porque depende del orden de la base y del exponente; es decir, al cambiar el orden de los exponentes y de la base la potencia varía. Así; $\forall a, n \in \mathbb{N} - \{0\}$,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \ veces)$$
$$n^a = n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \ (a \ veces)$$
$$\therefore \ a^n \neq n^a$$

Ejemplo.

$$3^2 \neq 2^3$$

$$9 \neq 8$$

- **Ley cancelativa:** La ley cancelativa de la potenciación es la propiedad recíproca de la ley uniforme. $a^c = b^c \wedge c \neq 0$ entonces $a = b$.

Operaciones con potenciación.

Todo número natural a distinto de cero elevado a la cero es igual a 1. Escribimos:

$$a^0 = 1$$

Demostración.

$$\begin{aligned} a^0 &= a^{n-n}, \text{ donde } n \in \mathbb{N} - \{0\} \\ &= \frac{a^n}{a^n} \\ &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a} = 1 \end{aligned}$$

- **Potencia con exponente 1.**

Todo número distinto de cero elevado al exponente uno da como resultado el mismo número; es decir, el número se escribe una sola vez, que sería lo mismo que poner el mismo número.

$$a^1 = a$$

- **Multiplicación de potencias de igual base.**

Cuando se multiplican dos potencias con la misma base se escribe la misma base y se suman los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \ \forall a, n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ veces}} = a^{n+m} \end{aligned}$$

- **División de potencias de igual base.**

La división de dos potencias de igual base es igual a la potencia de la misma base y el exponente es igual a la resta de los exponentes respectivos (la misma base y se restan los exponentes).

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \forall a, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ veces}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ veces}} = a^{n-m}$$

- **Potencia de una potencia.**

La potencia de una potencia es igual a la potencia de la misma base elevada a la multiplicación de ambos exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \forall a, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(a^n)^m &= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)^m}_{n-veces} \\
&= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-veces}\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-veces} \ldots \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-veces}}_{m-veces} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \cdot m-veces} = a^{n \cdot m}
\end{aligned}$$

- **Potencia de un producto.**

La potencia de un producto es igual a cada uno de los factores del producto elevados al exponente de dicha potencia. Es decir, una potencia de base $(a \cdot b)$ y de exponente "n", es igual al factor "a" elevado a la "n" por el factor "b" elevado a la "n".

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \cdots \cdot (a \cdot b)}_{n-veces} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n-veces} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b\ b \cdot \ldots \cdot b)}_{n-veces} \quad \text{por la propiedad asociativa y conmutativa del producto} \\
&= a^n \cdot b^n
\end{aligned}$$

- **Regla de cociente a una potencia.**

Una fracción elevada a una potencia es lo mismo que el numerador elevado a la potencia y el denominador elevado a la potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ , \forall a, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot (\cdots) \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n-veces}$$

$$= \frac{\underbrace{(a) \cdot (a) \cdot (a) \cdot (\cdots) \cdot (a)}_{n-veces}}{\underbrace{(b) \cdot (b) \cdot (b) \cdot (\cdots) \cdot (b)}_{n-veces}}$$

$$= \frac{\mathrm{a^n}}{\mathrm{b^n}}$$

Resumen de las propiedades de la potenciación. Si $a, b, n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$

Propiedades	Ejemplo
$a^0 = 1;$	$5^0 = 1$
$a^1 = a$	$5^1 = 5$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(3)^2 \cdot (3)^5 = 3^{2+5} = 3^7 = 2187$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^3 = 3^{2\times 3} = 3^6 = 729$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 36$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4$
$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{2^{-2}}{4^{-3}} = \frac{4^3}{2^2} = \frac{64}{4} = 16$

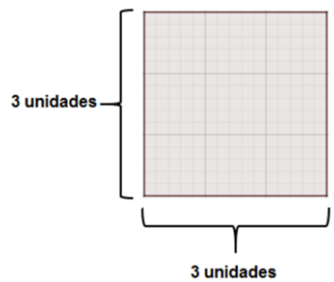
Tabla 1. Propiedades de la potenciación

3.4. El cuadrado de un número

Se llama cuadrado de un número al producto de 2 factores de números iguales. Para calcular el cuadrado de un número, sólo hay que multiplicar el número por sí mismo.
Ejemplos:

El cuadrado de 3:

$3 \times 3 = 3^2 = 9$



El cuadrado de $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

Teorema 3.1. La diferencia de los cuadrados de dos *números enteros* consecutivos es igual al doble del menor más uno.

Sean a y (a + 1) los números enteros consecutivos entonces $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$.

Demostración.

$$(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$$

Ejemplo.

$(3 + 1)^2 - 3^2 = 2(3) + 1 = 7$.

El cuadrado perfecto de un número natural.

Un número natural se dice cuadrado perfecto si su raíz cuadrada es otro número natural.

Ejemplos.

a^2 es un cuadrado perfecto porque $\sqrt{a^2} = a$

3^2 es un cuadrado perfecto porque $\sqrt{9} = 3$.

En la siguiente tabla se presentan los cuadrados perfectos de los 10 primeros números naturales:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrado perfecto	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Tabla 2. Cuadrados perfectos de los 10 primero números naturales.

Características del cuadrado perfecto de un número.

Teorema 3.2. Si un número termina en 5 y es cuadrado perfecto, se cumple que: La cifra de sus decenas es 2 y la cifra de sus centenas es par.

Demostración.

Sea "N" un número cuadrado perfecto que termina en cinco, es decir que $N = a5 = 10a + 5$; donde a es el número que se antepone al cinco ya sea decena, centena, o así sucesivamente. Así:

$$\begin{aligned} N &= (10a + 5)^2 \\ &= 100\mathrm{a}^2 + 100\mathrm{a} + 25 \\ &= 100\mathrm{a}\,(\mathrm{a} + 1) + 25 \end{aligned}$$

Como $a\,(a+1)$ es par, se tiene que: $a\ (a+1) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ lo cual prueba que la cifra de las centenas es par.

Teorema 3.3. Todo cuadrado perfecto es de la forma: $4n$ ó $4n + 1$

Demostración.

Sea N un cuadrado perfecto, entonces N es par o impar.

i) Si N es par, su raíz cuadrada también será par. Por lo tanto: $\sqrt{N} = 2p$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Así; $N = 4p^2 = 4n$, donde $n = p^2 \in \mathbb{N}$.

ii) Si N es impar, su raíz cuadrada también será impar. Por lo tanto: $\sqrt{N} = 2m + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así; $N = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4\underbrace{(m^2 + m)}_{n\in\mathbb{N}} + 1 = 4n + 1$.

Pautas para saber cuándo un número no es cuadrado perfecto

i) Si un número termina en 2, 3, 7 u 8, no puede ser cuadrado perfecto. Es decir, como el cuadrado de un número termina en la misma cifra que el cuadrado de sus unidades, y como ninguno de los cuadrados de las 9 cifras significativas termina ni en 2, 3, 7 u 8, un número que termina en estas cifras no podrá ser un cuadrado perfecto.

ii) El producto de dos números enteros consecutivos no es cuadrado perfecto, si uno de ellos es un cuadrado perfecto, el otro no lo es.

Ejemplo.

Ninguno de los siguientes números es un cuadrado perfecto ya que no existe un número natural que elevado al cuadrado de como resultado dicho número.

$$8 \cdot 9 = 72.$$
$$4 \cdot 5 = 200$$
$$16 \cdot 17 = 272$$

iii) Si un número termina en una cantidad impar de ceros, no es un cuadrado perfecto.

Prueba.

Consideremos el número $A000 \cdots 000$, el cual tiene un número impar de ceros y A es un número diferente de cero. Entonces podemos escribir el número impar de ceros como $2\text{n} + 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y así:

$$A\,\underbrace{000 \cdots 000}_{2n+1} = A \cdot 10^{2n+1} = A \cdot 10^{2n} \cdot 10$$

Por lo tanto, si aplicamos la raíz cuadrada al número obtenemos:

$$\sqrt{A \cdot 10^{2n} \cdot 10} = \sqrt{\text{A}} \cdot \sqrt{10^{2\text{n}}} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{\text{A}} \cdot 10^{\text{n}} \cdot \sqrt{10} \neq \text{k}^2 \text{ para k} \in \mathbb{N}$$

De lo anterior se puede ver que A puede ser cuadrado perfecto; 10^{2n} es un cuadrado perfecto, pero 10 no es cuadrado perfecto, luego el producto no puede ser un cuadrado perfecto.

3.5. La radicación.

La radicación es una operación que permite hallar la base conociendo el exponente y la potencia. Simbólicamente se expresa: $\sqrt[n]{m} = r \leftrightarrow r^n = m$. La expresión $\sqrt[n]{m} = r$ se lee: Raíz n-ésima de m es igual a r.

Ejemplo.

$$3^3 = 27 \leftrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

Propiedades de la radicación.

1. Multiplicación de raíces de igual índice.

Para multiplicar raíces con igual índice, se multiplican las bases y se conserva el índice, dicho de otra manera: La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \forall \in a, b, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

Por definición de la raíz n-ésima, se tiene que:
$\sqrt[n]{a} = p \leftrightarrow a = p^n$ y $\sqrt[n]{b} = q \leftrightarrow b = q^n$, donde $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$
Al multiplicar $a \cdot b$ se obtiene:

$a \cdot b = p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n$ (propiedad de la potencia)

Al aplicar la definición de raíz n-ésima, se tiene que:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = p \cdot q = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Ejemplo.

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$

2. Raíz de un cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \forall \in a, b, n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

Por definición de la raíz n-ésima, se tiene que:

$\sqrt[n]{a} = p \leftrightarrow a = p^n$ y $\sqrt[n]{b} = q \leftrightarrow b = q^n$

Aplicando la propiedad de potencias se tiene que:

$\frac{a}{b} = \frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$ (propiedad de la potencia)

Aplicando la raíz n-ésima a ambos lados obtenemos que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

3. Raíz de una raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}\ , \forall \in a, n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Demostración.

Por definición de la raíz n-ésima y m-ésima se tiene que:

$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n$ (1)

$\sqrt[m]{b} = q \leftrightarrow b = q^m$ (2)

Al elevar b de la ecuación (2) al exponente n y aplicar la propiedad de la potencia se tiene que:

$b^n = (q^m)^n = q^{mn}$ (3)

Reemplazando la ecuación (1) en la ecuación (3) se deduce que:

$$q^{mn} = a$$

Al tomar a ambos lados el índice mn se concluye que:

$$\sqrt[mn]{q^{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

Por tanto,

$q = \sqrt[mn]{a}$ (4)

Al reemplazar la ecuación (2) en (4) se obtiene que:

$\sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a}$ (5)

y reemplazando la ecuación (1) en (5) se concluye que: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

CAPITULO 4

UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE VARIACIÓN Y CAMBIO EN LOS NÚMEROS NATURALES EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

4.1. Reflexiones preliminares

El estudio de los fenómenos que cambian es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes en los primeros años escolares. Su entendimiento involucra de forma recurrente el concepto de variación y cambio, tema poco abordado en este ciclo escolar y que genera bajo rendimiento académico en el área de matemática a nivel nacional.

En los análisis de los resultados de las pruebas Saber, Aprendamos y Supérate con el Saber presentadas en el año 2015 se evidencia que la mayoría de los establecimientos educativos de Colombia presentan bajo rendimiento en los aprendizajes relacionados con el pensamiento variacional.

"El 92,04% no construyen ni describen *secuencias numéricas y geométricas*; el 79,77% no reconocen equivalencias entre diferentes tipos de representaciones relacionadas con números; el 98.21% no generan equivalencias entre expresiones numéricas, y el 97.51% no justifican y generan equivalencias entre expresiones numéricas (MEN, PR-PREA-A-123-PTA-VARIACIÓN Y CAMBIO, 2017), como se muestra en la figura 1.

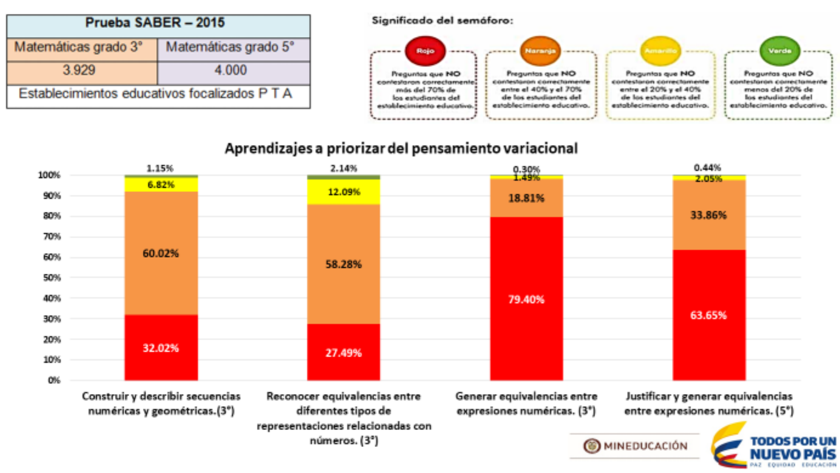


Figura 1. Análisis de las pruebas Saber en los establecimientos educativos focalizados por el PTA relacionado al pensamiento variacional.

Estudios realizados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) evidencian que en la educación básica primaria hay un alto porcentaje de los estudiantes que no contextualizan los contenidos de matemáticas, no identifican patrones de variación con operaciones de suma y división, y no solucionan problemas relacionados con el *pensamiento variacional*, incluso cuando la situación es presentada con figuras.

Las insuficiencias que poseen los estudiantes en esta área hacen evidente la necesidad de acompañar la práctica docente con actividades donde se articule el pensamiento variacional con los otros cuatro pensamientos matemáticos, especialmente en los problemas que implican variación y cambio. De acuerdo con (Maury, Palmezano, & Cárcamo, 2012, pág. 11) esta problemática se viene dando por una serie de factores tales como:

1. Educadores de básica primaria con escaso conocimiento efectivo de los lineamientos curriculares de matemáticas, específicamente en lo relacionado con el pensamiento variacional.

2. Insuficiencia didáctica para la elaboración de actividades y materiales para situaciones problema que involucran pensamiento matemático general y variacional en particular.

3. Tareas elaboradas por los docentes para que ejecuten los estudiantes, en un alto porcentaje no contextualizadas con los contenidos de Matemáticas del MEN.

4. Persisten prácticas pedagógicas sin enfoque sistémico.

5. No se evidencia una estrategia concreta que favorezca el desarrollo del pensamiento variacional.

La anterior reflexión deja de manifiesto que para abordar el pensamiento variacional en los primeros años escolares, la escuela debe promover actividades que involucren situaciones de variación y cambio, que fortalezcan el razonamiento algebraico, la resolución de problemas, los escenarios geométricos y numéricos, a partir de la inclusión de fenómenos de cambio y modelación matemática que conlleven a la comprensión y uso de los conceptos y sistemas analíticos, permitiendo así un aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico.

Desde este punto de vista, es necesaria la implementación de un laboratorio de variación y cambio que involucre y favorezca la reorientación de las prácticas escolares en la educación básica primaria especialmente en el grado quinto, mediante el cual se construya lo que es y cómo se desarrolla el pensamiento variacional en los primeros años escolares, y prime la comunicación en el aula, el trabajo colaborativo y la exploración de conceptos mediados por la contextualización; siendo estos el eje central en la construcción del conocimiento, especialmente en el ámbito de las matemáticas.

4.2. La variación y el cambio desde un contexto histórico de la matemática

4.2.1. Primeros indicios del pensamiento variacional

Los primeros indicios del pensamiento variacional datan de la prehistoria. Desde los primeros asentamientos humanos, surgió la necesidad de interactuar con el entorno, esto implicó la observación constante de los fenómenos variables, como la percepción de ciclos, de oscilaciones y fluctuaciones, entre otros.

El cambio estuvo presente en todo momento, desde la necesidad del desplazamiento constante de las comunidades nómadas, las migraciones, la recolección de alimentos, la caza y la pesca, hasta los primeros asentamientos humanos que requirieron el conocimiento del territorio, de los recursos hídricos y de las estaciones.

Los diversos grupos humanos no se establecieron en cualquier territorio de forma arbitraria, sino, en uno que les ofreciera recursos y condiciones propicias para la vida; de modo que la geografía estuvo sometida a la observación y la comparación. Para hacer posible la selección de características favorables y no ser dominados por otra especie o por la misma naturaleza. Toda esta interacción estimuló la aparición de formas de comunicación primitivas, como el lenguaje gestual y el lenguaje verbo icónico, que sirvieron de cimientos para otros sistemas de representación de mayor complejidad.

4.2.2. La observación y la representación del cambio en las primeras civilizaciones

El surgimiento de la escritura hacia 3000 a. C, permitió la aparición de formas de comunicación más complejas en las antiguas civilizaciones, así pudieron registrar los primeros datos de las observaciones; los cuales actualmente permiten dar cuenta de la percepción de la variación y el cambio que en aquel momento se comenzaba a formular.

Existía, además, una fuerte dependencia de la geometría, todos los razonamientos y argumentos se fundamentaban en esta área, obstáculo que fue superado siglos más tarde con el trabajo de Descartes en geometría analítica, pero que sin lugar a duda marcó un punto importante en el desarrollo del concepto de variación y cambio.

Civilización Babilónica.

Lo que se sabe de la matemática babilónica se deriva de unas 400 tabletas de arcilla desenterradas desde la década de 1850. Elaboradas en escritura cuneiforme, las tablillas se inscribían mientras la arcilla estaba húmeda, y luego eran secadas por efecto del calor en un horno o a la luz del sol. La mayoría de las tablas recuperadas datan de 1800 a 1600 a. C, y abordan temas que incluyen; el teorema de Pitágoras, fracciones, álgebra, y ecuaciones cuadráticas y cúbicas. En una de las tablas, se hace una aproximación del valor de $\sqrt{2}$ con tres dígitos significativos.

También, se encuentran tabulados los cuadrados, cubos y recíprocos de los números naturales; relaciones que definieron de forma implícita las funciones de tipo

$y = x^2, y = x^3$ e $y = \frac{1}{x}$, para x un número natural. Esta civilización avanzó en el "álgebra retórica", que consistió en enunciar y resolver problemas a través del lenguaje verbal (oral-escrito) sin el uso del simbolismo algebraico actual.

Civilización Egipcia ($3000 - 322$ a. C)

Los primeros documentos matemáticos registrados de esta civilización pertenecen a la doceava dinastía de Egipto ($1990 - 1800$ a. C), y comprueban un avance importante en el campo del álgebra. El papiro de Moscú pertenece a esta época; también se considera que el papiro de Rhind estuvo basado en textos más antiguos provenientes del mismo período.

Una característica interesante de la matemática egipcia fue el uso de fracciones unitarias. Los egipcios usaban una notación especial para fracciones tales como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ y en algunos textos para $\frac{3}{4}$, otras fracciones eran escritas como fracciones unitarias de la forma $\frac{1}{n}$, o como sumas de esas fracciones. Los escribas utilizaban tablas para trabajar con ellas. También avanzaron en la solución verbal de ecuaciones lineales, a través del método de la falsa posición.

Civilización Griega (2800 a. C -600 d. C)

Los griegos impulsaron la transformación de las matemáticas a una ciencia deductiva. Sus formas de razonar estuvieron estrechamente ligadas a la geometría y a las proporciones; una de las contribuciones más notables que ejemplifica este hecho, la constituye el trabajo de Euclides sobre geometría plana. Este, a partir de axiomas que se aceptaron como verdaderos por poseer un carácter autoevidente, y un pequeño conjunto de elementos primitivos (recta, punto, y plano) construyó las demás formas geométricas, y relaciones. Las cuales demostró a través de teoremas y corolarios, de forma deductiva.

Por otra parte, en el Almagesto, Ptolomeo calculó cuerdas pertenecientes al círculo, lo que significó el cálculo de funciones trigonométricas. Es decir, Ptolomeo entendió el concepto de función. No obstante, es muy poco probable que Ptolomeo entendiera la función en los términos actuales, como una regla de correspondencia; ninguno de estos registros hace consideraciones generales sobre la idea de variable. Su enfoque, fue más bien el de utilizar fórmulas para calcular distancias.

No obstante, estos desarrollos, y el interés de los griegos por la filosofía, no permitió un estudio cuantitativo de fenómenos de cambio, como el movimiento. En el mundo antiguo, la noción de función y razón de cambio pasaron desapercibidas.

Edad media (Del siglo V al XV)

En este período no se evidenciaron resultados novedosos que dieran luces sobre el concepto de función. Desde el 250 d. C hasta finales del siglo XIV, se introdujeron abreviaciones para incógnitas y relaciones de uso frecuente, dando origen al álgebra sincopada. Este período se caracterizó por el trabajo de los árabes, quienes difundieron el legado de los griegos. Hubo un aumento en el número de funciones que consideraban, como las funciones trigonométricas, y el perfeccionamiento de sistemas de interpolación, no hubo novedad en su tratamiento. En esta etapa se destacó el trabajo de las escuelas de filosofía natural de Oxford y Paris, principalmente en el siglo XIV, y su preocupación por el estudio del movimiento.

Nicolás Oresme, de la escuela francesa, se considera como el autor que más se aproximó al concepto de función antes de su desarrollo formal, proponiendo una aproximación geométrica para el estudio de la cinemática, a través de la teoría sobre las latitudes de las formas. Esta teoría se fundamentó en el uso de segmentos rectos para representar las cantidades variables en un continuo. Desde esta perspectiva, se entendió el movimiento como una variación continua del tiempo en el eje horizontal, en el cual los espaciamientos o intervalos en que se dividía representaban los intervalos de tiempo, y a cada instante, correspondía una línea vertical perpendicular, cuya longitud era proporcional a la velocidad en dicho instante.

Hasta este punto, luego de siglos de progresos y mejoras en el álgebra y la geometría, reuniendo la producción intelectual matemática de varias civilizaciones, no hay vestigios de los conceptos propios del pensamiento variacional y la interpretación de una función como una regla entre cantidades variables. Existieron funciones tabuladas, no obstante, aunque pareciera sencillo avanzar desde este punto a una consideración global de función, se requiere una visión más amplia.

Esto permite entender cómo la definición actual de función, aunque sencilla en apariencia, requiere de la conciliación de variados tópicos matemáticos, tales como el álgebra, una interpretación geométrica más conveniente que la proporcionada por Euclides en donde se pase de trabajar con magnitudes y proporciones, a analizar intervalos continuos que puedan representar cantidades variables, (es decir, habría que esperar hasta el desarrollo de la geometría analítica), del conocimiento de las propiedades de los conjuntos. Además de una abstracción de fenómenos de cambio como el movimiento, el flujo de calor, etc., es decir, de la observación cuantitativa. Esto, en el corazón del pensamiento variacional se entiende como el lenguaje simbólico, la observación de los fenómenos, y la abstracción.

4.2.3. Desarrollo del concepto moderno de función

El concepto matemático de función emergió en el siglo XVII con el desarrollo del cálculo infinitesimal; por ejemplo, la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de una gráfica en un punto fue referida como una función de la coordenada x en dicho punto. Los matemáticos del siglo XVIII consideraban que una función era definida por una expresión analítica. En el siglo XIX, los nuevos requerimientos impuestos por Weierstrass, a partir del desarrollo del análisis por la reformulación de la geometría en términos del análisis, y la invención de la teoría de conjuntos por Cantor, dio origen al concepto actual de función.

Los avances de Galileo en el estudio teórico y experimental del movimiento le permitieron observar leyes naturales que se describen como relaciones funcionales. Sus estudios sobre el movimiento contenían un claro entendimiento de una relación entre variables. Uno de estos mostró cómo se aproximaba al concepto de mapeo entre conjuntos. En 1638 publicó en el libro "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"* el problema de dos círculos concéntricos con centro O, el de A con diámetro dos veces mayor que el del círculo B.

La fórmula daba como resultado una circunferencia de A dos veces mayor a la de B. Sin embargo, al tomar cualquier punto P en el círculo A, el fragmento OP cortaba al círculo

B en un punto. Es decir, Galileo construyó una función que correspondía a cada punto de A, un punto en B. De forma similar, si Q era un punto de B, entonces OQ cortaba al círculo A en exactamente un punto. Él tenía una función, que iba de los puntos en B a los puntos en A. A pesar de que la circunferencia A tenía el doble del perímetro de la circunferencia B, estas poseían la misma cantidad de puntos.

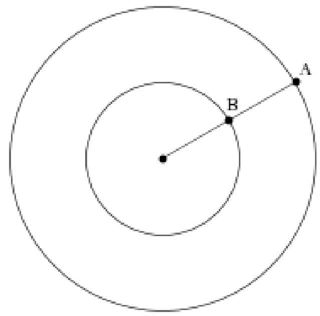


Figura 2. Problema de los círculos concéntricos estudiado por Galileo.

Casi de forma simultánea al trabajo de Galileo, Descartes introdujo el álgebra a la geometría, en su libro "*La Géométrie"*. Descartes argumentó que una curva podía dibujarse al dejar que un conjunto de líneas tomara de forma sucesiva un infinito número de valores.

El desarrollo de la geometría analítica alrededor de 1640 permitió a los matemáticos desplazarse entre problemas geométricos sobre curvas y relaciones algebraicas, y coordenadas variables x e y. El cálculo se desarrolló utilizando la noción de variables, con un significado geométrico asociado, el cual persistió de forma fructuosa hasta el siglo XVIII.

Sin embargo, la terminología "función" advirtió su uso en las correspondencias entre Leibniz y Johann Bernoulli hacia finales del siglo XVII. Leibniz escribió en agosto de 1673:

"…Otro tipo de líneas, las cuales, en una figura dada, desempeñan una función."

Johann Bernoulli, en una carta escrita a Leibniz el 2 de septiembre de 1694, describió una función como:

"Una cantidad formada de algún modo a partir de cantidades indeterminadas y cantidades constantes."

En un artículo de 1698 sobre problemas isoperimétricos, Johann Bernoulli subrayó sobre "funciones de ordenadas". Leibniz escribió a Bernoulli diciendo:

"Me agrada que use el término función en el mismo sentido que yo."

La introducción del concepto de función ocurrió en el momento adecuado, puesto que Johann Bernoulli estaba interesado en problemas de cálculo variacional, en los cuales, las funciones aparecieron como soluciones.

El concepto de función llegó a ser prominente en matemáticas en el año 1748. Lo anterior se debió a Euler, alumno de Bernoulli, quien *publicó Introductio in analysin infinitorum* en ese año, en este libro se evidenció su trabajo sobre el concepto de función central. Definiendo una función en los siguientes términos:

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de algún modo cualquiera a partir de la cantidad variable y números o cantidades constantes".

Euler no definió explícitamente lo que quería decir con la "expresión analítica", asumió que el lector entendería que hacer referencia a expresiones formadas por medio de las operaciones usuales de adición, multiplicación, potencias, raíces, etc. Dividió las funciones en dos categorías diferentes; funciones algebraicas y funciones trascendentales. El tipo de función dependía de la naturaleza de su expresión analítica. Por ejemplo, las funciones trascendentales no eran algebraicas, estas incluían: Funciones exponenciales, logarítmicas, y otras.

Euler permitió que las operaciones algebraicas fueran usadas un número infinito de veces, resultando, de este modo series, productos y fracciones infinitas. Posteriormente sugirió que una función trascendental debía ser estudiada expandiéndola en series de potencias. Consideró que todas las funciones trascendentales no podían ser expandidas de este modo. Sin embargo, afirmo, que se deben probar en cada caso particular.

No obstante, hubo una dificultad en el trabajo de Euler que condujo a confusiones, puesto que él no distinguió entre una función y su representación. El trabajo de Euler cambió la forma como se pensaban los conceptos familiares en matemáticas, antes de su trabajo, las funciones trigonométricas eran referidas como líneas conectadas con un círculo, más que como funciones. Fue el mérito de Euler introducir el punto de vista funcional sobre éstas.

El concepto de función condujo a Euler a hacer importantes descubrimientos antes de escribir su libro. Por ejemplo, permitió definir la función gama y resolver el problema de sumar las series.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

Euler demostró que la suma infinita era $\frac{\pi^2}{6}$, publicando su resultado en el año de 1740. En su libro, Euler también introdujo las funciones continuas, discontinuas y mezcladas, con significados que difieren de los actuales. Para Euler, una función continua era la que podía ser escrita en términos de una expresión analítica singular, una función mezclada podía escribirse en términos de dos o más expresiones analíticas, y una función discontinua incluía funciones mezcladas, pero se trató de un concepto más general.

Aunque Euler no indicó con claridad lo que entendía por función discontinua, las definió como aquellas funciones que poseían curvas suaves como gráficas, curiosamente esta es una característica que se entiende en la actualidad por función continua.

En 1746 d'Alembert publicó una solución al problema de una cuerda vibrante tensionada. La solución, dependía de la forma inicial de la cuerda. d'Alembert insistió en que en su solución la función que describía las velocidades iniciales de cada punto de la cuerda tenía que ser continuas en el sentido de Euler, es decir, debía ser descrita por una única expresión analítica.

Euler publicó un artículo en 1749, el cual objetaba esta restricción impuesta por d'Alembert, argumentando que, por razones físicas, se debían permitir expresiones más generales para las condiciones iniciales. Esta situación dio origen a una controversia sobre la naturaleza de las funciones permitidas en las condiciones iniciales y en las integrales de las ecuaciones diferenciales parciales, dilema que siguió apareciendo con frecuencia en las teorías de la elasticidad, hidrodinámica, aerodinámica y geometría diferencial.

En 1755, Euler publicó otro libro de gran influencia, *Institutiones calculi differentials*. En este proporcionó una definición general y novedosa, que constituyó la primera definición moderna de función:

> "Si algunas cantidades dependen de otras, de tal modo que, si las últimas experimentan un cambio, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se denominan funciones de las últimas. Esta definición se aplica de modo amplio e incluye todas las formas en las que una cantidad puede ser determinada por otra. Por lo tanto, si x denota una variable, luego todas las cantidades que dependen de x en cualquier manera, o son determinadas por x, se denominan funciones de x."

La interpretación moderna de función solo pudo originarse luego del descubrimiento de Fourier. Su revelación demostró claramente que los malentendidos que surgieron en el debate sobre la cuerda vibrante, acerca de la representación de funciones, fueron el resultado de confundir dos conceptos totalmente diferentes pero similares en apariencia, sobre una función y su representación analítica. De hecho, antes de Fourier no hubo distinción entre este par de conceptos, y su intervención los desligó, dando fin al debate.

Durante el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a formalizar todas las diferentes ramas de la matemática. Uno de los encargados de esta labor fue Cauchy quien concibió las funciones como expresiones definidas por ecuaciones que podían involucrar números reales o complejos, y asumió que eran continuas. En la aproximación de Cauchy, se permitió que una función estuviera únicamente definida por un rango restringido de la variable independiente, alejándose de este modo de las restricciones impuestas al concepto por sus predecesores. Sus resultados fueron reformulados con rigor por Weierstrass.

Nikolai Lobachevsky y Peter Gustav Lejeune Dirichlet son considerados los primeros autores que, de manera independiente, establecieron la definición moderna de función, señalando el requerimiento según el cual a cada primer elemento debe corresponder un único segundo elemento.

Según Lobachevsky (1834):

El concepto general de función requería que la función de x estuviera definida como un número dado para cada x y que variara en forma gradual con x. El valor de la función podía ser dado bien por una expresión analítica, o por una condición que proporcionara medios para evaluar todos los números y elegir uno de ellos; o finalmente, la dependencia podía existir, pero permanecer desconocida.

Por su parte, Dirichlet escribe (1837):

Si un único valor finito de y corresponde a cada valor de x, de forma tal que cuando x varía continuamente sobre un intervalo desde a hasta b, $y = f(x)$ también varía de forma continua, entonces y se denomina función continua de x sobre este intervalo. No es necesario en ninguna medida que y esté dada en términos de x por una y solo una ley a lo largo de todo el intervalo, y tampoco es necesario que esté expresada como una dependencia usando operaciones matemáticas.

A finales del siglo XIX y a lo largo del siglo XX hicieron mejoras a las ideas previamente expuestas, y surgieron otras teorías que proporcionaron nuevas interpretaciones de las funciones, como la teoría de funciones de una variable, la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor, y el análisis funcional.

Todo el conocimiento adquirido sobre los formalismos del pensamiento variacional, el cálculo diferencial e integral, y la noción de función, fueron cruciales para las ciencias naturales. Los trabajos en física clásica, termodinámica, y fisicoquímica, entre otros, describieron sus razonamientos y dieron cuenta de sus experimentos con el lenguaje de variaciones.

El cálculo diferencial fue desarrollado por Isaac Newton, de forma independiente y paralela a la formulación de Leibniz, con el propósito de solucionar problemas dinámicos relacionados con la mecánica celeste. En la mecánica newtoniana la variable independiente x es el tiempo, o la posición, y las variables dependientes son velocidades, aceleraciones y momentos. La función posición asociada a un objeto macroscópico (sistema), es una función que depende del tiempo $p = p(t)$. Las propiedades observables del sistema como la velocidad, aceleración, y momento, pueden ser siempre determinadas mediante operaciones propias del cálculo diferencial, como la diferenciación y la integración, que no son más que operaciones realizadas sobre la función posición $p(t)$.

El trabajo desarrollado por Newton es un claro ejemplo de la aplicación exitosa del pensamiento variacional para tratar situaciones de cambio (movimiento). Los resultados logrados son sorprendentes, reconociendo que mediante estas ecuaciones se ha hecho posible lograr un avance tecnológico y científico como la exploración espacial.

Actualmente, la física estudia el universo a gran escala con la mecánica newtoniana, y esta predice de forma aproximada los fenómenos que involucran el movimiento de objetos macroscópicos a velocidades alejadas de la velocidad de la luz. Por otra parte, para las ciencias naturales, el fenómeno del movimiento es uno de los más esenciales y fundamentales, en lo que respecta a nuestra interpretación de las leyes naturales.

En termodinámica, la temperatura es una de las funciones primordiales, y se puede entender como una función escalar que depende de tres coordenadas espaciales, es decir, $T = T(x, y, z)$. Esta función, asigna a cada punto $P = (x, y, z)$ un único valor de temperatura.

Para ilustrar el enfoque que proporciona el pensamiento variacional, se puede analizar la teoría cinética de los gases. Para la formulación de esta teoría, inicialmente se estudió la dependencia entre variables como temperatura, presión, y volumen; en una muestra con una cantidad fija de gas. Fue el trabajo de científicos como Boyle, Charles, Avogadro y Gay-Lussac, entre otros.

Los trabajos de Boyle permitieron establecer la dependencia inversa entre el volumen y la presión de una cantidad fija de gas a una temperatura constante, es decir, a medida que el volumen se disminuía ejerciendo presión sobre un pistón que a la vez era parte del contenedor en donde se encontraba la muestra de gas, se observaba que la presión del gas dentro del contenedor aumentaba.

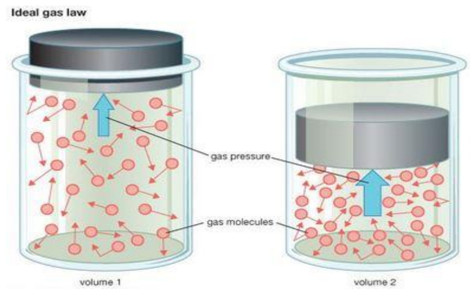


Figura 3. Ilustración de la Ley de Boyle para los gases ideales.

Tal observación se expresa en forma matemática, escribiendo la ecuación $V = k/P$, donde P es la presión del gas, V es el volumen, y k es la constante que puede ser determinada efectuando mediciones de las presiones y los volúmenes para diferentes fuerzas ejercidas sobre el pistón:

$k = VP.$

Se afirmó entonces que V es función de P y viceversa, es $V = f(P)$ y $P = f(V)$. Consideraciones similares para las otras parejas de variables, permitieron formular la conocida ecuación de los gases ideales, $PV = nRT$, en donde se expresa de forma analítica las dependencias de las variables de estado del sistema, P, V, T y n (cantidad de materia) y se introduce, de nuevo, una constante de proporcionalidad R. Con esta formulación, es entonces posible predecir el comportamiento de cualquier sistema constituido por gases ideales, siempre que se tenga información del valor de las variables restantes.

Son numerosas las actividades donde el pensamiento variacional ha permitido modelar la forma en la que se correlacionan los procesos naturales, y los sistemas de interés científico. Sin embargo, esta no es la única aproximación a los fenómenos de variación y cambio, por ejemplo, en mecánica cuántica las cantidades no son representadas por funciones, sino por otras entidades matemáticas denominadas operadores, y existe toda una rama de las matemáticas encargadas de estudiar sus propiedades.

Teniendo esto, se puede reconocer al pensamiento variacional, como uno de los más grandes aportes de la matemática, que ha permitido indagar los procesos naturales, formular teorías para explicar los fenómenos y acceder a una comprensión más profunda de conceptos, aunque sencillos en apariencia, subyace una historia larga, llena de revelaciones que ocurren una vez cada siglo, y que poco a poco van enfocando el trabajo de los matemáticos en la dirección adecuada, mediante correcciones y perfeccionamientos.

Desconocer esta perspectiva, contribuye a un enfoque superficial que de forma inmediata se dirige a la resolución de ecuaciones y problemas, desperdiciando así la posibilidad de acceder a una interpretación contextualizada del conocimiento matemático.

4.3. El pensamiento variacional a la luz de los Estándares Básicos de Competencia

El pensamiento variacional hace referencia al estudio sistemático de la noción de variación y cambio que se da en la vida cotidiana. Desde los estándares básicos de competencia en matemáticas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos se relacionan con "la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006).

En el campo específico de las matemáticas, el estudio de la variación y el cambio, son los ejes que orientan y dan sentido a una de las áreas más importantes de la matemática como lo es el cálculo; porque desde este pensamiento se induce al estudiante a desglosar ideas, nociones y conceptos.

> "El pensamiento variacional está estrictamente ligado con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos" como se afirma en los lineamientos curriculares. (MEN, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006).

Desde el estudio de la geometría, el pensamiento variacional tiene como objetivo la descripción, modelación y representación matemática; esto requiere de la comprensión y desarrollo de procesos de medición, elaboración de registros, establecimiento de relaciones entre cantidades y magnitudes, el movimiento y la rapidez con que cambia determinado objeto, el análisis de las propiedades de los espacios bidimensional y tridimensional, así como el de las formas y figuras geométricas que se hallan en el espacio.

Este pensamiento cumple un papel fundamental en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio. Ínsita al arte y la decoración mediante la observación y el diseño de objetos bidimensionales y tridimensionales. Contribuye al desarrollo de conceptos en el ámbito de la educación física, los deportes y la danza. Aporta a la observación, interpretación y elaboración de dibujos, maquetas y mapas. Armoniza el entorno mediante la reproducción de patrones arquitectónicos elaborados por el ser humano y producidos por la naturaleza.

Es así como la enseñanza y aprendizaje de este pensamiento en la educación básica primaria mediada por situaciones provenientes de la observación y sistematización de patrones y regularidades, tanto numéricas como geométricas basados en principios matemáticos como la aritmética, la geometría, el álgebra, la trigonometría y el cálculo, adquieren más sentido cuando se estructuran desde el pensamiento variacional. De igual forma, el entendimiento de este pensamiento se hace significativo, desarrolla la actitud de la observación, de análisis, y de registro. Además, estimula a procesos de tratamiento, coordinación y conversión de variables.

4.4. Análisis matemático del concepto de variación y cambio

4.4.1. Cambio y variación

El cambio es una característica que no permanece, se modifica y se altera; mientras que el concepto de variación hace referencia a la cuantificación de dicho cambio. En la vida diaria se dan infinitas relaciones entre estos dos conceptos, de tipo natural, económico y social siendo la matemática la que tiene el papel de describir, representar, comprender, reconocer, cuantificar y en ocasiones controlar estos cambios.

La mayoría de los fenómenos naturales, desde el movimiento de los electrones en el interior de un átomo, hasta el movimiento del sistema planetario, son manifestaciones del cambio. Entender estos cambios para dar solución a innumerables interrogantes, ha sido un reto que trascendió desde el inicio de la humanidad; haciendo necesario el estudio de patrones aditivos y multiplicativos, regularidades numéricas y geométricas, secuencias matemáticas, a partir del análisis de tablas, figuras y fórmulas.

4.4.2. Regularidad numérica

Una regularidad numérica, es una serie o sucesión de elementos que se forman mediante un patrón o regla, que permite definir o determinar el análisis de cada elemento de una progresión. La repetición de un fenómeno asociado a elementos como el tiempo, el ritmo, el compás, la regulación, entre otras, exponen regularidades que se pueden analizar matemáticamente para encontrar cuál es el patrón o regla de formación de una sucesión.

En el análisis de una regularidad numérica se debe, encontrar un patrón o regla de formación de la sucesión estudiando los elementos. Por ejemplo, en la siguiente sucesión, la figura 1 está formada por tres palillos; la figura 2 por cinco, la figura 3 por siete palillos y así sucesivamente como se muestra en la figura 4.

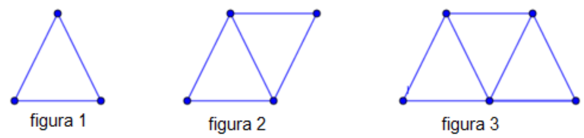


Figura 4. Representación pictórica de una sucesión con palillos.

Matemáticamente, se establece la siguiente relación:

- Para formar la figura uno se utilizaron tres palillos, entonces, $3 = 2 \cdot 1 + 1$
- Para formar la figura dos se utilizaron cinco palillos, entonces, $5 = 2 \cdot 2 + 1$
- Para formar la figura tres se utilizaron siete palillos, entonces, $7 = 2 \cdot 3 + 1$

De lo anterior, se deduce que el término general de la sucesión es $2n + 1$, donde n describe el número de la figura representada con los palillos. Por ejemplo, ¿qué cantidad de palillos se requieren para formar la figura cinco? Operando la fórmula $x = 2n + 1$ y remplazando la n por cinco se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= 2n + 1 \\ &= 2\,(5) + 1 \\ &= 10 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Para formar la figura cinco se requieren 11 palillos.

Del ejercicio anterior se concluye que observar y analizar una regularidad numérica permite formular una expresión general que representa dicha regularidad;

"Ciertos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, entonces podría ser capaz de adivinar cuál es el patrón y luego probarlo" (Stewart, Redlin, & Watson, 2012).

4.4.3. Secuencia matemática

Una secuencia o sucesión es un conjunto de elementos encadenados o sucesivos que guardan una relación entre sí de acuerdo con un patrón definido y un orden determinado, moviéndose hacia un resultado particular, se nombran con una letra y un subíndice (n) cuyo valor depende del lugar que el término ocupa en la sucesión. Toda secuencia está compuesta por un primer término y cada término tiene un siguiente; empieza siempre en 1, y sigue $2, 3, 4, 5, 6, 7$, ..., así sucesivamente ($a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6, \ldots.$) y puede ser ascendente o descendente, numérica o geométrica.

Para (Stewart, Redlin, & Watson, 2012, pág. 783) Una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Por ejemplo, la altura que alcanza una pelota después de cada rebote es una sucesión. Esta sucesión tiene un patrón definido; describir el patrón permite predecir la altura que la pelota alcanza después de cualquier número de rebotes.

4.4.4. Secuencia aritmética

Una secuencia o sucesión aritmética es un conjunto de números en los que cada término (a excepción del primero) se obtiene a partir del anterior, sumándole una cantidad constante llamada diferencia (d). La diferencia entre dos términos consecutivos es una constante. Ejemplo: Siguiendo el patrón blanco en la sucesión que se presenta en la figura 5, la diferencia o constante es uno. En la misma figura, siguiendo la secuencia de cuadros grises, la diferencia o patrón es dos.

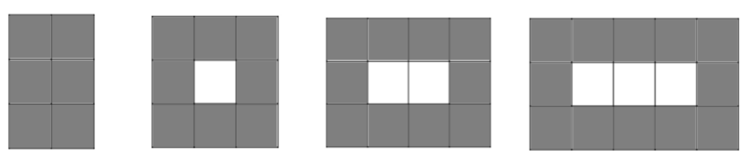


Figura 5. Representación pictórica de las sucesiones 0, 1, 2, 3, ..., y 6, 8, 10, 12, ... de acuerdo con el número de cuadrados blancos y grises respectivamente.

En toda progresión aritmética se cumple que:

- $a_2 = a_1 + d$
- $a_3 = a_2 + d$
- $a_4 = a_3 + d$

- $a_5 = a_4 + d$

  $\vdots$
- $a_n = a_1 + (n-1)d$

4.4.5. Secuencias numéricas con patrones aditivos y multiplicativos

Las secuencias numéricas con patrones aditivos o multiplicativos son ascendentes y siguen un orden en la que cada número es mayor que el anterior y se obtiene mediante una suma, una multiplicación, o la combinación de ambas. Por ejemplo, en la secuencia $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, de la figura 6, para pasar de un número a otro se suma una unidad.

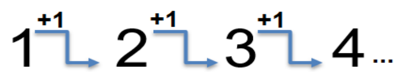


Figura 6. Secuencia numérica con patrón aditivo 1.

La secuencia $1, 3, 9, 27, \ldots$, es ascendente, pero a diferencia de la anterior, para pasar de un número al siguiente se debe multiplicar por tres, como se muestra en la figura 7.

Figura 7. Secuencia numérica con patrón multiplicativo 3.

La secuencia $1, 4, 8, 11, 22, 25, 50$ cumple dos condiciones en particular, para pasar de un número a otro se alterna la suma de tres con la multiplicación de dos, como se muestra en la figura 8.

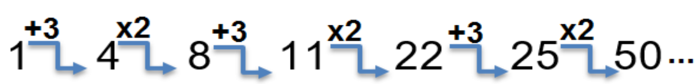


Figura 8. Secuencia numérica aditiva y multiplicativa.

4.4.6. Secuencia numérica con patrones de resta y división.

En las secuencias numéricas descendentes se cumple, que cada número debe ser menor que el anterior y se fundamenta mediante la adicción o la división; por ejemplo, en la sucesión $21, 18, 15, 12, 9, \ldots$, de la figura 9, los números son descendentes y para pasar de un número a otro se resta tres unidades. En la sucesión$100000, 10000, 1000, 100, 10, 1$ para pasar de un número al siguiente se divide por 10, como se muestra en las figuras 10.

$$21 \xrightarrow{-3} 18 \xrightarrow{-3} 15 \xrightarrow{-3} 12 \xrightarrow{-3} 9 \ldots$$

Figura 9. Secuencia numérica descendente con patrón de cambio -3

$$100000 \xrightarrow{\div 10} 10000 \xrightarrow{\div 10} 1000 \xrightarrow{\div 10} 100 \xrightarrow{\div 10} 10 \xrightarrow{\div 10} 1$$

Figura 10. Secuencia numérica descendente con patrón de cambio ÷10.

4.4.7. Secuencia geométrica

Una secuencia geométrica está dada por un conjunto de números en la que la relación entre los términos consecutivos es constante; es decir, cada término se obtiene a partir del anterior por medio de multiplicar una cantidad fija llamada razón de la secuencia o progresión.

En una secuencia o progresión geométrica el cociente entre dos términos consecutivos es una constante (razón). Por ejemplo, en la figura 11, se puede observar que la longitud del cuadrado negro más pequeño mide una unidad; el segundo, es el doble del primero; el tercero, es el doble del segundo; el cuarto, es el doble del tercero y el quinto el doble del cuarto. La secuencia o progresión geométrica que describe esta figura corresponde a: $1, 2, 4, 8, 16$. Simbólicamente se tiene que:

$$x_n = x_1 \,.\, r^{n-1}$$

Donde:

x_n: es el término general
x_1 : es el valor del primer término
n : es el número de términos
r : es la razón

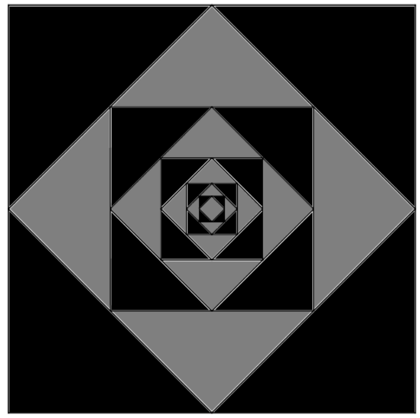


Figura 11. Representación pictórica de la progresión 16, 8, 4,2, 1, …,

En la progresión, $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$, los primeros términos de la sucesión son: $x_1 = 16,\ x_2 = 8,\ x_3 = 4,\ x_4 = 1.$

La razón de la progresión está determinada por:

$$r = \frac{x_2}{x_1}$$

Donde:

$$r = \frac{8}{16} = 0.5$$

Para identificar el valor que ocupa el término x_6 se emplea la fórmula general ($x_n = x_1 \,.\, r^{n-1}$), se remplaza x_1, por 16, n por 6, r por $\frac{1}{2}$ y se realizan las operaciones indicadas, así.

$x_6 = 16$ ($0,5^{6-1}$)

$x_6 = 16$ (0.5^5)

$x_6 = 16$ (2.5)

$x_6 = 0.5$

En la progresión 16, 8, 4, 2, 1, …, x_6, el valor que es consecutivo en forma descendente a x_5 es 0.5.

4.5. Patrón o regularidad

Un patrón es una sucesión repetida de elementos (auditivos, gestuales, gráficos…) que se forman a partir de un núcleo generador siguiendo una regla; en algunas sucesiones el núcleo se repite periódicamente, en otras el núcleo crece o decrece de forma regular. Un patrón expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada regularidad y se elabora siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia, según sea su estructura de base.

Si la estructura de base es de la forma AB se dice que es un patrón de repetición porque sus elementos están presentados en forma periódica. Son ejemplos de patrón de repetición:

- Amarillo, azul, rojo, amarillo, azul, rojo, …
- Do, re, mi, fa, do, re, mi, fa, …
- $1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5$.
- Azul, azul, rojo, rojo, azul, azul, rojo, rojo.

En los patrones de recurrencia, su núcleo o base cambia con regularidad; es decir, cada término de la sucesión puede ser expresado en función del análisis que infiere su ley de formación. Por ejemplo:

- $M, MMM, MMMMM, MMMMMMM, MMMMMMMMM$, ..., numéricamente se expresa: $1,3, 5, 7, 9$, ...
- $4, 4 + 2, 4 + 4 + 2, 4 + 4 + 4 + 2, 4 + 4 + 4 + 4 + 2$, ..., se puede expresar como: $4, 6, 10, 14, 18$, ...
- $0, 10, 20, 30, 40, 50$, ... son los múltiplos de 10
- $10, 100,1000, 10000, \dots, 10^n$; donde $n = 0, 1, 2,3,4$, ...
- $1, 3, 9, 27, 81, \dots, 3^n$; donde $n = 0, 1, 2,3,4$, ...

En el análisis matemático, los patrones permiten observar y analizar detenidamente un acontecimiento de variación y evidenciar en él que cambia, qué hace que cambie, cómo cambia, cuánto cambia, qué permanece invariante y así poder establecer generalizaciones.

En la modelización de una situación matemática para identificar patrones y regularidades, son muy importantes las representaciones pictóricas, las cuales permiten observar lo que sucede en diversos momentos de una situación de cambio; también las representaciones escritas, para establecer observaciones; la representación tabular para fundar procesos aritméticos y construir fórmulas y finalmente la representación algebraica, para condensar la información.

4.6. Números poligonales y piramidales

Un número poligonal es un número natural que puede ser representado por medio de puntos consecutivos para formar un polígono regular, empezando por el uno. A este conjunto de números pertenecen los números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros.

Los primeros números poligonales son los números triangulares, estos se forman a partir de triángulos. Los números $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ son triangulares, ya que cada uno admite una disposición en triángulos equiláteros sucesivos como se muestra en la figura 12.

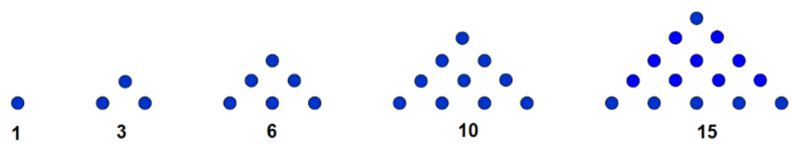


Figura 12. Representación gráfica de los primeros cinco números triangulares.

El segundo grupo lo conforman los números cuadrados, a este pertenecen los números cuya raíz cuadrada es un número entero. Los números $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ son cuadrangulares porque se pueden ordenar dentro de una figura cuadrada o cuadrados perfectos como se ve en la figura 13.

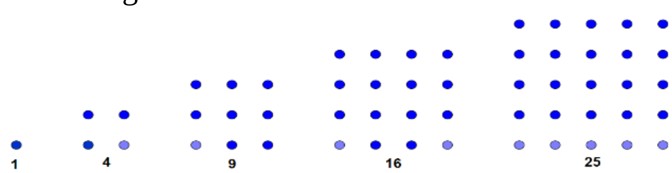


Figura 13. Representación gráfica de los primeros cinco números cuadrangulares.

El tercer grupo está formado por los números rectangulares. A este pertenecen los números $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ por ser el producto de dos números naturales consecutivos, es decir, $1 \cdot 2 = 2;\ 2 \cdot 3 = 6;\ 3 \cdot 4 = 12;\ 4 \cdot 5 = 20, \ldots$, representan un rectángulo como se muestra en la figura 14.

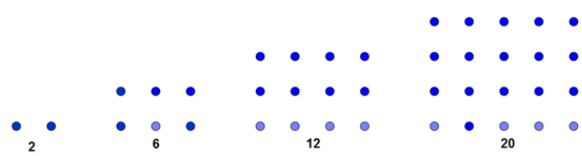


Figura 14. Representación gráfica de los primeros cuatro números rectangulares.

Los griegos fueron los primeros, en representar los números con formas geométricas. Estudiaron los números triangulares, cuadrangulares, rectangulares. La Geometría y la

Aritmética estaban muy relacionadas entre sí. Pitágoras y sus discípulos utilizaban pequeñas piedrecillas para determinar formas geométricas y así observar las relaciones entre los números y sus formas. El siguiente análisis que se plantea es la forma como estos matemáticos consiguieron descubrir importantes teoremas y relaciones.

La representación de los números triangulares, cuadrados y rectangulares con pequeñas piezas se presenta en la figura 15.

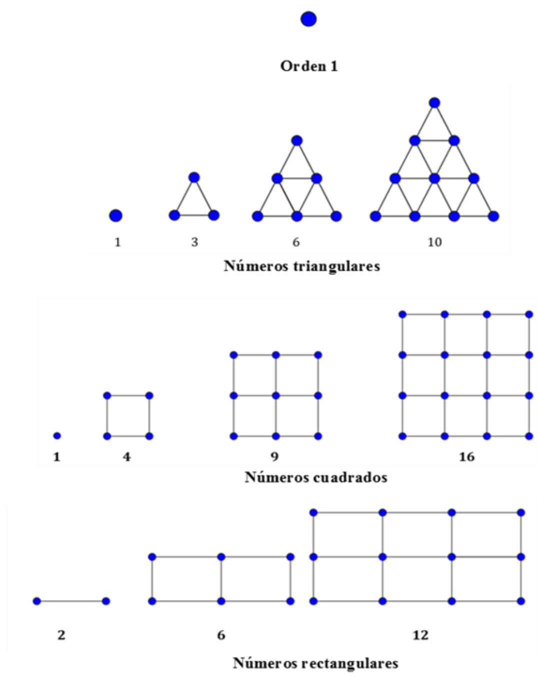


Figura 15. Representación de los números triangulares, cuadrados y rectangulares.

Al organizar estos datos en una tabla se obtiene:

Orden n	Números Triangulares (a_n)	Números Cuadrados (b_n)	Números Rectangulares (c_n)
1	1	1	2
2	3	4	6
3	6	9	12
4	10	16	20

Tabla 3. Relación entre números triangulares, cuadrados y rectangulares.

Para hallar los números triangulares, cuadrados y rectangulares correspondientes al orden 6 y 7 se propone las siguientes relaciones encontradas en la tabla 4.

Primera relación:

Un número cuadrado, es el cuadrado de su respectivo orden n.

Ejemplo: el número cuadrado correspondiente al orden tres es, $3^2 = 9$

Segunda relación:

Los números oblongos, son el doble de los números triangulares:

$$2 \cdot 1 = 2$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 6 = 12$$

De este análisis surge la primera fórmula para obtener los números rectangulares a partir de los triangulares, ya que dos triángulos iguales forman los números rectangulares.

$$c_n = 2a_n$$

Donde c_n representa los números rectangulares u oblongos y a_n los números triangulares.

Tercera relación:

Con relación al orden, los números triangulares equivalen a la mitad de los números rectangulares.

$$2 \div 2 = 1$$
$$6 \div 2 = 3$$
$$12 \div 2 = 6$$
$$20 \div 2 = 10.$$

Esta relación se expresar matemáticamente así: $a_n = \frac{c_n}{2}$

A partir de estas dos fórmulas, se pueden encontrar algunos números rectangulares y triangulares; proceso que es difícil ya que se requiere saber el número triangular y el número oblongo del mismo orden, respectivamente. Si el orden es muy alto se hace más engorroso hallar el número. Por eso, es conveniente utilizar una fórmula para encontrar directamente estos números.

Cuarta relación:

Al sumar un número cuadrado con su respectivo número de orden n, el resultado es su número rectangular:

$$2 + 4 = 6$$
$$3 + 9 = 12$$
$$4 + 16 = 20$$

Quinta relación:

Al sumar un número cuadrado con su respectivo número de orden n, el resultado es su número rectangular:

$$1 + 1 = 2$$
$$4 + 2 = 6$$
$$9 + 3 = 12$$

A partir de esta relación, se puede extraer la siguiente fórmula para obtener un número rectangular: $c_n = n + b_n$. Donde, c_n representa los números rectangulares, n el orden y b_n los números cuadrados.

Sexta relación

Los números cuadrados son la suma de números impares consecutivos:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Séptima relación

Un número cuadrado se puede obtener a partir de la unión de dos números triangulares siguiendo un orden específico, es decir, si se quiere saber cuál es el número cuadrangular en el orden cinco, se debe sumar el número triangular de ese orden con el numero triangular del orden anterior, como se muestra en la tabla 5.

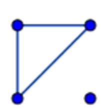
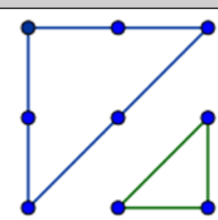
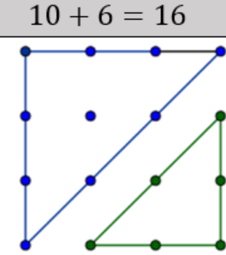
Orden 2 $3 + 1 = 4$	Orden 3 $6 + 3 = 9$	Orden 4 $10 + 6 = 16$
		

Tabla 4. Representación de los números cuadrados 4, 9 y 16 a partir de la suma de dos triángulos equilátero y otro triángulo equilátero de una serie menor.

Octava relación

Para hallar un número triangular, se suma el número 1 al orden n, se multiplica por el orden n y se divide por dos.

Ejemplo: Hallar el número triangular de orden cinco

$$\frac{5(5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

En general para encontrar un número a triangular de orden n se usa la fórmula:

$$a = n(n+1)/2.$$

Al cotejar estas fórmulas, se observa que se cumplen las relaciones previamente descritas y se establece. Tabla 6.

Orden n	Números Triangulares (a_n)	Números Cuadrados (b_n)	Números Rectangulares (c_n)
1	1	1	2
2	3	4	6
3	6	9	12
4	10	16	20
5	15	25	30
6	21	36	42
Fórmula general	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$b_n = n^2$	$c_n = n(n+1)$

Tabla 5. Relación entre números triangulares, cuadrados y rectangulares.

4.7. Los números de Fibonacci

La sucesión numérica de Fibonacci[1], es una secuencia matemática infinita de números naturales donde cada número se calcula sumando los dos anteriores a él. Por ejemplo,

$$34 = 21 + 13;\ 8 = 5 + 3$$

En la siguiente tabla se representan los primeros 15 números de la sucesión de Fibonacci.

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Tabla 6. Representación de los primeros 15 números de la sucesión de Fibonacci.

Al analizar la tabla se pueden construir diversas regularidades numéricas, por ejemplo:

Cada número de la sucesión se calcula sumando los dos anteriores.
$n_3 + n_4 = n_5 \rightarrow 2 + 3 = 5$
$n_5 + n_6 = n_7 \rightarrow 5 + 8 = 13$

De lo anterior se deduce que para hallar un término cualquiera en la sucesión de Fibonacci se puede aplicar la siguiente fórmula o regla $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ donde:

x_n es el término en posición n
x_{n-1} es el término anterior a x_n
x_{n-2} es dos anteriores al término x_n

Ejemplo: ¿Cuál es el número que se debe ubicar en la décima posición?

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$
$$x_{10} = x_{10-1} + x_{10-2}$$
$$x_{10} = x_9 + x_8$$

[1] Fibonacci: Nombre atribuido a Leonardo de Pisa, matemático de origen italiano reconocido mundialmente por haber promovido y difundido por toda Europa el sistema de numeración indo arábigo, empleado en la actualidad y por su famosa sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...,) que él descubrió.

Al remplazar por los números correspondientes a las posiciones x_9 y x_8 se obtiene:

$$x_{10} = 34 + 21$$
$$x_{10} = 55$$

El número que se ubica en la décima posición es el 55. Si se quiere calcular el número siguiente a uno dado en la sucesión de Fibonacci, se duplica este número y se resta con el número que está ubicado dos posiciones más atrás del número dado.

Número dado : 21

¿Número consecutivo al 21 en la sucesión de Fibonacci?

$$(21 \cdot 2) - 8 = 34$$

Algebraicamente se expresa de la siguiente manera:

$$x_n = (x_n \cdot 2) - x_{n-2}$$

De cada tres números consecutivos de la sucesión de Fibonacci, solo uno es par. $1, 1, 2;\ 3, 5, 8;\ 34, 55, 89$. Uno de cada cuatro es múltiplo de tres. Uno de cada cinco es múltiplo de cinco.

Al sumar los cuatro primeros términos y agregarle 1, el resultado será el sexto término de la sucesión. $(1 + 1 + 2 + 3) + 1 = 8$. En la sucesión de Fibonacci el sexto término corresponde al número 8.

Al sumar los cinco primeros términos, más uno, el resultado será el séptimo término de la sucesión. $(1 + 1 + 2 + 3 + 5) + 1 = 13$.

Al sumar los primeros tres términos correspondientes a la posición par (n_2, n_4, n_6) y adicionarle uno, se obtiene el séptimo termino(n_7). $(1 + 3 + 8) + 1 = 13$.

Al sumar los primeros tres términos correspondientes a la posición impar (n_1, n_3, n_5) se obtiene el sexto termino (n_6). $1 + 2 + 5 = 8$.

El octavo termino (n_8) se obtiene de sumar los cuatro primeros términos que ocupan la posición impar (n_1, n_3, n_5, n_7). $1 + 2 + 5 + 13 = 21$.

Al tomar dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Ejemplo n_2 y n_3 y elevarlos al cuadrado, la suma de sus cuadrados será la posición correspondiente que se obtiene al sumar n_2 y n_3.

- $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$
  $n_2 + n_3 = n_5$

- $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$
  $n_5 + n_6 = n_{11}$

Al elevar al cuadrado los cinco primeros términos (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) y hacer la suma correspondiente a sus cuadrados se obtiene el producto del quinto y sexto término (n_5, n_6) de la sucesión. $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40$

$n_5 \cdot n_6 = 5 \cdot 8 = 40.$

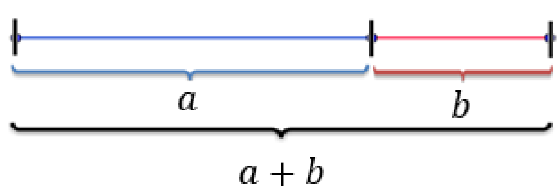
La misma regularidad aplica para los seis primeros términos ($n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$), donde el producto de n_6 y n_7 es la suma de los cuadrados de dichos términos.

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104$

$n_6 \cdot n_7 = 8 \cdot 13 = 104$

Al tomar dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci (uno detrás del otro), su cociente será un número aproximado a 1.618 entre mayor sean estos dos números mayor será la aproximación a dicho número o razón aurea[2]. Matemáticamente se expresa esta relación dividiendo un segmento de recta en dos partes, de manera que la longitud total de $a + b$ es al segmento más largo a, como a es al segmento más corto b.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618 = \varphi$$



[2] Razón aurea: Número irracional denotado con la letra griega φ (phi) cuyo valor aproximado es de 1.618…

La siguiente tabla muestra la aproximación a la sección aúrea, media de oro o número de oro.

a	b	$\frac{a+b}{a}$	Razón de oro
2	1	$\frac{2+1}{2}$	1.5
3	2	$\frac{3+2}{3}$	1.66666666667
5	3	$\frac{5+3}{5}$	1.6
8	5	$\frac{8+5}{8}$	1.625
13	8	$\frac{13+8}{13}$	1.61538461538
21	13	$\frac{21+13}{21}$	1.61904761905
34	21	$\frac{34+21}{34}$	1.61764705882
55	34	$\frac{55+34}{55}$	1.61818181818
89	55	$\frac{89+55}{89}$	1.61797752809

Tabla 7. Aproximación a la sección aúrea, media de oro o número de oro.

CAPÍTULO 5

LABORATORIO DE MATEMATICAS

5.1. Laboratorio 1. La matemática en la tierra de los faraones: Egipto.

5.1.1. Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVO DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificar el sistema de numeración egipcio y su importancia en la historia de las matemáticas.

Simbolizar números en el sistema de numeración egipcio.

Realizar sumas y productos con números naturales.</td><td>Numérico y sistema numérico.</td><td>Uso representaciones, principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.

Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Identifica, describe y representa diferentes sistemas de numeración que fueron utilizados en la antigüedad.</td></tr>
<tr><th colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Identifica el sistema de numeración egipcio y su importancia en la historia de las matemáticas.
Realiza ejercicios empleando el sistema de numeración egipcio y el sistema de numeración decimal.</td></tr>
</table>

Tabla 8. Objetivos de aprendizaje, pensamiento matemático, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y desempeños específico.

	FASES	ACTIVIDADES	RECURSOS
MOMENTO 1	Apertura o exploración	Construyendo pirámides con números egipcios.	Guía del docente: orientaciones didácticas, cartón, icopor, colores, marcadores, fichas con números egipcios y números decimales: anexo 1, tijeras, colbón.
MOMENTO 2	Desarrollo o estructuración de la clase	Narración de cuento: “La matemática en la tierra de los faraones”.	Guía del docente: fundamentación teórica del contenido de la clase. guía del estudiante: cuento (anexo 2), video o tablero, papel, lápiz, computador e internet.
	Trabajo independiente	Desarrollo de taller (digital o escrito).	Guía del estudiante: actividades No.1 y 2.
	Trabajo cooperativo	Desarrollo de taller (digital o escrito).	Guía del estudiante: actividad No.3.
MOMENTO 3	Cierre o transferencia	Carrera de observación.	Guía del estudiante: actividad No.4, cartulina, colbón, acertijos para la carrera de observación, tarjetas con números egipcios (anexo 3).
MOMENTO 4	Para aprender más	Construir un cuento acerca de la historia matemática de los egipcios.	Hojas de block, computador.

Tabla 9. Fases, actividades y recursos.

5.1.2. Fundamentación teórica del contenido de la clase.

El laboratorio “Cómo contaban nuestros antepasados” tiene como finalidad, enseñar a los estudiantes de qué forma los egipcios utilizaban los números, y cómo influyeron en la evolución de la matemática y la numeración actual. Esta civilización, se asentó en el extremo nordeste de África y en la península del Sinaí al occidente de Asia a orillas del río Nilo en Egipto. Gracias a esta ubicación obtuvieron recursos básicos para subsistir, en especial el agua; además, se les facilitó el comercio y la agricultura.

Se caracterizaron por sus enormes construcciones, pirámides y templos; pensaron el calendario solar. Hicieron grandes aportes a la geometría, con el cálculo de superficies y el volumen de esferas, cilindros y pirámides. Los egipcios emplearon los ideogramas y los jeroglíficos para representar los números. A partir de 7 símbolos, que simbolizaban el uno, el diez, el cien, el mil, el diez miel, el cien mil y el millón como se muestra en la tabla 9.

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Jeroglífico							
Descripción	Bastón	Asa o herradura invertida	Cuerda enrollada en espiral	Flor de loto	Dedo levantado	Pez	Hombre arrodillado

Tabla 10. Sistema de numeración egipcio.

En este sistema de numeración los símbolos se repetían e iban agregando según la necesidad, por esto, se consideró como un sistema de valor aditivo que carecía de valor posicional. Las cifras se podían escribir en cualquier orden o sentido, de arriba-abajo, derecha- izquierda o viceversa; lo único que importaba era la cantidad y escribir todos los símbolos, no el orden en el que se presentaran. Esta escritura era utilizada en piedra y podía representarse como números o palabras. Al no poseer valor posicional, un número como 2348 podría representarse como se muestra en la figura 16.

Figura 16. Representación del número 2348 en el sistema de numeración egipcio.

Esto ocasiono que la escritura de cifras mayores se complicara he hiciera muy extensa. Por eso, Los egipcios, idearon la escritura hierática, con la finalidad de ser más rápidos a la hora de copiar números. En esta se utilizaban símbolos para los dígitos del 1 al 9, del 10 al 90, del 100 al 900 y del 1000 al 9000 incorporando las unidades, las decenas, las centenas y los millares (figura 17). Cada alegoría podía repetirse nueve veces antes de utilizar la siguiente, este método era codificado y permitió simplificar la transcripción de los jeroglíficos.

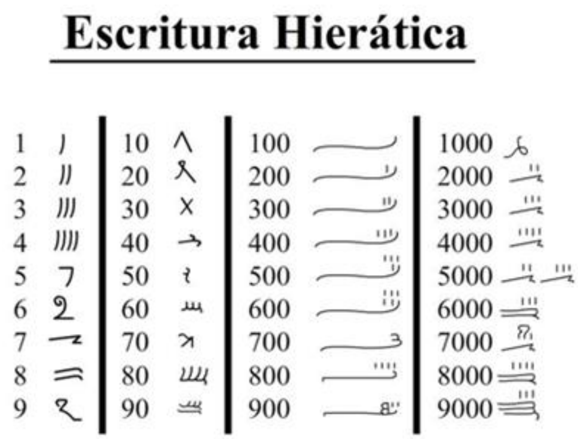


Figura 17. Escritura hierática egipcia.

A diferencia de la escritura a base de acertijos, la representación hierática evoluciono, en un inicio se podía trazar en cualquier sentido. Luego se estableció anotarse de derecha a izquierda en columnas o líneas, solo hasta la dinastía XII se estandarizó su escritura de forma horizontal. Esta forma de manuscrito tomo mayor importancia que la expresión jeroglífica; por ser más común a nivel cultural. Se asentaba en madera, papiros, telas y piedras.

Sistema decimal	Escritura hierática
9482	
9482	

Tabla 11. Ejemplo de escritura hierática.

Esta civilización se catalogó como la primera cultura que utilizó un sistema numérico en base 10, es decir, decimal. Emplearon los números cardinales y ordinales, estos últimos podían simbolizase de tres modos diferentes, especialmente en la escritura de fechas.

Los egipcios no reconocían el cero como un número, sino como la ausencia de valor, el cual representaban con el jeroglífico de la figura 18.

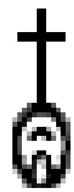


Figura 18[3]*. Signo hierático* nfr *que en escritura jeroglífica representaba el número cero.*

Efectuaban operaciones básicas como sumas y restas, las cuales simbolizaban con una figura de dos extremidades inferiores invertidas. Los pies ubicados hacia la derecha indicaban la suma y hacia la izquierda la resta, como se muestra en la figura 19.

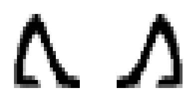
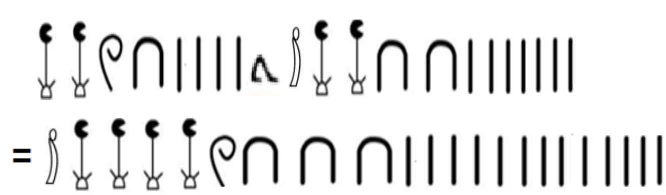


Figura 19[4]*. Símbolo de suma y resta en la numeración egipcia.*

En la suma se agregaban símbolos, si alguno excedía las nueve veces que podía escribirse simplemente se eliminaban y escribían el siguiente distintivo, el cual significaba diez veces el eliminado. Así:

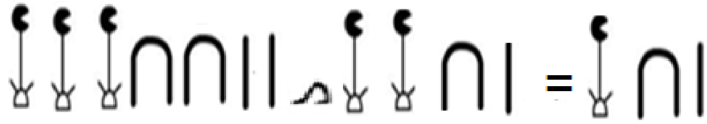


Al haber más de nueve símbolos para el número uno, se remplaza por el siguiente, en este caso el 10 de la forma:

[3] Figura tomada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Numeraci%C3%B3n_egipcia#cite_note-1

[4] Figura tomada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Numeraci%C3%B3n_egipcia#cite_note-1

En la resta se eliminan los símbolos que se debían descontar:



En la multiplicación aplicaban el principio aditivo de sucesivas duplicaciones, y la división se cimentó en la multiplicación.

5.1.3. Orientaciones didácticas.

Con el laboratorio "La matemática en la tierra de los faraones: Egipto" los estudiantes comprenderán de qué manera los egipcios escribían números y como estos contribuyeron al desarrollo de la matemática. El laboratorio está pensado para ser desarrollado en cuatro momentos (**exploración o apertura, desarrollo, cierre y para aprender más**).

Para el momento de la apertura o exploración, el docente debe armar una pirámide con icopor o cartón; dentro de esta se introducen fichas con diferentes números copiados en sistema decimal y egipcio; estos últimos en escritura hierática y jeroglífica. Para efectuar el juego, cada estudiante saca una ficha de la pirámide, mientras el docente hace preguntas sobre lo que significa cada imagen; de esta manera se fomenta la integración y se activan los conocimientos previos de los educandos con relación a la temática. Estas preguntas deben plantearse de modo que despierten el interés de los participantes.

Algunos de los interrogantes podrían ser: ¿Qué ven en las imágenes? ¿A qué creen que se asemejan? ¿Alguna vez han visto estos símbolos en otros lugares? ¿Qué relación tienen con la pirámide? Seguidamente el docente hace la introducción sobre la cultura egipcia y cómo esta ha utilizado los números de acuerdo con sus necesidades.

En el segundo momento o desarrollo de la clase, el docente proyecta el video "La matemática en la tierra de los faraones" relacionado con los aspectos más importantes de la cultura egipcia y la forma como utilizaban los números; si no es posible mostrar el video, se puede realizar la actividad por medio de la lectura del cuento, el cual será narrado por el profesor mientras revela las imágenes a los aprendices. Para dinamizar el encuentro, el maestro solicita a los estudiantes que creen su propio jeroglífico y lo exponga a sus compañeros para que ellos lo identifiquen, quien lo haga en menos tiempo, puede catalogarse como un buen egipcio; si por el contrario nadie lo descifra el buen egipcio será quien creo el jeroglífico.

Con el trabajo individual, los estudiantes demuestran los conocimientos adquiridos a partir de la realización de las actividades No.1, 2 y 3 que se ha propuesto en la guía del estudiante; con el desarrollo de estas los aprendices tendrán la oportunidad de indagar y representar aspectos claves e importantes de la numeración egipcia, además analizarán semejanzas y diferencias entre el sistema de numeración egipcio y el sistema de numeración decimal. El cierre o tercer momento, pretende que el estudiante demuestre los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores, a partir de la realización de un taller, donde el estudiante tendrá la oportunidad de indagar y representar aspectos claves e importantes de la numeración egipcia, analizará semejanzas y diferencias entre el sistema de numeración egipcio y el decimal.

Para fortalecer el trabajo cooperativo se propone la actividad No.4. El docente organiza a los niños en equipos de cuatro estudiantes quienes efectuaran la carrera de observación. En esta actividad cada grupo debe analizar una serie de doce adivinanzas relacionadas con el sistema de numeración egipcio y decimal. Cada que un equipo descubra un acertijo se debe desplazar al sitio que indique la respuesta encontrada y así sucesivamente hasta dar con los siete resultados correctos. Se recomienda al docente ubicar con anticipación las tarjetas con números egipcios (anexo 3) de acuerdo con el área que se establezca para efectuar la carrera de observación.

Terminado el tercer momento, es indispensable que el docente brinde un espacio de reflexión para que realimente a los estudiantes con comentarios, analogías, preguntas, contra ejemplos y de esta forma expresen los conocimientos adquiridos con el desarrollo de este laboratorio.

En el último momento, denominado “para aprender más”, solicite a los estudiantes como actividad complementaria que desarrollen las actividades No.5 y No.6 propuestas en la guía del estudiante. La actividad No.5 consiste en elaborar un cuento sobre la historia y los números de la cultura egipcia. Se sugiere recordar al estudiante las partes del cuento, posibilitando que el trabajo sea mejor estructurado. En la actividad No.6 los estudiantes construirán una maqueta que represente e ilustre el antiguo Egipto y la forma como utilizaron los números. Esto utilizando elementos del entorno como piedras, palos, barro, entre otros.

5.1.4. Guía del estudiante.

Lo que comprenderás:

• Identificar el sistema de numeración egipcio y su importancia en la historia de las matemáticas.

• Realizar ejercicios empleando el sistema de numeración egipcio y el sistema de numeración decimal.

Materiales:

Papel, lápiz, tarjetas con la representación de números egipcios y números decimales, materiales del entorno, computador, cartón, colbón, plastilina o barro, icopor, colores y temperas.

Practica de exploración.

Actividad No.1. ¿Cómo contaban los egipcios?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario retroceder unos 2500 años a.C. y estudiar cuáles fueron las características fundamentales del sistema de numeración empleado por los egipcios. Con la escritura jeroglífica, los egipcios podían representar números, desde el uno hasta millones. En este sistema, una línea equivalía al número uno, dos líneas hacían alusión al número dos, tres líneas al tres y así sucesivamente hasta el 9.

Cuando llegaban a 10, utilizaban un nuevo símbolo, una herradura o asa invertida, así repetidamente un asa era el diez, dos asas el 20, hasta llegar al 100, el cual se simbolizaba con una cuerda enrollada en espiral. Por ser un sistema decimal, se repetía de 10 en 10 como se muestra en la tabla 10.

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Jeroglífico							
Descripción	Bastón	Asa o herradura invertida	Cuerda enrollada en espiral	Flor de loto	Dedo levantado	Pez o renacuajo	Hombre arrodillado

Tabla 12. Escritura jeroglífica de los números egipcios.

Los demás valores se expresaban con la repetición del símbolo el número de veces que fuera necesario, este sistema fue considerado como un sistema aditivo; en el que los números eran representados de izquierda a derecha o de arriba abajo, el orden no importaba, se escribían según criterios estéticos.

A comienzos del tercer milenio a. C. los egipcios disponían del primer sistema de numeración desarrollado en base 10. No era un sistema posicional que permitía el uso de grandes números y describir pequeñas cantidades en forma de fracciones unitarias: como las fracciones del Ojo de Horus[5]. El siguiente ejemplo muestra como escribían en griego el número 2016:

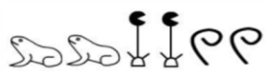
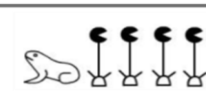
Sistema decimal	2016
Sistema egipcio	

Has aprendido algo de la cultura egipcia, ahora es tu turno de practicar. Completa la siguiente tabla, utilizando la fecha de tu cumpleaños, escribiendo los números en el sistema decimal y en el sistema egipcio:

Sistema de numeración	Día	Mes	Año
Sistema egipcio			
Sistema decimal			

[5] Ojo de Horus: Símbolo egipcio de características mágicas, protectoras, purificadoras, sanadoras, símbolo solar que encarnaba el orden, lo imperturbado, el estado perfecto.

Actividad No.2. ¿Cuál es el valor en el sistema de numeración decimal de estos jeroglíficos?

Jeroglíficos	Sistema Decimal	Jeroglíficos	Sistema Decimal
			
			
			
			
			

Actividad No.3. Escribe los jeroglíficos correspondientes a los siguientes números en el sistema decimal.

Sistema de numeración Decimal	Sistema de numeración Egipcio	Sistema de numeración Decimal	Sistema de numeración Egipcio
20408		49	
100676		12	
1200036		10000000	
64000		864305	
508000		17793	

Actividad No.4. Carrera de observación (grupo de cuatro estudiantes)

Pistas: Analiza cada una de las siguientes adivinanzas, cuando tengas el resultado desplázate al sitio al que te indique la respuesta. Ejemplo: "Soy más de cuatro sin llegar a siete, y llego a nueve cuando tres me des".

En este ejemplo, la respuesta es seis. Resuelto el acertijo desplázate con tu equipo y encuentra el número seis que está escrito en el sistema de numeración egipcio, allí encontraras otra pista y continúa con el juego.

- **Acertijo No.1**. ¿Múltiplo de 10 mayor que 1290 y menor que 1310? **R/1300**
- **Acertijo No.2**: "Soy más de 12, sin llegar a 22, y llego a 18 cuando me des tres". **R/15**
- **Acertijo No.3:** Si en una casa hay dos camas, si en cada cama hay dos almohadas, y si en cada almohada hay dos hadas. ¿Cuántas hadas hay? **R/8**
- **Acertijo No.4:** Mario está ahorrando para comprar una bicicleta que cuesta $136500, la semana pasada tenia $8500 y esta semana ahorró $15000. ¿Cuánto dinero le falta para comprar la bicicleta? **R/113000**
- **Acertijo No.5:** El área de un rectángulo mide 120 metros cuadrados. El ancho es de 10 metros. ¿Cuánto mide el largo del rectángulo? **R/12metros**
- **Acertijo No.6:** Un rectángulo tiene un ancho de 15 centímetros. El largo del rectángulo es 4 veces su ancho. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo? **R/150cm**
- **Acertijo No.7:** ¿Cuál es el área de un triángulo cuya base mide 10 cm y su altura 42 cm? **R/210cm**
- **Acertijo No.8:** ¿Cuál es el área de un trapecio cuyas bases miden 1100 cm y 1400 cm y su altura mide 1000 cm?**R/1250000**
- **Acertijo No.9:** Martin y Helena son hermanos. La estatura de Martin es de 164 cm y la de Helena de 132 cm. ¿Cuál es la diferencia de estatura entre los dos hermanos? **R/32años**
- **Acertijo No.10:** Juan tiene un tanque con una capacidad para almacenar 50000 litros de agua. Para llenarlo utiliza dos grifos que vierte cada uno 200 litros cada hora. ¿En cuánto minuto se llenará el tanque? **R/ 125 horas 7500 Minutos**
- **Acertijo No.11:** De lunes a viernes, Valeria deposita diariamente $2600 en su alcancía. ¿Cuánto dinero ha depositado Valeria durante estos 5 días? **R/13000**
- **Acertijo No.12:** Andrés y Camilo están jugando con su videojuego. Andrés tiene 1800 puntos. Si Camilo gana 600 puntos, tendrá tantos puntos como Camilo. ¿Cuántos puntos tenía Camilo? **R/ 1200 puntos**

Actividad No.5. Para aprender más.

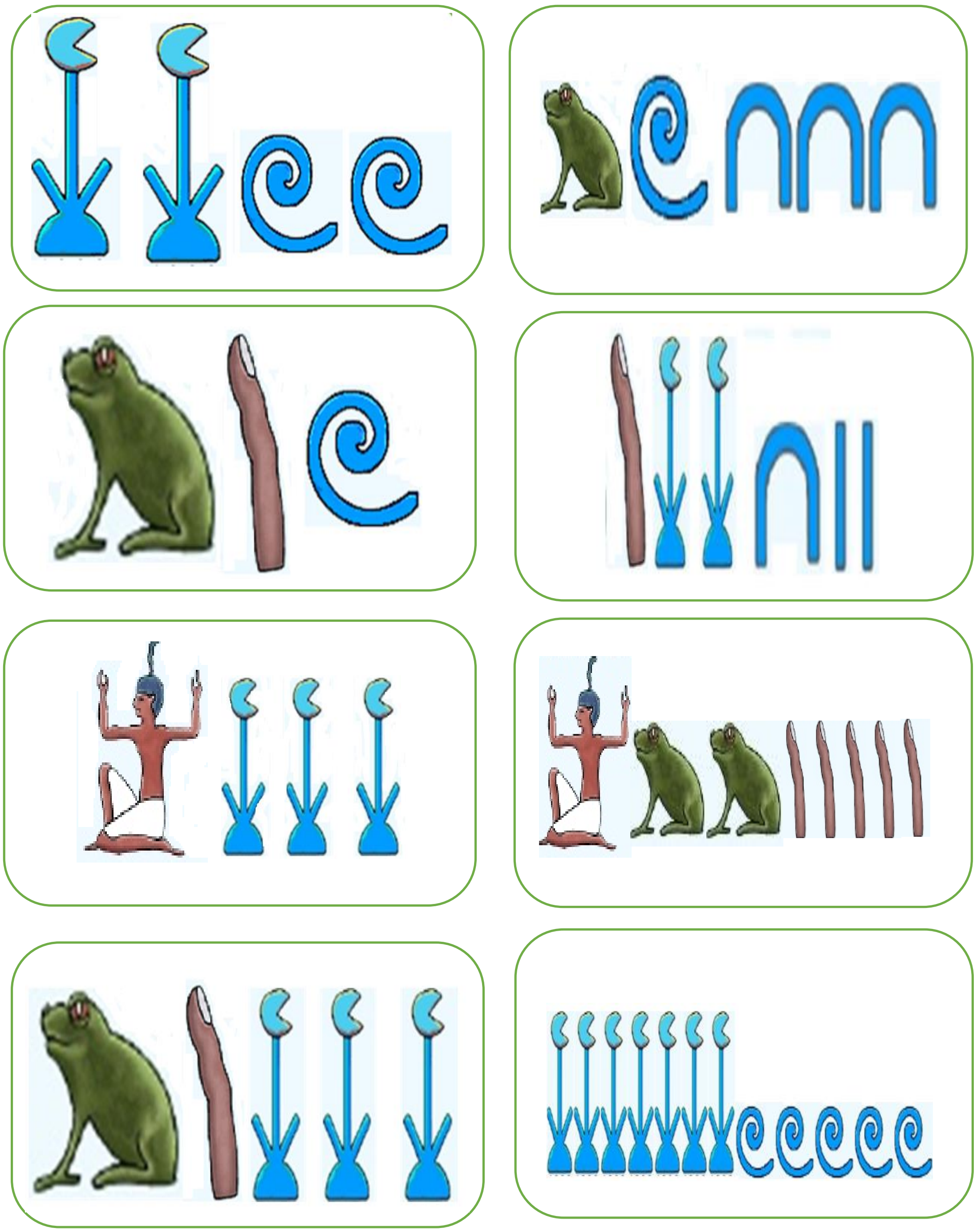
Cada estudiante debe inventar un cuento y graficarlo como actividad complementaria. En este, debe narrar lo aprendido sobre la historia y los números de la cultura egipcia; además, deberá exponer creativamente en la próxima clase.

Actividad No.6. Las matemáticas en el tiempo de los faraones.

En esta a actividad el estudiante construirá con elementos de su entorno una maqueta que represente el antiguo Egipto; la cual utilizará posteriormente en la clase para ilustrar diferentes conceptos matemáticos.

5.1.5. Anexos del laboratorio uno.

Anexo 1[6]. Tarjetas recortables con números egipcios para el trabajo con la pirámide.



[6] Las imágenes fueron tomadas de la pagina https://colegiohelicon.org/blogs/mates1eso/2014/04/03/las-fracciones/

Anexo 2. Cuento

“La matemática en la tierra de los faraones”.

Esta historia sucedió hace aproximadamente 4000 años en una tierra exuberante y llena de magia, ciertos personajes habitaban un lugar extraordinario, la belleza natural estaba dada por los hermosos valles que se formaban mientras el río Nilo llevaba sus cálidas aguas hacia el océano mediterráneo. Allí se desarrolló una de las civilizaciones más importantes de la humanidad: la cultura egipcia gobernada por un faraón llamado Narmer, considerado dios de los dioses; quien tenía el poder de decisión sobre todas las cosas y las personas que habitaban su reino.

Cuenta la leyenda que este imperio tuvo grandes avances tecnológicos, edificaron magnificas construcciones gracias a la representación que le daban a los números. Se preocupaban por comprender los fenómenos de la naturaleza, como el movimiento de la tierra. Un día se dieron cuenta que necesitaban medir continuamente sus terrenos para volver a ser sembrados pues las crecientes anuales del río que inundaban los campos. Además, el faraón tenía necesidad de mantener control de sus tierras para cobrar los impuestos, por esto, ordenó a sus sacerdotes y sirvientes más populares y de gran aceptación, crear herramientas de medición para demarcar los nuevos terrenos después de las crecidas del rio.

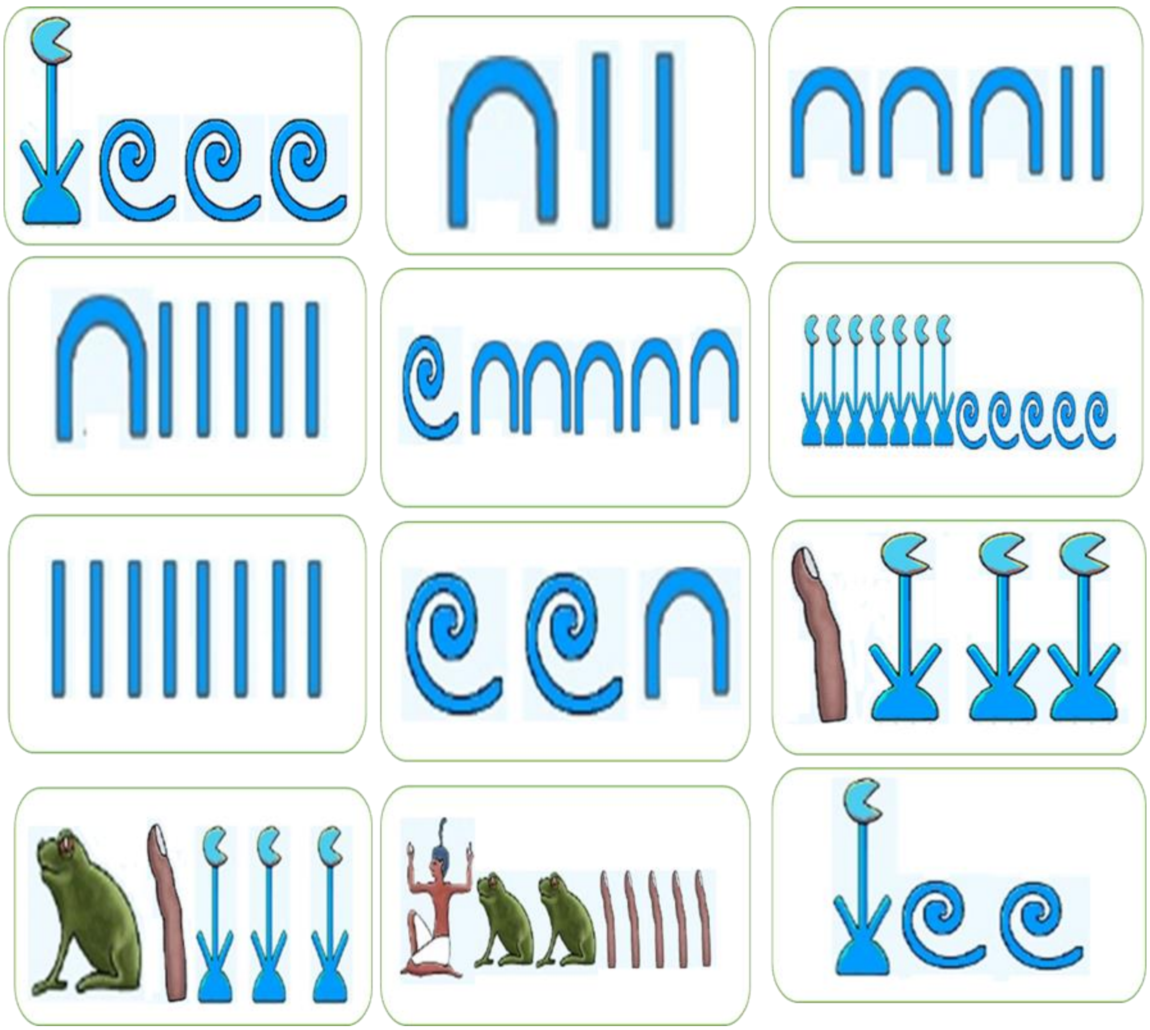
Con el paso del tiempo, implementaron unidades de longitud como el codo, que era más o menos la distancia entre el codo de una persona y el extremo del dedo medio; pero resulta que cada persona tenía una proporción diferente de esta medida, lo que era un problema; luego llegó la tercera dinastía de los faraones, quienes alargaron esta distancia, creando el “codo real”. Su crecimiento fue de $52\ cm$ y se subdividía en otras unidades más pequeñas como el dedo y el palmo.

Algo extraordinario de esta cultura fue el dominio de los números y sus operaciones. Conocieron los racionales positivos de numerador uno. Su acercamiento al valor del número Pi ($\pi = 3.16$), fue el más aproximado en la antigüedad. Resolvieron ecuaciones de segundo grado y raíces cuadradas para desarrollar problemas de áreas e incidieron en el desarrollo de las matemáticas logrando importantes avances en el álgebra y la geometría.

Con estos hallazgos, el mundo de los faraones seguía creciendo, mantenían el control de sus construcciones y los materiales que utilizaban, edificaron las grandes pirámides de Egipto, consideradas una de las maravillas del mundo. Los números eran una revelación divina que les daba conocimiento y poder. Gracias a sus aportes en el campo de las matemáticas, muchas personas han estudiado su legado. Y colorín colorado a orillas del rio Nilo esta historia ha terminado.

Autor: Ramiro de Jesús Tobón Tobón

Anexo No.3. Tarjetas recortables con números[7] egipcios para la carrera de observación.



[7] Imágenes tomadas de la pagina https://colegiohelicon.org/blogs/mates1eso/2014/04/03/las-fracciones/

5.2. Laboratorio 2. La potenciación y el uso de sus propiedades.

5.2.1. Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVO DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificar y utilizar las propiedades de la potenciación para resolver problemas aritméticos.

Aplicar la potenciación en la solución de problemas matemáticos de su entorno.

Determinar y argumentar la validez de estrategias para calcular potencias.</td><td>Pensamiento numérico y sistema numérico.</td><td>Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Interpreta y utiliza los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación.
Describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación.
Comprende que elevar un número a una cierta potencia corresponde a multiplicar repetidas veces el número. Comprende la relación entre la raíz cuadrada y elevar al cuadrado, la raíz cúbica y elevar al cubo, etc.
Asocia las potencias cuadradas con el área de un cuadrado ($área = (lado)^2$), y las potencias cúbicas con el volumen de un cubo ($volumen = (lado)^3$).</td></tr>
<tr><th colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">• Utiliza las propiedades de la potenciación para resolver problemas aritméticos.
• Aplica la potenciación y sus propiedades para resolver diferentes problemas de su vida cotidiana.
• Reconoce y determina el cuadrado y el cubo de un número.
• Determina la validez de las diferentes estrategias para calcular potencias.
• Resuelve y formula problemas cuya solución requiere de la potenciación.</td></tr>
</table>

Tabla 13. Objetivos de aprendizaje, pensamiento matemático, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y desempeños específico.

FASES		ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o Exploración	Desafío No.1. Acertijo. “el monstruo de dos cabezas”.	Guía del estudiante: desafío No.1, papel, tablero, marcadores o tiza y lápiz.
Momento 2	Desarrollo o Estructuración de la clase	Reconocimiento y aplicación de la potenciación y sus propiedades.	Guía del docente: fundamentación teórica y orientaciones didácticas, regletas de Cuisenaire, tablero, internet, hojas de papel y marcadores.
	Trabajo Independiente	Jugando a formar cuadrados y cubos perfectos.	Guía del estudiante: desafíos No.2 y 3, figuras geométricas, palillos o pitillos y fotocopias.
	Trabajo Cooperativo	Desafíos grupales: Cortando en partes iguales aprendemos potencias. Utilizando potencias para resolver problemas del entorno.	Guía del estudiante: desafío No.4, anexo 1: Roles para el trabajo cooperativo, material manipulativo, tablero, video beam, etc.
Momento 3	Cierre o Transferencia	Auto reflexión de la clase	Preguntas previamente formuladas por el profesor acerca del desarrollo de la clase.
Momento 4	Para aprender más	Desafíos: pruebas saber	Guía del estudiante: Desafío No.5, video beam, tablero, marcadores o tiza.

Tabla 14. Fases, actividades y recursos.

5.2.2. Fundamentación teórica del contenido de la clase.

En el laboratorio uno “La matemática en la tierra de los faraones: Egipto”, los estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer el desarrollo y la evolución del número desde el análisis de la cultura egipcia. En este nuevo laboratorio se trabaja el concepto de potencia, teniendo como base la resolución de problemas. Cada problema está planteado en forma de desafío. Como estrategia de solución se utiliza el enfoque propuesto por George Polya, el cual se fundamenta en las siguientes fases:

- Comprensión del problema.
- Concepción de un plan.
- Ejecución del plan.
- Visión retrospectiva del desafío o problema.

Resolución de problemas haciendo uso de la potenciación.

En este laboratorio se propone la resolución de problemas matemáticos, teniendo en cuenta que para una buena formación en matemáticas es necesario plantear y resolver problemas. Estudios realizados han mostrado que instruir a los estudiantes sobre resolución de problemas les ayuda y despierta el interés en el conocimiento. Además, les permite desarrollar el razonamiento heurístico como base de la creación matemática.

Como soporte para el docente y con el fin de no caer en el simple desarrollo de ejercicios rutinarios, se ha propuesto utilizar el enfoque planteado por George Polya con relación a este tema. De acuerdo con Polya, para resolver un problema es necesario hacer una pausa, reflexionar y ejecutar algunos pasos para dar respuesta a una situación problema; mientras que para resolver un ejercicio solo se requiere la aplicación de un algoritmo matemático.

Para que este laboratorio tome su esencia y no se convierta en una clase teórica enfocada en el desarrollo demostrativo de ejercicios, es fundamental que el docente entienda la diferencia entre ejercicio y problema y tenga en cuenta los cuatro pasos establecidos por George Polya para un óptimo desarrollo heurístico en los estudiantes.

Un poco de historia

Indagando acerca de la historia de los números, el primer acercamiento al tema de la potenciación se dio en el pueblo babilonio aproximadamente 5.000 años a. C. Aunque no se habló directamente de potencia, esta cultura al tomar como base el número 60 y utilizar estos símbolos, reflejó el uso de las potencias. De igual forma, los egipcios, al representar los números 1, 100, 1.000, 10.000, 1.000.000 dejan ver que tenían noción de este concepto.

En hallazgos encontrados en tablas de escritura cuneiforme de estas culturas, se evidencia que realizaban ternas pitagóricas, dando a entender que poseían conocimientos del concepto de raíz, el cual se relaciona directamente con la potenciación. Más tarde con el planteamiento del teorema de Pitágoras, los griegos demostraron la utilización de cuadrados perfectos. Euclides (325 – 265 a. C.) no ajeno a este concepto, hizo uso en sus demostraciones de los cuadrados y los cubos. Arquímedes (287 – 212 a. C.) refleja el tratamiento que le dio a la esfera.

Diofanto de Alejandría (200 – 284 d. C.) utilizó las potencias y le dio una representación simbólica al uso de los exponentes. Rene Descartes (1596 – 1650) definió el termino de potencia y la representa de la siguiente forma: x, x^2, x^3, x^4, ...,

La Potenciación y sus Propiedades.

La potenciación es una operación matemática efectuada entre dos términos, la base y el exponente, donde la base se multiplicada por sí misma las veces que indique el exponente obteniéndose así la potencia, es decir, la potenciación es una multiplicación de factores iguales. En la representación numérica de una potencia se diferencian cuatro términos: la potencia indicada, la base, el exponente y la potencia. La potencia indicada, es el número que indica la potencia que se debe hallar. La base, es el número que se repite. El exponente, es el número que indica la cantidad de veces que se repite la base. La potencia es el resultado. Figura 20.

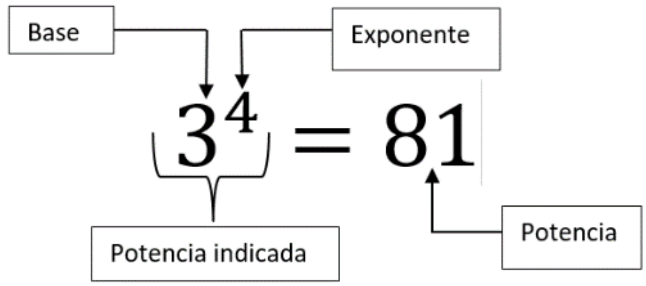


Figura 20. Partes que componen la potenciación.

Ejemplo:

$4 . 4 . 4$ se escribe $4^3 = 64$; donde 4^3 es la potencia indicada, 4 es la base, 3 el exponente y 64 la potencia. Se lee: Cuatro a la tres, igual a sesenta y cuatro.

Clases de potencias.

- **Cuadrado perfecto**: Al multiplicar un número por sí mismo dos veces, se obtiene un cuadrado perfecto.

$$c^2 = c \, . \, c$$

Ejemplo: $3^2 = 3 . 3 = 9$

- **Cubo perfecto:** Al multiplicar un número por sí mismo tres veces, el resultado será un cubo perfecto.

$$a^3 = c . c . c$$

Ejemplo: $4^3 = 4 . 4 . 4 = 64$

- Cuando la base de una potencia indicada es 10, la potencia es igual a 1 más tantos ceros como el número del exponente lo indique.

Ejemplo:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 100$

- La potencia de una fracción se obtiene al elevar el numerador y el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{c^n}{d^n}, d \neq 0$$

Ejemplo :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Propiedades de la potenciación.

- **Multiplicación de potencias de igual base**
  El producto de dos o más potencias de igual base con diferente exponente es igual a la misma base, elevada a la suma de los expones. $c^n \, . \; c^m = c^{n+m}$.

  Ejemplo: $3^2 \, . \; 3^3 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

- **Cociente de potencias de igual base.**

El cociente o división de potencias de la misma base es igual a la misma base y se restan los exponentes. $c^n \div c^m = c^{n-m}$.

Ejemplo: $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2$

$$\left\{\frac{3}{4}\right\}^5 \div \left\{\frac{3}{4}\right\}^2 = \left\{\frac{3}{4}\right\}^{5-2} = \left\{\frac{3}{4}\right\}^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

- **Potencias de exponente negativo.**

La potencia de un número entero con exponente negativo es igual al inverso del número elevado al exponente positivo; siempre que $c \neq 0$.

$$c^{-n} = \frac{1}{c^n}$$

Ejemplo:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

Cuando se trata de una fracción se opera de la siguiente forma:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{-n} = \left(\frac{d}{c}\right)^n, \qquad \forall c, d \neq 0$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

- **Propiedad distributiva o Potencia de un producto o cociente.**

Cuando una multiplicación o una división de dos o más números está elevada a un exponente, se eleva cada uno de los términos de la base al exponente dado; obteniéndose así varias potencias.

$$(c\,.\,d)^n = c^n.d^n$$

Ejemplo:

$(3\,.\,4)^2 = 3^2\,.\,4^2 = 9\,.\,16$

Cuando se eleva una suma o una resta a un exponte positivo no es posible aplicar la propiedad distributiva. Se debe efectuar la operación antes de elevar al exponente.

$$(c + d)^n$$

Ejemplo.

$(8 + 4)^2 = 12^2 = 144$
$(8 - 4)^2 = 4^2 = 16$

En conclusión, cuando se trabaja con la propiedad distributiva de la potenciación, esta sólo se utiliza en la multiplicación y división, pero no en la suma y en la resta.

- **Potencia de otra potencia**

Cuando una potencia indicada esta elevada a otro exponente, se usan varios signos de agrupación para indicar las potencias superiores o separar los exponentes. Para efectuar la potencia se debe colocar la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(m^n)^s = m^{n.s}$$

Ejemplo:

$(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6$

$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2\times 1} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

5.2.3. Orientaciones didácticas.

Para el desarrollo de este laboratorio se divide la clase en cuatro momentos (apertura, desarrollo, cierre y para aprender más). En el momento de la apertura se da a conocer el objetivo de la clase y se plantea el desafío No.1. “El dragón de dos cabezas”. Esta actividad está diseñada como estrategia motivadora con el fin de indagar acerca de los conocimientos previos de los estudiantes. El desafío consiste en ayudar al príncipe a derrotar al dragón de dos cabezas, este solo podrá ser vencido haciendo cálculos matemáticos y teniendo en cuenta que al cortarle una de ellas, esta se duplica.

Para el momento dos o estructuración de la clase, a partir del uso de herramientas tecnológicas, el docente por medio de una explicación didáctica conceptualiza el tema “la potenciación y sus propiedades”. Los estudiantes de forma grupal leen y resuelven los desafíos 2, 3 y 4 propuestos en la guía del estudiante, los cuales serán retroalimentados en plenaria por todo el grupo. Es importante que en esta etapa se planteen actividades sencillas y concretas donde se promueva el surgimiento de interrogantes y se genere la necesidad de buscar y hallar soluciones a problemas específicos del entorno; para esto es fundamental que el docente se apoye en los desafíos 2, 3 y 4.

Para el desafío No.*2*. “Jugando a formar cuadrados y cubos perfectos”, se requiere el uso de la regleta de Cuisenaire más pequeña (la blanca). Con esta actividad se busca motivar a los estudiantes a desarrollar una serie de potencias e identificar si son o no cuadrados y cubos perfectos. La actividad consiste en plantear diferentes potencias para que el estudiante forme cuadrados o cubos perfectos haciendo uso de las regletas más pequeñas $(1cm^3)$, según sea el caso y establezca a que grupo pertenece. Por ejemplo, $2^3 = 8$ es un cubo perfecto, puesto que al ordenar las ocho regletas de $1cm^3$ se forma un cubo perfecto, como el que se muestra en la figura 21:

Figura 21. Representación gráfica del cubo perfecto del número dos[8].

El desafío No.3, tiene como objetivo afianzar en los estudiantes el concepto de potencia y la aplicabilidad de sus propiedades. Para esto el docente propone a cada equipo de estudiantes que tomen una hoja de papel tamaño carta y hagan un corte de forma que se obtengan dos partes iguales. Seguidamente se divide cada uno de los cortes obtenidos

[8] Imagen tomada de https://es.dreamstime.com/fotograf%C3%ADa-de-archivo-libre-de-regal%C3%ADas-cubo-hecho-de-los-cubos-coloridos-aislados-conjunto-de-cuatro-image27803447

anteriormente en partes iguales. Repetir este procedimiento tres veces más e invitar a los estudiantes a resolver las siguientes y preguntas:

a. ¿Cuántos trozos de papel se obtuvieron en la tercera, cuarta y quinta división?
b. ¿Cuántos trozos de papel resultaran al hacer una octava división y cuántos en la décima?
c. ¿El número de trozos de papel, crece proporcionalmente, al número de particiones?
d. ¿Se puede prever la cantidad de trozos de papel que hay, después de realizar un número cualquiera de particiones?

Resuelto este desafío, el docente debe estar en capacidad de llevar a los estudiantes a un nivel más avanzado. Para esto, se proponen una serie de preguntas, las cuales serán analizadas en grupo y permitirán a los estudiantes expresar sus propias conjeturas. Realice nuevamente el desafío No.3. Utilizando no una, sino dos hojas de papel, he invite a los estudiantes a reflexionar acerca de los siguientes interrogantes:

a. ¿Cuál sería el número de trozos de papel en la tercera división?
b. ¿Qué cantidad de trozos de papel se obtendrán en la cuarta división?
c. ¿A qué conjunto numérico pertenecen el número de hojas (N) y el número de divisiones realizadas a la hoja (n)?
d. ¿Qué pasaría si dicha operación se realiza, con N número de hojas y n divisiones?
e. ¿Cuál sería la cantidad de trozos de papel que se obtendrán después de n divisiones?

El desafío No.4: "Utilizando potencias para resolver problemas del entorno" busca no solo que los estudiantes describan y desarrollen estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación, sino que además sean capaces de plantear y resolver sus propios problemas. Para esto, se han propuesto tres problemas a resolver. Cada grupo de estudiantes deberá formular dos problemas más y compartirlo con el resto de los aprendices del salón de clase.

El cierre o tercer momento, consiste en un proceso de metacognición que se realiza colectivamente con el grupo, a partir del cual el docente por medio de la reflexión y guiado por preguntas invita a los estudiantes a participar en la retroalimentación de la clase e indagar así sobre los logros alcanzados en este laboratorio.

El cuarto y último momento denominado "para aprender más", está planteado para que el estudiante de forma individual demuestre los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores, a partir de ejercicios y resolución de problemas de tipo pruebas Saber, los cuales debe resolver utilizando la potenciación y sus propiedades.

5.2.4. Guía del estudiante.

Lo que comprenderás:

- Determinar y argumentar la validez de estrategias para calcular potencias.
- Identificar, diferenciar y utilizar la potenciación y sus propiedades para resolver problemas de la vida cotidiana.
- Reconocer y determinar el cuadrado y el cubo de un número.

Materiales:

Papel, lápiz, regletas de cuisenaire, tijeras, palillos o pajillas.

Practica de exploración:

Desafío No.1. "El dragón de dos cabezas".

En el reino de las matemáticas vivía un rey que estaba dispuesto a pagar mil monedas de oro y dar en matrimonio a su hermosa hija, a quien derrotara al dragón de dos cabezas que azotaba su comarca. Todo parecía imposible, puesto que al intentar vencerlo cortándole sus dos cabezas, le nacían dos en el lugar de cada una. Sin embargo, el príncipe del reino de las potencias había descubierto una forma de derrotarlo. Solo debía hacer un cálculo matemático y saber cuántas cabezas tendría el monstruo después de haber intentado vencerlo cinco veces. Él sabía que tenía esa oportunidad, puesto que en ese instante el dragón sería más vulnerable.

Autor: Ramiro de Jesús Tobón Tobón

El desafío consiste en ayudar al príncipe a derrotar al dragón de dos cabezas haciendo los cálculos matemáticos y diciendo el número exacto en el que se podría derrotar al dragón.

Desafío No.2. Jugando a formar cuadrados y cubos perfectos.

Haciendo uso de la regleta más pequeña de Cuisenaire, la blanca, desarrolla las siguientes potencias e identifica en ellas si son o no cuadrados y cubos perfectos. Observa el ejemplo que se plantea a continuación:

Para la potencia $2^3 = 8$, se requieren ocho cuadrados de $1cm^2$cada uno. Al ordenarlos de una manera adecuada se forma un cubo perfecto.

Para la potencia $2^1 = 2$, se requieren dos cuadrados de $1cm^2$cada uno. Al ordenarlos de una forma adecuada, no hay ninguna posibilidad de obtener un cuadrado o un cubo perfecto.

Potencia	Cantidad de cuadrados de largo	Cantidad de cuadrados de ancho	Cantidad de cuadrados de alto	Cuadrado perfecto	Cubo perfecto	Justificación
$2^3 = 8$	2	2	2	No	Si	
$5^2 =$						
$2^4 =$						
$3^3 =$						
$4^2 =$						
$4^3 =$						
$2^2 =$						
$2^4 =$						

Tabla 15. Jugando a formar cuadrados y cubos perfectos.

Desafío No.3.

Toma una hoja de papel y haz un corte de forma que obtengas dos partes iguales. Luego divide nuevamente cada uno de los cortes obtenidos anteriormente en partes iguales. Repite este procedimiento tres veces más y resuelve las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos trozos de papel se obtuvieron en la tercera, cuarta y quinta división?
- ¿Cuántos trozos de papel resultaran al hacer una octava división? y ¿Cuántos en la décima?
- ¿El número de trozos de papel crece proporcionalmente al número de particiones?
- ¿Se puede prever la cantidad de trocitos de papel que hay, después de realizar un número cualquiera de particiones?

Repite nuevamente el procedimiento anterior utilizando dos hojas de papel.

- ¿Qué cantidad de trozos de papel se obtendrían en la cuarta división? y si en vez de dos, se tienen cuatro hojas, ¿Cuál sería el número de trozos de papel en la tercera división?
- ¿A qué conjunto numérico pertenecen el número de hojas (N) y el número de divisiones realizadas a la hoja (n)?
- ¿Qué pasaría si dicha operación se realiza, con N número de hojas y n divisiones?
- ¿Cuál sería la cantidad de trozos de papel, obtenidos después de n divisiones?

Desafío No.4. Utilizando potencias para resolver problemas del entorno

Analiza y resuelve los siguientes problemas:

a. Un almacén de ropa informó todos sus precios en forma de potencia para atraer a más clientes. Observa la lista de precios y determina el valor que deberá cancelar Marcos si comprará un pantalón, una camisa, dos pares de medias y un par de zapatos.

Prendas de vestir	**Precio $**
Camisa	60×10^3
Un par de Medias	$2^5 \times 10^2$
Zapatos	$3 \times 5 \times 10^4$
Correa	$3^2 \times 2 \times 10^3$
Pantalón	$5^2 \times 7^2 \times 10^2$
Blusa	$10^3 \times 7^2$

Responde en equipo:

- ¿Cuánto pagó Marcos por la camisa?
- ¿Cuál de los siguientes dos artículos es más caro, la correa o el par de medias?

- Si Marcos decide comprar dos pantalones, ¿cuánto tendrá que pagar por las dos prendas?
- ¿Cuánto pagó Marcos por la compra que realizó?

b. Por las vías del metro de Medellín se desplazan seis trenes cada hora, cada tren tiene 6 vagones, cada vagón seis filas y cada fila seis sillas. ¿Cuántas personas se pueden desplazar sentadas en 6 horas por las vías del metro de Medellín?

c. Julio debe transportar 10 cajas de lápices, cada caja tiene 10 paquetes, cada paquete tiene 10 manojos y cada manojo tiene una decena de lápices. ¿Cuántos lápices debe transportar Julio?

No olvides que…

- Para multiplicar potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.
  Ejemplo: $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3 = (2)^9 = 512$

Desafío No.5. "Para aprender más"

Este desafío se ha planteado para ser resuelto en forma individual y posteriormente será retroalimentado por todo el grupo.

Instrucciones: Lee atentamente, resuelve, elige una de las alternativas para la respuesta correcta y justifica tu respuesta. Luego debate con tus compañeros la respuesta y retroalimenta lo aprendido.

1) Al sumar las siguientes potencias $3^2 + 2^3 + 5^2$ el resultado es:

   a) 22
   b) 42
   c) 30
   d) 12

2) La suma de $3^2 + 3^3$ es.

   a) 3^5 b) 36   c) 12   d) 6^5

3) El producto $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$ es igual a

a) 64 b) 16 c) 8 d) Ninguno de los anteriores

4) Si $a = 4, b = 5, c = 2$ entonces la expresión $a^2 + b^1 + c^4$ es igual

a) 40 b) 80 c) 11 d) 37

5) Marta tiene 8 blusas, 9 pantalones, 4 pares de zapatos y 2 chaquetas. Para saber de cuantas formas diferentes se puede vestir combinando sus prendas, Marta realizó los siguientes cálculos matemáticos. ¿Cuál consideras es el que muestra la respuesta correcta?

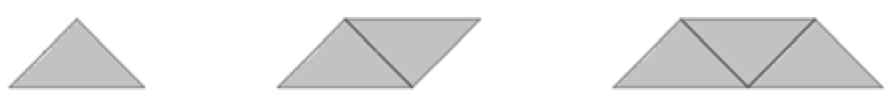
a) $2^8 + 3^3 + 2^2 + 2^1 = 289$
b) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 576$
c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 288$
d) $2^3 + 3^3 + 2^2 + 2^1 = 23$

- ¿De cuantas formas distinta se puede vestir Marta combinando su ropa?

6) ¿Cuántos huevos tendrán 10 cajas, sabiendo que en cada caja hay 10 decenas?

a) $10^2 \cdot 10^2 = 10000$
b) $10^2 = 100$
c) $10^1 = 10$
d) $10^3 = 1000$

7) La siguiente sucesión está dada por el siguiente contexto geométrico.



- En la primera figura se necesitan 3 fósforos, pero $3 = 2 \cdot 1 + 1$
- En la segunda figura se necesitan 5 fósforos, pero $5 = 2 . 2 + 1$
- En la tercera figura se necesitan 7 fósforos, pero $7 = 2 \cdot 3 + 1$

¿Cuántos palitos se necesitan para formar la figura 15?

a) 32 b) 25 c) 33 d) 31

8) Don Juan tiene seis cuadras de terreno y piensa construir en ellas un conjunto residencial, él ha presupuestado que en cada cuadra se puede construir seis edificios, cada uno con seis pisos y cada piso con seis apartamentos. El procedimiento matemático realizado por Don Juan para calcular el número total de apartamentos es.

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ apartamentos
b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$ apartamentos
c) $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ apartamentos
d) $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ apartamentos

9) Cuatro barcos transportan cada uno cuatro contenedores. En cada contenedor caben cuatro cajones, en cada cajón hay cuatro cajas y en cada caja hay cuatro motocicletas. ¿Cuántas motocicletas son transportadas en los barcos?

a) $20 . 5 = 100$
b) $4^4 = 256$
c) $4^5 = 1024$
d) $5^5 = 3125$

10) La alcaldía de Medellín desea construir cinco ciudadelas estudiantiles, el ingeniero encargado de la obra ha presupuestado que en dicha construcción se puede edificar cinco torres, con cinco pisos cada una y cinco salones por cada piso. ¿Cuántas aulas se pueden construir en las cinco ciudadelas?

a) $5^5 = 3125$
b) $4^5 = 1024$
c) $5^4 = 625$
d) $6^5 = 7776$

5.3. Laboratorio 3: La radicación y sus propiedades.

5.3.1. Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVO
DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Reconocer la radiación como la operación inversa de la potenciación.

Identificar y utilizar las propiedades de la radicación para resolver problemas aritméticos.

Establecer estrategias para hallar la raíz de un número natural.
Identificar la radicación y sus propiedades como una expresión que permite modelar situaciones aritméticas.
Reconocer la radicación y sus propiedades como mecanismo para resolver problemas de la cotidianidad.
Reconocer y determinar el cuadrado y el cubo de un número mediante la realización algorítmica de la radicación.</td><td>Pensamiento numérico
y
sistema numérico</td><td>Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Interpreta y utiliza los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de radicación.
Describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de radicación.
Comprende que elevar un número a una cierta potencia corresponde a multiplicar el número de veces que dice la potencia.
Comprende la relación entre la raíz cuadrada y elevar al cuadrado, la raíz cúbica y elevar al cubo, etc.
Comprende y resuelve problemas, que involucran los números racionales con las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en contextos escolares y extraescolares.</td></tr>
<tr><th colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">• Identifica y utiliza la radicación y sus propiedades para resolver problemas aritméticos.
• Establece estrategias para hallar la raíz de un número natural.
• Reconoce y determina el cuadrado y el cubo de un número mediante la realización algorítmica de la radicación.
• Comprende que la radicación es la operación inversa de la potenciación.</td></tr>
</table>

• Reconoce la radicación y sus propiedades como mecanismo para resolver problemas de la cotidianidad.

Tabla 16. Objetivos de aprendizaje, pensamiento matemático, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y desempeños específico.

FASES		ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o Exploración	Narración del cuento: "En el país de las matemáticas".	Video o narración, computador, anexo 1. Cuento "el país de los números"
Momento 2	Desarrollo o Estructuración de la clase	Reconocimiento y aplicación de la radicación y sus propiedades.	Guía del docente, guía del estudiante, tablero, fotocopias e internet.
	Trabajo Independiente	Resolución de ejercicios y problemas	Guía del estudiante: actividad No.1, 2 y 3, guía del docente: anexo 2. (crucigrama resuelto de radicación).
	Trabajo Cooperativo	Jugando a los Pitagóricos	Guía del estudiante (actividades No.4, 5 y 6), regla, transportador, colores y hojas cuadriculadas.
Momento 3	Cierre o Transferencia	La radicarrera	Guía del estudiante: anexo 3, 4 y 5, fichas o carros.
Momento 4	Para aprender más	Autoevaluación de la unidad "Bingo de radicación y potenciación".	Guía del estudiante: anexo 6 y 7

Tabla 17. Fases, actividades y recursos.

5.3.2. Fundamentación teórica del contenido de la clase.

Este laboratorio, tiene como propósito la identificación y la utilización de la radicación y sus propiedades para resolver problemas aritméticos relacionados con el entorno del estudiante. Para esto se han propuesto una serie de actividades que conllevan a que el docente mediante el desarrollo de su clase logre que los educandos identifiquen la raíz como la operación inversa de la potenciación; además, sean capaces de determinar y argumentar la validez de estrategias para calcular raíces y solucionar así problemas matemáticos.

Reseña historia de la radicación

La historia de la radicación se relaciona con el teorema de Pitágoras, nombre atribuido a su creador Pitágoras de Samos (570 a. C - 469 a. C), sin embargo, se han hallado evidencias que en Mesopotamia dos milenios a. C. Los babilonios operaron conceptos básicos de este teorema para delimitar superficies, áreas y volúmenes. Utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación, entendiéndose así que poseían conocimientos básicos de la radicación, conocimiento que igualmente poseían la civilización hindú y las antiguas culturas chinas que se ubicaban en las cuencas de los ríos Yangtze y Amarillo. A diferencia de estas civilizaciones, este concepto matemático era desconocido por las grandes civilizaciones precolombinas de América y las del continente africano, excluyendo la cultura egipcia.

Parece ser que en un inicio Teodoro de Cirena (465 a. C. - 398 a. C) planteó las demostraciones de las irracionalidades de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos hasta el número 17, excepto la raíz cuadrada del número dos porque en épocas anteriores a Teodoro ya se tenían indicios de su irracionalidad, e ilustra dicho análisis mediante la construcción geométrica de un conjunto de dieciséis triángulos rectángulos contiguos (uno al lado de otro) quien la llamó la espiral de Teodoro (Figura 22), también conocida como el caracol Pitagórico.

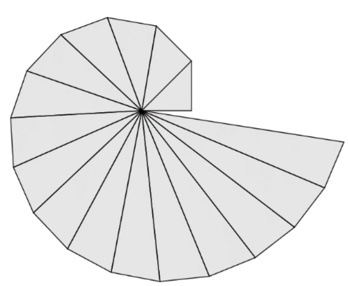


Figura 22. Espiral de Teodoro construida en el programa GeoGebra.

El trabajo minucioso de los pitagóricos con los números y la adoración que les profesaban, los condujo a profundizar en la noción de raíz cuadrada, estableciendo que cuando en un triángulo rectángulo los valores de los lados son números enteros, forman un conjunto de números llamados terna pitagórica, donde los tres números h, a, b corresponden a las medidas de los catetos y a la hipotenusa respectivamente de un triángulo rectángulo y satisfacen la relación $h^2 = a^2 + b^2$.

Los pitagóricos centraron gran parte de sus estudios en encontrar tríos de números naturales que cumplieran la condición: La suma de los cuadrados de dos números, es igual al cuadrado de un tercero; además, experimentaron repetidamente para hallar la diferencia entre pares e impares, plantaron la relación de los números naturales que se pueden expresar en forma de triángulo (números triangulares) y la relación de los números naturales que se pueden expresar en forma de cuadrados (números cuadrados).

La radicación

La radicación es una operación que permite hallar la base conociendo el exponente y la potencia. Simbólicamente se expresa: $\sqrt[n]{m} = r \leftrightarrow\ r^n = m$. La expresión $\sqrt[n]{m} = r$ se lee: Raíz n-ésima de m es igual a r.

Los elementos de la radicación son:

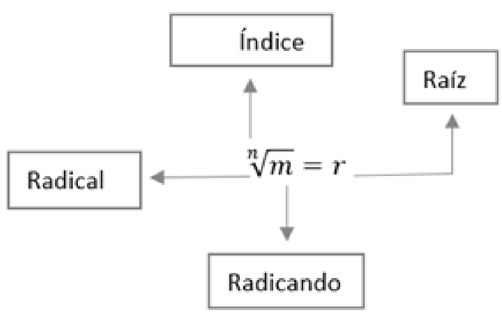


Figura 23. Elementos de la radicación

El signo radical identifica la operación matemática; el radicando, es el número al que se le extrae la raíz; el índice de la radicación es el que enuncia las veces que se debe multiplicar el número por sí mismo para obtener el radicando y determina si la raíz es cuadrada, cúbica, cuarta..., y así sucesivamente; la raíz, es el resultado de la operación realizada entre el índice y el radicando. Si el índice de una raíz es 2, se lee raíz cuadrada del número que va dentro del radical. Si es 3, se lee raíz cúbica del número al que se le va a extraer la raíz. Si el índice es, $4{,}5, 6$ ..., se lee raíz cuarta, raíz quinta, raíz sexta…, respectivamente.

Raíz como potencia.

Para expresar una raíz indicada en forma de potencia, se deja la raíz como base y se eleva al número que indica el índice. La cantidad subradical es la potencia.

Raíz	Potencia
$\sqrt[n]{m} = r$	$r^n = m$

Ejemplo:

Raíz	Potencia
$\sqrt[4]{81} = 3$	$3^4 = 81$

Propiedades de la radicación

Las propiedades de la radicación es posible enunciarlas si los radicandos de las raíces sean de carácter positivo.

- **Raíz de un producto**

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores:
$\sqrt[n]{m \cdot r} = \sqrt[n]{m} \cdot \sqrt[n]{r}$

Ejemplo:

$$\sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{225} = 15$$
$$\sqrt{3^2 \cdot 5^2 =}\ \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$$

- **Raíz de un cociente**

La raíz de un número fraccionario es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{m}{r}} = \frac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[n]{r}}$$

Ejemplo

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

- **Raíz de una raíz**

Para hallar la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{r}} = \sqrt[n\times m]{r}$$

Ejemplo $\sqrt[2]{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[2\times 3]{36} = \sqrt[6]{36}$

Criterio de existencia de la raíz n-ésima de un número, $\sqrt[n]{m}$:

- Si el índice (n) es un número par y el radicando (m) es positivo, existen dos raíces n-ésimas reales de m que satisfacen el enunciado. Una positiva y otra negativa.

  Ejemplo: $\sqrt{9} = \pm 3$

  Nueve tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3 porque $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$.
  Por convención la raíz cuadrada positiva se representa con el símbolo $\sqrt{}$ y la raíz cuadrada negativa $-\sqrt{}$. Así, $\sqrt{9} = 3$ y $-\sqrt{9} = -3$

- Cuando el índice (n) es un número par y el radicando (m) es negativo, la operación en el conjunto de los números reales no se puede realizar, porque ningún número negativo elevado al cuadrado da como resultado un número real.

  Ejemplo: $\sqrt{-9} =$ no tiene raíz cuadrada porque ningún número real elevado al cuadrado da -9; es decir, la $\sqrt{-9}$ no existe, no es un número real.

- Si el índice (n) es impar y el radicando (m) es un número real negativo o positivo, la solución solo tendrá una única raíz.

  Por ejemplo:
  $\sqrt[3]{125} = 5 \longrightarrow (5)(5)(5) = 5^3 = 125$
  $\sqrt[3]{-27} = -3 \longrightarrow (-3)(-3)(-3) = -3^3 = -27$

Como calcular una raíz

Raíces por descomposición en factores primos

Para calcular la raíz n-ésima de un número, se descompone en factores primos y estos se agrupan según el número que representa el índice; es decir, si el índice es dos, se agrupan en parejas; si es tres, se hacen ternas y así sucesivamente. Se asocian los factores que cumplen el mismo criterio de divisibilidad. Seguidamente se establece la cantidad de grupos que se pueden armar y se representan como producto de potencias. Finalmente, se multiplican estos productos y se obtiene la raíz, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: $\sqrt[3]{216}$

$$\begin{array}{r|ll} 216 & 2 & \\ 108 & 2 & \boxed{2} \\ 54 & 2 & \\ 27 & 3 & \\ 9 & 3 & \boxed{3} \\ 3 & 3 & \\ 1 & & \end{array}$$

$\sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$

Ejemplo 2: $\sqrt{400}$

$$\begin{array}{r|lll} 400 & 2 & \boxed{2} & \\ 200 & 2 & & \boxed{2} \\ 100 & 2 & \boxed{2} & \\ 50 & 2 & & \\ 25 & 5 & \boxed{5} & \\ 5 & 5 & & \\ 1 & & & \end{array}$$

$\sqrt{400} = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 = 20$

Ejemplo 3: $\sqrt[3]{1728}$

$$\begin{array}{r|lll} 1728 & 2 & & \\ 864 & 2 & \boxed{2} & \\ 432 & 2 & & \boxed{2} \\ 216 & 2 & & \\ 108 & 2 & \boxed{2} & \\ 54 & 2 & & \\ 27 & 3 & & \\ 9 & 3 & \boxed{3} & \\ 3 & 3 & & \\ 1 & & & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6 3^3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{9} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

Raíces expresadas como potencia en forma de fracción

Cualquier raíz se puede expresar como potencia convirtiendo el exponente en una fracción donde el numerador es 1 y el denominador es el índice, así:

Raíz	Potencia
$\sqrt[n]{m} = r$	$(m)^{\frac{1}{n}} = (m)^{1/n} = r$

Ejemplos

Raíz	Potencia
$\sqrt[3]{125} = 5$	$(125)^{1/3} = 5$
$\sqrt{100}$=10	$(100)^{1/2} = 10$

Raíces en forma de potencia de la forma $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

Raíz	Potencia
$\sqrt[3]{5^2}$	$(5)^{2/3}$
$\sqrt{10^3}$	$(10)^{3/2}$
$\sqrt[3]{2^5}$	$(2)^{5/3}$

Resolución de problemas haciendo uso de la radicación.

El manejo adecuado de la radicación puede ser muy útil en variadas situaciones prácticas y en el estudio de numerosos temas. La resolución de problemas es uno de ellos, esta brinda a los estudiantes la oportunidad de explorar el uso de procedimientos y la necesidad de perfeccionarlos, comprenderlos y dar solución a diferentes situaciones, utilizando la radicación, la potenciación, la división, la multiplicación, la suma y la resta.

Con estos problemas matemáticos, se espera que los estudiantes desarrollen habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas, vinculándolas a sus acciones cotidianas, de esta forma podrá vivenciarlas experimentarlas y aplicarlas de una manera más significativa.

Ahora que se ha avanzado en el conocimiento de este tema, es conveniente que el docente centre su atención en algunos problemas de uso frecuente y motive a los estudiantes a la resolución de estos.

Problema No.**1*****:***

Juan quiere construir una cerca alrededor de su jardín, él sabe que su terreno mide $16m^2$. ¿Cuántos metros de cerca tiene que comprar para cercar todo el jardín?

$Área\ del\ jardin = 16m^2$

$\sqrt{16m^2} = 4m$

Cada lado mide $4m$, por consiguiente, el perímetro de su jardín mide:

$$4m + 4m + 4m + 4m = 16m$$

Don Juan ha de comprar $16m$ de cerca para cubrir el perímetro de su jardín.

Problema No.2:

Don Antonio tiene \$1960000 para comprar cierta cantidad de cuadernos para su papelería, él sabe que el precio de un cuaderno coincide con el número de cuadernos que quiere comprar ¿Qué precio debe pagar por un cuaderno?

Sea "x" el precio de un cuaderno

Sea "y" el número de cuadernos

Se sabe que el producto del precio de un cuaderno por el número o la cantidad de ellos da el precio total, por tanto:

$1960000 = (x) \cdot (y)$

Del enunciado, se tiene que el precio del cuaderno coincide con el número de estos, se tiene la siguiente relación:

$X = Y$

Luego

$1960000 = (x) \cdot (x)$

$1960000 = x^2$

$x^2 = 1960000$

$x = \sqrt{1960000}$

X= \$1400

Problema No.3:

Una empresa diseñadora de cajas quiere reducir a la mitad una caja que tiene un volumen de 64000cm^3. ¿cuáles serán las dimensiones de la caja resultante?

Sea:

v el volumen

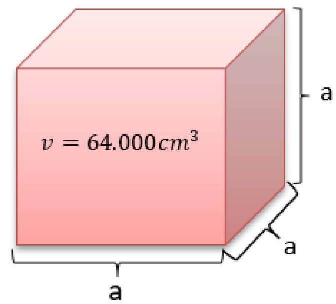
a la longitud de las caras de la caja.

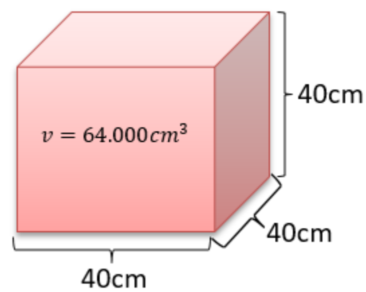
$$v = a^3$$

Al calcular la longitud de cada cara se tiene:

a: $\sqrt[3]{64000\text{m}^3}$

64000	2	
32000	2	2
16000	2	
8000	2	
4000	2	2
2000	2	
1000	2	
500	2	2
250	2	
125	5	
25	5	5
5	5	
1		





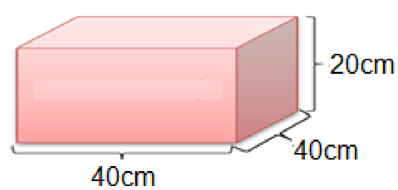
$$a = \sqrt[3]{(8^3)\,(5^3)} = (8)(5) = 40cm$$

Si se reduce la parte superior de la caja, las nuevas dimensiones de esta serian:

Ancho: $40cm$

Largo: $40\ cm$

Alto: $20\ cm$



¿Cuáles serían las nuevas dimensiones de la caja si se parte teniendo en cuenta el largo de esta?

Problema No.4:

El rector de una Institución Educativa quiere distribuir los 1296 estudiantes de forma que al agruparlos se forme un cuadrado. ¿Cuántos alumnos habrá en cada lado del cuadrado?

Sea "l" la longitud del lado del cuadrado

El número de estudiantes que se quiere distribuir es 1296

Se sabe que el área de un cuadrado es:

$Área\ del\ cuadrado = l.l$

Entonces:

$1296 = a.a = a^2$

$1296 = a^2$

$\sqrt{1296} = 36$

El rector deberá ubicar 36 estudiantes en cada lado.

Problema No.5:

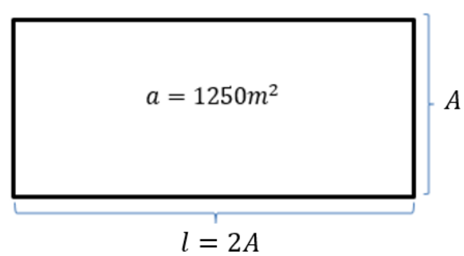
Don Martin quiere saber cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de $1250m^2$, si su longitud es el doble de su ancho.

Sea "l" la longitud del rectángulo y "A" el ancho del rectángulo.

$l = 2A$

$Área\ del\ terreno = 1250m^2$

$a = l \cdot A$; entonces



$a = (2A)(A)$

$a = (2)(A^2)$

Al sustituir en la ecuación:

$a = (2)(A^2)$, se tiene que:

$1250m^2 = 2(A^2)$

$1250\text{m}^2 \div 2 = A^2$

$625\text{m}^2 = A^2$

$A^2 = \sqrt{625\text{m}^2}$

$A = 25\text{m}$

Al calcular la longitud se tiene:

$l = 2 . A$

$l = (2)(25m)$

$l = 50m$

Por consiguiente, las dimensiones del terreno rectangular serian de $(25m\ de\ ancho)\ (50m\ de\ largo) = 1250m^2$

Problema No. 6:

Don Ricardo quiere cercar su finca de $2916m^2$. En el almacén le han dicho que el metro de alambre es a $\$2550$ y que para cercar su terreno debe calcular cuales son las dimensiones de sus lados. ¿Qué dimensiones tiene la finca de don Ricardo? ¿Cuál es el costo que debe pagar por cercar su finca, teniendo en cuenta que es cuadrada?

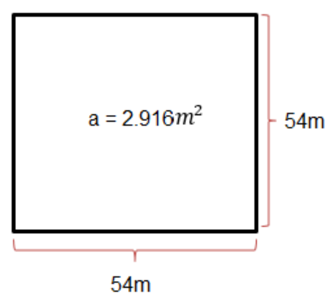
Área del cuadrado

$a = l.l$

$l.l = l^2$

$l = \sqrt{2916m^2}$

$l =$ 54m



El costo que se debe pagar seria de:

$$(\$2250)\ (4)(54m) = \$\ 486000$$

5.3.3. Orientaciones didácticas.

Para abordar el desarrollo de este laboratorio, es necesario que el docente divida la clase en cuatro momentos (apertura, desarrollo, cierre y para aprender más). En el momento de la apertura, se da a conocer el objetivo de la clase y se lee el cuento "En el país de las matemáticas" (anexo 1), con el propósito de indagar acerca de los conocimientos previos de los estudiantes. Es importante que el maestro genere un escenario pedagógico que favorezca la comprensión de conceptos y procesos que en el cuento se propone y de esta forma desarrollar competencias matemáticas en los estudiantes; para eso, se recomienda realizar la lectura en plenaria y dedicar un espacio para escuchar a los estudiantes, quienes deben deducir la situación problema que se presenta en el cuento.

Para el momento dos o estructuración de la clase, el docente por medio de una explicación didáctica conceptualiza el tema "Reconocimiento y aplicación de la radicación y sus propiedades" propuesta en la guía del maestro. Cada estudiante lee y realiza las cuatro primeras actividades que se han propuesto en la guía del estudiante, que posteriormente serán socializadas con todo el grupo.

La actividad No. 5 tiene como objetivo fortalecer el desarrollo heurístico de los estudiantes mediante el análisis y resolución de tres problemas matemáticos. Esta actividad cobra gran importancia porque involucra la aplicación del concepto de radicación y permite profundizar en conocimientos tales como: suma, resta, multiplicación, división, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, descomposición en factores primos, potenciación, área, volumen y perímetro, trabajados en los anteriores laboratorios. Para dinamizar la actividad e inducir a los educandos en esta competencia matemática, el docente puede hacer uso de una serie de preguntas aquí propuestas o formular sus propios interrogantes como.

¿Cuál es el problema? ¿Qué nos piden resolver? ¿Cómo nos vamos a organizar? ¿Hay algunas palabras difíciles de entender?, ¿Cuál es la tarea que hay que realizar?

Pida a los estudiantes que expliquen el ejercicio con sus propias palabras.

- ¿Alguno de ustedes entendió algo más?
- ¿Alguno de ustedes está en desacuerdo? ¿por qué?
- ¿Qué los ayudó a entender el problema?
- ¿Cuál es el objetivo de la tarea?
- ¿Puede visualizar la tarea?

Para fortalecer el trabajo colaborativo (máximo 4 estudiantes), se ha propuesto la actividad No.6 “jugando a los Pitagóricos”. Esta actividad, más que aprender sobre el teorema de Pitágoras, pretende que los estudiantes de una forma divertida encuentren diferentes ternas pitagóricas y de esta manera adquirir herramientas que serán de gran utilidad para la estructuración de este teorema.

El juego consiste en organizar a los estudiantes en grupos de cuatro personas. El docente lanza dos dados y anuncia los números obtenidos en el lanzamiento para que cada equipo realice la siguiente operación:

1. Hallar la diferencia entre sus cuadrados.
2. Calcular el doble del producto de ambos números.
3. Encontrar la suma de sus cuadrados.

Realizadas estas operaciones, cada grupo construirá en una hoja de papel block un triángulo rectángulo. Gana tres puntos el equipo que primero logre realizar todo el procedimiento de forma correcta.

El siguiente ejemplo ilustra la forma correcta de realizar el juego:

a. Lanzamiento de los dados.

b. Hallar la diferencia entre sus cuadrados; en este caso de 6 y 5

$6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$ (primer número obtenido)

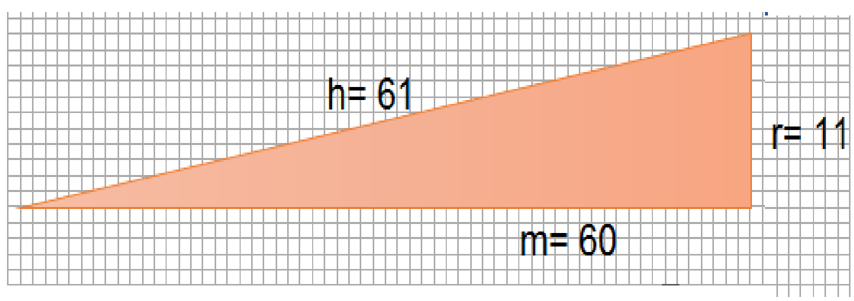
c. Calcular el doble del producto de ambos números.

$2(6)(5) = 60$. (segundo número hallado).

d. Encontrar la suma de sus cuadrados.

$6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$. (Tercer número calculado).

e. Construir el triángulo rectángulo con los números obtenidos, en este caso con los números $11, 60$ y 61



Para el momento tres, denominado cierre o transferencia, se ha propuesto la actividad "Jugando también aprendo sobre la radicación". Este momento tiene como objetivo verificar de una forma divertida los logros alcanzados durante el desarrollo del laboratorio. La dinámica del juego consiste en recorrer una pista de carreras superando los obstáculos que hay en el camino. Para la actividad se necesita las tarjetas de radicación y de potenciación (anexo 3), una pista de carreras por cada equipo de cuatro participantes (anexo 4 "la gran carrera por el conocimiento de la radicación"), un carro por cada jugador, dos dados, uno con los números del uno al seis y otro con los símbolos de la potenciación y la radicación anexo 5).

Para iniciar el juego, cada participante lanza el dado de números e inicia el que saque mayor puntaje. Seguidamente, tira los dos dados, si obtiene, por ejemplo, en un dado el símbolo de la radicación y en el otro el número cinco, toma de la baraja de cartas (anexo 5) una tarjeta alusiva a la radicación y avanza en la pista cinco casillas si resuelve correctamente lo que se le pregunta.

En cuarto y último momento denominado "para aprender más", se propone el juego "Bingo de radicación y potenciación". El juego inicia con la conformación de los equipos de trabajo (máximo 4 participantes); seguidamente, el docente va sacando una por una las tarjetas de la bolsa (anexo No.6: recortables para el bingo de la radicación y la potenciación), las lee de forma que los estudiantes la escuchen y realicen la operación en la guía del estudiante. Si la respuesta es correcta, se recubre el número en la tarjeta del bingo (anexo No.7: Cartones para el bingo de la radicación). El juego continúa siguiendo la misma dinámica y gana el equipo que primero logre cubrir toda su tabla.

5.3.4. Guía del estudiante.

Lo que comprenderás:

- Identificar y utilizar la radicación y sus propiedades para resolver problemas aritméticos.
- Establecer estrategias para hallar la raíz de un número natural.
- Reconocer y determinar el cuadrado y el cubo de un número mediante la realización algorítmica de la radicación.
- Comprender que la radicación es la operación inversa de la potenciación.
- Reconocer la radicación y sus propiedades como mecanismo para resolver problemas de la cotidianidad.

Materiales:

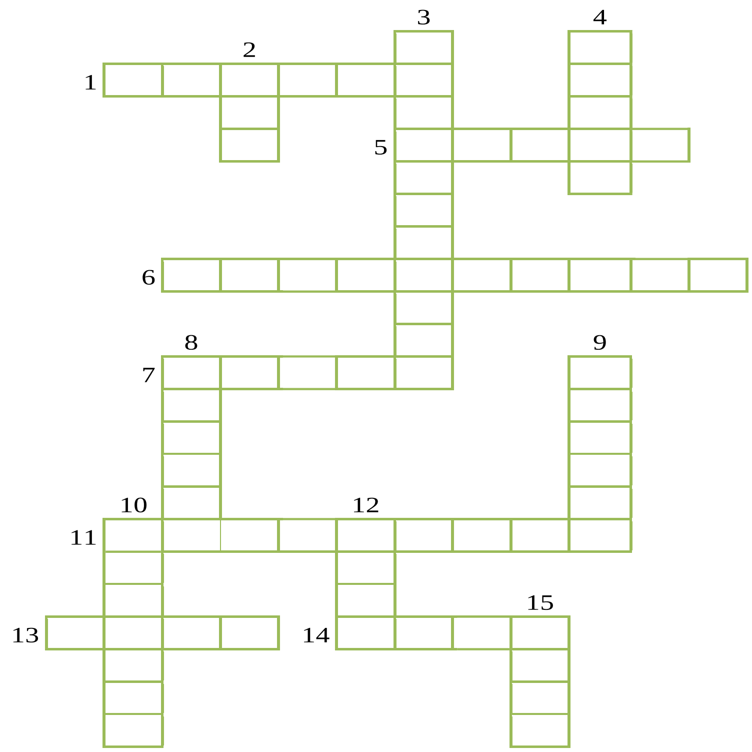
Guía del estudiante, papel, lápiz, tijeras, regla, trasportador, dados, pista de carreras de autos, fichas o carros, bingo de radicación y potenciación.

Practica de exploración:

Actividad No.1. Resuelve el siguiente crucigrama de la radicación

1. Término de la radicación que enuncia las veces que se debe multiplicar el número por sí mismo.
2. Número que se omite en el índice para decir que la raíz es cuadrada.

3. $\sqrt{625} =$
4. $\sqrt[3]{36-9} + \sqrt[3]{12-4} + \sqrt[3]{60+4} =$
5. $\sqrt[3]{729} =$
6. La suma de las raíces $\sqrt{88+12} + \sqrt{81}$ es
7. $\sqrt{25} =$
8. Si el índice de una raíz es tres, se dice que esta es una raíz…
9. $\sqrt{34-30} + \sqrt{4} =$
10. Término para nombrar el número al que se le quiere extraer la raíz.
11. Término de la radicación que identifica la operación matemática.
12. Número que resulta de hacer una raíz exacta
13. ¿Cuál es la raíz cúbica de mil?
14. $\sqrt[3]{512} =$
15. $\left(\sqrt{25} \times \sqrt{16}\right) - \sqrt{81}$



Actividad No.2. Escribe las siguientes potencias como radical.

$10^4 = 10000$ ______	$8^3 = 512$ ______

$7^5 = 16807$	______	$9^2 = 81$	______
$6^2 = 36$	______	$4^3 = 64$	______
$2^5 = 32$	______	$3^7 = 2187$	______
$10^2 = 100$	______	$5^6 = 15625$	______

Actividad No.3. Calcula las siguientes raíces y justifica la respuesta.

$\sqrt{400} = 20$		porque: $20^2 = 20 \,.\, 20 = 400$	$\sqrt[3]{125}$=	_____	porque: _________
$\sqrt[3]{8} =$	_____	porque: ________	$\sqrt[6]{729}$=	_____	porque: _________
$\sqrt[3]{216} =$	_____	porque: ________	$\sqrt{900}$=	_____	porque: _________
$\sqrt{121} =$	_____	porque: ________	$\sqrt[5]{1025}$=	_____	porque: _________
$\sqrt[4]{81} =$	_____	porque: ________	$\sqrt[8]{256}$=	_____	porque: _________

Actividad No.4.

- **Calcula las siguientes raíces por descomposición en factores primos.**

a) $\sqrt{210}$
b) $\sqrt{1296}$

Actividad No.5. Resuelve los siguientes problemas haciendo uso de la radicación.

Don Jaime quiere partir a la mitad una caja de iguales dimensiones que tiene un volumen de $10648cm^3$. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones de la caja si se corta por la mitad en forma vertical?

¿Qué cantidad de malla se requiere para cercar un terreno cuadrado que tiene un área de $4225m^2$?. ¿Cuál será el costo para cercarlo, sabiendo que el metro cuadrado de malla vale $\$4500$?

Don Manuel tiene $\$518000$ para comprar cierta cantidad de lapiceros para su negocio, él sabe que el precio de un lapicero coincide con el número de lapiceros que quiere comprar ¿Qué precio debe pagar por un lapicero?

Actividad No.6. Jugando a los Pitagóricos

El juego consiste en organizar a los estudiantes en grupos de cuatro personas. El docente lanza dos dados y anuncia los números obtenidos en el lanzamiento para que cada equipo realice la siguiente operación:

1. Hallar la diferencia entre sus cuadrados.
2. Calcular el doble del producto de ambos números.
3. Encontrar la suma de sus cuadrados.

Realizada estas operaciones y construye en una hoja de block un triángulo rectángulo. Gana tres puntos el equipo que primero logre realizar todo el procedimiento de una forma correcta.

Actividad No.7. La radicarrera

Demuestra que tanto has aprendido de la radicación y diviértete participando en la carrera por la radicación. Conforma tu equipo de cuatro estudiantes y prepárate para competir.

Actividad No.8. Autoevaluación de la unidad "bingo de la radicación y la potenciación".

El juego inicia con la conformación de los equipos de trabajo (máximo 4 participantes); seguidamente, el docente o un estudiante va sacando una a una las tarjetas de la bolsa (anexo 6: recortables para el bingo de la radicación y la potenciación), las lee de forma que los participantes la escuchen y realicen la operación en la guía del estudiante. Si la respuesta es correcta, se recubre el número en la tarjeta del bingo (anexo 7: Cartones para el bingo de la radicación). El juego continúa siguiendo la misma dinámica y gana el equipo que primero logre cubrir toda su tabla.

5.3.5. Anexos del laboratorio tres.

Anexo 1. Cuento

El país de las matemáticas

Érase una vez, hace mucho tiempo, en el país de las matemáticas vivía el rey 10^2, con su esposa $\sqrt{9}$ y su hija 3^2. Juntos gobernaban dignamente sin tropiezo alguno, todo era alegría y felicidad. Los números cuadrados danzaban con los cubos perfectos, los pares con los impares, las raíces con las potencias, los círculos con los triángulos, el por con el más, la división con la diferencia. Pero una mañana de primavera llegó a este país una malvada bruja a la que no le gustaba los números, no contenta con esto lanzo un hechizo a la princesa para robarle su belleza, dejándola tan fea que ningún número la quería tomar por esposa.

El rey y la reina preocupados por esta situación decidieron convocar a todos los números para encontrar la solución al problema. El cuadrado y el cubo perfecto expusieron sus ideas, pero no fueron contundentes. Seguidamente hablo la raíz cuadrada de 36, el duplo de 4, la potencia de nueve a la dos, el rectángulo, pero nadie sabía cómo revertir el hechizo. De repente se escuchó una voz que provenía de la parte de atrás del salón, era la voz del príncipe $\sqrt{64}$, también conocido como el número 8.
_ Yo creo tener la respuesta, dijo el príncipe.
_Hable rápido, dijo el rey

El hechizo solo se romperá sabiendo la edad exacta de la malvada bruja, respondió el príncipe.

Pero ¿cómo saberlo?, pregunto la recta numérica.
Tenemos que resolver el enigma y decir la respuesta a una sola voz todos juntos, dijo el príncipe.

Muy bien, y cuál es el enigma, pregunto la raíz cuadra de 25.
El príncipe saco de su bolso el libro de los hechizos y empezó a leer.

- Verter en un recipiente cuadrado la raíz cúbica de 1000 más el duplo de su resultado.
- Restarle a la raíz cuadrada de 49, el doble de la raíz cúbica de 8.
- Extraer la baba de un caracol y mezclarlo con el mcm de 20 y 30.

- Agregar el triple de la suma de la raíz cuadrada de 16 con la potencia de 2^4 y sumarle dos veces la raíz cuadrada de 81.
- Mezclar dos pociones de la multiplicación de 5^0 con la raíz cuadrada de 100.
- Sumar todos los brebajes, multiplicarlo por el cubo de 2, sumarle el doble de 6 y dividir por una porción de raíz cúbica de 64.

Manos a la obra, dijo la reina

Todo se quedó en silencio, el cero rodaba de un lado al otro, el 12 se multiplico con el dos, el área del cuadrado 2^8 se rascaba la cabeza, hasta que dijo el millón.

- Ya sé que debemos hacer, utilicemos los 4 pasos de George Polya para hallar más rápido la solución.
- Muy bien, contestaron todos los divisores de 1000.

Pasados 5 minutos, dijo el príncipe. -quien tenga la respuesta deberá ungirla con leche de sapo y depositarla en el recipiente cilíndrico que hay en este rincón, sin compartirla con nadie. El príncipe, fue el primero en hallar la solución, pasados dos minutos, el rey, la reina, y el duplo de sus súbditos ya sabían también la edad de la malvada bruja, depositaron sus respuestas en el recipiente acordado y esperaron pacientemente hasta que todos hallaran la solución al enigma.

Muy bien, veo que ya todos tienen la respuesta, dijo nuevamente el príncipe. Ahora debemos agregar a todos los resultados, la baba de tres caracoles, cinco alas de murciélago, siete patas de rana y nueve telarañas previamente molidas. Hecho este procedimiento y cuando la raíz cuadrada de nueve diga tres, a una sola voz debemos de pronunciar la edad de la hechicera, anoto el príncipe.

La raíz cuadrada de nueve se dispuso entonces a cumplir con su tarea y habiendo pronunciado el número tres, se escuchó el número 385, en ese mismo instante, se escuchó un fuerte sonido que venia del recipiente donde se había preparado el brebaje. Cataplun, cataplan, cataplunnnnnn, chis pummm, chis pan. Todo el recinto se estremeció y los que allí estaban quedaron estupefactos con el estruendo y más aún cuando vieron salir una luz de color naranja, que suavemente se fue transformando en la maléfica bruja.

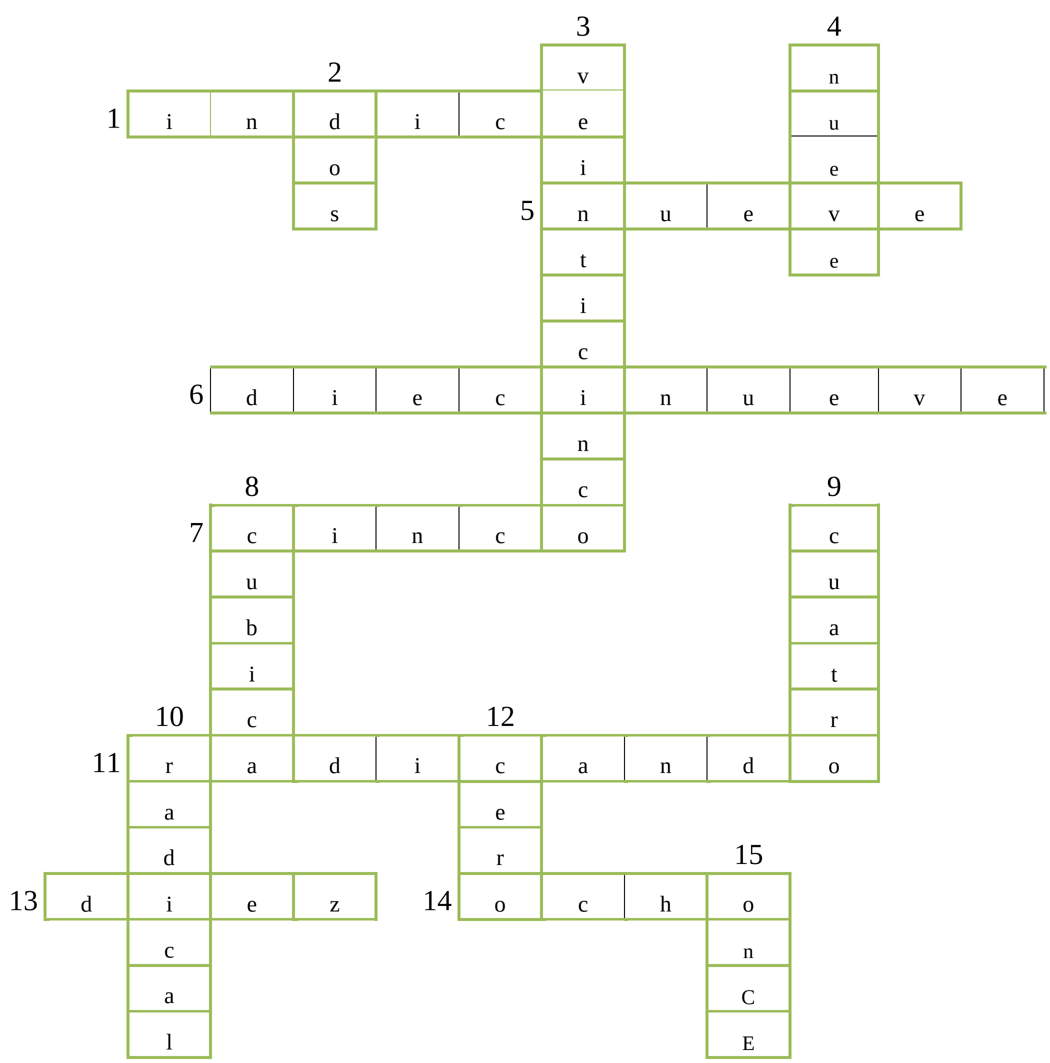
El príncipe, atento a esta situación pidió a todos los allí presentes que repitieran una y otra vez la edad de la malvaba bruja.

$385, 385, 385$, gritaban todos a una sola voz. Entre más vociferaban 385, la infame hechicera perdía su poder. Se convirtió en polvo y desapareció del país de las matemáticas.

Todo en el país de las matemáticas había vuelto a la normalidad, la princesa recobro su belleza, el rey y la reina siguieron gobernando sabiamente. El príncipe pidió por esposa a la princesa, pasaron tres meses, se casaron y tuvieron muchos hijos.

Autor: Ramiro de Jesús Tobón Tobón

Anexo 2. Cruciradicación



Anexo 3. Tarjetas recortables para la gran carrera por la radicación y la potenciación

Potenciación

$n^r = m$

Radicación

$\sqrt[n]{r}$

La $\sqrt{100} - \sqrt{25}$ es

¿El cubo perfecto de 3 es?

La $\sqrt[4]{625} + 200$ es?

El doble de 6 menos la potencias de 2^3 es?

La $\sqrt[5]{3125}$ es?

¿La potencia de $(3^2)^2$ es?

La $\sqrt[3]{64} \div 2$ es?

El cuadrado perfecto de 9 es

¿La $\sqrt{144} + \sqrt{64}$ es?

64 dividido por el doble producto de 4

La $\sqrt[3]{125}$ más tres veces el doble de 3

6 + el doble de la potencia de 5^2 es?

La raíz cubica de 1000 menos 5

El cuadrado de 3 más el cubo 3

La $\sqrt{3^2 \times 9}$ es

El resultado de $4^{\frac{3}{2}}$ es

La raíz cuadrada de 25 más el cuadrado de 4 es

El resultado de multiplicar $3^3 \times 3^4 \times 6$ es

Raíz cúbica de 27

¿La diferencia de los cuadrados de 6 y 5 es?

¿La raíz cuadrada de la suma del cuadrado de 8 y 6 es?

¿El cuadrado de 8 menos el cubo de 4 es?

¿La raíz cuadrada de 49 dividido 7 es?

¿10 unidades más que 10^2 es?

La $\sqrt[3]{\frac{27}{3}}$ es?

La división de $\frac{10^2}{10}$ es?

20 más la raíz de 100

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ expresado en forma de potencia.

$\sqrt[4]{81} = 3$ expresado como potencia

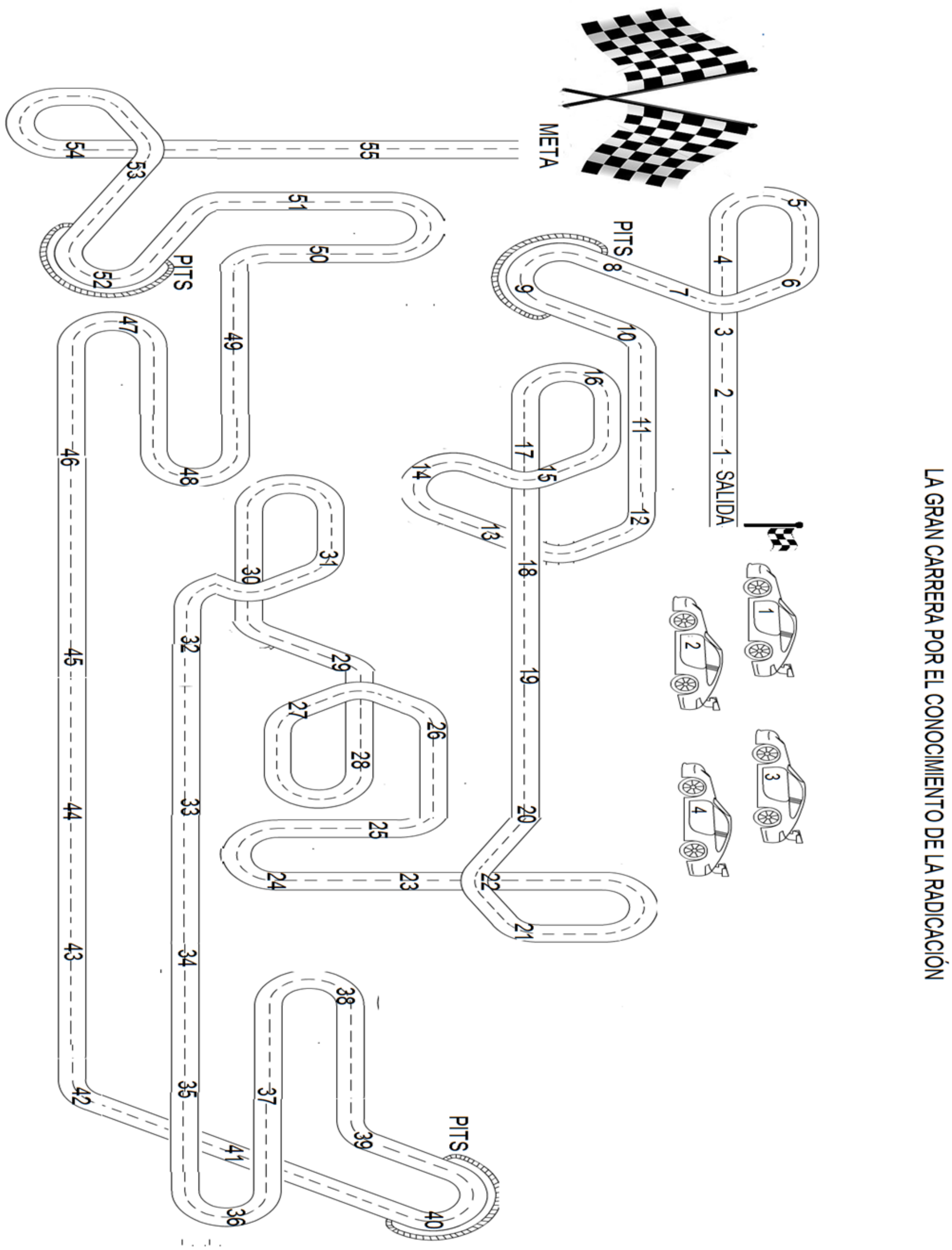
$6^3 = 216$ expresado como raíz

$\sqrt{32}$

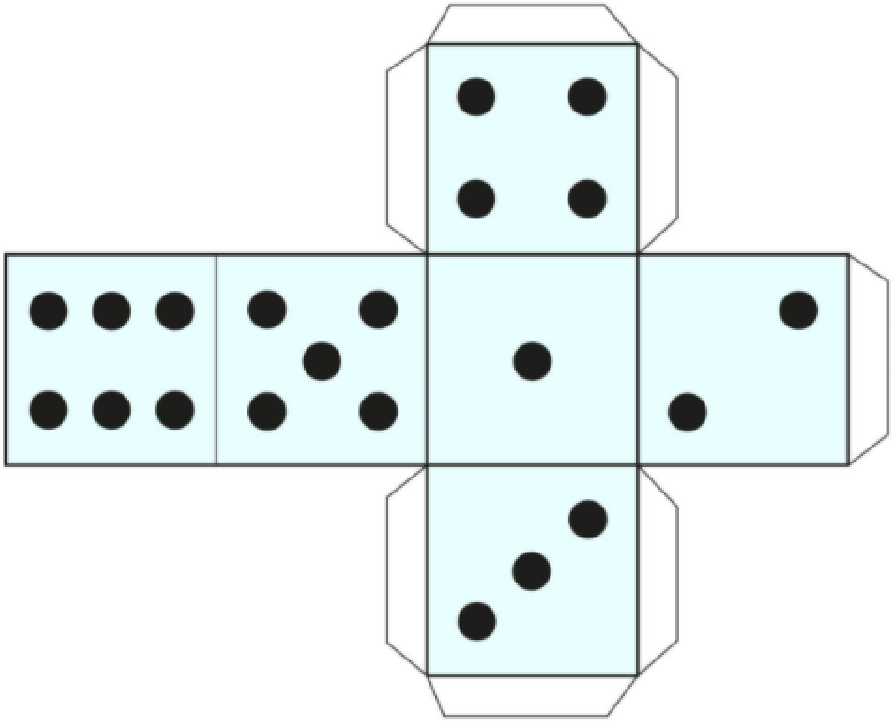
Ocho elevado al cuadrado

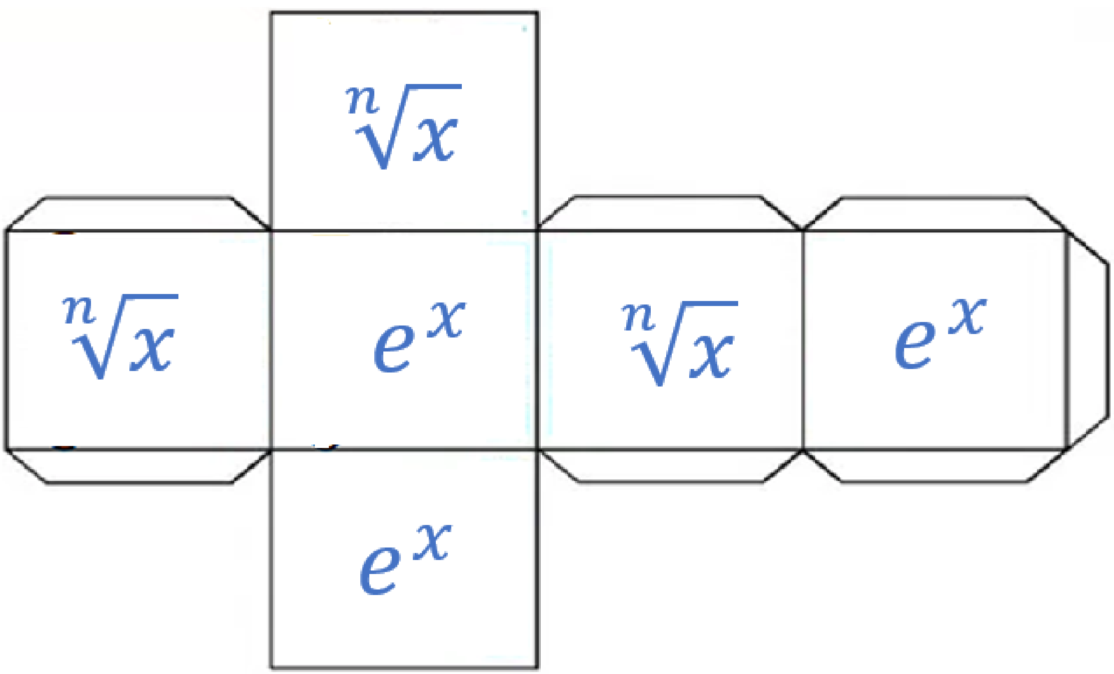
$\sqrt[3]{(8 \times 27)}$

Anexo 4. Pista para la gran carrera por el conocimiento de la radicación y la potenciación.



Anexo 5. Dados para la radicarrerera





Anexo 6. Recortables para el juego del bingo de la radicación y la potenciación.

Raíz cuadrada de 9	Dos al cubo más seis al cuadrado	$\sqrt[3]{125} + 3$	$\sqrt{25} \times 9$
$3^2 + \sqrt{16}$	$2^4 + 1$	5^2	$\sqrt{36} \times 8$
$6^2 + 2 \div 2$	Cuatro al cubo más dos	El cuadrado de dos más el cubo de 3	$10^2 - 24$
Dos unidades más que el cuadrado de tres	6^2	Raíz cubica de 8	$2^6 \div 2$

$\sqrt{16}$
$+ 10$

$\sqrt[3]{27}$
$+ 7$

El cuadrado de dos multiplicado por 7

El doble del cuadrado de 6

Seis más el cuadrado de 9

Tres veces la raíz cuadrada de 100

El doble del cuadrado de 5

$\sqrt[3]{64}$
X
$\sqrt[3]{125}$

$\sqrt{9}$
$\times \sqrt{25}$

$6^2 \div 9$

Raíz cubica de 8 multiplicad a por 20

3^3

$\sqrt{49} -$
7

$\sqrt[4]{81}$
X 8

9^2

$\frac{\sqrt{900}}{\sqrt{25}}$

La raíz cuadrada del cuadrado de la mitad de 10

$\sqrt{25} + \sqrt[3]{64}$

El triple del cuadrado de 5

$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{27}}$

$5^3 - 40$

Cuatro veces la raíz cuadrada de nueve

El cuadrado de 7

El cubo perfecto 4

El doble de 3 por la raíz cuadrada de 9

El cuadrado perfecto de 6 más la raíz de 4

El triple de 4 más 45

$\sqrt[3]{216} + 56$

El doble de 7 multiplicado x 5

$10^2 - \sqrt{49}$

Tres veces el doble de cuatro más dos

$6 + \sqrt{100}$

Anexo 7. Cartones para el bingo de la radicación.

B	I	N	G	O
3	40	48	8	11
32	31	4	14	93
49	0	BINGO	20	45
76	10	28	57	12
30	2	9	17	38

B	I	N	G	O
44	32	27	30	15
64	75	3	25	2
19	17	BINGO	87	49
85	70	45	48	8
31	10	50	4	1

B	I	N	G	O
75	24	30	64	49
9	66	87	10	0
12	15	BINGO	6	13
70	19	45	72	85
11	57	8	81	3

B	I	N	G	O
25	15	81	62	28
19	93	0	16	36
76	40	BINGO	24	87
50	18	72	13	5
14	38	11	26	17

B	I	N	G	O
44	16	20	66	57
1	2	85	64	93
70	26	BINGO	40	12
81	14	28	36	6
18	38	62	27	5

B	I	N	G	O
62	9	44	1	50
75	48	72	20	6
4	36	BINGO	32	25
18	66	5	31	27
76	16	13	26	24

5.4. Laboratorio 4. Variación y cambio.

5.4.1. Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVO
DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Modelar diversas situaciones de cambio, expresarlas, simbólica, verbal y gráficamente y tabularlas de forma algebraica.
Identificar patrones (numéricos y no numéricos) en juegos de razonamiento lógico.
Comprender la noción de pensamiento variacional para desarrollar habilidades en la solución de situaciones problemas de variación y cambio.
Formular conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.</td><td>Pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos</td><td>Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Resuelve y propone situaciones en las que es necesario describir y localizar la posición y la trayectoria de un objeto con referencia al plano cartesiano.
Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.
Formula preguntas que requieren comparar dos grupos de datos, para lo cual recolecta, organiza y usa tablas de frecuencia, gráficos de barras, circulares, de línea, entre otros. Analiza la información presentada y comunica los resultados.</td></tr>
<tr><th colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">• Comprende la noción de pensamiento variacional y desarrolla habilidades en la solución de situaciones problemas de variación y cambio.
• Fórmula conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.</td></tr>
</table>

• Modela diversas situaciones de cambio y las escribe simbólicamente, en palabras, en forma gráfica, en forma tabular, y en forma algebraica. • Identifica patrones (numéricos y no numéricos) en juegos de razonamiento lógico.

Tabla 18. Objetivos de aprendizaje, pensamiento matemático, Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y desempeños específico.

FASES		**ACTIVIDADES**	**RECURSOS**
Momento 1	Apertura o Exploración	Dinámica **“**alcance la estrella”. Reconocimiento y aplicación del concepto de variación, cambio, patrón, secuencia y sucesión.	Palitos de paleta, pajillas o palillos, cubos de diferentes tamaños, figuras geométricas, sucesiones de letras y sucesiones de números. Guía del docente: orientaciones didácticas (momento 1).
Momento 2	Desarrollo o Estructuración de la clase	“Regularidades no numéricas” “Regularidades numéricas”	Computador video beam, tablero, chaquiras[9], ambiente letrado de aula, internet, guía del docente: orientaciones didácticas (momento 2), guía del estudiante: actividad No.2 y 3, anexos 1, 2 y 3.
	Trabajo Independiente	“Números triangulares”. “Números cuadrados”.	Guía del estudiante: actividad No.4 y 5, anexos 4 y 5. palillos, pitillos y plastilina.
	Trabajo Cooperativo	“Números cúbicos”. “Análisis y elaboración de gráficas”. “Construcción de la espiral de Fibonacci”.	Guía del estudiante: Actividades No.6, 7 y 8, anexos 6, 7 y 8 lista de números, tijeras, cartulina, papel, cubos de igual volumen, regla, colores, hoja cuadriculada y compas.
Momento 3	Cierre o Transferencia	Actividad No.9. En busca del tesoro perdido.	Guía del docente: orientaciones didácticas (cuarto momento) Guía del estudiante: Anexos 9 y 10
Momento 4	Para aprender más	Actividad No.10. En la web también se aprende matemáticas.	Video: Patrones en la Naturaleza. https://www.youtube.com/watch?v=9vmakrmzd1U Video: el mundo de la geometría fractal. https://www.youtube.com/watch?v=mVyczf3kLW8

Tabla 19. Fases, actividades y recursos.

[9] Chaquiras: Sartas, mostacillas, o abalorios utilizados para confeccionar collares y pulseras.

5.4.2. Fundamentación teórica del contenido de la clase.

Este laboratorio tiene como finalidad fortalecer la didáctica para el aprendizaje de la variación y el cambio, que permita a los docentes tomar decisiones conscientes y fundamentadas sobre diferentes actividades, métodos, recursos, técnicas y formas de trabajo en el aula, para mejorar el aprendizaje de los estudiantes del grado quinto.

Los primeros indicios del pensamiento variacional se encuentran en la prehistoria. Desde los primeros asentamientos humanos, surgió la necesidad de interactuar con el entorno, y esto implicó necesariamente la observación constante de todo tipo de fenómenos variables, algunos de ellos periódicos; la percepción de ciclos, de oscilaciones y fluctuaciones en las propiedades de los entes animados e inanimados que componen el mundo.

El cambio ha estado presente en todo momento, desde la necesidad del desplazamiento constante de las comunidades nómadas, las migraciones, la recolección de alimentos, la caza y la pesca, hasta los primeros asentamientos humanos que requirieron el conocimiento del territorio, de los recursos hídricos y de las estaciones.

Cambio y variación

El cambio es una característica que no permanece, se modifica y se altera; mientras que el concepto de variación hace referencia a la cuantificación de dicho cambio. En la vida diaria se dan infinitas relaciones entre estos dos conceptos, de tipo natural, económico y social y es la matemática la que tiene el papel de describir, representar, comprender, reconocer, cuantificar y en ocasiones controlar estos cambios.

Entender estos cambios para dar solución a innumerables interrogantes, ha sido un reto que trascendió desde el inicio de la humanidad; haciendo necesario el estudio de patrones aditivos y multiplicativos, regularidades numéricas y geométricas, secuencias matemáticas a partir del análisis de tablas, figuras y fórmulas.

Regularidad numérica

Una regularidad numérica, es una serie o sucesión de elementos que se forman mediante un patrón o regla que permite definir o determinar mediante el análisis cada elemento de una progresión. La repetición de un fenómeno asociada a elementos como el tiempo, ritmo, compás, regulación, entre otras, muestran regularidades que se pueden analizar matemáticamente para encontrar cuál es el patrón o regla de formación de una sucesión.

En los análisis de una regularidad numérica se debe encontrar el patrón o regla de formación de la sucesión, mediante un estudio de los elementos. Por ejemplo, en la siguiente sucesión, la figura 1 está formada por tres palillos, la figura 2 por cinco palillos, la figura 3 por siete palillos y así sucesivamente como se muestra en la figura 24.

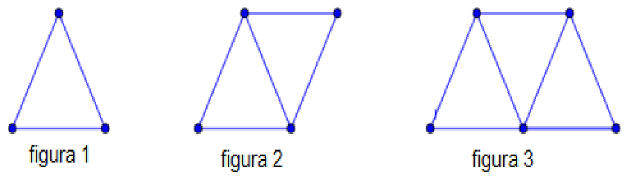


Figura 24. Representación pictórica de una sucesión con palillos.

Matemáticamente, se puede establecer la siguiente relación:

- Para formar la figura uno se necesita tres palillos, entonces, $3 = 2 \cdot 1 + 1$
- Para formar la figura dos se necesita cinco palillos, entonces, $5 = 2 \cdot 2 + 1$
- Para formar la figura tres se necesita siete palillos, entonces, $7 = 2 \cdot 3 + 1$

Del análisis anterior, se deduce que el término general de la sucesión es $2n$, donde el 2 indica el número de palillos que requiere agregar cada vez que se avanza en la progresión de las figuras y la letra n indica (empezando desde la 1) el número de la figura, todo eso más 1; por lo tanto, la fórmula o patrón está dada por $2n + 1$**.** Por ejemplo, ¿qué cantidad de palillos se requieren para formar la figura cinco?

Operando la fórmula $x = 2n + 1$ y remplazando la n por cinco se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= 2\,(5) + 1 \\ &= 10 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para formar la figura cinco se requieren 11 palillos.

Del ejercicio anterior se concluye que al observar y analizar una regularidad numérica se fórmula una expresión general que represente dicha regularidad.

Secuencia matemática

Una secuencia es un conjunto de elementos encadenados o sucesivos que guardan una relación entre sí de acuerdo con un patrón definido y a un orden determinado, por lo general moviéndose hacia un resultado particular, se nombran con una letra y un subíndice (n) cuyo valor depende del lugar que el término ocupa en la sucesión. Toda secuencia está compuesta por un primer término y cada término tiene un siguiente; empieza siempre en 1, y sigue $2, 3, 4, 5, 6, 7$, ..., así sucesivamente (a_1, a_2 , a_3, a_4, a_5, a_6, ...,) y puede ser ascendente o descendente, numérica o geométrica.

Secuencia (sucesión) aritmética

Una secuencia o sucesión aritmética es un conjunto de números en los que cada término (a acepción del primero) se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad constante llamada diferencia (d). La diferencia entre dos términos consecutivos es una constante. Siguiendo el patrón blanco en la sucesión que se muestra en la siguiente figura la diferencia o constante es 1. En la misma figura, siguiendo la secuencia de cuadrados azules, la diferencia o patrón es 2.

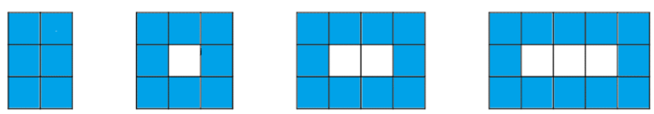


Figura 25. Representación pictórica de las sucesiones 0, 1, 2, 3, y 6, 8, 10, 12, de acuerdo con el número de cuadrados blancos y azules.

En toda progresión aritmética se cumple que:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d$

$a_4 = a_3 + d$

$a_5 = a_4 + d$

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Secuencia numérica con patrones aditivos y multiplicativos

Las secuencias numéricas con patrón aditivo o multiplicativo son ascendentes y siguen un orden, donde cada número es mayor que el anterior y se obtiene mediante una suma, multiplicación, o una combinación de ambas. Por ejemplo, en la secuencia

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., para pasar consecutivamente de un número a otro se suma una unidad, como se muestra en la figura 26.

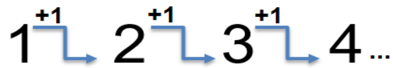


Figura 26. Secuencia numérica con patrón aditivo 1.

La secuencia 1, 3, 9, 27, ..., es ascendente, pero a diferencia de la anterior, para pasar de un número al siguiente se debe multiplicar por 3, como se muestra en la figura 27.

Figura 27. Secuencia numérica con patrón multiplicativo.

La secuencia 1, 4, 8, 11, 22, 25, 50 cumple dos condiciones en particular, para pasar de un número a otro se ha alternado la suma de 3 con la multiplicación de 2, como se muestra en la figura 28.

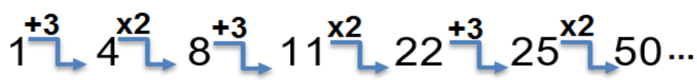


Figura 28. Secuencia numérica con patrón aditivo y multiplicativo.

Secuencia numérica con patrones de resta y división

En las secuencias numéricas descendentes, se cumple que cada número debe ser menor que el anterior y se fundamentan mediante la adicción o la división; por ejemplo, en la sucesión 21, 18, 15, 12, 9, ..., de la figura 29, los números son descendentes y para pasar de un número a otro se resta por tres unidades. En la sucesión 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1 para pasar de un número mayor al siguiente se ha dividido por 10, como se muestra en las figuras 30.

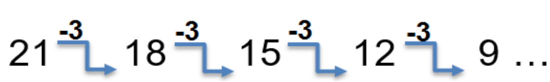


Figura 29. Secuencia numérica descendente.

Figura 30. Secuencia numérica descendente con patrón de cambio $\div 10$

Secuencia geométrica.

Una secuencia geométrica está dada por un conjunto de números en la que la relación entre los términos consecutivos es constante; es decir, cada término se obtiene a partir del anterior por medio de multiplicar una cantidad fija llamada razón de la secuencia o progresión. En una secuencia o progresión geométrica el cociente entre dos términos consecutivos es una constante (razón). Por ejemplo, en la figura 31, la longitud del cuadrado azul más pequeño mide una unidad, el segundo es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo, el cuarto es el doble del tercero y el quinto el doble del cuarto. La secuencia o progresión geométrica que describe esta figura corresponde a: $1, 2, 4, 8, 16$. Matemáticamente, se tiene que: $x_n = x_1 \, . \, r^{n-1}$. Donde:

x_n: es el término general
x_1 : es el valor del primer término
n: es el número de términos
r: es la razón

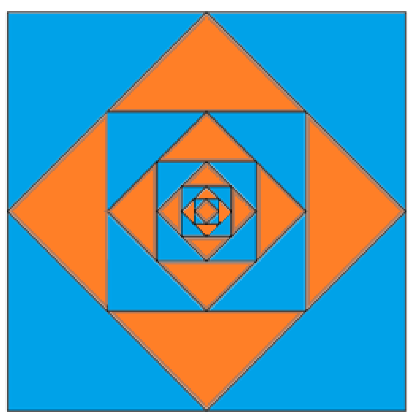


Figura 31. Representación pictórica de la progresión 16, 8, 4, 1, …

En la progresión $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ los primeros términos de la sucesión son:

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 8\ ,\ x_5 = 16$. La razón de la progresión está determinada en forma genérica por: $r = \frac{x_2}{x_1}$, donde $r = \frac{2}{1} = 2$.

Para identificar, por ejemplo, el valor que ocupa el término x_{10} se emplea la fórmula general ($x_n = x_1 r^{n-1}$), se remplaza x_1 por 1, n por 10, r por 2 y se realizan las operaciones indicadas, así.

$$\begin{aligned} x_{10} &= 1\,(2^{10-1}) \\ &= 1\,(2^9) \\ &= 1\,(512) \\ &= 512 \end{aligned}$$

En la progresión, $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, x_{10}$, el valor que es consecutivo en forma ascendente a x_9 es 512.

Patrón o regularidad

Un patrón es una sucesión repetida de elementos (auditivos, gestuales, gráficos, …) que se forman a partir de un núcleo generador siguiendo una regla; en algunas sucesiones el núcleo se repite periódicamente, en otras el núcleo crece o decrece de forma regular. Un patrón expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada regularidad que se elabora siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia, según sea su estructura de base.

Si su estructura de base es de la forma AB se dice que es un patrón de repetición porque sus elementos están presentados en forma periódica. Son ejemplos de patrón de repetición:

- Amarillo, azul, rojo, amarillo, azul, rojo, …
- Do, re, mi, fa, do, re, mi, fa, …
- $1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5$.
- Azul, azul, rojo, rojo, azul, azul, rojo, rojo.

En los patrones de recurrencia, su núcleo o base cambia con regularidad; es decir, cada término de la sucesión puede ser expresada en función de cuyo análisis se infiere su ley de formación. Por ejemplo:

- $M, MMM, MMMMM, MMMMMMM, MMMMMMMMM$, …, numéricamente se expresa como: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- $4, 4+2, 4+4+2, 4+4+4+2, 4+4+4+4+2, \dots$ se puede expresar como: $4, 6, 10, 14, 18, \dots$

- $0, 10, 20, 30, 40, 50$. Son múltiplos de 10
- $10, 100{,}1000, 10000, \ldots 10^n$, ..., donde $n = 1{,}2{,}3{,}4, \ldots$
- $1, 3, 9, 27, 81$, ..., 3^n, ... donde $n = 0{,}1{,}2, \ldots$

En el análisis matemático, los patrones permiten observar y analizar detenidamente un acontecimiento de variación y evidenciar en el que cambia, qué hace que cambie, cómo cambia, cuánto cambia, qué permanece invariante y poder así establecer generalizaciones.

En la modelización de una situación matemática para identificar patrones y regularidades, juegan un papel importante las representaciones pictóricas, que permiten observar lo que sucede en diversos momentos de la situación de cambio; representación escrita, para establecer las observaciones; representación tabular para establecer procesos aritméticos y construir fórmulas y finalmente la representación algebraica, para condensar la información.

Números Poligonales y Piramidales

Un número poligonal es un número natural que puede ser representado por medio de puntos consecutivos para formar un polígono regular, empezando por el 1. A este conjunto de números pertenecen los números triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros.

Los primeros números poligonales son los números triangulares, estos se forman a partir de triángulos. Los números $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ son triangulares, ya que cada uno admite una disposición en triángulos equiláteros sucesivos

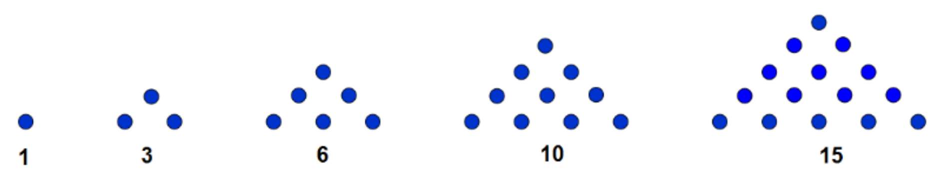


Figura 32. Representación gráfica de los primeros 5 *números triangulares*

El segundo grupo lo conforman los números cuadrados, a este grupo pertenecen los números cuya raíz cuadrada es un número entero. Los números $1, 4, 9, 16, 25$, ... son cuadrangulares porque se pueden ordenar dentro de una figura cuadrada o cuadrados perfectos.

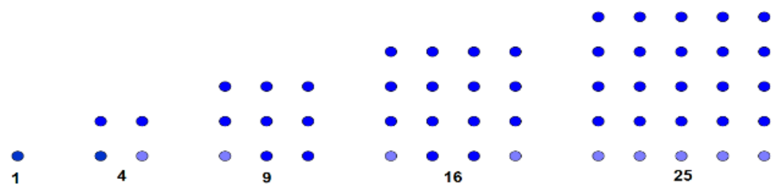


Figura 33. Representación gráfica de los primeros 5 *números cuadrangulares.*

El tercer grupo está conformado por los números oblongos. A este grupo pertenecen los números $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ por ser el producto de dos números naturales consecutivos, es decir, $1 \times 2 = 2;\ 2 \times 3 = 6;\ 3 \times 4 = 12;\ 4 \times 5 = 20, \ldots$

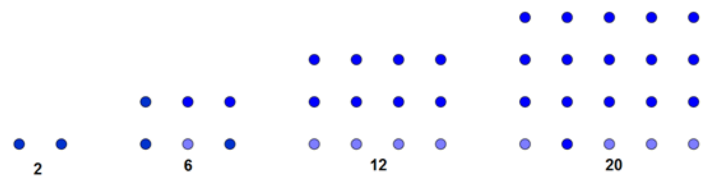


Figura 34. Representación gráfica de los primeros cinco números rectangulares.

Los griegos fueron los primeros, en representar los números con formas geométricas. Estudiaron los números triangulares, cuadrangulares y rectangulares. La Geometría y la Aritmética estaban muy relacionadas entre sí. Pitágoras y sus discípulos utilizaban pequeñas piedrecillas para determinar formas geométricas y así observar las relaciones entre los números y sus formas. El análisis que se plantea es la forma como estos matemáticos consiguieron descubrir importantes teoremas y relaciones.

5.4.3. Orientaciones didácticas.

Para este laboratorio es esencial que el docente divida la clase en cuatro momentos (apertura, desarrollo, cierre y para aprender más). En el momento de la apertura o de exploración, se da a conocer los objetivos de la clase y se hace uso de los *ambientes letrados en matemáticas* con temas alusivos a los conceptos de variación y cambio. Para esto es indispensable que con anterioridad se decore el aula con patrones numéricos, no numéricos y geométricos, cubos y cuadrados de diferente tamaño, recta numérica, regletas de Cuisenaire, bloques lógicos, espiral o caracol pitagórico, espiral de Fibonacci, entre otros; que el docente considere pertinentes para desarrollar el pensamiento lógico matemático de los estudiantes. Se desarrolla la actividad “dinámica alcance la estrella para el reconocimiento y aplicación del concepto de variación, cambio, patrón, secuencia y sucesión” que se encuentra en la actividad No.1.

Para el segundo momento, el docente conceptualiza el tema "Una aproximación al concepto de variación y cambio" propuesta en la guía del maestro; esto con el objetivo de inducir a los estudiantes en la comprensión del pensamiento variacional por medio de estrategias didácticas que les ayude a desarrollar habilidades en la solución de situaciones problema de variación y cambio.

Con el objetivo de identificar patrones (numéricos y no numéricos) en juegos de razonamiento lógico, es fundamental que el docente retome las construcciones (ambiente letrado en matemáticas) que inicialmente se habían propuesto en el momento de la exploración para aclarar estos conceptos y motivar la reflexión. En forma individual los estudiantes desarrollan las actividades No.2, 3, 4 y 5. En plenaria, por medio de la dinámica "*el palito preguntón*[10]" el docente modera la socialización de estas actividades guiado por las siguientes preguntas ¿Qué cambia en estas sucesiones? ¿Qué hace que cambien? ¿Cómo cambian? ¿Cuánto cambian?

Con el desarrollo de las actividades No.6, 7 y 8 se pretende fortalecer el trabajo cooperativo, afianzar en los estudiantes la modelación de diversas situaciones de cambio que conlleven a ser expresadas simbólicamente, en palabras, en forma gráfica, en forma tabular, y en forma algebraica, y a formular conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa. La actividad No.8 tiene como propósito motivar a los estudiantes en la construcción de la espiral de Fibonacci (anexo 8) de una forma dinámica y se inquieten a seguir investigando sobre esta construcción matemática que recurrentemente se ve en la naturaleza.

Para el tercer momento, denominado cierre o transferencia, se ha propuesto la actividad No.9 "En busca del tesoro perdido". Esta actividad está diseñada con el objetivo de verificar y reflexionar acerca de los conocimientos adquiridos por los estudiantes en cuanto al tema de variación y cambio; para esto, se recomienda que el docente forme equipos de cuatro o cinco estudiantes y bajo su orientación los invite a resolver una serie enigmas (anexo 9). Cada vez que un equipo resuelva un acertijo, se hace acreedor a un poder representado en una pieza de un rompecabezas (anexo 10), que armado correctamente se convierte en el mapa que revela el sitio exacto en el que se encuentra el tesoro y debilita al tiburón que lo custodia.

[10] Dinámica del palito preguntón: Consiste en depositar en un recipiente (vaso) el nombré de los estudiantes escritos en un palo de paleta e ir sacando al azar cada uno para que el estudiante elegido exponga su trabajo.

Terminada la actividad, el docente por medio de una serie de preguntas, previamente planificadas, invita a los estudiantes a participar en la retroalimentación de la clase e indagar así sobre los logros alcanzados con este laboratorio.

En el cuarto y último momento, denominado para aprender más, se ha planificado la actividad No.10 “en la web también se aprende matemáticas” como estrategia de refuerzo para que los estudiantes por medio de la observación de los videos “patrones en la naturaleza” y el “mundo de la geometría fractal” puedan ampliar sus conocimientos y les permita identificar elementos para generar pensamiento variacional.

5.4.4. Guía del estudiante.

Lo que comprenderás

- Comprender la noción de pensamiento variacional para desarrollar habilidades en la solución de situaciones problemas de variación y cambio.

- Formular conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa.

- Modelar diversas situaciones de cambio y expresarlas simbólicamente, en palabras, en forma gráfica, en forma tabular, y en forma algebraica.

- Identificar patrones (numéricos y no numéricos) en juegos de razonamiento lógico.

Practica de exploración

Materiales

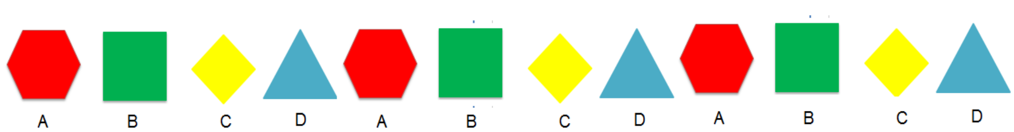
Guía del estudiante, papel, lápiz, tijeras, regla, trasportador, palitos de paleta, pajillas o palillos, hojas cuadriculadas, cubos de diferentes tamaños, figuras geométricas, chaquiras, ábaco, tablero, video beam, computador e internet, anexos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Actividad No.1. Dinámica alcance la estrella para el reconocimiento y aplicación del concepto de variación, cambio, patrón, secuencia y sucesión.

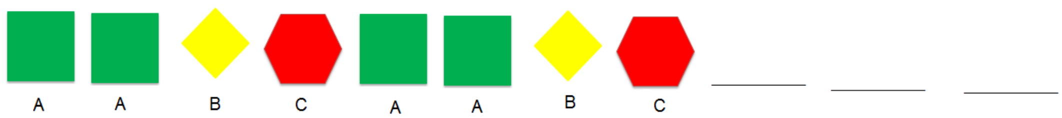
Para esta actividad, solicite a la docente las indicaciones que se han propuesto en la guía del maestro.

Actividad No.2. Regularidades no numéricas

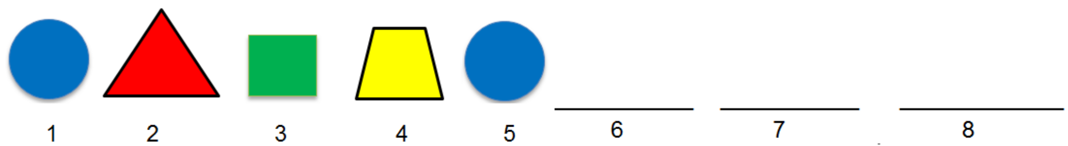
Utilice el material de figuras propuesto en el anexo 1 para realizar las siguientes secuencias y hallar el patrón.



a) Continúa la siguiente secuencia utilizando el patrón AABC.



b) Con el material del anexo 1, continua la secuencia y establece el patrón en la siguiente sucesión.



c) Recorta las figuras del anexo 2 y organiza de forma ascendente las figuras teniendo en cuenta el número de sus lados.

d) Recorta las figuras del anexo 3, organiza en forma descendente las letras J, M, E, W, A, P, R, I e identifique el patrón.

e) Elabora tus propias secuencias, dibújalas en tu cuaderno y socialízalas con tus compañeros para que ellos encuentren el patrón.

f) Reúnete con dos compañeros y analicen las dos primeras secuencias teniendo en cuenta las siguientes preguntas y luego organicen una presentación para socializar con el grupo lo analizado.

- ¿Qué cambia en estas secuencias?
- ¿Qué hace que cambie?
- ¿Cómo cambia?
- ¿Cuánto cambia?
- Busca otra forma distinta de representar la situación.

Actividad No.3. Regularidades numéricas

a) Utiliza chaquiras de diferentes colores (2 azules, 4 rojas, 6 verdes, 8 amarillas, 10 blancas), y agrupa cada conjunto en forma ascendente.

¿Cuál es la secuencia que se formó? ____

¿Cuál es su patrón de formación? ____

¿Qué conjunto numérico se formó? ____

¿Cuántas chaquiras necesitas para representar el sucesor par del número 10? _______

b) Utilice el material del anexo 4 (Material de números para recortar) para realizar las siguientes secuencias, hallar el patrón y resolver las siguientes preguntas.

- $1, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots,$
- $0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots,$

¿Estas secuencias son de orden ascendente o descendente? _____________________

En la sucesión $1, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots,$ ¿el patrón es aditivo o multiplicativo? ________

En la sucesión $0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots,$ ¿el patrón es aditivo o multiplicativo? _________

c) Utiliza el material del anexo 5 (recortables para armar la sucesión de cuadrados) y construye dos secuencias, una descendente y otra ascendente con patrón multiplicativo.

- ¿Con cuántos cuadrados de unidad uno se cubre la figura 2, 3, 4 y 5?

- En un trozo de cartulina construye las figuras 6 y 7 y establece cuántos cuadrados de unidad uno se requiere para cubrir cada figura.

- Escribe la nueva sucesión que resulto del análisis anterior. ____________________

d) Complete la siguiente secuencia, halle el patrón y establece si es aditiva o multiplicativa.

0	5	10	15			

e) Ubica en el ábaco una ficha por cada una de las posiciones (unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil y centenas de mil), escribe la secuencia que resulta y resuelve las siguientes preguntas.

¿Qué tipo de secuencia resultó?

¿Cuál es su patrón?

¿Qué operación aritmética se debe hacer para encontrar, el número que es consecutivo a 100? ____

Prueba con dos números consecutivos y divide el mayor por el menor. ¿Qué número resulta de esta división?, realiza nuevamente este procedimiento tomando otros dos números consecutivos, ¿el número que resultó de esta nueva división es diferente o igual al anterior? ____

Actividad No.4. Lo fascinante de los números triangulares.

a) Elabora la siguiente secuencia con palillos y plastilina hasta llegar a construir secuencialmente la figura No.6. Registra los datos en la tabla siguiente, teniendo en cuenta el número de palillos utilizados en cada figura. Para finalizar establecer cuál es el patrón de la secuencia.

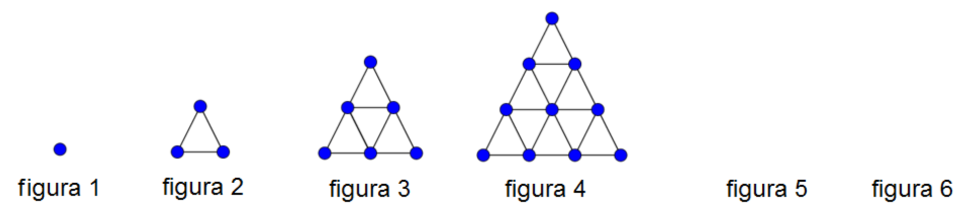
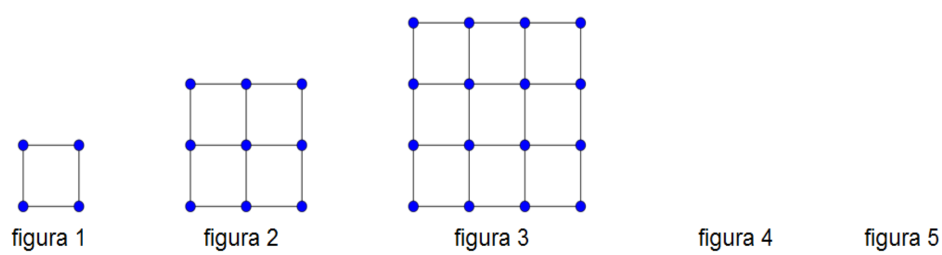


Figura	1	2	3			6		8
Cantidad de puntos	1	3						

b) Trabajo en plenaria. De acuerdo con la secuencia anterior reflexionar sobre las siguientes preguntas. ¿Qué cambia en esa sucesión?, ¿Qué no cambia?, ¿Qué hace que cambie?, ¿Cómo cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo saber el número de triángulos que se forman con la figura 12, o con la figura 17 o la 100? ¿a qué conjunto pertenecerán estos números?

Actividad No.5. Jugando con los números cuadrados

a) Construye con plastilina y pitillos la siguiente secuencia geométrica hasta lograr armar la figura correspondiente de orden cinco.



c) Registrar los datos en la siguiente tabla y trata de encontrar una forma de saber cuántos pitillos necesitas para construir la figura 12.

Completa la tabla

Orden	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de pitillos							

d) Trabajo en plenaria. De acuerdo con la secuencia anterior reflexionar sobre las siguientes preguntas. ¿Qué cambia y que no cambia en esta secuencia?, ¿Qué hace que cambie?, ¿Cómo cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo saber el número de cuadrados que se forman, como el de la figura 1 para armar la figura 10, o con la figura 17 o la 100?, ¿a qué conjunto pertenecerán estos números?

Actividad No.6. Descubriendo los números cúbicos.

a) Utiliza diferentes cubos de igual volumen y construye la figura 28, represente en una tabla los datos obtenidos y contesta las siguientes preguntas.

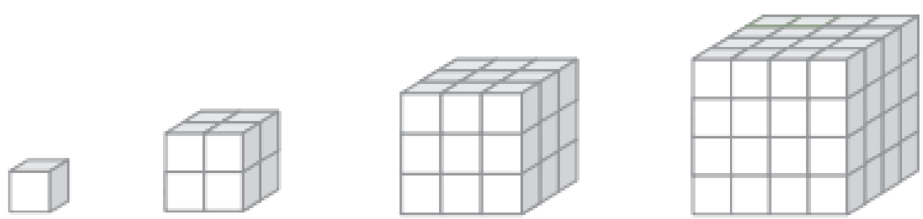
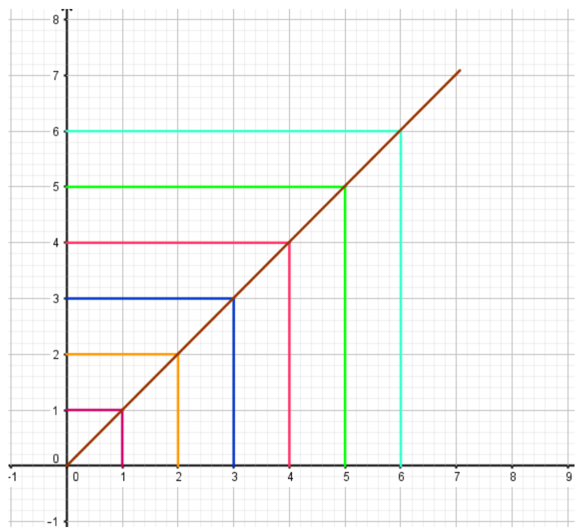


Figura 35. Representación gráfica de los números cúbicos.

- ¿Con cuántos cubos se formó la figura 2? ____________________
- ¿Con cuántos cubos se formó la figura 4? ____________________
- ¿Cuántos cubos se necesitan para formar la figura 5? ____________________

Actividad No.7. Análisis y elaboración de gráficas para observar la variación y el cambio de fenómenos en la naturaleza.

a) Elabora la siguiente gráfica en tu cuaderno y colorea de diferente color cada cuadrado que se ha formado mediante la intercepción en cada punto del eje x con el eje y.



b) Recorta los cuadrados del anexo 6, júntalos de forma que logres armar un cuadrado cada vez más grande que el recortado y resuelve las siguientes preguntas.

- ¿Con cuántos cuadrados del tamaño de la figura que recortaste se forma un cuadrado dos veces mayor que el recortado? ____________________
- ¿Cuántos cuadrados del tamaño de la figura que recortaste se necesitan para formar un cuadrado tres veces mayor que el recortado? ____________________
- ¿Con cuántos cuadrados se forma un cuadrado cuatro veces mayor que el recortado? _____________
- ¿Cuántos cuadrados se requieren para formar un cuadrado 6 veces mayor que el recortado? _____________
- ¿Qué sucesión de números resulta de la construcción que acabas de realizar? Represéntela por medio de una gráfica.

c) Ordena cada una de las siguientes imágenes de carros[11] indicando de menor a mayor el número que le corresponde a cada uno según la velocidad con que se desplazan.

 100	 300	 60	 120	 210

d) Con base en las imágenes anteriores, responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué cambia?
- ¿Qué hace que cambie?
- ¿Cómo cambia?
- Recorta los autos del anexo 7 y realiza una gráfica donde se represente la velocidad con que se desplaza cada carro.

e) Considere la siguiente tabla.

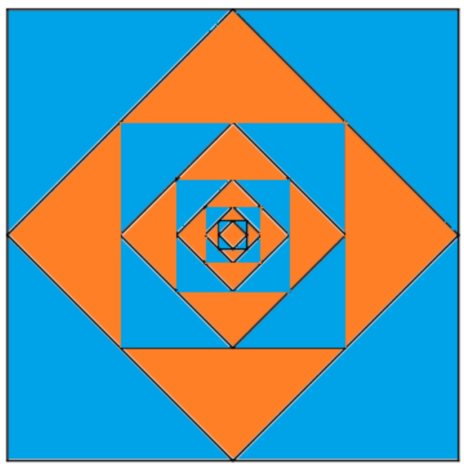
 En reposo	 60 kilómetros 1hora	 120 kilómetros en 2 horas	 180 kilómetros en 3 horas	 240 kilómetros en 4 horas	 300 kilómetros en 5 horas

- ¿Qué cambia y qué permanece constante en cada cuadro?
- ¿Qué varía en cada cuadro a medida que pasa el tiempo?
- ¿Cuantos kilómetros recorre el auto en 3 horas?

[11] Las imágenes fueron tomadas de: https://www.google.com.co/search?q=auto&rlz=1C1EJFA_enCO677CO678&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiWxruBptLVAhXI2SYKHbteBpcQ_AUICigB&biw=1242&bih=589#imgrc=k6TQ0gdqMRt0BM:

- Si el carro continúa su trayectoria a una velocidad constante, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido en 7 horas?
- Escribe la sucesión numérica de la trayectoria del auto y encuentra el patrón aditivo o multiplicativo que se genera. ¿A qué velocidad se está desplazando el auto?
- Traza la gráfica de la posición en función del tiempo entre las cero y las 7 horas.

f) Analiza la figura relacionada a los cuadrados azules y naranjados superpuestos entre sí de afuera hacia adentro, donde la medida del lado del primer cuadrado es 16 unidades. Toma como base los cuadrados de color azul, construye la secuencia numérica de la longitud de cada cuadrado y represéntala mediante una gráfica en el plano cartesiano de la longitud del cuadrado con respecto al número de cuadrados. Si se aumenta el número de cuadrados indefinidamente, ¿a dónde tiende la longitud del cuadrado azul? Ilustre la situación gráficamente.



Actividad No.8. "La espiral de Fibonacci"

Indicaciones para armar la espiral de Fibonacci:

1) Recorta los dos cuadrados pequeños (de unidad 1) del anexo No.8 (Cuadrados para la espiral de Fibonacci" y únelos horizontalmente. ¿Qué figura se formó?

2) Realiza con el compás un semi arco de forma que una los punto G, J y L.

3) Busca un cuadrado que tenga la misma longitud del rectángulo que acabas de formar, recórtalo, ubícalo de bajo de los dos cuadrados anteriores. Traza el arco correspondiente a los puntos L, y U_1. ¿Qué figura acabas de formar?,

4) Recorta el cuadrado que tiene la misma longitud de la unión de los tres cuadrados anteriores, ubícalo a la izquierda de estos tres y traza el arco correspondiente a los puntos U_1 y R. ¿La nueva figura tiene forma de cuadrado o de rectángulo?, ¿Cuáles son sus dimensiones de sus lados? ______________________

5) Con la unión de los cuatro cuadrados, busca el rectángulo que tiene su misma longitud, recórtalo, sitúalo encima de estos y traza el arco correspondiente a los puntos R y A_1. ¿La nueva figura tiene forma de rectángulo?, ¿Cuáles son sus dimensiones de sus lados? ________________________________

6) Repite el procedimiento anterior y ubica el cuadrado al lado derecho de los seis cuadrados anteriores y traza el arco correspondiente a los puntos A_1 y D_1.

7) Ubica el siguiente cuadrado debajo de las siete figuras anteriores y traza el arco correspondiente a los puntos D_1 y Q_1.

8) Ubica el ultimo cuadrado a la izquierda de los siete anteriores y traza el arco correspondiente a los puntos Q_1 y L_1.

9) Mida uno de los lados de cada cuadrado y escribe de menor a mayor cada valor. ¿Qué sucesión resulta de la medida de los lados de cada cuadrado? _____________

Actividad No.9. "En busca del tesoro perdido".

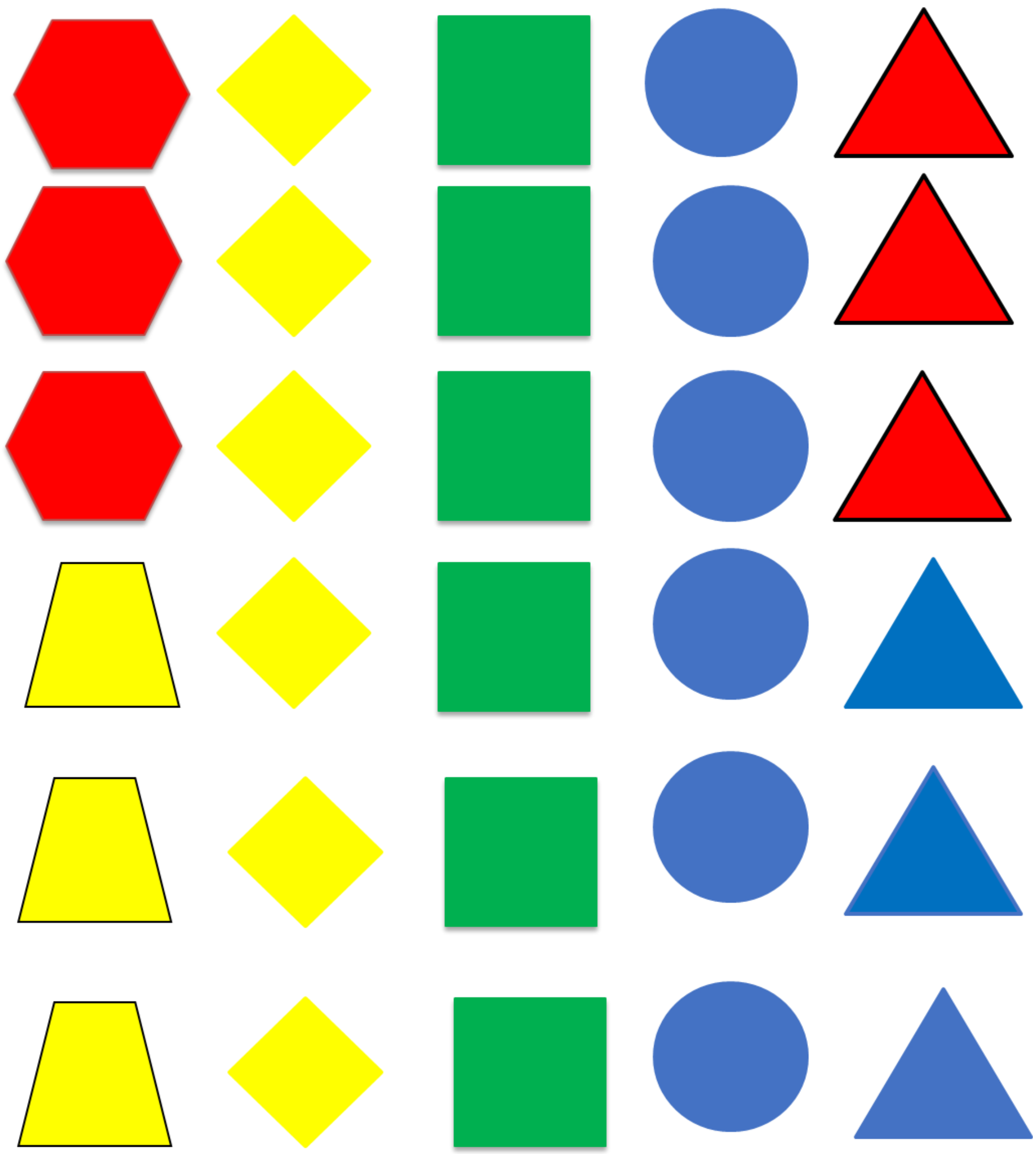
El reino de los sabios ha sido atacado por unos malvados ogros y se han llevado el tesoro más preciado de todos: "la sabiduría". Cuenta la leyenda que este majestuoso tesoro lo tienen custodiado por un enorme tiburón y ha sido escondido en un cofre cerrado con llave dentro de una gruta a la que sólo se puede llegar con un mapa.

Si quieres embarcarte en esta aventura en busca del tesoro escondido, lee detenidamente las indicaciones que ha diseñado el mago del reino para encontrar el mapa que indica cómo recuperarlo. Cada vez que un equipo resuelva un acertijo (anexo 9), se hace acreedor de un poder representado en una pieza de un rompecabezas (anexo 10), que armado correctamente se convierte en el mapa que revela el sitio exacto en el que se encuentra el tesoro y debilita al tiburón que lo custodia.

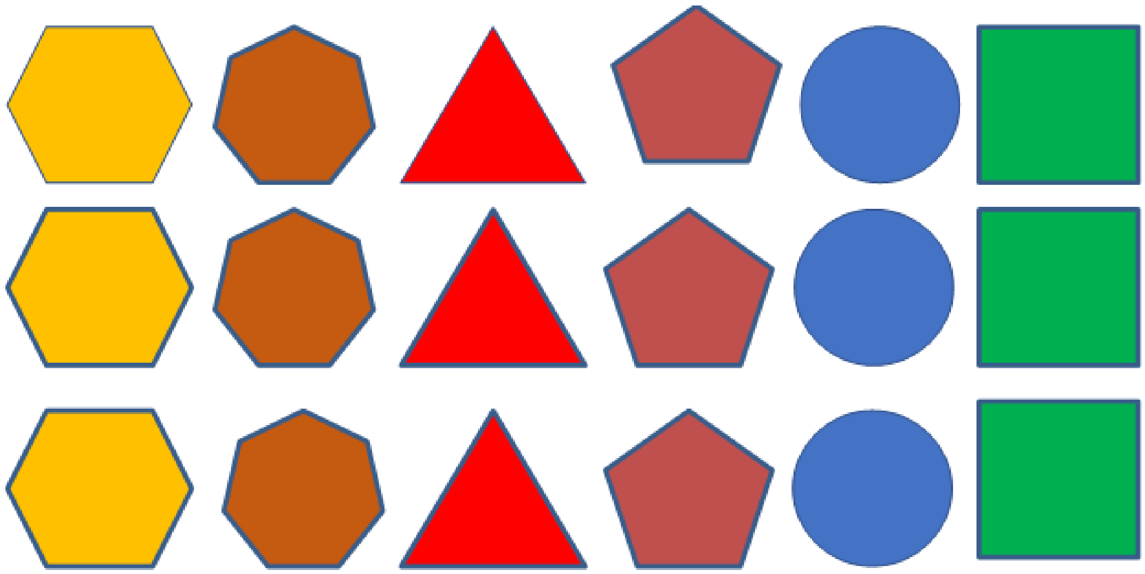
Autor: Ramiro de Jesús Tobón Tobón

5.4.5. Anexos del laboratorio cuatro.

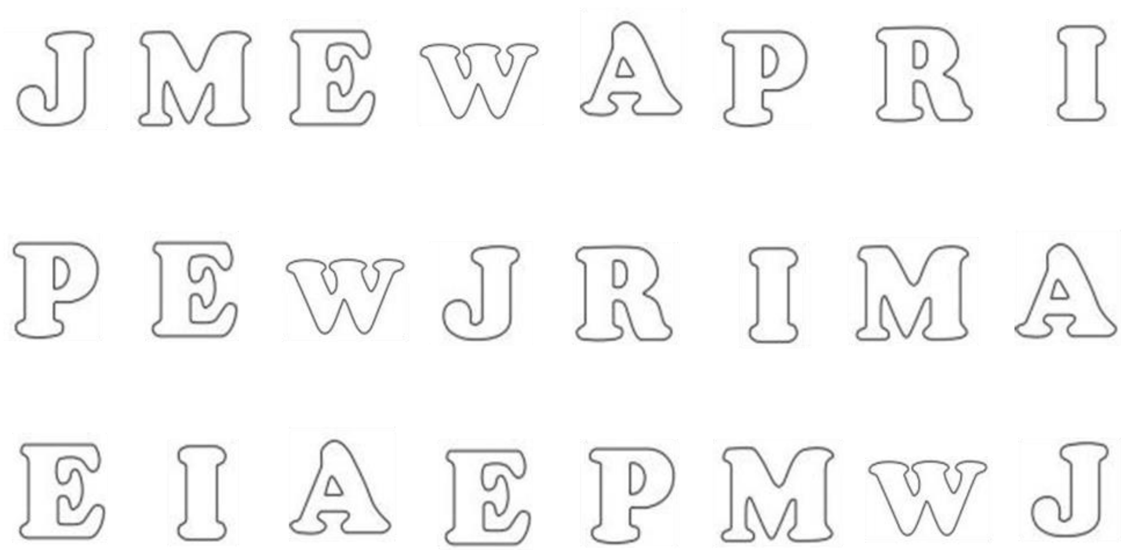
Aexo 1. Rrecortables para trabajar las regularidades no numéricas.



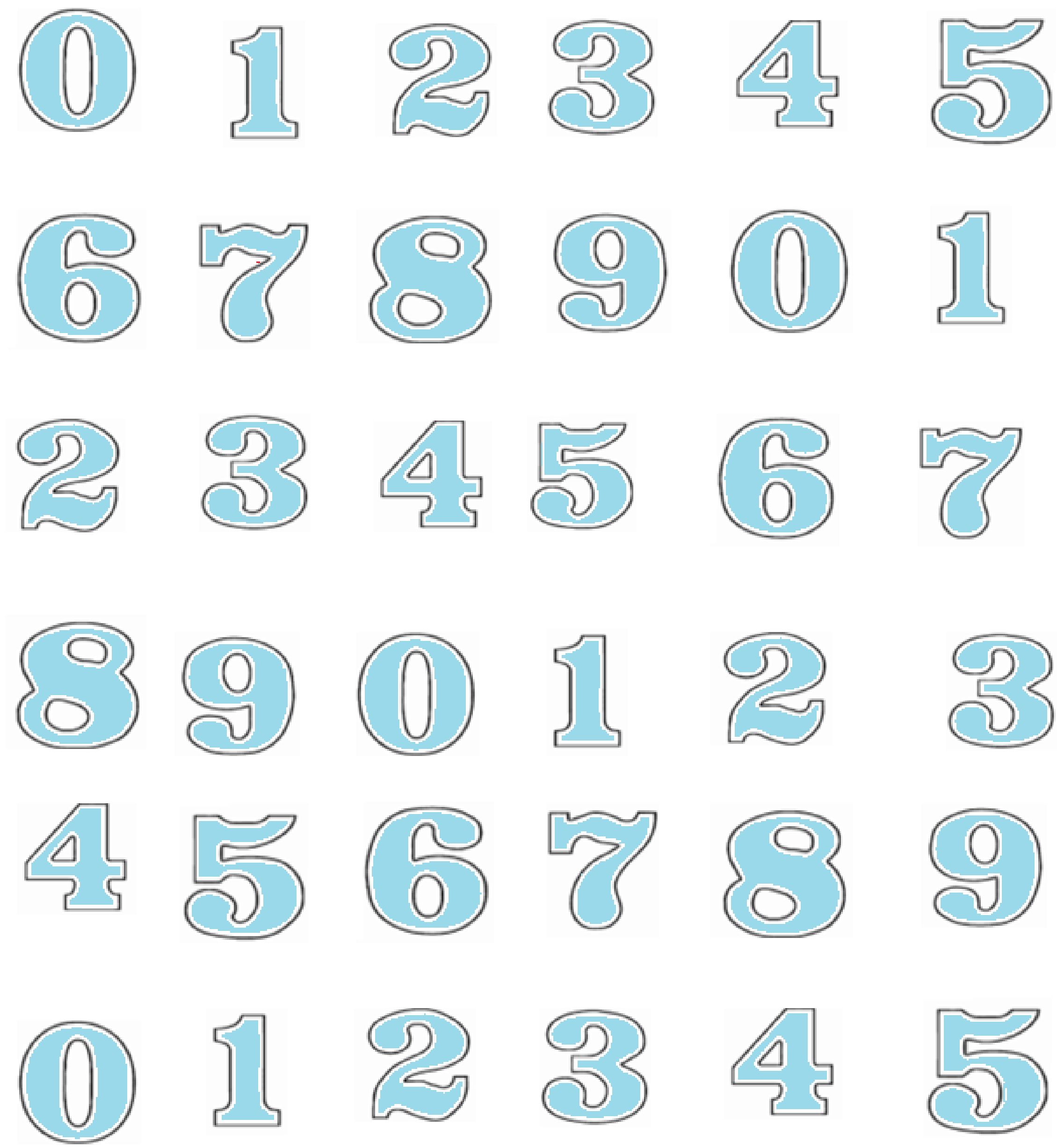
Anexo 2. Recortables para trabajar la secuencia de figuras geometricas según su numero de lados.



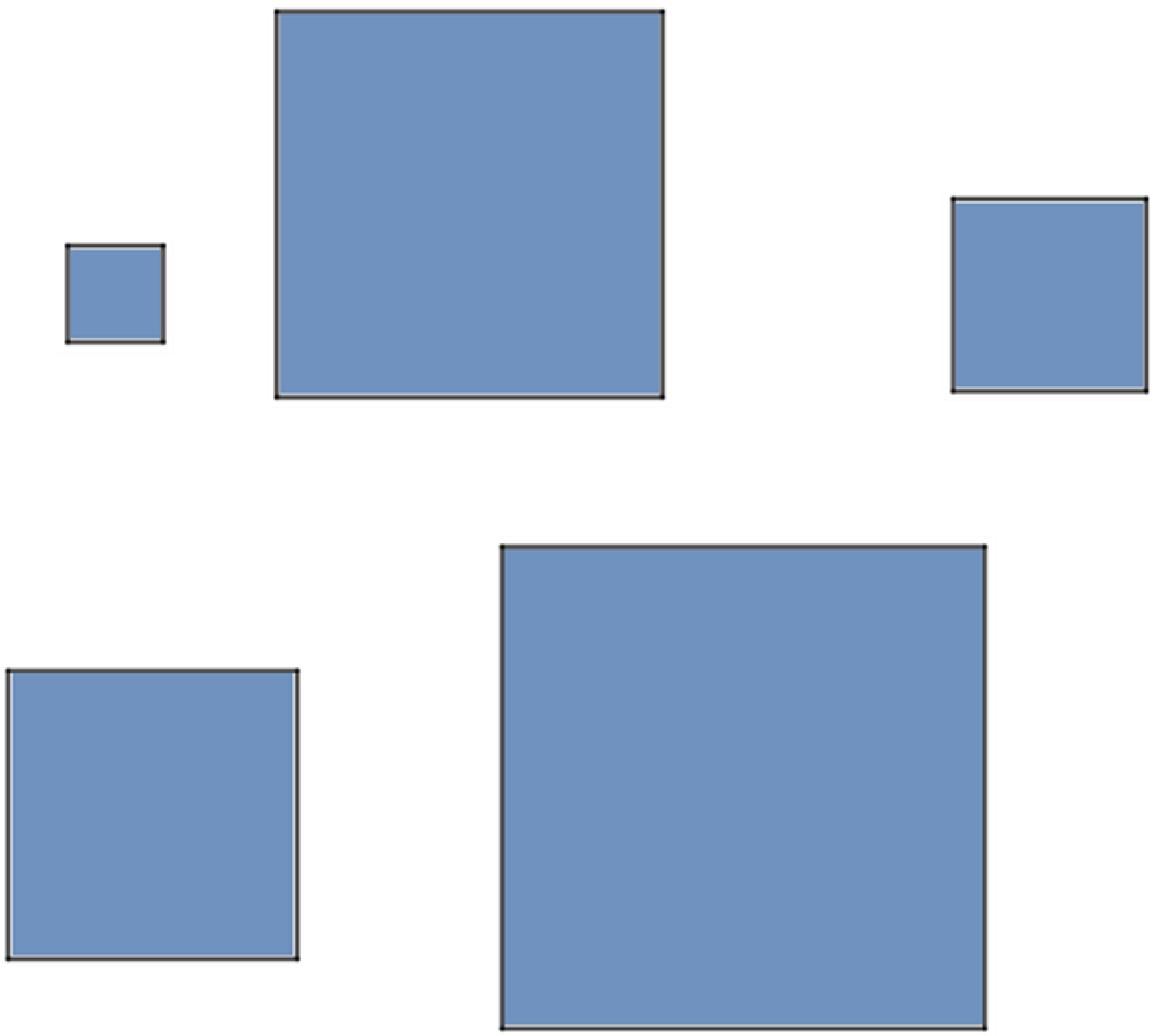
Anexo 3. Recortables para trabajar las secuencias con letras.



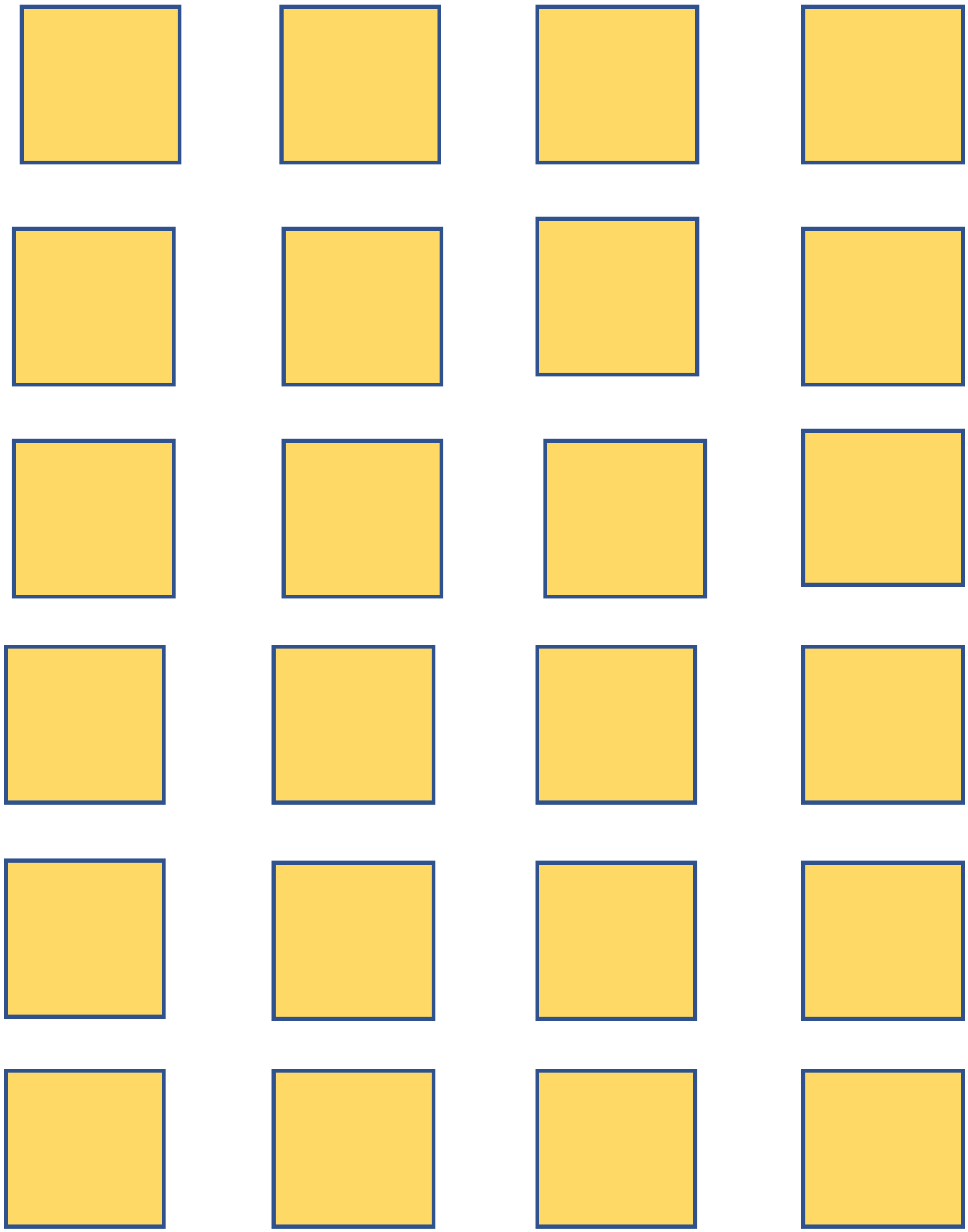
Anexo 4. Material de números para recortar.



Aexo 5. Rrecortables para armar la sucesión de cuadrados.

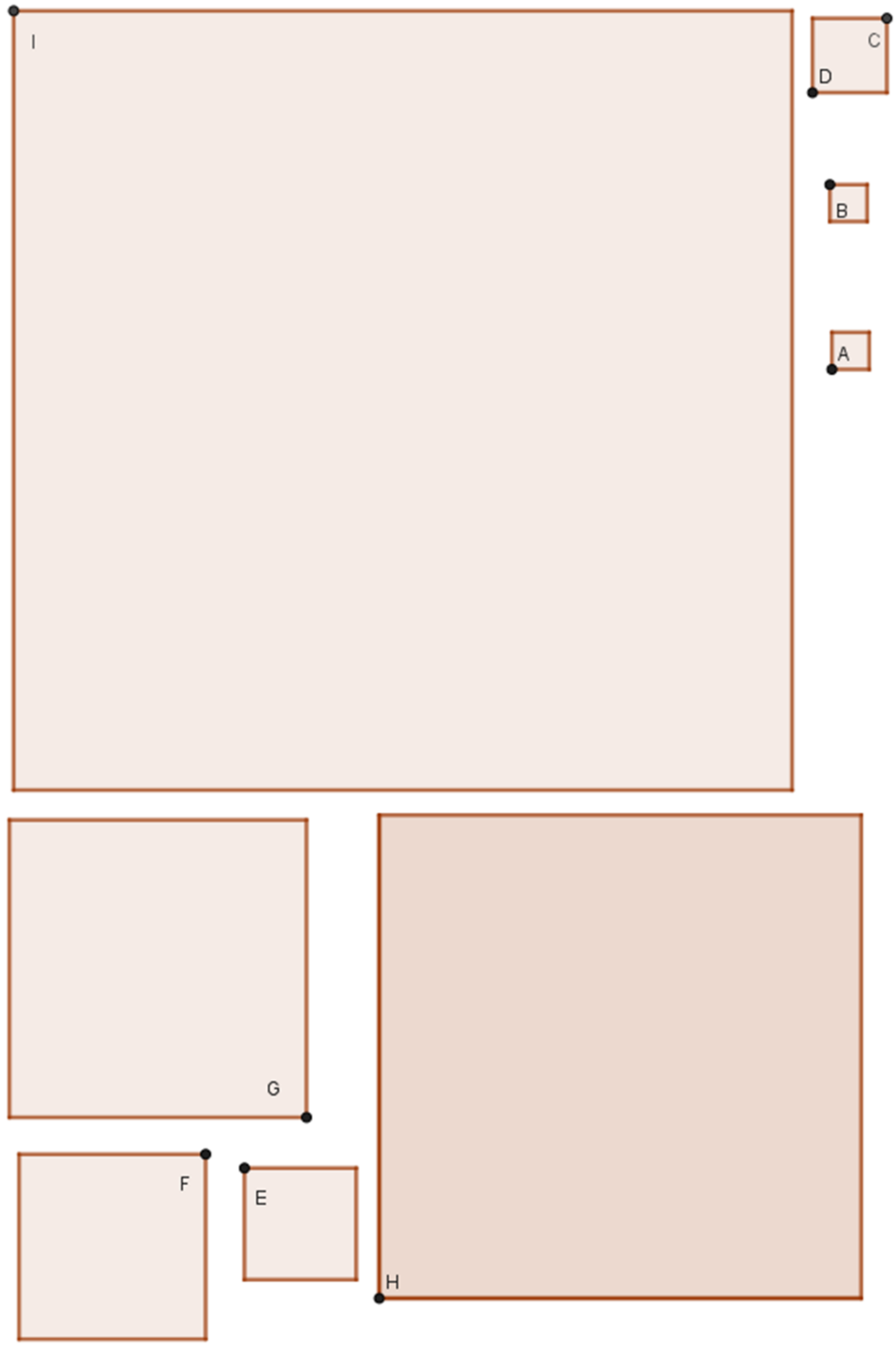


Aexo 6. Rrecortables para armar la sucesión de cuadrados.



Anexo 7. Recortables para realizar la gráfica de la velocidad vs tiempo.

Anexo 8. Recortables para construir la espiral de Fibonacci

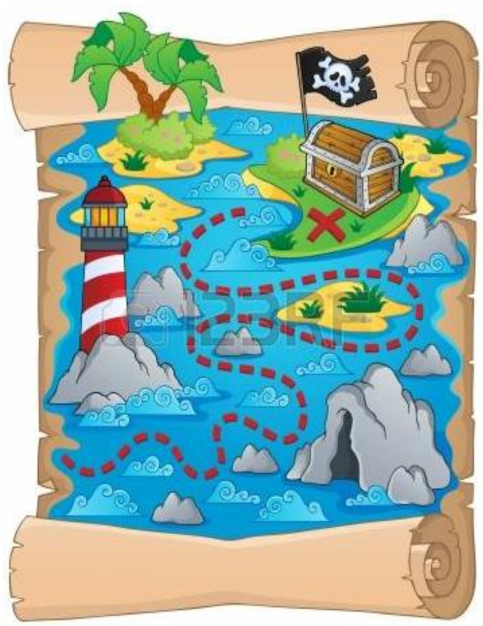


Anexo No.9. Tarjetas[12] con enigmas para la búsqueda del tesoro.

Enigma 1

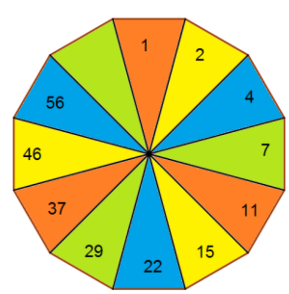
Para encontrar el mapa del tesoro debes abrir el cofre encantado. Esto solo se logra hallando los tres números faltantes en la siguiente sucesión que el mago ha planteado.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ___, ___, ___



Enigma 2

Para desembarcar en la isla debes pagar un impuesto a la tribu que allí habita, pero primero debes saber qué cantidad es. Para esto debes resolver la siguiente sucesión y así entregar el dinero exacto al cacique, si te equivocas en el cálculo puedes ser capturado por esta feroz tribu a la que no le gusta los errores. El número faltante en esta sucesión indica la cantidad exacta que debes pagar para poder desembarcar en la isla.



[12] las imágenes fueron tomadas de: https://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/mapa_tesoro_pirata.html

Enigma 3

Hay un león hambriento y feroz rondando por la isla, para derrotarlo debes construir un muro con seis ladrillos. Tu tarea es averiguar de cuántas formas diferentes se puede hacer el muro utilizando solo seis ladrillos.

Enigma 4

Para avanzar hacia la búsqueda del tesoro debes darle de beber 1 litro de agua al koala. Los recipientes en que debes llevar el agua no están graduados, solo se sabe que al más grande le caben 5 litros y al otro 3 litros. Tu tarea es medir un litro de agua utilizando estos dos recipientes sin desperdiciar el líquido y así dar de beber al koala.

Enigma 5

Dos ogros reúnen bichos para su almuerzo, uno le dice al otro

_ ¡Dame uno para que los dos quedemos con igual cantidad! “No, dice el otro.

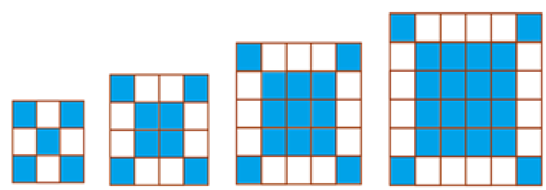
_ ¡” Mejor dame uno tu a mí, para yo tener el doble que tu” ¡cómo es esto posible? Tú misión es descifrar que cantidad de bichos tiene cada ogro.

Enigma 6

Tú siguiente misión consiste en recuperar el número exacto de tortugas que han sido capturadas por un malvado pirata. Para esta misión solo se sabe que el número de tortugas es mayor que 30 y menor de 50. Si se agrupan de 4 en 4 sobran 2 y si se agrupan de 5 en 5 sobra 1. ¿Cuántas tortugas tienes que recuperar?

Enigma 7

Unos cactus malvados andan sueltos por la isla, para evitar ser atrapado debes construir un muro e impedir así su paso. Ten en cuenta las siguientes figuras y construye el muro que corresponde a la figura seis y escribe las dos sucesiones que resultan de acuerdo con los cuadrados azules y blancos.



Enigma 8

Avanza rápidamente hasta la cueva donde se esconde el pirata. Para derrotarlo debes completar la siguiente secuencia y encontrar el patrón antes que él lo haga. Si no lo logras serás capturado y encerrado en una celda con unos malvados unos ogros

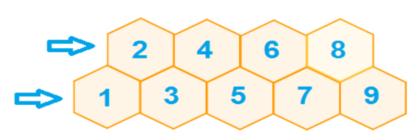
3, 6, 12, 24, ___, ___, ...

Enigma 9

Para pasar al otro lado de la montaña debes encontrar la puerta del túnel que conduce al otro lado de la colina. La puerta solo se abre descifrando la siguiente secuencia y colocando el peso de una de las figuras al lado derecho de la puerta y agrupando otras dos de modo que su peso sea equivalente al de la figura del lado derecho de la puerta. Tú misión es construir la figura 5 y 6 para saber cuál de estas dos es equivalente con la suma de las otras dos.

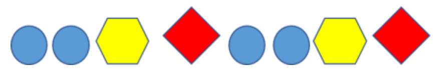
Enigma 10

Para cruzar al otro lado del rio debes ayudar a la abeja a llegar a la casilla número nueve de su panal. Para eso, debes empezar en la celda uno o dos y moverse hacia una celda vecina que contenga un número mayor que la celda en la que se encuentra ubicado. Como veras, para llegar a la celda nueve hay diferentes senderos, tu tarea es conducir a la abeja por el camino correcto utilizando solo siete celdas cuya suma de sus dígitos de como resultado 36.



Enigma 11

Un duende juguetón ha escondido las dos siguientes piezas que muestran el camino para llegar a la cueva del tesoro, tu misión es descifrar cuáles son esas dos piezas faltantes y continuar a si su camino.



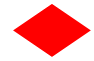
___ ___

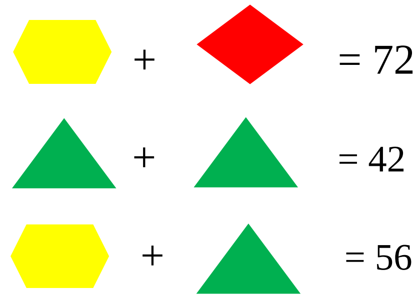
Enigma 12

1. Para poder derrotar al dragón debes unir cada descripción de la columna A con la secuencia de la columna B y llenar el espacio con el número faltante. Tu misión es descifrar las secuencias antes de que seas calcinado con las llamas que arroja el dragón.

Columna A	**Columna B**
Patrón numérico de números impares, empezando con 1 y saltándose uno.	1, 2, 4, ____, 16, 32, 64, . ..
Patrón numérico de números pares, contando de dos en dos.	0, 7, 14, 21, 28, 35, __, . . .
En esta secuencia aritmética, la diferencia común es 1.	1, 3, 5, ___, 9, 11, 13, . . .
En esta secuencia aritmética, la diferencia común es 7.	____, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . .
En esta secuencia geométrica, cada número es el doble (dos veces) del número anterior.	2, 4, 6, 8, ___, 12, 14, . ..

Enigma 13

Para entrar a la cueva del dragón, debes averiguar cuál es el valor del 



Enigma 14

En la isla hay un cocodrilo gigante que está devorando todo a su paso. Tu misión es averiguar el número exacto de huevos depositado en cada triangulo de la figura cinco; para esto, observa la siguiente sucesión de figuras geométricas, construye la figura 5 y destruye los huevos que se han depositado allí.

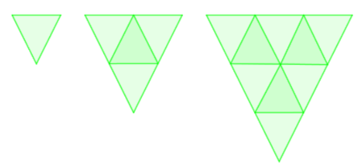


Figura 4 Figura 5

Enigma 15

Para abrir el cofre y devolver la sabiduría al pueblo, debes descifrar el siguiente enigma. Encuentra los cuatro números que te servirán de clave para abrir el candado, ten presente la fórmula $\boldsymbol{a_{\mathrm{n}} = n^2 - 1}$ y reemplaza en ella la letra $\boldsymbol{n}$ cuando esta toma el valor de $2, 5, 4$ y 7. Observa donde pizas, cuidado con la arena movediza, no vayas a caer en ella.

Anexo 10. Piezas para armar el rompecabezas del mapa del tesoro

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1. Conclusiones.

Teniendo como base el análisis realizado en el rastreo bibliográfico para abordar el marco teórico de este trabajo de grado, se concluye que en la enseñanza-aprendizaje en el área de matemáticas no es común abordar de manera significativa el uso de laboratorios para su fortalecimiento.

La utilización de elementos concretos, materiales y nuevas estrategias didácticas contribuye de manera significativa en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la adquisición de los conocimientos se hace más activa y agradable para el estudiante.

A partir de la utilización de material concreto se facilita la comprensión de las temáticas, se posibilita un aprendizaje significativo y se generan mejores ambientes de aula.

Este trabajo permitió hacer un análisis de los ejes temáticos del grado quinto, además de los lineamientos, estándares, derechos básicos y demás documentos que ayudan a que las prácticas pedagógicas de los docentes se encaminen a las necesidades y requerimientos estatales.

Resulta relevante destacar que durante la etapa de ejecución del laboratorio de matemáticas se observó motivación en los estudiantes durante la ejecución de las actividades, posibilitando no solo el fortalecimiento de las competencias cognitivas en el área de matemáticas, sino, que además se fortalecieron las competencias sociales, comunicativas, argumentativas y propositivas de los estudiantes. También se evidenciaron mejores actitudes para el trabajo en equipo y en la entrega de las actividades.

El laboratorio de matemáticas se convierte en una estrategia pedagógica de aula, en la que se implementan diferentes actividades y juegos que desarrollan los estudiantes a partir del uso de diferentes materiales didácticos, los cuales proporcionan un ambiente de aula en el que se plantea una relación entre conocimiento matemático y material concreto; relación que ayuda a la fundamentación y construcción del pensamiento matemático.

Durante la elaboración y ejecución de las actividades del proyecto se han podido establecer acciones que contribuyeron al mejoramiento de los resultados de las pruebas externas y han despertaron el interés de los estudiantes por las clases de matemáticas como se muestra en el anexo 1.

El estudio de los conceptos matemáticos que se abordan en el grado quinto permite que los docentes del área interioricen los resultados matemáticos que mejoran su práctica en el aula de clase.

La utilización del laboratorio de matemáticas y sus diferentes actividades es fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta área, ya que genera en los estudiantes el interés por aprender y permite el desarrollo y adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos que posibilitan el aprendizaje de una forma activa. Además, se muestra que la aplicación de herramientas didácticas permite obtener excelentes resultados en la asimilación de conceptos matemáticos que se ven reflejados en las pruebas de estado.

La guía metodológica para el uso de los materiales didácticos es fundamental para el buen uso del laboratorio, pues le ayuda tanto al docente como al estudiante a entender mejor y sacarle el mayor provecho a cada experiencia de aprendizaje.

6.2. Recomendaciones

La aplicación de cada laboratorio ha sido pensada con el objetivo de mejorar el desempeño escolar y fortalecer en los docentes la didáctica del contenido en matemáticas y se fundamenta bajo la premisa de que el estudiante aprende a medida que interactúa con los elementos del medio. En este sentido, esta estrategia no se basa en simplemente llevar al aula de clase actividades diversas y talleres, sino acompañar a los docentes con estrategias efectivas de enseñanza-aprendizaje fundamentadas en los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia en matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje y que ilustran y guíen al docente en la implantación de buenas prácticas de enseñanza. Por ello, su implementación en el aula de clase requiere del profesionalismo del docente y la utilización eficaz del material didáctico que aquí se propone.

El objetivo de este trabajo no es prescribir o imponer un pensum académico, ni mucho menos dar a entender que esta propuesta es la última panacea en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Con esta propuesta se pretende dar a conocer algunas actividades para que los docentes las analicen y adopten con base en su conocimiento y experiencia que ayuden al mejoramiento de su currículo.

La aplicación de cada uno de los laboratorios no requiere que se haga de una forma secuencial; es decir, cada docente lo ajusta a su plan de área y lo desarrolla según el ritmo de aprendizaje de sus estudiantes.

La inadecuada aplicación de estos laboratorios dificulta los procesos de enseñanza-aprendizaje en el aula de clase e incide en el agrado o desagrado de la matemática en los estudiantes. La correcta utilización de este material requiere de quien lo aplique documentarse adecuadamente y seguir los parámetros establecidos en la guía del docente; de nada serviría entregar el material al estudiante para que este simplemente responda cada actividad como si fuese un taller más por resolver. Es responsabilidad del docente guiar cada una de estas actividades y darle el “tinte” de laboratorio. Esto solo se logra si el maestro planifica con tiempo cada laboratorio y dispone del material manipulativo que aquí se propone.

Cada laboratorio se ha estructurado teniendo en cuenta un modelo de planeación prediseñado. Este modelo contempla cuatro momentos (apertura o exploración, desarrollo o estructuración de la clase, cierre o transferencia y para aprender más) que son cruciales para el desarrollo de este y busca la articulación de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia en matemática y los Derechos Básicos de Aprendizaje. Es fundamental que su aplicación siga el orden de estos cuatro momentos; Sin embargo, las actividades pueden ser planificadas de acuerdo con el criterio y las necesidades de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Arce, J. (2004). LABORATORIO DE MATEMÁTICAS. Valle .

Argüello, M. (2013). Desarrollo de la Inteligencia Espacial a partir de la utilización de software CAD en la enseñanza de la Geometría Descrptiva. *Educación en Ingenieria*, 38-47.

Avendaño, R. C. (s.f.).

Bosch, E. H. (2014). *Un marco didáctico de enseñanza de ciencias, tecnología, ingeniería y matemática para la sociedad contemporánea.* Buenos Aires, Argentina: Dunken.

Buendía, G., & Samayoa, O. (2009). *De la investigación al aula: unas prácticas de laboratorio utilizando calculadora* (Vol. 22). (C. L. Educativa, Ed.) México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castiblanco, P. A., Urquina, L. H., & Acosta, G. E. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá D.C: Ministerio de Educación Nacional.

Castillo , S. (2008). PROPUESTA PEDAGÓGICA BASADA EN EL CONSTRUCTIVISMO PARA EL USO ÓPTIMO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*.

Cuenca, M. G. (2014). *El huerto como laboratorio de matemáticas: Aprendizaje de los números racionales positivos.* Palmira, Colombia.

De Guzman, M. (enero-abril de 2007). ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y MATEMÁTICA. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN. N.º 43*, 19-58.

Escobar, M., Arias, M. A., & Osorio, J. Á. (2002). Construyendo nuestro laboratorio de matemáTICas. Cali, Colombia.

Gavilán, I. J., Barroso, C. R., Ariza, G. ,., & Sánchez, S. Á. (2002). Laboratorio virtual de matemáticas II. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 9-14).

Godino, J. D. (2004). *DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS.* Granada: GAMI, S. L. Fotocopias.

González, U. P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma*, 103-130.

Grows, D. A., & Cebulla, K. J. (2000). *Mejoramiento del desempeño en matemáticas.* Servicio de Investigación Educativa (ERS).

Gutierrez, A., & Adela, J. (2015). Analisis del Aprendizaje de Geometría Espacial en un entorno de Geometría Dinámica 3 - Dimensional. *PNA. Vol 9. Issue 2,* 53-83.

Hernández, E. D. (12 de Agosto de 2017). *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*. Obtenido de https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/actopan/n7/e3.html

Jiménez B, L. R., Gordillo A, J. E., & Rubiano O, G. N. (2004). *Teoría de números para principiantes.* Bogotá, Colombia : Universidad nacional de Colombia.

Labarca, B. R. (13 de Julio de 2017). *Sobre la Construcción Axiomática de los Números Naturales.* Charla, Universidad de Santiago de Chile, Arequipa, La Paz y Quito. Recuperado el 18 de May0 de 2017, de http://www.math.epn.edu.ec/ecopt/files/cursillo%20comca%202010.pdf

Lastra, T. S. (2005). "PROPUESTA METODOLÓGICA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA, APLICADA EN ESCUELAS CRÍTICAS”. Santiago de Chile.

Mariana, A. G., Tania, B. G., Ignacio, F. I., & Héctor, F. T. (2027). *Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria.* Madrid: CENTRO: IES nº 5 (Avilés, Asturias).

Maury, M. E., Palmezano, S. G., & Cárcamo, B. S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios • Vol. 10, No. 1, Enero-Junio de 2012*, 11.

MEN. (1998). *MATEMÁTICAS - Lineamientos curriculares.* Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Primera edición ed.). (M. d. Nacional, Ed.) Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

MEN. (Marzo de 2017). PR-PREA-A-123-PTA-VARIACIÓN Y CAMBIO. Colombia, Antioquia.

Mora, W. (2014). *Introducción a la Teoría de Números. Ejemplos y algoritmos.* Costa Rica: Copyright© Revista digital Matemática Educación e Internet (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).

Padilla, C. W., & Mosquera, A. S. (2016). Laboratorios matemáticos para la enseñanza desarrolladora del componente numérico variacional en los estudiantes del grado quinto. *Revista de la Facultad de Educación*, 13-19.

Pérez, J. (2011). *Teoría Cantoriana de los Conjuntos.* Zacatecas.

Posada, B. F., & otros, y. (2016). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico* (2 ed.). Medellín: Artes y Letras Ltda.

Ramírez, M. C. (2013). El laboratorio de matemáticas y la Metodología Estudio de Clase (MEC). *Aletheia* , 362 - 369.

Rojano, C. T. (2006). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología, EFIT y EMAT: Modelos de transformación de las prácticas.* México.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *PRECÁLCULO MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO.* México: Ediciones OVA.

ANEXOS

ANEXO 1

ÍNDICE SINTÉTICO DE CALIDAD DEL CENTRO EDUCATIVO RURAL BOBAL LA PLAYA 2017.

En este anexo se evidencia los resultados arrojados en el Índice Sintético de Calidad (ISCE), el cual define el progreso de cada institución en una escala valorativa de uno a diez a nivel nacional. Con relación al año 2015 el Centro Educativo se ubicó en una escala de 3,61 y en el 2016 en la escala 4,88, demostrando un aumento del 1,27 en el área de matemáticas.

Año	Desempeño	Progreso	Eficiencia	Ambiente	ISCE	MMA
2018						5,26
2017	2,28	1,01	0,83	0,76	4,88	5,03
2016	1,96	0,00	0,95	0,70	3,61	4,86
2015	1,65	1,74	0,66	0,75	4,80	

BÁSICA PRIMARIA

ANEXO 2

POSTER "LABORATORIO DE MATEMÁTICAS".

Este poster que se anexa a continuación se presentó en el Primer encuentro académico Maestría en Ciencias Naturales y Matemáticas como resultado del mejoramiento en las pruebas saber en el año 2014 y 2015, a partir de la implementación de algunas actividades del laboratorio propuesto en el presente trabajo.

ANEXO 3

CONSTANCIA DE PARTICIPACIÓN EN EL PRIMER ENCUENTRO ACADÉMICO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS.

Esta constancia refleja la participación en la ponencia para dar a conocer el laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje para el grado quinto realizado en la Universidad Pontificia Bolivariana, facultad de ingenierías el 14 de agosto de 2017.

CONSTANCIA DE PARTICIPACIÓN

La Universidad Pontificia Bolivariana a través del Centro de Ciencia Básica, hace constar que el señor **Ramiro de Jesús Tobón Tobón,** realizó la ponencia tipo poster "*LABORATORIO DE MATEMÁTICAS PARA EL FORTALECIMIENTO DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE*" para el **Primer Encuentro Académico Maestría en Ciencias Naturales y Matemática** realizado en Medellín el 14 de agosto de 2017.

Dr. Freddy Rafael Pérez
Jefe Centro de Ciencia Básica

Dr. Roberto Carlos Hincapié Reyes
Decano Escuela de Ingenierías