LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN ORIGAMI PARA LA COMPRENSIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE

ERLIN BLANDÓN RIVAS

JOEL DE JESÚS GULFO PACHECO

WILSON MARÍN BARCO

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2016

LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS EN ORIGAMI PARA LA COMPRENSIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE

ERLIN BLANDÓN RIVAS

JOEL DE JESÚS GULFO PACHECO

WILSON MARÍN BARCO

Trabajo de grado para optar el título de Magíster en Ciencias Naturales y Matemática

Asesor

GABRIEL FERNEY VALENCIA CARRASCAL

Magíster en Psicopedagogía

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2016

Nota de aceptación

Firma
Nombre:
Presidente del jurado

Firma
Nombre:
Jurado

Firma
Nombre:
Jurado

Medellín, Junio 22 de 2016

Medellín, Junio 22 de 2016

Erlin Blandón Rivas, Joel de Jesús Gulfo Pacheco y Wilson Marín Barco

"Declaramos que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad" Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

____

Erlin Blandón R.

Wilson Marin B.

“Educar no es fabricar adultos según un modelo sino liberar en cada hombre lo que le impide ser él mismo, permitirle realizarse según su ‘genio’ singular”

(Reboul)

A nuestros seres queridos, por ser el motor que nos impulsa hacia la transformación y búsqueda de la excelencia…

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación representa un gran logro en nuestra formación profesional, académica y personal, durante el desarrollo y ejecución de todo el proceso contamos con el acompañamiento y apoyo de muchas personas, que gracias a su compromiso, conocimiento y asesoría hoy podemos dar fe de la meta alcanzada.

En primera instancia, agradecer al gran maestro de maestros, al Dios todo poderoso "gran arquitecto del universo", por conducir nuestros pasos y hacer de éste propósito una realidad.

A nuestro asesor y director de tesis Gabriel Ferney Valencia, por sus aportes, su experiencia y orientación, para mejorar en este proceso investigativo.

Agradecemos profundamente al rector de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento: Carlos Alberto Betancur, por su aporte en el proceso y por facilitar los espacios para llevar a cabo el desarrollo de esta investigación.

Queremos expresar nuestra gratitud a los cuatro estudiantes, quienes con su participaron voluntaria, constancia y compromiso hicieron posible que éste estudio culminara con éxito.

Finalmente, queremos hacer un reconocimiento a nuestras familias por su paciencia, apoyo y comprensión durante todo este tiempo, para poder cumplir con cada uno de los compromisos adquiridos.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLA

RESUMEN

Actualmente existen diversas dificultades para que los estudiantes desarrollen aprendizajes significativos en el contexto de las matemáticas y para adquirir las competencias básicas que permitan mejorar los niveles de desempeño, según el grado que cursan.

Desde esta perspectiva, la educación matemática se concibe como herramienta fundamental para elevar el nivel intelectual de los individuos; por tal razón, esta investigación busca establecer algunos criterios que contribuyan al fortalecimiento de la enseñanza de la geometría y el álgebra desde los lineamientos curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional, teniendo en cuenta además, el uso de mediadores didácticos para facilitar los proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, en este caso a través de la construcción de los sólidos platónicos en origami. Se analizó la forma de razonar de cuatro estudiantes de quinto grado en cuanto a la comprensión de la fórmula de Euler, de acuerdo a los niveles de razonamiento que propone el modelo geométrico de Van Hiele.

Para el logro de éste propósito, se implementó una metodología cualitativa que permitió el análisis de los sujetos de investigación y se determinó el nivel de comprensión de cada uno de ellos al acercarse al objeto de estudio. Se tuvieron en cuenta instrumentos como la observación, la producción escrita de los estudiantes y una entrevista de carácter socrático con unos descriptores para cada nivel de razonamiento, que facilitaron la obtención de la información.

Palabras clave: álgebra, geometría, origami, fórmula de Euler, sólidos platónicos, niveles de Van Hiele, entrevista de carácter socrático.

ABSTRACT

Currently there are difficulties for students to develop meaningful learning in the context of mathematics and to acquire basic skills that improve performance levels, depending on the degree in which they are.

From this perspective, mathematics education is conceived as a fundamental tool to raise the intellectual level of the individuals; for this reason, this research seeks to establish some criteria that contribute to the strengthening of the teaching of geometry and algebra from the curricular guidelines issued by the Ministry of national education, taking into account also the use of training mediators to facilitate the process of learning and teaching for students, in this case through the construction of the Platonic solids in origami. Discussed the form of reasoning of four fifth grade students in the understanding of Euler's formula, according to levels of reasoning proposed by the geometric model of Van Hiele.

For achievement of this purpose, we implemented a qualitative methodology that allowed the analysis of the subjects of research and determined the level of understanding of each of them to approach the object of study. Instruments such as observation, written production of students and an interview of Socratic character were

taken into account with some descriptors for each level of reasoning, which facilitated obtaining the information.

Keywords: algebra, geometry, origami, Euler's formula, platonic solids, Van Hiele, Socratic character interview.

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido complejo dado la importancia de esta en el desarrollo de las sociedades. La realidad del mundo contemporáneo exige que la formación en esta área del conocimiento tenga mayores niveles de calidad tal como lo muestran las evaluaciones objetivas realizadas a los estudiantes como las Pruebas Saber, Pisa y las de ingreso a las universidades. Pellerey (1991), citado por Kilpatrick, Gómez y Rico (1998, p. 7) considera que “los objetivos y los métodos de la enseñanza de las matemáticas se han adaptado a las nuevas demandas de la sociedad y se han acomodado a una población estudiantil cada vez mayor”. Lo mismo ha ocurrido en un país tan diverso como Colombia donde el contexto social, los ritmos de aprendizaje y las expectativas de los jóvenes juegan un papel fundamental.

En este sentido, y para el caso de la enseñanza de la geometría y del álgebra, el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares para el área de las matemáticas, presenta una propuesta pedagógica desde la exploración de “los sistemas concretos que utilizan los niños” (MEN,1998, p. 6), como punto de partida hacia la construcción de sistemas en donde los estudiantes puedan elaborar conceptos apropiados y desarrollen sistemas simbólicos de mayor complejidad, de manera que la experiencia educativa le resulte cotidiana y de fácil aprehensión. De este modo se observa entonces que no se trata solo de los contenidos a aprender o enseñar sino de la forma en que estos se llevan a la práctica de aula, por medio de la lúdica y la didáctica.

Este proyecto profundiza sobre nuevas formas de enseñar la geometría y el álgebra, partiendo del uso de materiales concretos, para la obtención de saberes específicos que deben adquirir los estudiantes, dichos conocimientos desde la disciplina de las matemáticas “considerado por algunos como el conocimiento cotidiano que tiene que ver con los números y las operaciones, y por otros, como el conocimiento matemático elemental que resulta de abordar superficialmente algunos elementos mínimos de la matemática disciplinar” (MEN, 1998, p. 9)

Cabe señalar que, tanto la geometría como el álgebra son objeto de estudio del bachillerato; sin embargo, el pensamiento espacial es esencial en los primeros años de edad de los niños y niñas, puesto que permite adquirir habilidades para interpretar el espacio a través de las formas y tamaños que se perciben en el contexto.

En este orden de ideas, se ha considerado importante utilizar el origami como recurso didáctico para potenciar el desarrollo del pensamiento espacial y el pensamiento variacional, este último como sistema que permite describir fenómenos de variación y cambio, el cual se pretende lograr a través de la construcción y comparación de los sólidos platónicos por medio del doblado del papel, para llegar a una aproximación de la fórmula de Euler con estudiantes de quinto grado.

Dentro de este contexto, el uso de material concreto, de acuerdo con García (2003) permite una mayor aprehensión de conceptos y un acercamiento a la realidad, además de promover el desarrollo de objetivos transversales con otras áreas del conocimiento y de formación personal.

Al respecto conviene afirmar que el maestro contemporáneo afronta un gran reto frente a la formación de individuos críticos y reflexivos, propiciando espacios de aprendizaje que le permitan al estudiante la apropiación de saberes específicos para ponerlos en práctica en el momento en que éste los requiera.

Para tal efecto, este proyecto de investigación busca fortalecer esos conocimientos que requieren los estudiantes de educación básica, sobre conceptos geométricos y algebraicos que pueden obtener por medio de la elaboración de los sólidos platónicos, especialmente los estudiantes de quinto grado, haciendo uso de la manipulación de material concreto y a través del aprendizaje significativo.

CAPÍTULO 1

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Las prácticas pedagógicas actuales exigen de maestros dinámicos y comprometidos con los saberes adquiridos por los estudiantes. Desde esta visión, la geometría entra a formar parte de ese conocimiento que en muchas ocasiones no tiene mayor profundización y donde solo se trabajan algunos aspectos sobre figuras y símbolos. Los lineamientos curriculares planteados por el Ministerio de Educación Nacional buscan precisamente fortalecer éstas construcciones del aprendizaje teniendo en cuenta las características y ritmos de cada individuo.

El pensamiento espacial, de acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional, debe contemplar la forma como actúa el individuo "en todas sus dimensiones y relaciones espaciales" (MEN, 1998, p.61). En este contexto no se ha dado la importancia al trabajo desarrollado con los estudiantes para lograr dicho pensamiento, que les permita hacer representaciones, conjeturas y comparaciones de su entorno y del espacio en el cual se desenvuelven.

Cabe mencionar, además, que desde la experiencia adquirida como docentes se ha podido evidenciar, el poco uso que se le da a los recursos y materiales didácticos para construir conocimientos con los estudiantes de manera significativa y duradera.

Partiendo de esta visión y teniendo presente la importancia de la utilización de diferentes estrategias pedagógicas, como el uso de mediadores didácticos para facilitar el aprendizaje, se dio la necesidad de realizar un estudio sobre las prácticas educativas actuales llevadas a cabo con los estudiantes de quinto grado, en donde se han podido observar algunas dificultades para comprender conceptos relacionados con figuras tridimensionales como los sólidos, al igual que los procedimientos geométricos, descomposición de superficies, cálculos y estimaciones de áreas de superficies, entre los temas que se deben desarrollar para alcanzar las competencias básicas en dicho grado.

Para el desarrollo de las temáticas en el grado quinto, es importante tener en cuenta la implementación de los diferentes materiales didácticos, pero en nuestro caso, el problema radica en la construcción de conceptos y abstracciones espaciales y algebraicas generadas a partir de la construcción de los cinco sólidos platónicos por medio del doblado del papel y pitillos de gaseosa, para la comprensión de la fórmula de Euler, como el objeto matemático que caracterizará esta investigación, y en cuyo caso, se abordará desde una aproximación a los conceptos algebraicos.

La fórmula de Euler deberá ser generalizada por los estudiantes y descubrir que se puede aplicar para todos los sólidos, además se podrán trabajar características, propiedades y conceptos geométricos, tales como: vértice, cara, arista, ángulo, poliedro, figura plana, diagonal, figura bidimensional, figura tridimensional, polígono regular, base, altura, entre otros conceptos que se desarrollan durante la elaboración y comparación de los sólidos platónicos con dos tipos de material concreto (pitillos de gaseosa y doblado del papel).

Con respecto a la parte algebraica, según lo afirman Villarroel y Sgreccia (2011): “(…) en la actualidad se conoce que existen muchos materiales que pueden emplearse en el trabajo de aula. Algunos de ellos han sido diseñados específicamente para estudiar geometría y otros, pueden ser adaptados para utilizarse en su enseñanza” (p. 73).

Al respecto, se observa que en las prácticas pedagógicas no utilizan, ni aprovechan estos materiales como estrategia para desarrollar sus clases, por un lado, esto sucede porque no se conocen y por otro, el desconocimiento de las aplicaciones que pueden tener, además, del tiempo que hay que emplear mientras se aprende a utilizarlos.

Es evidente la importancia de la geometría dentro del pensamiento espacial, lo mismo que el pensamiento variacional en el contexto matemático y que los docentes contribuyan a la construcción de conocimientos en los estudiantes desde edades tempranas y al fortalecimiento del pensamiento lógico con actividades enriquecedoras, lúdicas, creativas, placenteras, que den verdadero sentido a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, uno de los mayores problemas que se perciben en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, para nuestro caso, el de la geometría y del álgebra, es que no hay articulación entre los conceptos y procedimientos. En este sentido, las matemáticas deben ser enseñadas en todas sus dimensiones para proveerle al estudiante herramientas concretas de ayuda conducentes a un acercamiento real de su entono.

Es necesario resaltar, que en la institución donde se desarrolla la investigación, no existe evidencia significativa de trabajos que demuestren el desarrollo de la técnica del origami para la construcción y elaboración de conceptos geométricos y especialmente, algebraicos.

De igual manera, esta propuesta de investigación busca responder a dicha problemática, a partir del siguiente interrogante ¿Cómo razonan los estudiantes de quinto grado, cuando se aproximan a la comprensión de la fórmula de Euler, a través de la construcción de los sólidos platónicos por medio del doblado del papel (origami) en el contexto de Van Hiele?

Para tal fin, el propósito de esta investigación, claramente expuesta en la pregunta y el objeto matemático, es realizar una aproximación de la fórmula de Euler desde un enfoque cualitativo, a través de procedimientos algebraicos y geométricos, por medio de la construcción y comparación de los sólidos platónicos con material concreto en estudiantes de quinto grado, siguiendo los lineamientos del modelo teórico de Van Hiele que describe los niveles de razonamiento del individuo.

1.2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1 Objetivo General.

Analizar el proceso razonamiento de los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento del municipio de Carepa

(Antioquia), a través de la construcción de los sólidos platónicos en origami y mediante unos descriptores para los niveles I, II y III, para la compresión de la fórmula de Euler en el contexto de Van Hiele.

1.2.2 Objetivos Específicos.

Diseñar un guion entrevista de carácter socrático, fundamentado en la construcción de los sólidos platónicos, por medio de la técnica del origami.

Definir los descriptores de razonamiento de Van Hiele, con el diseño de actividades para los niveles I, II y III.

Elaborar una guía metodológica sobre conceptos geométricos y algebraicos por medio de la construcción y comparación de los sólidos platónicos en origami y pitillos de gaseosa.

1.3. IMPACTO ESPERADO

Al finalizar esta propuesta de investigación, se espera poder contribuir al fortalecimiento de las prácticas educativas no sólo a nivel institucional, sino que además pueda trascender a otros espacios de índole local, regional y nacional.

1. Se multiplicarán los resultados obtenidos, como referente y como experiencia significativa de apoyo en el aula para un trabajo transversal de las matemáticas, particularmente desde la geometría y el álgebra.
2. Este trabajo de investigación permitirá a otros docentes el desarrollo de estrategias para el uso del origami en la enseñanza de la geometría y del álgebra como mediador didáctico que fortalezca los planes de estudio de las instituciones educativas y la reactivación de la mesa de trabajo de matemáticas en el municipio de Carepa.
3. Contribución al mejoramiento de la calidad de la educación, para la formación de personas con carácter crítico y reflexivo, para que participen responsablemente en la toma de decisiones en escenarios de tipo social, político, económico, religioso, entre otros.
4. Generación de espacios de interacción con otros municipios de la región y grupos de investigación para compartir experiencias de trabajos realizados en el campo de las matemáticas y de la geometría.
5. Se espera que los estudiantes construyan sus propios conceptos geométricos y algebraicos por medio del trabajo realizado con el origami y que logren una aproximación del pensamiento variacional a través de la comprensión de la fórmula de Euler.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Esta investigación desarrollada en el campo educativo y en particular, desde el área de la matemática resalta la importancia de algunos elementos que fueron tomados como referente para generar aprendizajes significativos en los estudiantes de quinto grado; además, se utilizaron estrategias de intervención encaminadas hacia la comprensión de conceptos y contenidos en el contexto geométrico y algebraico.

Entre los elementos y estrategias se destacan: el modelo educativo de Van Hiele a través de los niveles de razonamiento y los respectivos descriptores de nivel para la comprensión de la fórmula de Euler, por medio de la construcción de los sólidos platónicos con el uso de material concreto, como pitillos de gaseosa y del doblado del papel; este último, también conocido con el nombre de origami, el concepto de sólidos platónicos y el teorema de Euler, desde el método cualitativo y el diseño de las actividades escritas cimentadas y articuladas con la entrevista de carácter socrática.

1.4.1 ¿Por qué desarrollar la propuesta de investigación desde el modelo educativo de Van Hiele?

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), el modelo educativo de Van Hiele es la propuesta con mayor aprobación en muchos países, en términos del contexto geométrico en la escuela, partiendo de los niveles iniciales de razonamiento hasta el de mayor rigurosidad, en donde los estudiantes alcanzan un razonamiento formal, aunque este último es considerado difícil de conseguir en la escuela.

El modelo educativo de los esposos Van Hiele, que tiene sus orígenes hacia el año 57, sigue vigente y es utilizado por muchos investigadores para desarrollar currículos en el campo geométrico; retoma además, los elementos principales para aplicar actividades con el fin de mejorar los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de los estudiante de manera gradual. Según lo describe el modelo educativo, el aprendizaje de la geometría se logra con unos niveles de razonamiento, en donde no tiene relevancia la edad, pero si es importante el tránsito entre un nivel y otro; cabe anotar además, que para poder pasar de un nivel a otro es imprescindible haber alcanzado el nivel inmediatamente anterior. Cuando una persona logra un nivel superior en su forma de razonar, es posible que aplique estos conocimientos adquiridos en otros objetos matemáticos con un mejor domino de los mismos.

La estructura del modelo educativo de Van Hiele propone cinco niveles de razonamiento así: el primer nivel es el de reconocimiento visual, considerado como el más simple, en donde el estudiante percibe los objetos como un todo, sin establecer relaciones entre unos y otros, y mucho menos sus componentes y propiedades.

En el segundo nivel o de análisis, el estudiante describe objetos al igual que sus propiedades de manera informal, pero no es capaz de establecer la relación entre figuras y entre propiedades; en el tercer nivel o de clasificación, el estudiante ya puede efectuar clasificaciones lógicas formalmente, lo cual indica el inicio del razonamiento matemático, pudiendo establecer relaciones entre los objetos y sus propiedades; en el cuarto nivel o de deducción formal, se pueden realizar demostraciones lógicas y la formalización de axiomas matemáticos para establecer diferentes formas de mostrar el resultado de una situación matemática y finalmente, el quinto nivel o de rigor, en donde es posible que el individuo adquiera un razonamiento abstracto en cuanto al pensamiento espacial, este nivel es el de mayor complejidad y solo se alcanza en el contexto universitario.

1.4.2 ¿Por qué el interés en fundamentar el trabajo investigativo en la comprensión del teorema de Euler?

Como cuerpo epistemológico las matemáticas, esa ciencia abstracta, esa asignatura que quizás es vista como complicada, esa materia a veces incomprensible, esconde auténticas y genuinas maravillas que algunos han olvidado y otros ni siquiera han conocido (Morales, 2010). Una de esas maravillas a la que hace alusión el autor de esta frase es precisamente la fórmula de Leonhard Euler, objeto de estudio matemático tenido en cuenta en esta investigación. Otros elementos no menos importantes que se relacionan con esta fórmula, son los trabajos desarrollados para lograr una mejor comprensión del pensamiento espacial, por medio de la construcción de los sólidos platónicos con dos tipos de material concreto: pitillos de gaseosa y el doblado del papel, para que los estudiantes establezcan comparaciones y encuentren relaciones entre estos cinco cuerpos geométricos.

El uso de materiales concretos es esencial para la enseñanza de la geometría, dado que el pensamiento espacial está fundamentado por las imágenes, de ahí la importancia de la manipulación y observación de los objetos a través de actividades que permitan la apropiación de los temas desarrollados a partir de definiciones y conceptos básicos. De la construcción de los cinco sólidos mencionados, se deriva un buen número de conceptos y propiedades que cumplen las figuras geométricas tales como: punto, recta, semirrecta, ángulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, diagonales, congruencia, semejanza, triángulo, cuadrado, pentágono, caras, vértices, aristas, ángulo diédrico, poliedro, sólido regular y teoremas como: por dos puntos pasa una única recta, son algunos de los tantos conceptos que se pueden desarrollar con este trabajo.

El último aspecto a resaltar tiene que ver con el pensamiento algebraico, en donde se pretende que el estudiante encuentre la relación de los cinco sólidos platónicos que se cumple no solo para estos cuerpos, sino para todo tipo de sólido convexo. Esta característica común descubierta por uno de los matemáticos de mayor reconocimiento a través de la historia, hace que la fórmula de Euler califique como "maravilla matemática", esta fórmula es utilizada para explicar a través de demostraciones algebraicas la existencia solo de cinco sólidos regulares.

Los conceptos que se relacionan con la fórmula de Euler se encuentran de manera implícita en los estándares básicos de competencias en matemáticas desde los primeros grados de escolaridad hasta llegar a la básica y la media, incluye pensamientos como el numérico, espacial, métrico, aleatorio y el variacional (MEN, 2003). No obstante, las competencias para reconocer, establecer diferencias y relaciones geométricas de algunos teoremas básicos, sólo se desarrollan en los grados octavo y noveno de la educación básica.

Desde esta perspectiva, el grupo investigador ha tenido en cuenta la implementación de estos conceptos en el grado quinto, para potenciar el desarrollo de habilidades desde los primeros años de escolaridad, para que los estudiantes adquieran experiencia con algunas formas de objetos tridimensionales y por ende, poder describir y tomar posesión del espacio que nos rodea a través de los objetos y formas geométricas de una manera más razonada, práctica y sobre todo, con fundamentos reales y concretos.

A groso modo, lo que se pretende es que el estudiante de quinto grado pueda adquirir ciertas habilidades que le permita, no solo desarrollar y potenciar los diferentes tipos de pensamiento, sino que además, pueda interrelacionar los conceptos geométricos con los aritméticos y algebraicos; que en esencia, le van a permitir una mayor comprensión de los temas abordados en los grados siguientes, en donde los niveles de exigencia irán aumentando gradualmente.

Los descriptores construidos en la entrevista socrática para los niveles I, II y III, de razonamiento de Van Hiele, en torno a la comprensión de la fórmula de Euler, deben propiciar espacios de reflexión desde el contexto educativo, dada la importancia de poder conocer y reconocer el nivel en el que se encuentra un estudiante y de las actividades que se deben planear para que pueda pasar de un determinado nivel a otro. El uso del lenguaje utilizado por los estudiantes, tiene mucha incidencia en las respuestas suministradas a cada uno de los interrogantes que se le efectúen, así como la manera de establecer comparaciones y relaciones por medio de la observación y manipulación de los objetos construidos con sus propias manos para consolidar el objeto matemático a través de procedimientos geométricos y algebraicos.

1.5. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

El problema de investigación que enmarca este estudio hace mención al uso de mediadores didácticos para la enseñanza de las matemáticas, particularmente desde los pensamientos geométrico y variacional. Por tal motivo, se da inicio al rastreo de la utilización del origami en los diferentes campos de la educación, evidenciando su aplicación, características y beneficios que ofrece a las personas que lo han implementado.

De igual forma, se realiza un análisis de los principales proyectos de investigación según la teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría marco diseñado por los Van Hiele, así como los trabajos relacionados con el teorema de Leonhard Euler que se aplica a los sólidos platónicos. Es importante mencionar que la información suministrada en esta búsqueda bibliográfica que se presentará a continuación, contiene algunas citas textuales y también producción por parte de los autores.

Las siguientes investigaciones corresponden a la exploración bibliográfica realizada sobre el uso del origami como mediador didáctico en el nivel de educación básica, especialmente desde el contexto matemático y geométrico, para potenciar su enseñanza desde la construcción de los sólidos platónicos, cabe señalar también, que se encontraron pocas evidencias sobre el uso de este mediador para el desarrollo de contenidos algebraicos, como la generalización del teorema de Leonard Euler.

El primer trabajo consultado hace referencia al uso de tres tipos de material didáctico en la solución de una situación problema con objetos tridimensionales, se da un valor relevante al desarrollo del pensamiento espacial en el contexto escolar, ya que permite a los estudiantes examinar y manipular los materiales como ayuda en los proceso de aprendizaje, a obtener conocimientos más duraderos y la destreza para resolver situaciones con mayores niveles de exigencia (Amador, 2013); de este modo el estudiante pasa de ser un agente pasivo, que no sólo recibe información, sino que la procesa y la codifica para dar sentido a su propio nivel de aprendizaje

De igual manera, Mor (2012) resalta la importancia de la papiroflexia como recurso didáctico en la formación de personas adultas. Este autor desde su propuesta proporciona algunos conocimientos de los elementos básicos desde la geometría, del plano y del espacio, en donde se pueden desarrollar conceptos de regularidad en los polígonos y en los poliedros.

Se destaca el uso del doblado del papel como herramienta para motivar al estudiante en el logro de competencias relacionadas con la geometría. Se desarrolla un trabajo con estudiantes adultos, tomando varios elementos de la geometría a través del origami para construir los cinco sólidos platónicos, relacionando además este arte con otros conocimientos.

Siguiendo esta misma tendencia, Valencia (2012) señala en su trabajo de investigación la necesidad de hacer una reflexión sobre la práctica de la enseñanza de la geometría y la intención de incluir el origami en el nivel de educación básica. El objeto central de esta tesis consiste en orientar al estudiante sobre el discurso realizado por el maestro sobre los conceptos de la geometría a través de la construcción de material concreto que permite, además, la re significación entre la teoría y la práctica, entre lo abstracto y lo concreto.

De esta manera, se hace una invitación para que los docentes de matemáticas incorporen en su práctica educativa, el uso de materiales didácticos para enseñar a sus estudiantes de una manera diferente, que contribuya al logro de competencias básicas de mayor comprensión.

Por su parte, Zapata y Cano (2008) desde su propuesta hacen una crítica sobre la enseñanza tradicional que se desarrolla en las instituciones de manera unidireccional, afirman que la geometría se enseña desde "lo bidimensional, sin considerar que las representaciones bidimensionales se hacen precisamente de objetos tridimensionales del mundo físico" (p. 1).

De acuerdo con los lineamientos curriculares en el área de las matemáticas, hoy en día se requiere que en la escuela se enseñe al estudiante una mejor forma de representar el espacio en todas sus posibles dimensiones significativamente (Zapata y Cano, 2008). Esto es posible a través de la elaboración de los sólidos como los poliedros, ya que éstos permiten ser construidos, visualizados y comprendidos, como procesos que intervienen en el razonamiento del espacio de manera vivencial.

La mayor parte de las investigaciones consultadas coinciden en afirmar que el uso del origami contribuye a mejorar la concentración de los estudiantes y la comprensión de conceptos geométricos, que difícilmente se podría obtener de otra forma que no sea a través de la manipulación de elementos concretos. Ahora bien, Sousa y Albuquerque (2012) también diseñaron una propuesta para mejorar las prácticas educativas escolares, en especial desde la geometría, que consiste en suministrar a los docentes una herramienta didáctica para su estudio, particularmente de los polígonos.

De manera puntual, estos autores sostienen que la enseñanza de la geometría debe ser fundamental en el proceso de aprendizaje de conceptos del espacio dimensional en el cual interactúan los estudiantes, para ello el uso del origami es considerado como una buena iniciativa metodológica. Estos autores también aseguran que los resultados obtenidos con el uso del origami, permiten un aprendizaje provisto de una buena dosis de motivación para el desarrollo de procesos con contenidos geométricos, que se deben aprovechar los elementos y materiales de uso concreto para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos.

De otro lado, Blanco y Otero (2006) elaboraron una breve reseña histórica sobre el origen de la papiroflexia, de la importancia y relación que tiene con diferentes asignaturas, en correspondencia con la matemática y especialmente, con la geometría; también se mencionan algunas personas que han dedicado parte de su tiempo al estudio de este arte japonés, como físicos, matemáticos y artistas, quienes han utilizado la teoría contenida en la papiroflexia para desarrollar trabajos de investigación y de aplicación práctica.

Esta técnica del doblado del papel, como ya se ha indicado a lo largo de esta búsqueda bibliográfica provee a los docentes herramientas didácticas que permite el estudio de propiedades, el análisis, la observación y extraer conclusiones y juicios por medio de la construcción de figuras con papel, provistos de estética y belleza, concentración, memoria, atención, además de promover el trabajo cooperativo.

Por su parte (Royo, 2002) también hace alusión a la papiroflexia, a su historia, a la relación con las matemáticas, a la construcción de los poliedros y su relación con los sólidos más famosos, que son los platónicos con cada uno de los cuatro elementos que existen en el universo, además de la importancia que le han asignado muchos de los matemáticos reconocidos a través de la historia y que también han efectuado aportes valiosos a la geometría. En el trabajo elaborado por Royo, también se mencionan varios tipos de módulos que se utilizan para la construcción de estos sólidos, al igual que algunos teoremas descubiertos por matemáticos que se han dedicado a su estudio.

Se hace también una invitación para que se incorpore la papiroflexia en la enseñanza de las matemáticas debido a las conexiones con esta disciplina, para rescatar la riqueza cultural y el valor pedagógico que encierra este arte de origen japonés. Adicionalmente, muchos autores de los trabajos consultados coinciden en afirmar que, las actividades de construcción de figuras en tercera dimensión, como los cuerpos platónicos por medio del origami, que conducen a la observación, el análisis y la discusión, generan una buena oportunidad para mejorar las prácticas educativas; por lo tanto, estas deben ser aprovechadas por los docentes en el contexto escolar, para debatir los procedimientos resultantes y consolidar el aprendizaje de una manera más práctica y eficaz.

Ahora bien, es importante considerar algunas experiencias de aula que han sido publicadas por autores como: Amaya y Gulfo (2009) los cuales utilizaron el origami, para incorporar el trabajo con funciones cuadráticas con jóvenes de la media académica, sostienen además, que el desarrollo de actividades con poliedros construidos por medio del doblado del papel, surge como una opción para el uso de otros sistemas de representación, que permite hacer comparaciones y relaciones entre "los sistemas tabular, gráfico, icónico y algebraico" (p. 526), de esta forma, las representaciones mencionadas obtienen el valor y el sentido que requieren, en una ambiente de trabajo colaborativo y enriquecedor.

El desarrollo de este mediador en el aula de clase también tiene efectos positivos en niños con déficit de atención, así lo demuestran Buitrón y Echeverría (2012) en la guia de intervención aplicada en niños y niñas de nueve años de edad, para observar los efectos que produce el trabajo con este material didáctico, con niños y niñas que presentan dificultad para mantener su atención y concentración para desarrollar y cumplir con las actividades asignadas en el aula de clase.

De modo similar, algunos autores coinciden al afirmar que esta técnica del doblado del papel permite el desarrollo de "(…) habilidades y capacidades como la motricidad fina, atención, concentración, memoría, imaginación, creatividad, paciencia, entre otras" (Buitrón y Echeverría, 2012, p. 7). Estos argumentos demuestran que este arte japonés ha sido usado en diversos campos de la ciencia, entre ellos, el área de la pedagogía y la psicopedagogía, de tal modo, que su aplicación ha sido bastante amplia, lo cual indica que cualquier persona puede trabajar con él, obtener conocimientos y ayuda para mejorar la atención y la concentración.

Otra invitación a la reflexión sobre el papel de la geometría dentro del currículo es la que hacen los autores: Cañadas, et al.,(2003) en su propuesta "Geometría con papel" en la cual se evidencia una serie de argumentos y sugerencias didácticas en torno al uso del doblado del papel, se mencionan también las ventajas de este mediador didáctico para trabajar en la clase de matemáticas, provisto de características para la apropiación de contenidos, que se pueden lograr si los docentes le dan la importancia a la función que cumple la geometría dentro del contexto escolar, propiciando actividades que favorezcan el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes.

Hay que reconocer, que a través de los mediadores didácticos es posible mejorar, no solo la práctica pedagógica ejercida por los docentes de matemáticas, sino también el logro de competencias básicas que deben alcanzar nuestros estudiantes, que hasta el momento ha generado controversia con respecto a los bajos resultados evidenciados en las pruebas que se aplican en nuestro país como son las pruebas ICFES, pruebas SABER y pruebas PISA.

Sin lugar a dudas, el origami no solo se puede llevar a cabo con niños y niñas de temprana edad, este mediador también puede ser utilizado por los docentes para desarrollar actividades con estudiantes de cualquier grado y nivel de educación escolar, los resultados obtenidos por quienes lo han implementado dan cuenta de ello.

Siguiendo el mismo propósito para desarrollar habilidades con estudiantes universitarios, el artículo elaborado por Martínez (2009) aborda la necesidad de mejorar la calidad de la educación de las instituciones educativas, por lo cual la Corporación Universitaria Minuto de Dios plantea una prueba piloto para la adquisición de habilidades matemáticas para los estudiantes de ingeniería "(...) fundamentada en el uso de la papiroflexia – origami, como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría y el dibujo bidimensional" (p. 80). Los estudiantes que participaron de esta experiencia mostraron buenos resultados y habilidades durante el desarrollo de las actividades.

Todo lo dicho hasta ahora, explica porque se debe implementar el uso de mediadores didácticos en el aula de clase, particularmente, para nuestro caso, el origami, para motivar a los estudiantes con estrategias novedosas, con contenidos más dinámicos y materiales concretos de fácil uso y acceso, que propendan por la excelencia académica de los estudiantes de nuestro país.

Sin embargo, conviene afirmar que el origami también se puede utilizar como técnica para mejorar destrezas mentales en niños que presentan retardo mental, así lo demuestran algunas personas que llevaron a cabo un estudio sobre la técnica del origami para el desarrollo de habilidades cognitivas en niños con discapacidad mental (Briceño, et al., 2013).

Este estudio mostró en sus resultados que la técnica del origami implementada en los niños que requieren educación especial, permite mejorar el desarrollo de sus capacidades, entre ellas: la dificultad para participar e integrarse a actividades de todo tipo, dada su condición de discapacidad cognitiva. El uso del doblado del papel ayuda a mejorar las dificultades que poseen estos niños con discapacidad mental, además contribuye a fortalecer otras áreas comprometidas y que requieren de un adecuado tratamiento, un claro ejemplo puede ser al área psicológica o la psicomotriz.

El campo de la psicología también hace su contribución al hablar de los méritos de este arte, pensado como un buen dinamizador para estos niños y niñas con necesidades educativas especiales. A través del rastreo sobre la implementación del origami como mediador didáctico en las aulas de clases, también se pudo evidenciar una serie de publicaciones llevadas a cabo en revistas de talla internacional como la Journal de Matemáticas en donde autores como Wares (2013) realiza algunas notas de aula con el propósito de proporcionar ejemplos de cómo el origami puede ser utilizado para explorar la importancia de la matemática y de conceptos geométricos.

El mismo Wares (2013) presenta un estudio en el cual se muestra el efecto de este mediador en la enseñanza de los ácidos nucleicos con estudiantes que tienen problemas para entender, al mismo tiempo realiza un trabajo cuyo propósito es ilustrar la aplicación de la de las inteligencias múltiples de Howard Gardner en las clases de matemáticas en el contexto de un proyecto de origami, para ayudar a los estudiantes a entenderlas y apreciarlas.

De acuerdo con todo lo dicho hasta el momento, es relevante mencionar que este antiguo arte de la papiroflexia ha sido usado por muchas personas en diversos campos de la ciencia y de la educación, para fortalecer la construcción de conocimientos y procesos específicos, por ejemplo en el caso de las matemáticas, los docentes ofrecen a sus estudiantes otras opciones para consolidar la comprensión de diversos conceptos, de tal manera, que se puedan obtener mejores resultados en el proceso de aprendizaje.

El pensamiento espacial es fundamental desde los primeros años de edad de los estudiantes, por este motivo se considera que se deben implementar programas innovadores para niños de primaria que incluyan el doblado del papel, permitiendo que este elemento ayude a promover y fortalecer este pensamiento. Desde esta perspectiva, los hermanos Kim (2013) sostienen que es posible aumentar el interés de los estudiantes en el área de matemáticas y mejorar sus habilidades en la resolución de problemas, si se realiza un adecuado entretenimiento desde la praxis educativa por medio de la aplicación del origami dentro del contexto geométrico.

No cabe duda que, el poder implementar la técnica del origami en el área de la geometría ayuda a desarrollar el pensamiento espacial de los estudiantes, al igual que la adquisición de habilidades y destrezas, no solo en el campo artístico y manual, sino también en lo que a conocimiento se refiere. La exploración de formas, diseños, texturas, colores, diagramas, conceptos y un sinnúmero de elementos, conducen al estudiante a la comprensión del entorno físico a través de la manipulación de materiales concretos, los trabajos que se han desarrollado con personas de todas las edades y de diferentes niveles de formación académica y profesional dan cuenta de ello.

Cabe destacar la importancia que tiene la geometría para simbolizar y solucionar situaciones problema en otras áreas del conocimiento, donde las matemáticas entran a hacer parte fundamental en los procesos de contextualización del estudiante, para que aprenda de una forma más armoniosa y sencilla con base en situaciones concretas y no imaginarias como se ha venido haciendo a través de la enseñanza tradicional.

La aplicacion de esta herramienta didáctica como mediador en el área de la matemática, específicamente desde el pensamiento variacional, presenta muy pocos antecedentes. Por esta razón el interés de realizar un trabajo que permita su expansión y dar a conocer algunas cualidades de sus aplicaciones y de los beneficios que puede aportar a los niños y niñas en relación con el aprendizaje de la matemática y de la geometría.

Estas consideraciones deben conducir al docente de matemáticas a fortalecer la creatividad y la imaginación, la adquisición de conceptos geométricos y algebraicos que se abordan y se desarrollan en las prácticas de aula cotidianas, para poder obtener un mejor desempeño, que sea fructífero y que produzca resultados que le aporten a las práctcas pedagógicas que tanto deben mejorar en el país, con el esfuerzo y compromiso de quienes tienen la responsabilidad de formar integralmente a los hombres y mujeres que requiere la sociedad actual.

Para dar continuidad a este proceso de búsqueda de información sobre antecedentes que permitan referenciar este trabajo de investigación, es necesario hablar también sobre los niveles de razonamiento de los estudiantes y sobre el interés que han tenido algunas personas por realizar estudios al respecto, sobre todo desde las matemáticas y la geometría. El modelo geométrico de Van Hiele permite describir estos procesos de razonamiento de forma apropiada, aunque son pocos los trabajos que proporcionan información sobre actividades que permitan a un estudiante pasar de un nivel a otro.

No obstante, conviene hablar de tres proyectos que fueron importantes en su momento y que le dieron a este modelo la credibilidad suficiente para los trabajos de investigación que se han llevado a cabo hasta nuestros días, en particular, los referidos al campo de la geometría. De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) los proyectos que se destacaron en Estados Unidos entre los años 1979 y 1982, corresponden a: los proyectos de Brooklyn (Fuys, Geddes, Tischler, 1988), el proyecto de Chicago (Usiskin, 1982) y el proyecto de Oregón (Burger y Shaughnessy, 1986 y 1990)

El proyecto Chicago: "*Van Hiele levels and achievement in secundary school geometry*" desarrollado por Usiskin (1982) cuyo objetivo principal consistió en "probar la capacidad de la teoría de Van Hiele para describir y predecir el rendimiento de los estudiantes de la geometría en la escuela secundaria" (p. 8)

Este proyecto arrojó los siguientes resultados:

1. No fue posible identificar el quinto nivel de razonamiento, que de acuerdo con Van Hiele, los niveles que preceden al IV, son casi imposibles de descubrir.
2. Se logra identificar la propiedad "secuencia fija" de los niveles, que indica lo siguiente: un estudiante no puede estar en un determinado nivel de razonamiento, sin antes haber pasado por el nivel anterior, por tal razón este proceso es secuencial.
3. La investigación considera que: "Decisiones arbitrarias respecto al número de respuestas correctas necesarias para obtener un nivel, pueden afectar al nivel asignado a muchos estudiantes" (Usiskin, 1982, p. 80)
4. Los niveles de razonamientos resultan ser "un buen predictor de los resultados actuales en geometría y un razonable buen predictor de resultados posteriores" (Usiskin, 1982, p 89.)

Seguidamente, el **Proyecto Oregon**: "Assessing children's intellectual growth in geometry". Orientado por William Burger, cuyo propósito consistió, en dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. "¿Son los niveles de Van Hiele útiles para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes en las tareas de geometría?;
2. ¿Pueden los niveles ser caracterizados operacionalmente por la conducta de los estudiantes?;
3. ¿Puede un procedimiento de entrevista ser desarrollado para revelar los niveles predominantes en el razonamiento en una específica tarea de geometría?" (Burger y Shaughnessy, 1986)

Las respuestas a estas preguntas fueron favorables para la investigación, además se consideraron otros resultados que mencionaremos de la siguiente manera:

1. Los autores resaltaron la importancia de utilizar la entrevista escrita y el formulario de análisis como instrumentos apropiados, para identificar los niveles de razonamiento.
2. Burger y Shaughnessy (1986) coincidieron al aseverar que "los niveles aparentan ser estructuras complejas envolviendo el desarrollo de conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchos ambientes de tareas", igualmente sostienen que: "la oscilación entre niveles de razonamiento pre-encontrados en un estudiante, presumiblemente entre un período de transición entre un nivel y el siguiente, indica que los niveles son más bien dinámicos que estáticos, como teorizó Van Hiele" (p. 27).

El Proyecto Brooklyn: “Geometric thinking among adolescents in inner city schools” fue un trabajo de investigación ejecutado en Brooklyn College y estuvo a cargo de Davis Fuys y Dorothy Geddes. Se fundamentó en cuatro tareas que según Zapata y Sucerquia (2009), describen a continuación:

1. Se tradujo del idioma alemán al inglés, la versión de los primeros trabajos realizados por los van Hiele y se generó un documento más detallado que refería la versión conductista de los niveles.
2. Se produjeron tres módulos de evaluación-instrucción para ser usados con individuos en la entrevista clínica.
3. Se realizaron entrevistas con estudiantes que participaron en la investigación.
4. Se efectuó la valoración del material geométrico para analizar los niveles de razonamiento, en tres series textuales, es decir en libros utilizados por los estudiantes en las escuelas de Estados Unidos.

Desde otro punto de vista, conviene mencionar los resultados más destacados de este proyecto de investigación, entre los que se encuentran:

a) El cuarto nivel de razonamiento se puede caracterizar de manera operacional por la conducta del individuo y admite hacer descripciones en dichos niveles a partir de actividades geométricas.
b) Es posible la existencia de periodos transitorios entre los niveles, lo cual indica, que un estudiante puede cambiar entre uno y otro nivel de razonamiento.

c) Burger y Shaughnessy (1986), citado por Jaramillo (2003) sostienen que, "(…) Los niveles parecen ser complejas estructuras que envuelven los desarrollos de ambos, conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchas de las tareas" (p.28).

Los tres proyectos descritos anteriormente, fueron el soporte para las investigaciones que se realizaron a partir de estas teorías que contemplan el modelo teórico de Van Hiele, las cuales se han destacado especialmente en el campo de la enseñanza de la geometría.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO

Los referentes teóricos, que soportan esta investigación tienen en cuenta los siguientes componentes, en primer lugar, se hace mención a la enseñanza de la geometría y el álgebra, seguidamente, se describen las características más importantes del modelo educativo de van Hiele, el cual está determinado por la forma en cómo razona un estudiante al aproximarse a la fórmula de Euler, como el objeto de estudio que interesa a lo largo de esta propuesta de investigación, desde un contexto geométrico y algebraico. Desde esta visión, el propósito esencial es nombrar el modelo educativo de Van Hiele, los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje para lograr éstos niveles y las propiedades que lo fundamentan para obtener el conocimiento matemático.

2.1. ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

La geometría ha tenido a través de la historia un papel muy importante como fundamento para el desarrollo del pensamiento lógico de los seres humanos, por éste motivo ha sido objeto de estudio de muchos hombres ilustres que se han caracterizado por los aportes y contribuciones realizados a esta rama de las matemáticas, como base esencial para el perfeccionamiento de muchas ciencias.

En cuanto a la enseñanza de la geometría, hace algún tiempo viene tomando fuerza su implementación en los currículos escolares, dada su importancia en la formación del pensamiento espacial, en los primeros años de edad de los niños y niñas, ya que permite además, las adquisición de habilidades para interpretar el espacio a través de las formas y tamaños que se perciben en el contexto.

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (1998) el pensamiento espacial es "(…) el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales. En este sentido, cabe destacar la importancia que poseen los materiales didácticos para obtener representaciones concretas del pensamiento espacial con mayor precisión (p. 61).

De otro lado, el papel del maestro en los procesos de enseñanza de la geometría juega un papel fundamental, ya que la enseñanza de esta disciplina no es una tarea sencilla, debido a la cantidad de propiedades, axiomas, postulados y demostraciones. Además, el maestro que se dedica a la enseñanza de la geometría, debe propiciar la participación y motivación de los estudiantes en el desarrollo de actividades y en la búsqueda de situaciones concretas de aprendizaje.

2.2. ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

Otro elemento que se tuvo en cuenta en esta investigación es la enseñanza del álgebra, en la cual se desarrolla el pensamiento variacional en los grados octavo y noveno de la educación básica, sin embargo algunos estudios han demostrado que éste pensamiento se puede empezar a considerar en estudiantes que se encuentran cursando grados inferiores. (Butto y Rojano, 2009)

El Ministerio de Educación Nacional (2003, p. 67), considera que se deben tener en cuenta las siguientes actividades para el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros grados de la educación básica: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.

Este paso transitorio de la aritmética al álgebra, en el cual los estudiantes deben trabajar con conceptos más complejos, es un paso importante para acceder a estructuras cognitivas de mayor nivel dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, una de las dificultades que enfrenta la mayoría de los estudiantes cuando empiezan el estudio del álgebra, radica en tener que combinar letras y números, y la dificultad para conectar ideas importantes con otros contenidos y conceptos matemáticos.

2.3. MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

El modelo educativo de Van Hiele o modelo de razonamiento como también se le conoce, se originó hace ya más de medio siglo, este modelo fue creado por Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, (1986), una pareja de esposos holandeses dedicados a la enseñanza de las matemáticas en secundaria, y quienes, al igual que los docentes actuales tuvieron dificultades para que los estudiantes comprendieran lo que se les explicaba, un fenómeno que persiste hasta nuestros días, debido a que los estudiantes no poseen el nivel de razonamiento adecuado para abordar una determinada situación matemática, en muchas ocasiones porque no entienden al profesor y en otras, porque no saben que procedimientos utilizar para dar solución a un ejercicio o problema.

De esta manera, es posible afirmar que la experiencia docente permite la investigación y la implementación de teorías para tratar de explicar la evolución del razonamiento y poder contribuir al perfeccionamiento del mismo, hasta alcanzar niveles de cognición de mayor profundidad, como lo explica la teoría de los Van Hiele para desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes

Pierre Van Hiele (1986) a raíz de las experiencias y dificultades que tuvo en los procesos de enseñanza de las matemáticas, explica su interés por estudiar de manera rigurosa el tema antes mencionado, de tal forma que hoy en día, gran parte de las investigaciones en el campo de la geometría han incorporado éste método. Una vez inicia su labor como docente de matemáticas, empieza a descubrir que no es una tarea fácil, debido a que muchos estudiantes no alcanzan a comprender las matemáticas, a pesar de los constantes esfuerzos para obtener éxito alguno, sobre todo en la parte introductoria de la geometría "(…) podía ver que ellos daban al máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor" (p.30); de hecho, este último aspecto parecía tener mayor incidencia por lo que ocurría después "(…) de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: no es tan difícil, pero ¿por qué nos los explicó usted de forma tan complicada? (p.30).

A pesar de haber cambiado las estrategias para explicar los mismos contenidos año tras año, seguía ocurriendo lo mismo, parecía que nada funcionara, de esta forma fue como Van Hiele pudo descubrir la solución a éste fenómeno que comprende los diferentes niveles del pensamiento. Por consiguiente, Van Hiele (1986) da a conocer las primeras apreciaciones con las cuales consiguió formular los niveles de razonamiento de un estudiante, de la siguiente manera:

> Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del

> nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aun así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el estudiante alcance un nivel superior de pensamiento. Se puede ver mi intento por librarme a mí mismo de no ser capaz de dar suficiente instrucción; también se puede ver la solución: una adecuada serie de ejercicios. En realidad, se ha puesto de manifiesto que al cambiar los libros de texto todas las dificultades podían desaparecer. Así que mi introducción a los niveles no era sólo una afirmación sino también un programa (p.40).

En los párrafos anteriores se resumen las ideas de cómo se originó el modelo teórico de los esposos Van Hiele, el cual tiene vigencia en nuestra época actual, usado por muchos docentes para realizar trabajos de investigación en el campo de la matemática, con el fin de explicar los niveles de razonamiento de los estudiantes, los cuales han brindado aportes valiosos para su mejoramiento.

Las ideas que caracterizan el modelo de razonamiento creado por los van Hiele, se enuncian a continuación de manera sintetizada (Jaime y Gutiérrez, 1990):

1. Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas;
2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento;

3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela;
4. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esta forma (p. 305).

Según lo expresado en el texto anterior, este modelo además de describir el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, también muestra una correspondencia entre estos dos procesos. De esta manera, el modelo comprende tres elementos constitutivos que describiremos de una forma detallada: el *Insight,* que hace referencia a la percepción o comprensión, los niveles de razonamiento que se refieren a la descripción y la forma como se desarrolla el razonamiento del individuo, y finalmente, las fases de aprendizaje, que muestran los patrones para que los maestros diseñen las actividades de enseñanza.

Antes de explicar estos elementos que comprende el modelo teórico de Van Hiele, conviene advertir que, según Jaime y Gutiérrez (1990) este solo consta de dos elementos que hacen parte de su estructura: la primera estructura es descriptiva, dado que presenta una secuencia en "los niveles de razonamiento", en el cual se intenta explicar la capacidad de avanzar de un determinado nivel a otro. La segunda estructura es prescriptiva, puesto que da unas orientaciones a los docentes para que los estudiantes puedan lograr niveles superiores en la forma de razonar; estas orientaciones son denominadas las "fases de aprendizaje".

2.3.1 Los niveles de razonamiento de Van Hiele.

Los niveles de razonamiento constituyen la esencia del modelo, debido a que muestran la manera progresiva en que un estudiante puede categorizarse al avanzar por cada uno de ellos, teniendo en cuenta la manera en que éste utiliza la razón, cuando define conceptos geométricos y comprende los procesos de aprendizaje progresivamente por medio de la práctica, este proceso es gradual y requiere de ciertos mecanismos para lograr un razonamiento formal.

Sin duda alguna, los niveles de razonamiento se pueden evidenciar fácilmente en el campo de la educación, de modo, que es posible notar las diferencias entre los estudiantes de diferentes niveles al observar y realizar comparaciones en su forma de trabajar y desarrollar actividades en cuanto al aprendizaje de la geometría. Seguidamente, se presentan las propiedades más importantes que ayudan a identificar los niveles de Van Hiele haciendo referencia al razonamiento matemático que demuestran los estudiantes a partir de tareas académicas.

De acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) los niveles se clasifican de la siguiente manera:

2.3.1.1 Nivel I. Reconocimiento visual.

Este nivel de razonamiento es el más simple, se presenta en los primeros años de escolaridad. Existe un reconocimiento de las figuras geométricas de forma general por parte del estudiante, aunque se le dificulta identificar elementos y propiedades matemáticas. Los estudiantes realizan descripciones que involucran características importantes de las figuras geométricas, pero son incapaces de hacer generalizaciones entre ellas.

Un ejemplo que explica claramente lo anterior:

Si le damos a un niño pequeño que se encuentra en el nivel I de Van Hiele un círculo, un triángulo y un cuadrado y le preguntamos en qué se diferencian estas figuras, seguramente su respuesta se referirá a redondez, figuras más o menos puntiagudas, etc., pero no hablará de número de vértices ni de amplitud de ángulos. Es evidente que el niño reconoce los vértices (o su ausencia) como característica diferenciadora entre las figuras, pero no es consciente de ello y, por lo tanto, no los usa directamente (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 308).

2.3.1.2 Nivel II. Análisis.

En este nivel, el estudiante está en capacidad de hacer relaciones entre las partes o elementos que conforman las figuras geométricas, reconoce que estos objetos poseen propiedades matemáticas y las nombra, igualmente descubre otras propiedades, pero continúa con la dificultad para encontrar relaciones existentes entre unas y otras. De lo anterior, se deduce que los estudiantes ya han mejorado la forma de percibir las figuras geométricas y entienden también, que estas figuras poseen ciertas propiedades que las caracterizan.

Un ejemplo para aclarar este nivel es el siguiente:

Para un estudiante que se encuentra en este nivel de razonamiento “(…) un rectángulo es un cuadrilátero con lados paralelos dos a dos, ángulos rectos, lados opuestos iguales, etc.” (p. 308). No obstante, sólo nombrará las propiedades del rectángulo, pero no podrá relacionarlas con otras que posee la figura; por ejemplo, reconocer que el rectángulo se puede clasificar en el grupo de los paralelogramos.

2.3.1.3 Nivel III. Clasificación.

El estudiante en este nivel ya está en condiciones de establecer relaciones entre figuras y sus propiedades, realiza clasificaciones geométricas claramente y define conceptos geométricos formalmente. Es posible que el estudiante realice algunas demostraciones de su razonamiento de manera informal, lo cual obtiene a través de la práctica y la experiencia, pero todavía no puede establecer relaciones con otros sistemas lógicos, para hacer demostraciones con un nivel de exigencia de mayor rigurosidad. Si bien, el estudiante entiende las demostraciones que hace el docente o que puede leer en un texto, éste no es capaz de hacerlas sin recibir ayuda. Consecuentemente, un estudiante en este nivel de razonamiento, haciendo referencia a los cuadriláteros, habrá conseguido comprender “(…) que la igualdad de los ángulos opuestos implica el paralelismo de los lados, que la igualdad de lados implica la perpendicularidad de diagonales” (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 310).

2.3.1.4 Nivel IV. Deducción formal.

El estudiante en este nivel alcanza la comprensión de los axiomas, teoremas matemáticos y establece demostraciones formales. El logro de este nivel permite al individuo poner a prueba el uso del "razonamiento lógico matemático". Siguiendo el ejemplo de los cuadriláteros, un estudiante que haya alcanzado este nivel podrá realizar demostraciones formales de las propiedades de éstas figuras geométricas y encontrar otras propiedades que requieren un mayor nivel de exigencia cognitivo para sus demostraciones.

2.3.1.5 Nivel V. Rigor.

En este último nivel de razonamiento se puede evidenciar la comprensión de las diferentes estructuras axiomáticas por parte del estudiante, es decir, que una persona que haya alcanzado este nivel estará en condiciones de efectuar demostraciones matemáticas de manera formal.

2.4. LAS FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

Según se ha indicado, el modelo de van Hiele menciona que, un individuo logra estos niveles de forma gradual, además es imposible que se encuentre en un determinado nivel, sin antes haber superado el inmediatamente inferior. Lo que sí es seguro, es que por medio de la experiencia, una persona pueda lograr niveles de razonamiento más avanzados no tan perfectos y organizados, pero los puede conseguir en un contexto que no sea la escuela (Jaime y Gutiérrez, 1990). Por este motivo, es importante la formación académica que le posibilite a un estudiante la apropiación de estructuras de mayor organización que puedan ser usadas en otros ambientes. De esta forma, las fases de aprendizaje que describe Van Hiele, son precisamente una serie de etapas estructuradas de las actividades que debe realizar un estudiante para lograr mayores niveles de razonamiento. Dicho de otro modo, debe existir una completa correspondencia entre cada descriptor de nivel y las fases de aprendizaje; así, las actividades expuestas en cada fase serán determinantes para la comprensión matemática que requiere cada nivel de aprendizaje.

En las fases de aprendizaje descritas por Van Hiele el docente tiene un papel determinante para que sus estudiantes "(…) construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento, al que deben ascender creando primero los vértices de la red y después las conexiones entre ellos" (Jaime y Gutiérrez, 1990, p. 333). Esto significa, que el estudiante debe adquirir primero nociones básicas indispensables que le ayuden a enriquecer su estructura cognitiva que después tendrá que poner a prueba para avanzar en los niveles de exigencia.

Desde lo anterior, Jaime y Gutiérrez (1990) hacen mención a cinco fases que corresponden al modelo de razonamiento de Van Hiele, de las cuales se hará una breve descripción:

2.4.1 Fase 1. Información.

El objetivo de esta fase es conocer las características y conocimientos previos de los estudiantes, antes de comenzar a desarrollar un tema y poder entregarles información sobre la actividad matemática a realizar. Es importante conocer el nivel de conocimiento de los estudiantes y el grado de razonamiento en el que se encuentra. Estas características se pueden identificar, en las intervenciones que hacen los estudiantes, en la forma como se expresa y en las conjeturas que realiza frente a una determinada situación matemática.

2.4.2 Fase 2. Orientación dirigida.

En esta fase el objetivo esencial es lograr que los estudiantes puedan descubrir, comprender y aprender los conceptos y propiedades del objeto geométrico que en estudio, por tal motivo, el docente debe planear cuidadosamente las actividades, de tal forma, que se adquieran experiencias que fortalezcan el logro de procesos de razonamiento de mayor nivel, los cuales se obtienen a través de la red mental de relaciones del nuevo nivel alcanzado.

2.4.3 Fase 3. Explicitación.

Esta es la fase en la que los estudiantes intercambian ideas, establecen comparaciones y relacionan los conceptos y resultados obtenidos durante el proceso de estudio del objeto matemático que han percibido durante la clase, a través de argumentos más refinados y elaborados acorde al nivel que acaban de obtener.

2.4.4 Fase 4. Orientación libre.

Los estudiantes en esta fase deben poner a prueba las habilidades y conocimientos que han obtenido hasta el momento, debido a que las tareas se vuelven más complejas y requieren de su apropiación, por lo cual éstos deberán encontrar diferentes alternativas que den solución a los problemas matemáticos propuestos. El docente podrá dar algunos pormenores de la situación para que el estudiante utilice el nivel apropiado de razonamiento y sea él mismo quien a través de su conocimiento y de manera libre encuentre la solución, para poder avanzar cada vez hacia la construcción de la red de relaciones.

2.4.5 Fase 5. Integración.

En esta fase, el estudiante debe integrar y materializar los conocimientos adquiridos; es decir, que pone en práctica todos los argumentos para realizar comparaciones, integrar y desarrollar todo su potencial y dominio de sus conocimientos, completando de esta forma la red de relaciones de esta última etapa.

Las fases propuestas en el modelo de razonamiento de Van Hiele, proporcionan al docente de matemáticas, la estructura para realizar actividades estratégicas dentro del área, que permitan que el estudiante alcance los niveles apropiados según el grado que se encuentre cursando. Es importante que un estudiante cumpla con las fases mencionadas para poder avanzar de un determinado nivel a otro, como requisito esencial en el proceso de maduración del conocimiento y razonamiento progresivo.

2.5. PROPIEDADES

Por otra parte, los niveles de razonamiento de Van Hiele también deben cumplir con ciertas propiedades, que de acuerdo con Usiskin (1982), se mencionan a continuación:

2.5.1. Propiedad 1: Secuencialidad fija.

Esta propiedad indica que un estudiante debe pasar por cada uno de los niveles de manera gradual, a través de un proceso denominado 'secuencialidad fija', que según lo describe Usiskin (1982) "Un estudiante no puede estar en un nivel *n* de Van Hiele sin haber superado el nivel *n-1*" (p. 5). Lo anterior deja claro que para poder superar un nivel de conocimiento determinado, este sólo es posible al haber superado las exigencias de razonamiento del nivel inmediatamente inferior.

2.5.2. Propiedad 2: Adyacencia.

En esta propiedad "el objeto de percepción del nivel *n-1* se convierte en el objeto de pensamiento del nivel *n*" (p. 5). Esta propiedad da a entender que en los niveles de van Hiele se presentan ciertas estructuras de pensamiento en el individuo, que le permiten razonar de manera implícita, dado que este nivel es transitorio, en el siguiente nivel este razonamiento se vuelve explícito.

2.5.3. Propiedad 3: Distinción.

Esta propiedad indica lo siguiente: "para alcanzar el nivel *n* el aprendiz debe reorganizar y reinterpretar el conocimiento adquirido en el nivel $n - 1$, de modo que llegue a la percepción de una nueva estructura" (p. 5).

2.5.4. Propiedad 4: Separación.

"Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de razonamiento matemático" (p. 5).

2.5.5. Propiedad 5: Cada nivel tiene su lenguaje.

Existe de acuerdo con esta propiedad, un vínculo estrecho entre el lenguaje y cada nivel de aprendizaje, debido a que cada nivel presenta un lenguaje propio. De acuerdo a la red de relaciones establecidas por cada individuo en el contexto de las matemáticas, así mismo será su forma de expresarse. Todo lo dicho hasta ahora sobre los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele, deja ver con claridad que para alcanzar estos niveles, es necesario pasar por una serie de fases y etapas que poseen, además de ciertas estructuras que las caracterizan, por lo tanto, es imposible que un estudiante pase de un nivel de razonamiento a otro, sin antes haber cumplido con características y condiciones del nivel inferior.

Seguidamente, un segundo elemento que sustenta este trabajo de investigación es el objeto matemático que deberán obtener los estudiantes de quinto grado, el cual se relaciona con el teorema de Euler y del cual haremos algunas precisiones puntuales.

2.6. TEOREMA DE LEONHARD EULER COMO OBJETO MATEMÁTICO

En el desarrollo del campo investigativo de las matemáticas aparece una publicación en torno al teorema de Euler, el autor Royo (2002), en su trabajo afirma lo siguiente:

Una de las propiedades más valiosas de los poliedros es una formula atribuida a Euler, aunque anteriormente Descartes había encontrado una fórmula equivalente, que apareció 200 años después de ser escrita, entre los papeles de Leibniz, es el siguiente y bonito teorema de Euler: Sea un poliedro homeomorfo a una esfera con V vértices, A aristas y C caras. Entonces, se cumple la fórmula: $\boldsymbol{V - A + C = 2}$ (p. 56).

2.6.1 Verificación del teorema de Euler.

En todo poliedro se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos unidades.

$$C + V = A + 2$$

Donde:

V= Número de vértices

C= Número de caras

A= Número de aristas

Verificación para el hexaedro

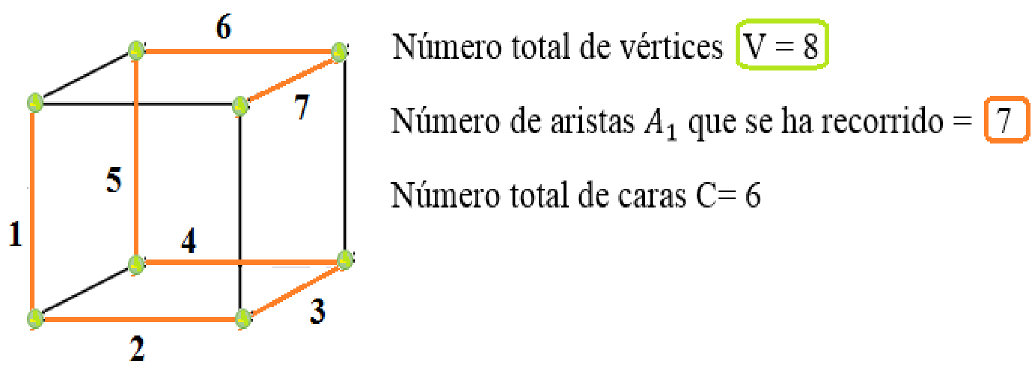


Figura 1. Aristas del cubo. Fuente: elaboración propia

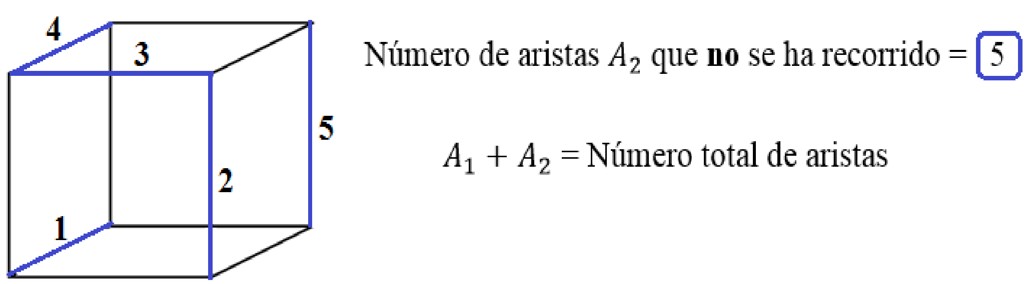


Figura 2. Aristas del cubo (1). Fuente: elaboración propia.

$$V \;=\; A_1 + 1$$

$$C \;=\; A_2 + 1$$

$$\boldsymbol{C + V = (A_1 + A_2) + 2}$$

$$6 + 8 = 12 + 2$$

$$14 = 14$$

Finalmente, se cumple que: $\boldsymbol{C + V = A + 2}$

Verificación para el tetraedro

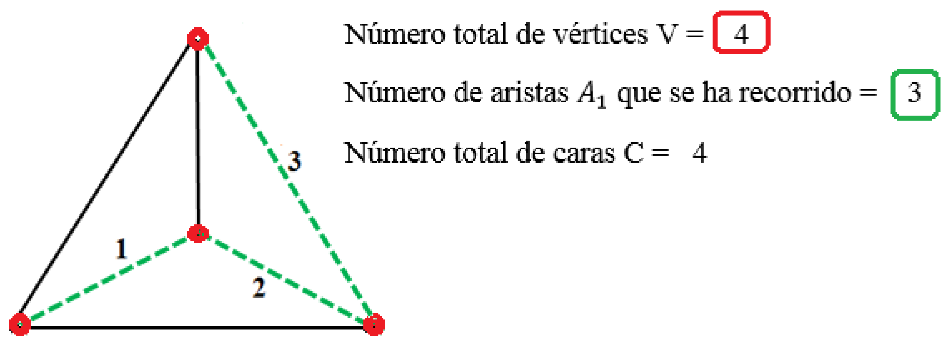


Figura 3. Aristas del tetraedro. Fuente: elaboración propia.

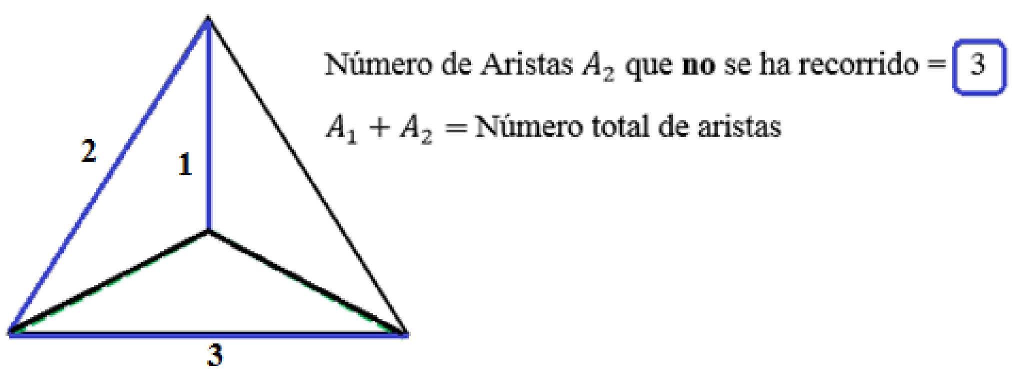


Figura 4. Aristas del tetraedro (1). Fuente: elaboración propia.

$$V \ = \ A_1 + 1$$

$$C \ = \ A_2 + 1$$

$$\boldsymbol{C + V = (A_1 + A_2) + 2}$$

$$\boldsymbol{4 + 4 = 6 + 2}$$

$$\boldsymbol{8 = 8}$$

Queda verificada la relación: $C + V = A + 2$

Verificación para el octaedro

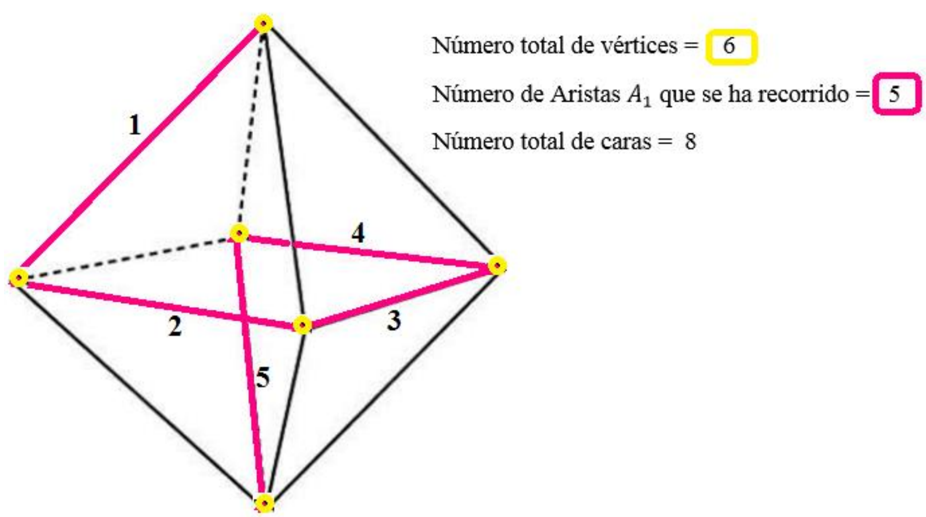


Figura 5. Aristas del octaedro. Fuente: elaboración propia.

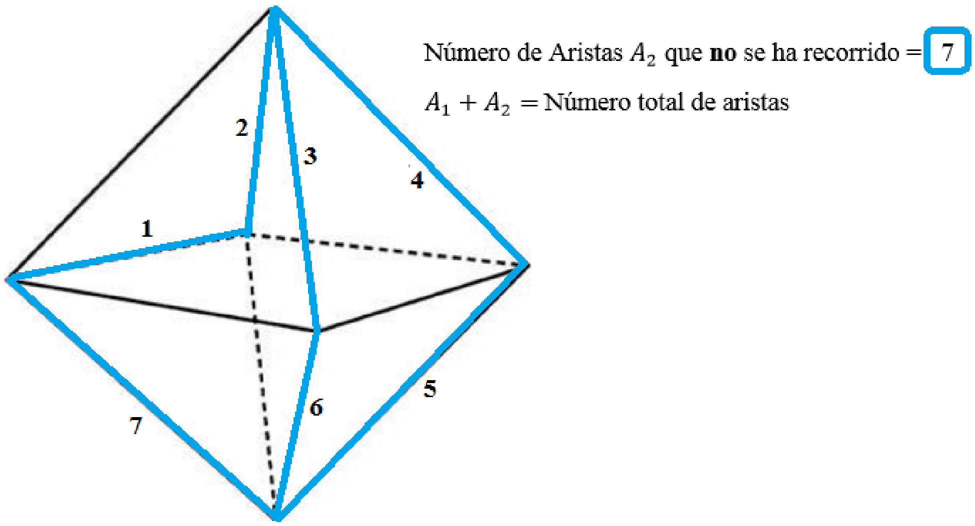


Figura 6. Aristas del octaedro (1). Fuente: elaboración propia.

$$V \;=\; A_1 + 1$$

$$C \;=\; A_2 + 1$$

$$\boldsymbol{C + V = (A_1 + A_2) + 2}$$

$$\boldsymbol{8 + 6 = 12 + 2}$$

$$\boldsymbol{14 = 14}$$

Una vez más se verifica que: $\boldsymbol{C + V = A + 2}$

Verificación para el dodecaedro

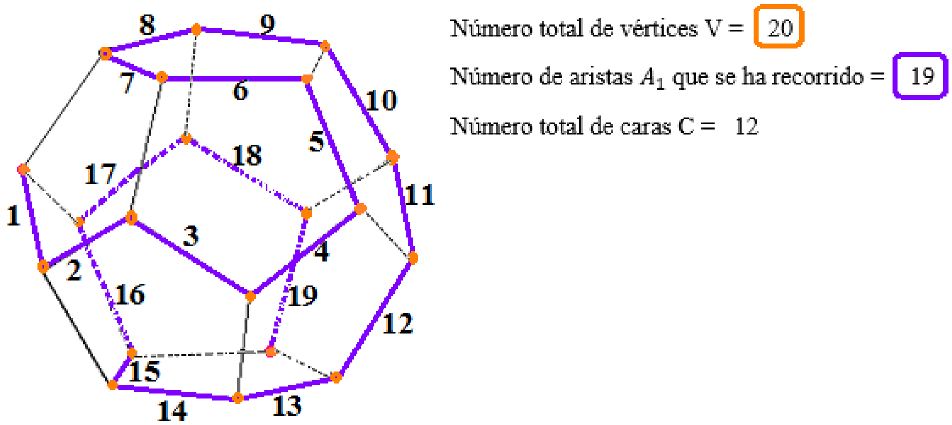


Figura 7. Aristas del dodecaedro. Fuente: elaboración propia.

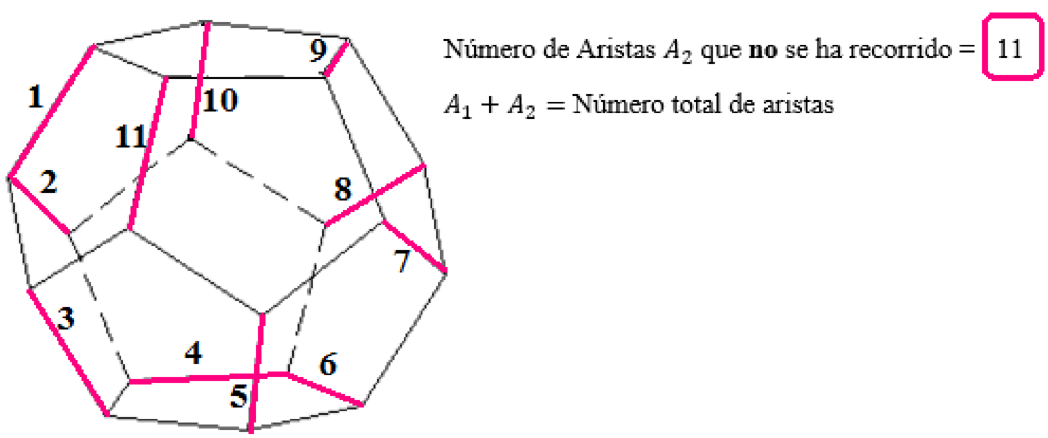


Figura 8. Aristas del dodecaedro (1). Fuente: elaboración propia.

$$V = A_1 + 1$$

$$C = A_2 + 1$$

$$\boldsymbol{C + V = (A_1 + A_2) + 2}$$

$$\mathbf{12 + 20 = 30 + 2}$$

$$\mathbf{32 = 32}$$

Se llega a la verificación: $\boldsymbol{C + V = A + 2}$

Verificación para el icosaedro

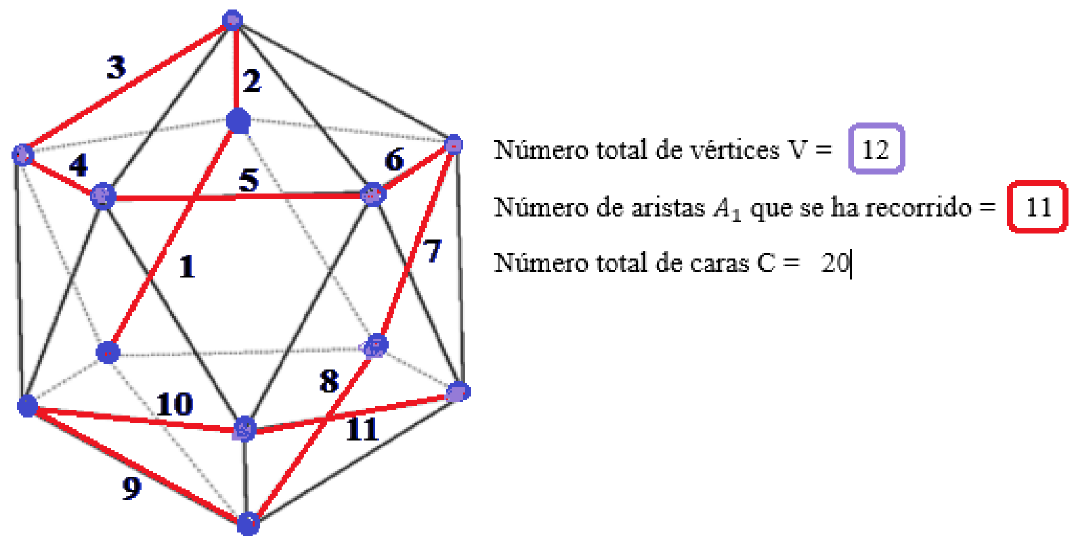


Figura 9. Aristas del icosaedro. Fuente: elaboración propia.

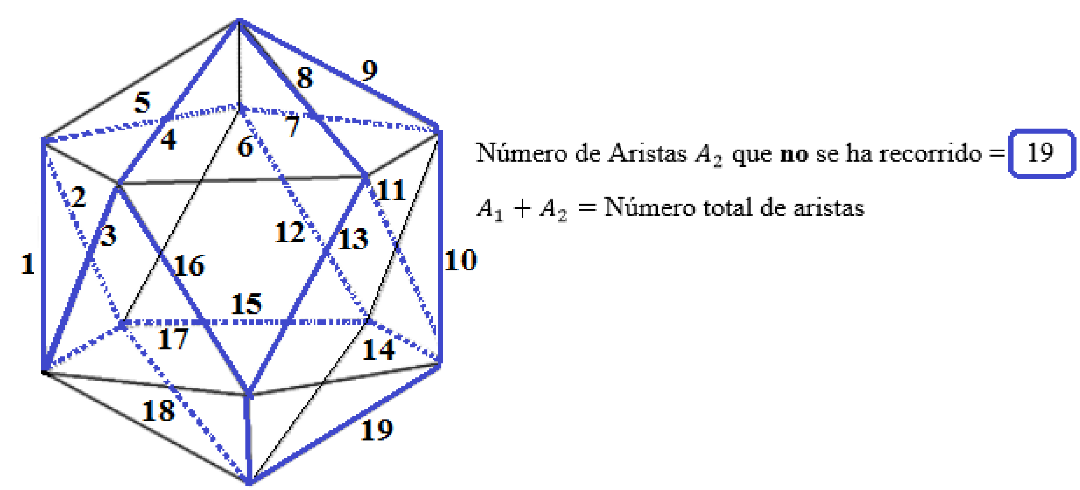


Figura 10. Aristas del icosaedro (1). Fuente: elaboración propia.

$$V = A_1 + 1$$

$$C = A_2 + 1$$

$$\boldsymbol{C + V = (A_1 + A_2) + 2}$$

$$\mathbf{20 + 12 = 30 + 2}$$

$$\mathbf{32 = 32}$$

En consecuencia, se verifica que la fórmula de Euler: $\boldsymbol{C + V = A + 2}$ Se cumple para los cinco poliedros regulares.

Seguidamente, también se hace necesario mencionar los sólidos platónicos, conocer algo de su historia, de su origen, en qué momento fueron considerados ‘objetos matemáticos’, porqué se refieren a sólo cinco sólidos y su importancia en nuestros días.

Del origen de los sólidos platónicos como elementos para ser estudiados por las matemáticas se hallan datos que se remontan hacia el año 2000 a. C en la antigua Grecia y que provienen de restos arqueológicos de la edad prehistórica en Escocia

(Quesada, 2006) realiza un trabajo en donde hace alusión a la historia de los cuerpos platónicos, las propiedades y la relación de estos objetos con el arte.

De esta manera surge la primera escuela matemática fundada por los griegos, debido al interés de algunas personas por obtener conocimiento derivado del análisis y el estudio de las matemáticas. Se reconoce entonces a Pitágoras como el fundador de esta primera escuela, en donde se generó uno de los problemas de mayor expectativa: el estudio de los sólidos platónicos, “(…) sobre todo el dodecaedro al que atribuían una especial relación con el cosmos. Se planteaban por qué eran en concreto cinco poliedros, ni más ni menos" (Quesada, 2006, p. 5). Por consiguiente, es Euclides quien realiza y matematiza de manera formal las demostraciones y construcciones de estos sólidos en su libro "Los Elementos", de igual forma, a través de sus argumentos deja claro porqué son solo cinco poliedros.

Al respecto, se define el concepto de poliedro regular como "todo aquel poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí, y cuyos vértices son iguales" (Quesada, 2006, p. 8)

> La relación de Euler está dada por la fórmula general: $C + V = A + 2$, en donde (A) representa las caras, (V) representa los vértices y (C), las aristas. Esta fórmula se usa para encontrar relaciones entre los poliedros, las cuales se cumplen para todo tipo de poliedro convexo.

2.6.1. Propiedades de los sólidos platónicos.

Los sólidos platónicos, de acuerdo con Sarmiento y Silva (2008, pp. 39-41) cumplen con las siguientes propiedades:

2.6.2. Regularidad.

- Todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.
- En todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y aristas.
- Todas las aristas de un sólido platónico tienen la misma longitud.

- Todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.

2.6.3. Simetría.

- Todos ellos gozan de perfecta simetría central respecto a un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices y de sus aristas.
- Todos ellos tienen además simetría axial respecto a una serie de ejes de simetría que pasan por el centro de simetría anterior.
- Todos ellos tienen también simetría especular respecto a una serie de planos de simetría (o planos principales), que los dividen en dos partes iguales.
- Como consecuencia geométrica de lo anterior, se pueden trazar en todo sólido platónico tres esferas particulares, todas ellas centradas en el centro de simetría del poliedro.
- Una esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.
- Una segunda esfera tangente a todas las aristas en su centro.
- Una esfera circunscrita, que pase por todos los vértices del poliedro.

2.6.4. Conjugación.

Si se traza un poliedro empleando como vértices los centros de las caras de un sólido platónico se obtiene otro sólido platónico, llamado conjugado del primero, con tantos vértices como caras tenía el sólido inicial, y el mismo número de aristas. El poliedro conjugado de un dodecaedro es un icosaedro, y viceversa; el de un cubo es un octaedro; y el poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro.

2.6.5. Esquema.

El teorema de poliedros de Euler fija que el número de caras de un poliedro más su número de vértices es siempre igual a su número de aristas más dos, es decir:

$$\boldsymbol{C + V = A + 2}$$

Una vez se conocen las propiedades de los sólidos pitagóricos, también es posible responder a la pregunta que una vez se hicieron los griegos en su tiempo, sobre el número existente de estos cuerpos. Existen diversas formas de probar esta teoría, según Quesada (2006, p. 8), una de las más sencillas y fáciles de comprender, con algunos ajustes y que se relaciona con la geometría es la siguiente:

1. Cada vértice une, al menos tres caras, pues si uniese menos no sería un vértice sino un punto de una recta.
2. Para que un vértice tenga volumen, y por tanto pueda formar un poliedro, la suma de los ángulos tiene que ser menor que 360º pues si alcanzase esta cifra sería un vértice plano.
3. Por tanto como debe haber un mínimo de tres ángulos cada uno ha de medir menos que 360/3 = 120º.

4. Ningún polígono regular con más de 5 lados puede cumplir la condición 3, ya que el hexágono regular tiene ya sus ángulos de 120º.

Así pues estudiemos exhaustivamente todos los casos, y demostraremos así por qué no puede haber más de cinco:

- Caras triangulares: Cada vértice del triángulo tiene 60º, así que pueden unirse 3, 4 ó 5 por vértice, dando lugar al tetraedro, octaedro e icosaedro. No puede haber más pues superarían los 360º.
- Caras cuadradas: Sólo pueden unirse 3 por vértice, pues con cuatro llegaríamos a los 360º. Se forma el cubo.
- Caras pentagonales: Para no sobrepasar los 360º solo se pueden unir 3 pentágonos (108º cada ángulo), dando lugar al dodecaedro.

2.7. GEOMETRÍA DEL ORIGAMI Y SU APLICACIÓN A LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Antes de dar inicio al trabajo con el origami, es importante realizar un diagnóstico sobre los conceptos básicos que conocen los estudiantes, ya que al principio ellos pueden dar sus concepciones y al finalizar las actividades podrán establecer las comparaciones de los conceptos aprendidos y establecer la nueva red de lenguaje geométrico desarrollado a partir del trabajo con el doblado del papel y del uso de material concreto.

De acuerdo con Royo (2002), el trabajo efectuado a través del uso del papel tiene un propósito pedagógico, en donde es posible el estudio de las formas elementales de la geometría plana, siempre y cuando se indique desde este campo de la matemática, lo que representa cada forma obtenida al doblar el papel.

A partir del doblado de una hoja de papel, es posible, no solo realizar un sinnúmero de construcciones, sino también, encontrar una serie de conceptos y formas geométricas que permiten una mayor comprensión de los axiomas y postulados de la geometría euclidiana como el siguiente:

Axioma de la recta. Es posible trazar exactamente una recta por dos puntos distintos

Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos también se encuentran contenidos.

Las siguientes definiciones fueron desarrolladas y elaboradas por (Piedrahita y Rivera, s. f):

Definición 1. Un **Punto,** se define como una figura geométrica que no posee dimensión, ni longitud, es una extensión mínima o lugar dado por el cruce de dos líneas, también representa un lugar en el espacio.

Definición 2. Una **línea** es una sucesión continua de puntos. Es la intersección de dos superficies o planos.

Definición 3. Una l**ínea recta**, es una sucesión continua de puntos que tiende a ser infinita en ambos sentidos y direcciones.

Definición 4. Las **rectas paralelas** son aquellas que tienen la misma distancia entre sí y no se encuentran en ningún punto, ni siquiera al ser prolongadas. Las rectas paralelas hallan en un mismo plano y tienen la misma pendiente.

Definición 5. Las **rectas perpendiculares** son aquellas que se encuentran en el mismo plano y al cortarse forman cuatro ángulos rectos.

Definición 6. Un **ángulo** es una figura formada por dos lados o dos caras que se cortan en un punto llamado vértice.

Definición 7. Un **ángulo diedro** es aquel que se encuentra formado por dos caras planas que se intersectan en una línea (la arista).

Definición 8. Un **ángulo poliedro** es un ángulo formado por más de dos caras planas que se intersectan en un punto (el vértice).

Definición 9. Un **vértice** es un punto donde se unen tres o más planos, también se unen tres o más aristas.

Definición 10. Una **arista** es el segmento de línea que une dos caras o donde se intersectan dos planos.

Definición 11. Una **cara** es cada una de las superficies que forman o limitan un sólido o cuerpo geométrico.

Definición 12. Un **plano** es cada una de las superficies de un sólido o cuerpo geométrico.

Definición 13. **Un poliedro**, es un sólido limitado por un número finito de regiones poligonales, cada región poligonal se conoce con el nombre de cara. La intersección de dos caras se denomina arista, la cual se puede asociar con el borde del poliedro y la intersección de tres o más aristas llamada vértice, la asociaremos con la punta que posee el poliedro.

Definición 14. **Un polígono** es una figura plana limitada por un número finito de segmentos que se unen solo en sus extremos, de tal manera que como máximo dos segmentos se encuentran en un punto y cada segmento toca exactamente a otros dos. Los polígonos se clasifican en regulares e irregulares. Un polígono regular es aquel que tiene todos los lados y ángulos iguales.

Definición 15. **Los poliedros regulares o platónicos** fueron estudiados por Platón. Son poliedros cuyas caras son polígonos regulares e iguales y sus ángulos poliedros son iguales (un ángulo poliedro es el que se forma por la intersección de tres o más caras: la medida de un ángulo poliedro se determina por la suma de las medidas de los ángulos planos que lo forman).

Definición 16. Los **Poliedros irregulares** son aquellos poliedros que tienen caras y ángulos desiguales.

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. ENFOQUE METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo de este trabajo investigativo se implementó una metodología fundamentada en el paradigma de investigación cualitativa, para dar lugar a la comprensión, interpretación y explicación del fenómeno objeto de estudio, la descripción de sus características, las experiencias, los comportamientos, emociones y sentimientos expresados por los estudiantes (Strauss y Corbin, 2002). En este mismo orden de ideas, se pretende a partir de la realidad y la experiencia de los individuos, obtener una cierta generalización sobre la forma de razonar de los estudiantes, cuando se aproximan a la comprensión de la fórmula de Euler, a través de la construcción de los sólidos platónicos por medio de la técnica del origami, partiendo de los niveles (I, II, III, IV) de razonamiento establecidos por Van Hiele.

El estudio cualitativo, en el cual se sustenta esta investigación, se encuentra argumentado, de acuerdo con la teoría que propone Strauss y Corbin, (2002) "(…) para obtener detalles complejos de algunos fenómenos tales como sentimientos, procesos de pensamiento y emociones, difíciles de extraer por otros métodos de investigación más convencionales" (p. 13).

Dicho de otro modo, la metodología cualitativa considera el análisis detallado de un fenómeno el cual es objeto de estudio, que tiene en cuenta además, sus características particulares en un contexto específico. Se desarrolla un análisis profundo, amplio y detallado de cada individuo que participa en la investigación, en donde el mismo se encarga de construir su propio aprendizaje.

El propósito consiste en observar la realidad del entorno social y extraer toda la información que permite dar respuestas al trabajo investigativo. Sobre la base de las consideraciones anteriores, los razonamientos de los estudiantes, son evidenciados a través de una serie de actividades en donde se hace esencial la participación. Entre los instrumentos utilizados para la recolección de la información, destacamos los siguientes: entrevista de carácter socrático, observaciones, producciones escritas y socializaciones; con estas actividades, se define el nivel de razonamiento en el cual se encuentra un estudiante al aproximarse a la fórmula de Euler, en el momento en que construye y compara los sólidos platónicos por medio del origami modular.

Ha de agregarse, que el principal elemento para lograr lo antes referido es el lenguaje, de allí que, la forma cómo se expresa un estudiante, es un indicador determinante para describir y definir el nivel en que éste se encuentra, dado que la comprensión de términos, palabras e interpretación de conceptos es un elemento importante frente a la forma de cómo explica un individuo la realidad que lo envuelve.

3.2. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se desarrolla mediante un enfoque fenomenológico, concebido por Husserl como un método analítico descriptivo de las experiencias del pensamiento interno, percepciones y recuerdos del individuo, que tiene en cuenta la realidad en la que se desenvuelve. En esencia, la fenomenología pretende dar significado a las experiencias mostradas por los sujetos, "(…) lo importante es aprender el proceso de interpretación por el que la gente define su mundo y actúa en consecuencia". El fenomenólogo pretende ver las cosas desde la óptica de otros individuos, a través de la descripción, la comparación e interpretación (Gil, 2014).

Del mismo modo, en esta investigación se tuvieron en cuenta algunas acciones específicas para obtener la información en cuanto a la comprensión del objeto de estudio, que según lo describe Martínez (1989) citado por Gil (2014), se encuentran relacionados con la elección de las técnicas utilizadas, como la observación directa y la entrevista para obtener la mayor participación y vivencia de los sujetos.

La metodología cualitativa, por su parte, permite el análisis de diferentes fenómenos, en esta investigación se pudo dar respuesta a la forma de razonar de cuatro estudiantes de quinto grado al aproximarse a la fórmula de Euler, con la elaboración y comparación de los sólidos platónicos por medio del origami modular.

Al desarrollar esta propuesta de investigación, el estudio fenomenológico fue evidenciado por cuatro estudiantes, que demostraron interés por participar en el desarrollo de las actividades como la elaboración de los sólidos platónicos a través del uso de material didáctico, como pitillos de gaseosa y la técnica del doblado del papel, para responder a los interrogantes efectuados, a partir de las nociones básicas de la geometría euclidiana.

Al formalizar el análisis de los cuatro estudiantes, se dio prioridad a aquellos participantes que aportaron la información requerida para consolidar las actividades en las cuales se describieron los procesos de razonamiento demostrados para cada nivel de comprensión, para la aproximación hacia el objeto de estudio.

3.3. CONTEXTO DONDE SE DESARROLLA LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo de investigación está dirigido a estudiantes de quinto grado de una institución educativa de carácter público del municipio de Carepa (Antioquia), ubicada en el sector urbano. Esta institución atiende una población estudiantil que va desde el estrato 1 hasta el estrato 4, con carácter inclusivo y dividido en tres jornadas: mañana, tarde y noche. La mayor parte de los estudiantes provienen de familias donde las madres son cabezas de hogar, que deben trabajar para poder proveer el sustento y la educación de sus hijos. En general, estos estudiantes son alegres, les gusta el baile, la música, las actividades culturales, lúdicas y recreativas; además, demuestran especial interés por participar en toda clase de deportes.

Con respecto a la investigación, el proceso de selección de los estudiantes de quinto grado se hizo teniendo en cuenta el bajo desempeño de los mismos en las pruebas internas y externas que se les practican, en donde se hace evidente la dificultad para responder preguntas relacionadas con los pensamientos: métrico, geométrico y espacial. Cabe anotar además, que este problema involucra temas puntuales como los sólidos, que en ocasiones no son abordados en esta asignatura.

Este estudio surge a partir de la necesidad de incorporar nuevas estrategias de enseñanza para trabajar e integrar temas de la geometría plana y espacial, lo cual es posible a través de la construcción de los sólidos platónicos con material concreto, que permite, no solo ser manipulado, sino también obtener información y conocimiento, establecer comparaciones, hacer conjeturas, intercambiar ideas y comparar las construcciones realizadas con las de otros compañeros.

3.4. PARTICIPANTES

La selección de los estudiantes para esta investigación se realizó de acuerdo a la disposición que demostraron durante el desarrollo de dos actividades; la primera se llevó a cabo con el uso de pitillos de gaseosa para construir la estructura de los cinco sólidos platónicos y la segunda, corresponde a la elaboración de los cuerpos de éstos mismos sólidos a través de la técnica del origami. También se tuvo en cuenta el desempeño académico de cada estudiante en matemáticas y en geometría, dado que estos aportaron la información requerida para el logro de los objetivos pretendidos en este trabajo investigativo, enmarcado bajo los parámetros del modelo educativo de Van

Hiele, sobre los niveles de razonamiento en el cual se encuentra cada uno de ellos al aproximarse a la fórmula de Euler.

Para esta primera etapa de selección se contó con un grupo de 15 estudiantes, cuyo objetivo fue trabajar con este número de participantes para hacer la clasificación final de cuatro estudiantes para el trabajo de campo, se tuvieron en cuenta aspectos tales como: comportamiento, disposición, motivación, ganas de aprender, actitud para preguntas o ser interrogados y que finalmente, aportaron la información suficiente a través de las observaciones llevadas a cabo en sus respectivas intervenciones y en los trabajos escritos elaborados sobre los temas propuestos, para conocer sus argumentos, ideas y apreciaciones, la coherencia en las respuestas, la forma de razonar y la capacidad de solucionar situaciones referidas al objeto de estudio.

3.5. INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Las estrategias para obtener la información de esta investigación estuvieron ceñidas a los objetivos trazados para lograr una aproximación al objeto de estudio, la cual contó con los siguientes instrumentos: la observación, la entrevista y el material escrito.

3.5.1 La observación.

De acuerdo con Rodríguez, Gil y García (1996):

> La observación es una técnica de investigación cualitativa que nos permite recoger información a través de lo percibido por nuestros sentidos. Si bien el nombre de esta técnica –observación– alude al sentido de la vista en particular, su aplicación no solo se basa en lo que se ve sino también en lo que se escucha. En este sentido, su nombre alude más bien a la actitud o papel que asumimos durante el proceso de recojo de información o investigación, el de "observador". (p. 151)

En consecuencia, se utiliza la observación como método de recolección de la información que proveen los estudiantes del grupo seleccionado, en el momento de realizar las dos primeras actividades consistentes en construir los cinco sólidos platónicos con dos tipos de material; primero, con pitillos de gaseosa para reconocer estructuras de las figuras, como las aristas y posteriormente, a través de la técnica del origami o papiroflexia, para reconocer las caras o el cuerpo de las figuras. El objeto de estas dos actividades es identificar a aquellos estudiantes que siguen instrucciones y elaboran correctamente dichos sólidos, además de comprender algunos conceptos relacionados con la geometría y que son necesarios para llegar a la generalización de la fórmula de Euler.

3.5.2 Entrevista.

Se realizan entrevistas de acuerdo a la necesidad de los estudiantes, estas son de tipo individual y de carácter socrático, las cuales se ajustan al modelo educativo de Van Hiele, para fortalecer la comprensión de algunos conceptos que requieran los estudiantes para una aproximación de la relación de Euler, producto de la construcción de los cinco poliedros regulares con material didáctico.

La entrevista tiene como propósito caracterizar el nivel de comprensión de cada estudiante, de acuerdo al proceso de razonamiento que establece cada uno al realizar comparaciones entre las figuras construidas con pitillos y papel, además de proporcionar elementos que determinen el paso de un nivel a otro y la red de relaciones que se generen en torno al objeto de estudio.

De la Torre (2003) considera relevante el método socrático en la educación matemática, propone además, implementar esta técnica por medio de una entrevista, en donde el punto de partida se da a través de interrogantes formulados de manera universal, en la cual se busca la motivación del sujeto constantemente para provocar la comprensión de un determinado objeto de estudio. En la entrevista, la expresión es un elemento primordial para establecer si el individuo ha obtenido el conocimiento matemático; el léxico, la red de relaciones entre las nociones y conceptos, entre otros elementos, son componentes de estudio en esta propuesta de educativa.

3.5.3 Documentos escritos.

Las producciones escritas, se compilaron a través de documentos para dar cuenta de las narraciones sobre las construcciones efectuadas por los estudiantes, teniendo en cuenta sus argumentos. De igual forma, se elaboró una guía didáctica sobre la base de los productos obtenidos por el mismo estudiante que permitieron desarrollar y construir contenidos matemáticos y geométricos por medio de la construcción de los sólidos platónicos a través de pitillos de gaseosa y doblado del papel (origami). Esta guía se puede adaptar para cualquier grado de la educación básica.

3.5.3.1 Productos esperados.

El desarrollo de este proyecto de investigación estuvo fundamentado esencialmente en los siguientes aspectos:

1. Se diseñaron unos descriptores de nivel que permitieron aplicar un guion entrevista de carácter socrático, a través del cual se obtuvo información suficiente para determinar cómo razona un estudiante frente a la comprensión de la fórmula de Euler, mediante la construcción de los sólidos platónicos con pitillos de gaseosa y de la técnica del origami.
2. Fue posible la identificación de los niveles de razonamiento en los que se encontraban los estudiantes durante el desarrollo de las actividades propuestas en relación al objeto de estudio.
3. Se elaboró una guía metodológica para fortalecer el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos por medio de la construcción y comparación de los sólidos platónicos a través del uso del origami y pitillos, para lograr una aproximación a la comprensión de la fórmula de Euler.

3.5.3.2 Estrategias de comunicación.

La divulgación de esta propuesta de investigación se efectuará a través de foros, ponencias, eventos pedagógicos y/o académicos a nivel municipal, regional, nacional e internacional; publicación en sitio web, red de matemáticas y publicación impresa.

3.6. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En esta investigación se tuvieron en cuenta varios aspectos antes de abordar las actividades dirigidas a los estudiantes, lo más importante es que dichas actividades están soportadas por el modelo teórico y sobre todo, en el aspecto descriptivo de los niveles de razonamiento de Van Hiele, los cuales fueron usados como soporte para diseñar cada una de las entrevistas de tipo socrático para los niveles I, II y III, con unos descriptores hipotéticos en torno al objeto matemático consistente en la comprensión de la fórmula de Euler por medio de la construcción de los cinco poliedros regulares con material concreto, para que el estudiante pudiera establecer comparaciones y relaciones geométricas y algebraicas.

3.7. RECORRIDO METODOLÓGICO

Se eligieron cuatro estudiantes de quinto grado, a través de varias actividades escritas y prácticas, planeadas y dirigidas en tiempo curricular y extra clase, todas ellas en el interior de la institución educativa. Las actividades iniciales se llevaron a cabo con todos los estudiantes de cinco grupos del grado quinto, cuyo propósito fue elaborar los cinco poliedros regulares utilizando pitillos y papel. Una vez realizada esta tarea, se escogieron algunos estudiantes que hicieron el ejercicio correctamente y participaron con responsabilidad y entrega. Con estos estudiantes se desarrolló una guía metodológica para establecer comparaciones ente los poliedros, y responder una serie de preguntas de manera secuencial, esto con el objeto de conocer sus apreciaciones, construir conceptos y saber en qué nivel de razonamiento se encontraban.

Una segunda actividad escrita fue propuesta para trece estudiantes, esta con un contenido más intencionado que permitió depurar el grupo focalizado y determinar los cuatro estudiantes para el estudio de fenomenológico y para la aplicación de la entrevista socrática. Dentro del contenido de la entrevista, se diseñaron preguntas y ejercicios con un alto contenido gráfico, relacionadas con cada uno de los tres primeros niveles de razonamiento, cuyo propósito consistió en poder caracterizar los estudiantes con mejor desempeño en las respuestas a los interrogantes y situaciones del contexto geométrico propuestos

En la aplicación de la primera entrevista de nivel I de razonamiento efectuada a los cuatro estudiantes, se pudo evidenciar la importancia de las actividades previas para conocer el nivel en el que se encontraba cada uno; de igual manera, se fortalece el proceso de la construcción de los descriptores, que se habían construido de forma hipotética, donde algunos de ellos fueron modificados, rediseñados o remplazados para poder lograr los objetivos de la entrevista

Se fortalece no sólo la labor del investigador en la práctica y aplicación de los instrumentos, sino también la apropiación de conocimientos para validar la información suministrada en los informes y resultados de la investigación, con dos elementos fundamentales: el uso del lenguaje provisto por los estudiantes y el diálogo inquisitivo utilizado por el investigador para obtener la información de acuerdo al nivel de razonamiento de cada entrevistado

Con los datos obtenidos en la primera actividad escrita, las observaciones y la primera entrevista, se realizó un análisis descriptivo para reformular algunos aspectos, como el refinamiento de los descriptores para cada nivel de razonamiento y dar comienzo con el análisis y la triangulación de la información. Cabe señalar además, que las actividades previas, como la actividad escrita y las actividades prácticas con materiales concretos proporcionaron a los estudiantes algunas herramientas para afianzar su modo de razonar y de enfrentarse a las preguntas de cada entrevista. Del mismo modo, las inquietudes y dificultades que tuvieron los entrevistados fueron resueltas a través del diálogo socrático, con nuevas preguntas de tipo inquisitivo para poder avanzar de un determinado nivel de razonamiento a otro de mayor exigencia

Para la segunda entrevista, es decir la correspondiente al nivel II de razonamiento, se llevó acabo el análisis de los resultados obtenidos en cada encuentro con los estudiantes, para consolidar y triangular la información, reforzar los descriptores de menor comprensión para los entrevistados y fortalecer aquellos en los cuales hubo apropiación de conceptos y en donde se evidenció un avance gradual en los niveles de razonamiento de cada sujeto

La entrevista se aplica de manera similar a la anterior: entrevista, análisis de la información obtenida, configuración de preguntas para los descriptores con el propósito de dar a cada entrevista una forma apropiada para el acercamiento hacia el objeto de estudio. Cada proceso efectuado con los participantes de la investigación tuvo en cuenta las categorías que fueron surgiendo para comparar los descriptores hipotéticos y establecer el respectivo análisis a través de cada actividad diseñada y ejecutada

En cada nivel de razonamiento hubo mayor compromiso y exigencia, de tal forma, que el análisis fue también más riguroso y profundo, hasta observar en detalle a cada uno de los cuatro participantes y poco a poco, darle forma a las nuevas preguntas de acuerdo a los resultados obtenidos en cada caso

La participación de cada uno de los estudiantes entrevistados hizo posible la modificación y reformulación de algunos descriptores en donde no hubo comprensión de lo que se quería lograr. Así mismo, se exalta el compromiso y el interés de estos estudiantes para responder a los encuentros y sobre todo, al trabajo desarrollado en cada momento de la entrevista

Para el tercer nivel de razonamiento, se procedió con la implementación de una nueva entrevista, pero esta vez se aumentó el nivel de exigencia, dado que en las entrevistas anteriores las actividades tuvieron una secuencialidad intencionada para que los estudiantes pudieran construir sus propias definiciones y conceptos. De esta manera, los descriptores para este último nivel de razonamiento, incluyeron actividades más prácticas que teóricas, de donde se tomaron evidencias significativas del trabajo llevado a cabo por los entrevistados.

Finalmente, la información obtenida es procesada y analizada para poder establecer la forma de razonar de los cuatro estudiantes que fueron observados y entrevistados, en los niveles I, II y III, con respecto a la comprensión de la fórmula de Euler a través de la construcción de los cuerpos platónicos en origami.

3.7.1 Entrevista Socrática.

La siguiente entrevista corresponde al proceso desarrollado por el grupo de investigación para caracterizar los descriptores para cada uno de los niveles de razonamiento de los estudiantes de quinto grado, la cual se denominó: Guion de entrevista clínica de carácter socrático para la comprensión de la fórmula de Euler a través de la construcción de los sólidos platónicos en origami en el Contexto de Van Hiele.

3.7.2 Niveles de razonamiento, descriptores para cada nivel y actividades.

Los niveles de razonamiento de Van Hiele son las diferentes formas de razonamiento geométrico que podemos identificar en un estudiante en el transcurso de su formación académica, que comienza desde que ingresan a los primeros ciclos de educación escolar con la intuición hasta desarrollar un pensamiento más estructurado y formal en los niveles más avanzados como en la educación básica, media y universitaria, en donde es possible desarrollar el pensamiento abstracto, dicho niveles van de 1 al 5.

Los descriptores de nivel son el conjunto de acciones con unas connotaciones específicas para identificar en qué nivel de razonamiento se encuentra un estudiante cuando desarrolla una actividad relacionada con el contexto matemático, al igual que la red de relaciones y conceptos que debe estar en capacidad de dominar.

Entre los niveles de razonamiento existen estados transitorios para pasar de un determinado nivel a otro, por esta razón se han fijado algunos descriptores de separación, que consecuentemente serán alcanzados en el nivel subsiguiente, cuando haya logrado afianzar los conceptos del nivel en el que se encuentra.

Por ende, es fundamental que el estudiante demuestre claramente que ha superado cognitivamente los criterios de cada nivel de razonamiento de manera gradual. Esto es posible con la planeación de actividades bien direccionadas, con objetivos claros, de acuerdo a los niveles, para identificarlos y proceder a la obtención cada vez de un mejor razonamiento

Para esta investigación se propuso las siguientes actividades: un cuestionario con preguntas abiertas y una entrevista semi-estructurada de tipo socrática, con el diseño de unos descriptores para los niveles de razonamiento I, II y III, de acuerdo con el modelo educativo que propone Van Hiele y en donde el estudiante de quinto grado pudo acercarse a la comprensión de la fórmula de Euler, por medio de la construcción de los sólidos platónicos a través de la técnica del origami.

De esta forma, las actividades propuestas para cada nivel de razonamiento fueron diseñadas para poder observar dichos niveles en los que se encuentran los estudiantes, para poder definir la comprensión hacia el objeto de estudio matemático, al cual hace referencia esta investigación.

La entrevista socrática con los respectivos descriptores para cada nivel de razonamiento es la siguiente. El Guion de entrevista clínica de carácter socrático para la comprensión de la fórmula de Euler a través de la construcción de los sólidos platónicos en origami en el Contexto de Van Hiele contiene los siguientes elementos:

Concepto: Fórmula de Euler

Manifestación: Comprensión de la fórmula de Euler por medio de la construcción de los cuerpos platónicos a través de la técnica del origami.

Mecanismo: Una componente visual-geométrica-algebraica con características del espacio bidimensional y tridimensional por medio de la construcción de los sólidos platónicos.

Contenido del guion-entrevista: Dado por descriptores y niveles, con construcciones de afirmaciones para cada caso.

A continuación se procede a presentar los descriptores para cada nivel de razonamiento de acuerdo al modelo teórico de Van Hiele y en correspondencia con el objeto de estudio de esta investigación.

3.7.3 Entrevista Nivel I. De reconocimiento visual.

En este nivel se caracteriza la importancia de la construcción de conocimientos, por lo que el estudiante realiza un reconocimiento de los elementos y nociones básicas de estudio para la comprensión de conceptos específicos.

El estudiante reconoce las figuras geométricas de forma general, pero presenta dificultad para identificar elementos, propiedades matemáticas y realizar generalizaciones entre ellas.

3.7.3.1 Descriptores de nivel I.

En este nivel se identifica el conjunto de saberes previos que requiere el estudiante para establecer la red de relaciones que le permita avanzar en los niveles de razonamiento gradualmente y poder llegar a la comprensión de la fórmula de Euler, de acuerdo a las necesidades y características por los que debe atravesar en cada uno de estos niveles. Los descriptores son los siguientes:

a. Reconoce nociones básicas de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros.
b. Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: “Por dos puntos pasa una única recta”.
c. El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel.
d. Utilizando los pitillos para la elaboración de los sólidos platónicos, el estudiante:
e. Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas.
f. Distingue entre una figura plana y una redonda.

g. Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos.

Del mismo modo, se ha establecido para este primer nivel de razonamiento, un descriptor de separación, el cual deberá ser alcanzado por el estudiante en el siguiente nivel.

3.7.3.2 Descriptores de separación nivel II.

- Se le dificulta reconocer un sólido platónico de otro.
- Presenta dificultad para reconocer propiedades de los sólidos platónicos.

3.7.3.3 Objetivos del nivel I de razonamiento.

Los objetivos descritos a continuación se encuentran estrechamente relacionados con las nociones previas que posee el estudiante sobre los siguientes términos: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular y plano. Los objetivos son:

- Reconocer conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros.
- Reconocer axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: “Por dos puntos pasa una única recta”.
- Establecer comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel.

- Reconocer elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas.
- Distinguir entre una figura plana y una redonda.
- Identificar figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos

3.7.3.4 Actividades propuestas para el nivel I de razonamiento.

Para este nivel de razonamiento se realizaron las siguientes actividades con el fin de demostrar el conocimiento de los estudiantes con respecto a las nociones previas sobre los siguientes términos: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular y plano. En esta actividad se busca que el estudiante potencie el primer nivel de razonamiento de Van Hiele, el cual involucra nociones básicas antes mencionadas de la geometría euclidiana.

Tabla 1
Primer descriptor del nivel I de razonamiento.

Entrevista N° 1. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el primer descriptor. **“Reconoce conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros”.**

Nota: En la que se aprecia el tipo de alcance que se busca en el nivel I del descriptor. Fuente elaboración propia.

En la siguiente figura podrías señalar estos elementos:

A. Una recta.

B. Un segmento de recta.

C. Dos rectas paralelas.

D. Dos rectas perpendiculares

E. Dos puntos.

F. Un plano.

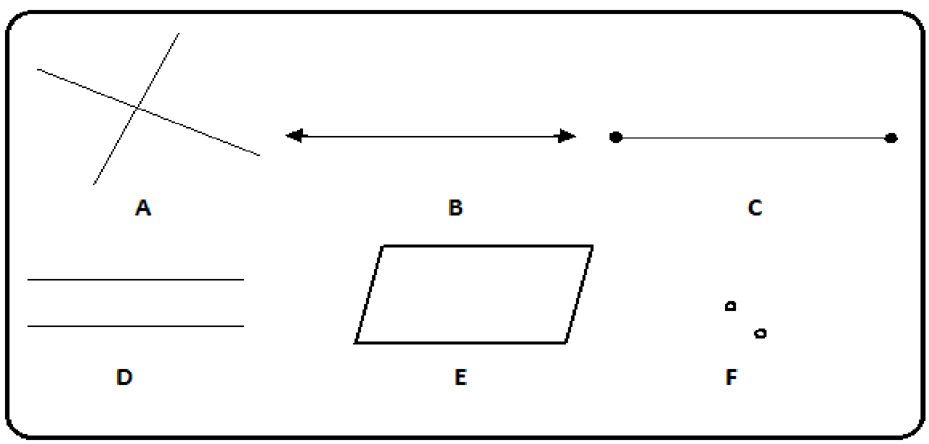


Figura 11. Elementos básicos de la geometría Euclidiana. Fuente: elaboración propia.

Observa las siguientes figuras. A la figura uno se le ha borrado dos lados consecutivos (Figura 2), y dos lados no consecutivos (Figura 3).

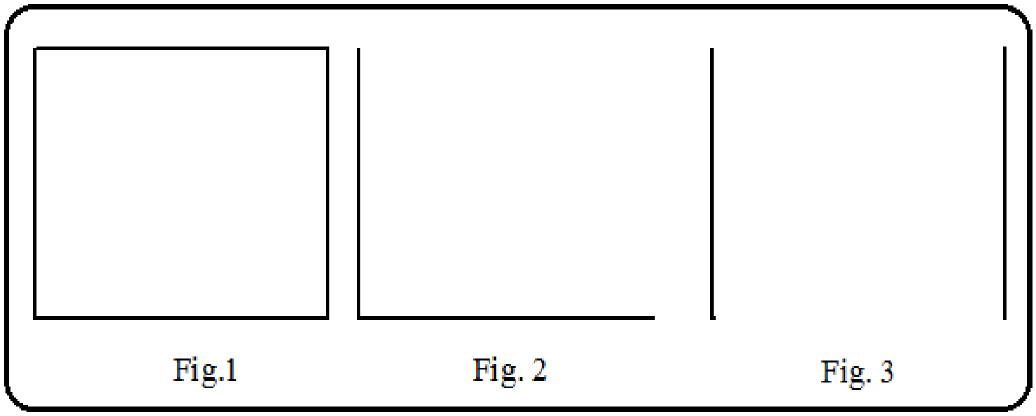


Figura 12. Rectas que se obtienen al suprimir líneas en un cuadrado. Fuente: elaboración propia.

1. El tipo de rectas que se forman en la figura dos se llaman:

A. Rectas paralelas.

B. Semirrectas.

C. Rectas perpendiculares.

D. Diagonales.

2. El tipo de rectas que se forman en la figura tres se llaman:

A. Diagonales.

B. Rectas paralelas.

C. Rectas perpendiculares.

D. Segmentos de recta.

Tabla 2

Aporte de información sobre líneas perpendiculares.

Aporte de información:
Líneas perpendiculares: son dos líneas que se cortan para forma ángulos rectos o de 90°.

Nota: En la que se aprecia el tipo de aporte de información sobre líneas perpendiculares. Fuente elaboración propia.

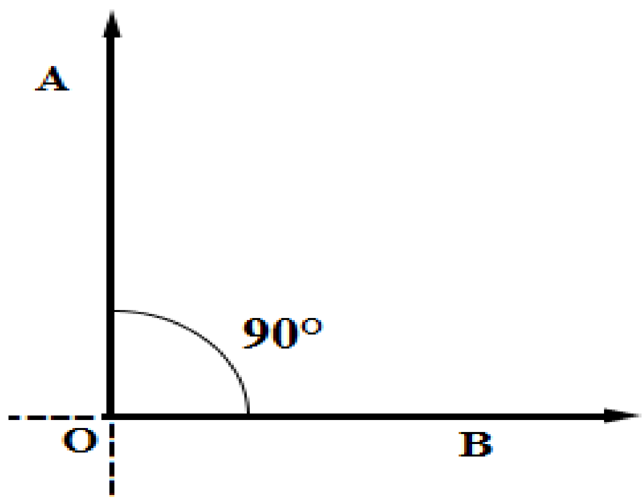


Figura 13. Líneas perpendiculares. Fuente: elaboración propia.

Tabla 3

Segundo descriptor del nivel I de razonamiento.

Entrevista N° 2. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el segundo descriptor. **“Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente:** **“Por dos puntos pasa una única recta”.**

Nota: En la que se aprecia el tipo de alcance que se busca en la entrevista del segundo descriptor, en el nivel I del razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 1.2 del nivel I.

1. Considera los siguientes puntos un una hoja de papel, ¿Cuántas rectas crees que pueden pasan por estos puntos

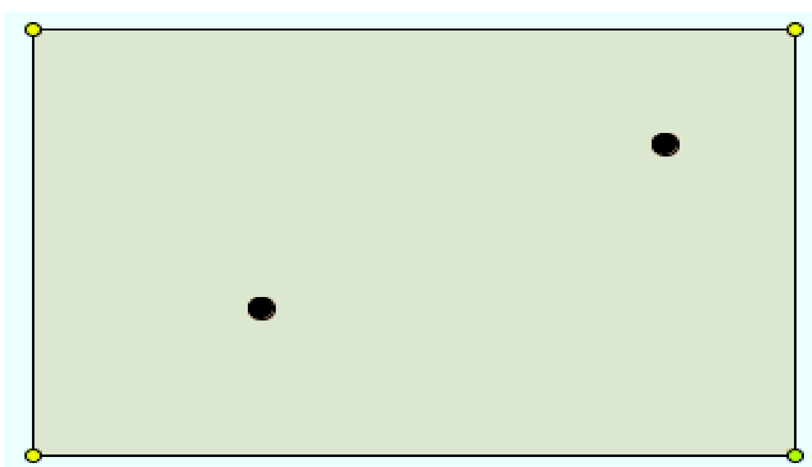


Figura 14. Por dos puntos pasa una única recta. Fuente: elaboración propia.

Aclaración: se entregará al estudiante una hoja de papel y un lápiz para que realice el ejercicio anterior de manera práctica.

Tabla 4
Tercer descriptor del nivel I de razonamiento.

Entrevista N° 3. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el tercer descriptor. **"El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel".**

Nota: En la que se aprecia el tipo de alcance que se busca en la entrevista del tercer descriptor, en el nivel I del razonamiento. Fuente elaboración propia.

Descriptor 1.3 del nivel I.

1. Considera los siguientes puntos en una hoja de papel, al doblar la hoja, ¿Cuántos pliegues se tendrán que realizar para que coincidan exactamente estos dos puntos?

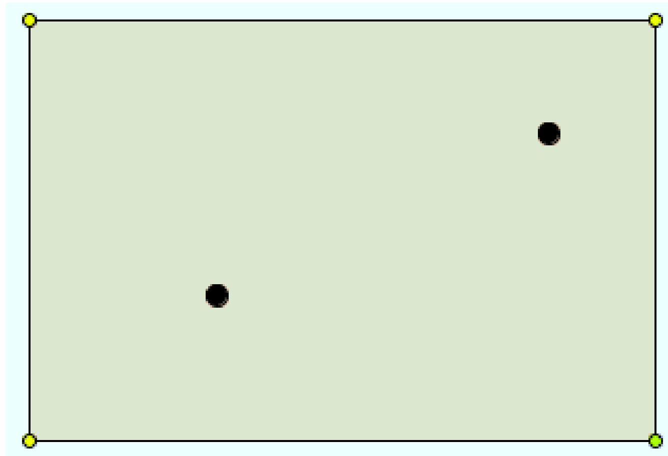


Figura 15. Puntos en un plano para trazar una recta.
Fuente: elaboración propia.

2. ¿Cuántos segmentos pueden conectar los dos puntos marcados en la hoja de papel?

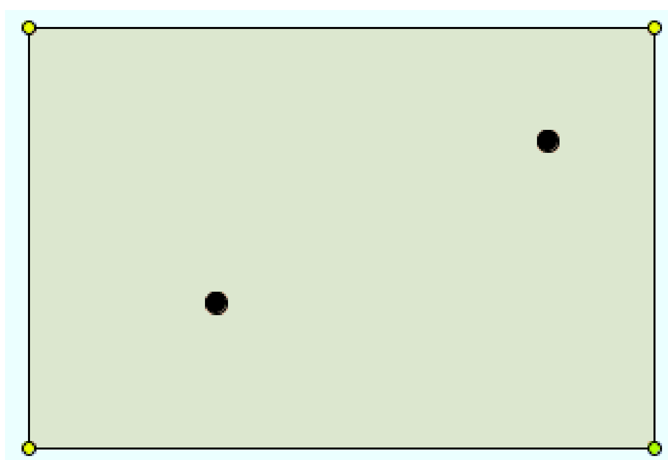


Figura 16. Por dos puntos pasa sólo una recta (1).
Fuente: elaboración propia.

3. Se tienen dos puntos en una hoja de papel. Si se hacen coincidir los dos puntos doblando la hoja y realizando un pliegue, ¿Crees posible que en la relación

entre este doblez y el segmento que une los dos puntos resulte una línea perpendicular?

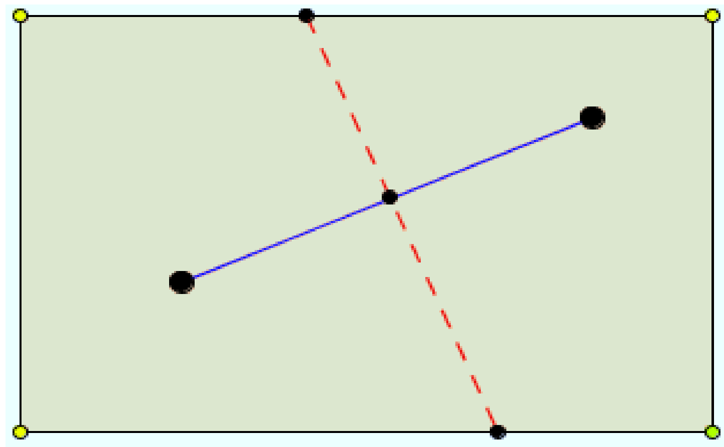


Figura 17. Rectas perpendiculares. Fuente: elaboración propia.

4. ¿Consideras que el doblez que se efectúa cuando se hacen coincidir los puntos M y R, es perpendicular al segmento $\overline{MR}$? ¿Podrías explicar por qué? ¿Qué clase de ángulos se forman?

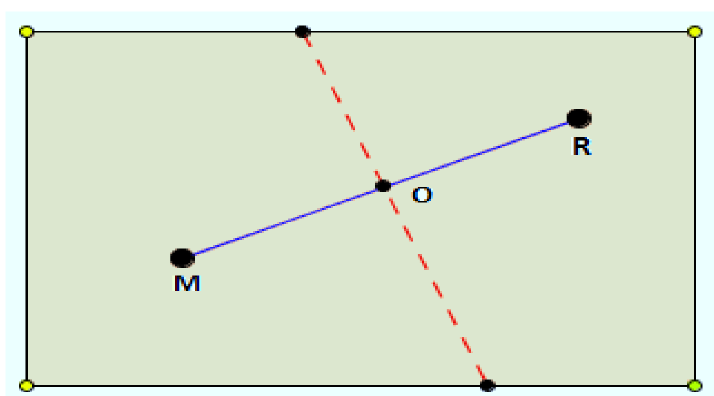


*Figura 18***.** Rectas perpendiculares (1). Fuente: elaboración propia.

Tabla 5

Cuarto descriptor del nivel I de razonamiento

Entrevista N° 4. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el cuarto descriptor. **“Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas”.**

Nota: En la que se aprecia el tipo de alcance que se busca en la entrevista del cuarto descriptor, en el nivel I del razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 1.4 del nivel I.

1. Observa las siguientes figuras.

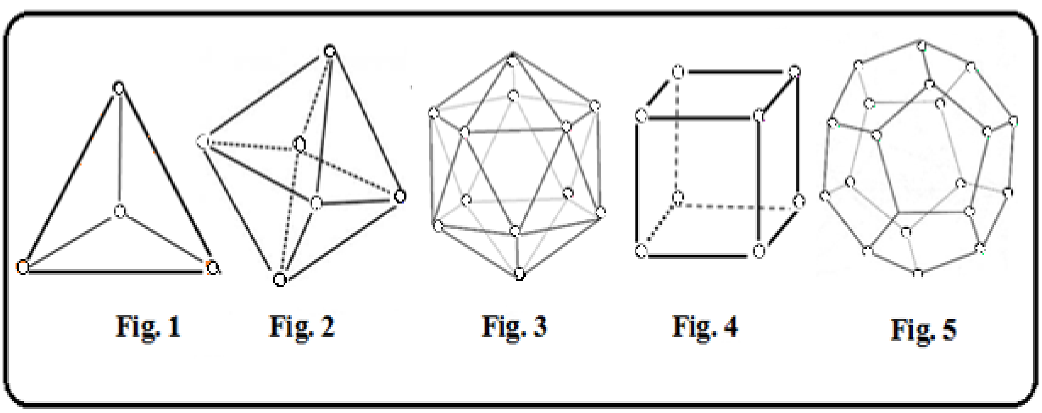


Figura 19. Elementos notables de los sólidos platónicos. Fuente: elaboración propia.

2. Utiliza los siguientes colores para resaltar en cada figura los vértices, las caras y las aristas, así:

   A. Vértices: rojo

   B. Caras: amarillo

   C. Aristas: azul

Considera el siguiente par de figuras que representan las aristas de un sólido platónico y las caras del mismo en origami.

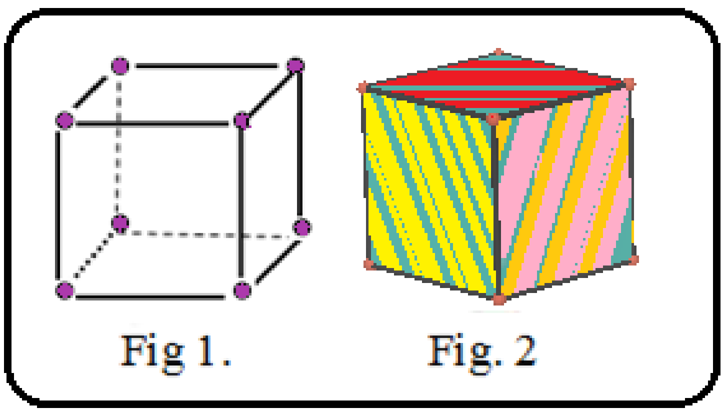


Figura 20. Comparación de poliedros con dos tipos de material.
Fuente: elaboración propia.

1. ¿Podrías indicar cuántas caras, vértices y aristas posee la figura 1?
2. Ahora haz lo mismo para la estructura de la figura 2.
3. ¿Cuál es la arista de mayor longitud?

4. Identifica el nombre de la figura plana que forman las caras de la figura 1 y 2:

   A. Triángulo

   B. Pentágono

   C. Cuadrado

   D. Hexágono.

Tabla 6

Aporte de información sobre elementos de un sólido platónico.

Aporte de información:
La superficie que hace firmes (estático) a un sólido platónico se llama CARA.
El lugar donde se unen los lados del cuerpo sólido se llama VÉRTICE.
Los segmentos de recta que se utilizan para construir el sólido se llaman ARISTAS

Nota: En la que se aprecia el aporte de la información necesaria para identificar los elementos de un sólido regular. Fuente: elaboración propia.

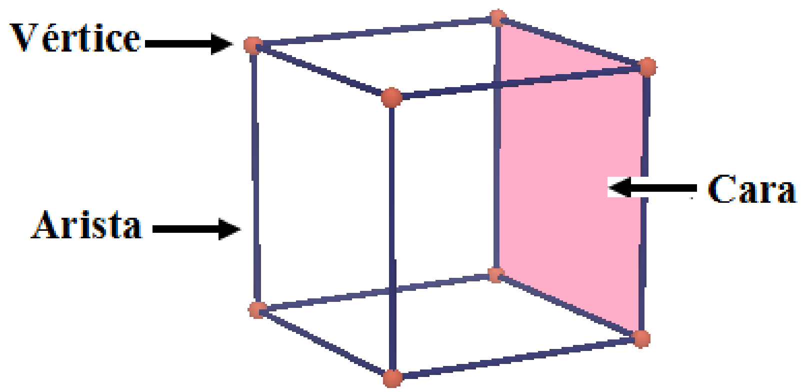


Figura 21. Elementos notables de un sólido. Fuente: elaboración propia.

Tabla 7.
Quinto descriptor del nivel I de razonamiento.

Entrevista N° 5. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el quinto descriptor. **“Distingue entre una figura plana y una redonda”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 5, nivel I de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 1.5 del nivel I.

1. Entre los siguientes conjuntos sólidos identifica y luego, señala cuáles son redondos y cuáles tienen caras planas.

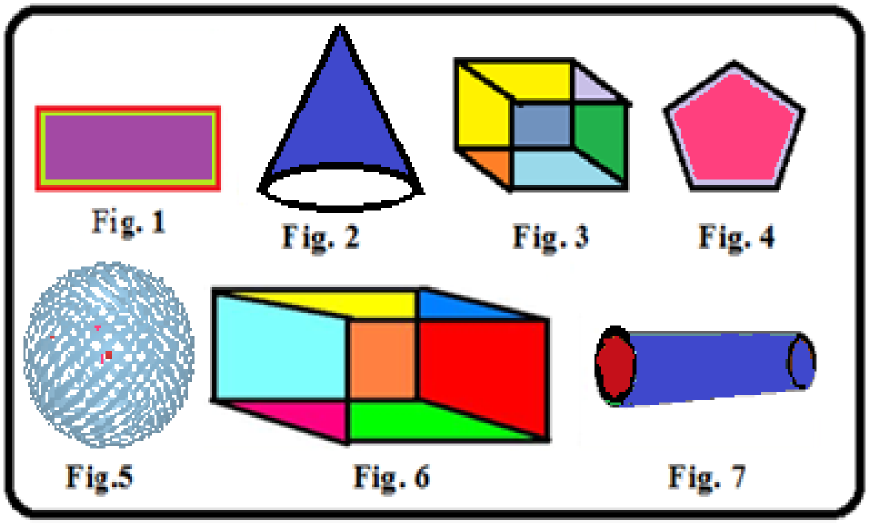


Figura 22. Sólidos y figuras geométricas planas. Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

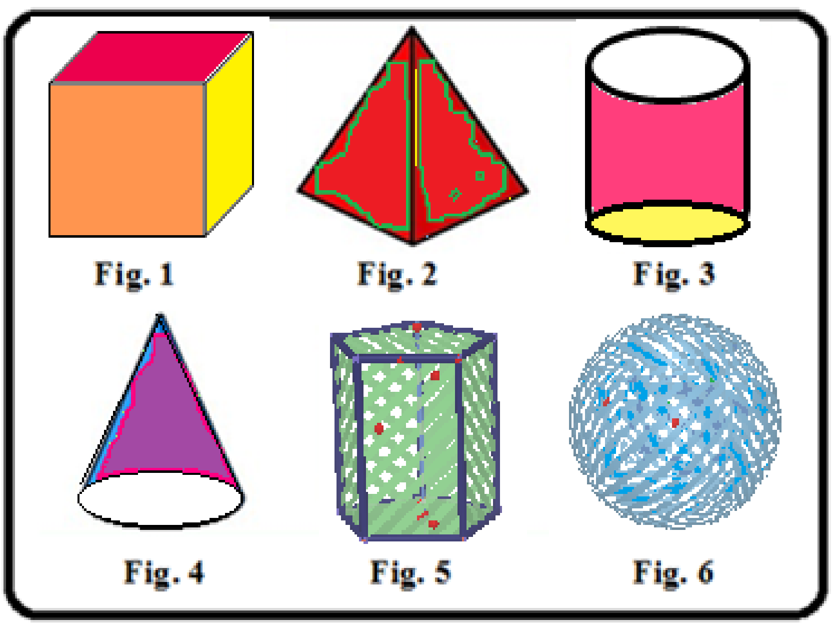


Figura 23. Sólidos regulares e irregulares. Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

2. ¿Cuáles de éstas figuras pueden rodar? ¿Por qué unas pueden rodar y otras no?
3. Si colocas la segunda figura del cuadro 2 (tetraedro) sobre una superficie plana. ¿Rodará?
4. ¿Explica por qué?
5. ¿Cuántas caras tiene esta figura (tetraedro)?
6. ¿En el tetraedro cuál es la cara de mayor área o superficie?

Tabla 8
Sexto descriptor del nivel I de razonamiento.

Entrevista N° 6. Nivel I de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el sexto descriptor. **“Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 6, nivel I de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 1.6 del nivel I.

3. Observa las siguientes figuras geométricas planas. Luego, señala las figuras que se te indican en su orden respectivo así:

A. Un pentágono.

B. Un triángulo.

C. Dos rectángulos.

D. Un hexágono.

E. Un rombo.

F. Una circunferencia.

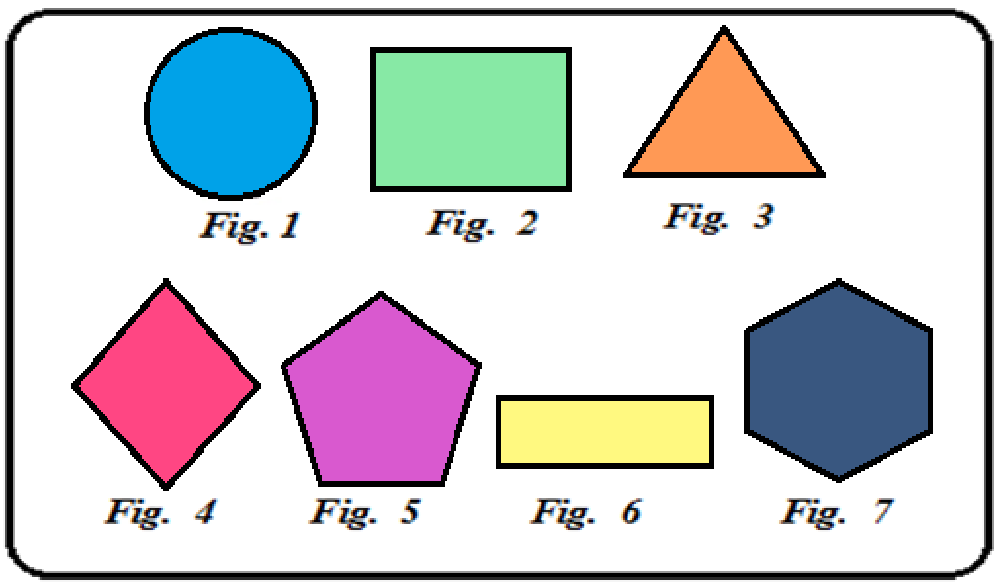


Figura 24. Figuras geométricas planas. Fuente: elaboración propia.

3.7.4 Entrevista nivel II. De análisis.

En este nivel se da importancia a la manera en que el estudiante, apoyado por el doblado del papel a través de la técnica denominada origami, utiliza los sólidos platónicos para tener un referente visual que le permita hacer comparaciones con las figuras elaboradas con pitillos y reconocer algunas propiedades matemáticas.

El estudiante en este nivel percibe los objetos de forma general, pero presenta dificultad para establecer relaciones entre las propiedades de una figura geométrica y otras semejantes. Las actividades desarrolladas por el estudiante para la comprensión de este nivel de razonamiento se encuentran soportadas por los siguientes descriptores:

3.7.4.1 Descriptores de nivel II.

Da cuenta de los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares. A través de la técnica del origami modular el estudiante:

- Reconoce los cinco poliedros construidos con dos tipos de material: pitillos de gaseosa y bloc iris.
- Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre un poliedro regular y uno irregular.
- Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.

Se hace mención de los descriptores de separación entre los niveles de razonamiento, que serán comprendidos de manera gradual una vez, la transición entre un nivel de razonamiento y otro permita reacomodar la estructura mental del estudiante, el cual se verá reflejado en la forma de comunicarse y expresarse en lo que se ha denominado como la red de relaciones mentales del individuo.

3.7.4.2 Descriptor de separación nivel III.

- El estudiante presenta dificultad para identificar y relacionar las propiedades de los sólidos platónicos, como figuras que se caracterizan por tener caras de igual forma, áreas con la misma superficie y segmentos de recta de igual longitud.
- El estudiante presenta dificultad para comprender por qué son solo cinco poliedros regulares.
- Al estudiante se le dificulta hallar la relación de Euler a través de la comparación de los cuerpos platónicos y comprender que ésta fórmula se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler.

3.7.4.3 Objetivos del nivel II de razonamiento.

Los siguientes objetivos se relacionan con lo que el estudiante debe saber a cerca de los poliedros, de las características de estos cuerpos y de los conceptos y estructuras que los conforman.

Los objetivos son:

- Reconocer los cinco poliedros platónicos como cuerpos regulares.
- Reconocer los cinco poliedros construidos con dos tipos de material: pitillos de gaseosa y bloc iris.

- Establecer comparaciones entre las estructuras de un cuerpo platónico elaborado con pitillos y doblado del papel (origami).
- Establecer comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre un poliedro regular y uno irregular.
- Identificar diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares

3.7.4.4 Actividades propuestas para el nivel II de razonamiento.

Para ente nivel de razonamiento se proponen actividades que involucran la entrevista de carácter socrático, con el propósito de demostrar que se cumplen los descriptores del primer nivel que se han mencionado en las actividades anteriores. En esta actividad se plantea una entrevista que permita al estudiante hacer comparaciones entre las construcciones de los sólidos platónicos a través de pitillos y de la técnica conocida como origami, para establecer relaciones entre estas figuras y así mismo, poder observar el razonamiento de estos estudiantes en torno a las construcciones realizadas.

Tabla 9

Primer descriptor del nivel II de razonamiento.

Entrevista N° 1. Nivel II de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el primer descriptor. **“Reconoce los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 1, nivel II de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 2.1 del nivel II.

1. En los siguientes sólidos geométricos se encuentran algunos que son regulares, identifícalos y luego, menciónalos de acuerdo con el número de la figura que le corresponde.

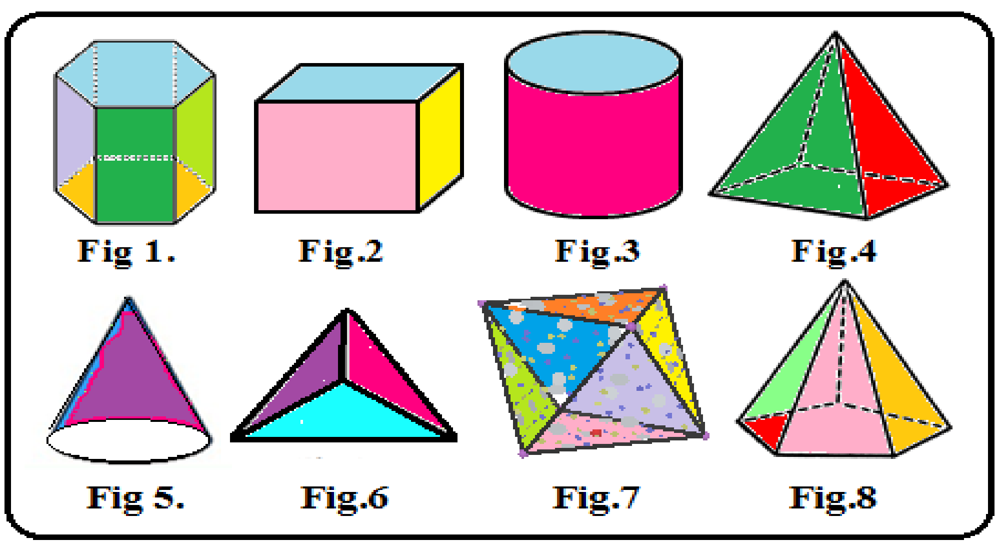


Figura 25. Sólidos regulares e irregulares (1). Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

2. ¿Podrías hallar la diferencia entre un sólido regular y uno irregular?
3. ¿Cómo son las caras de un sólido regular y uno irregular?
4. En la siguiente figura encontrarás algunos cuerpos dibujados.

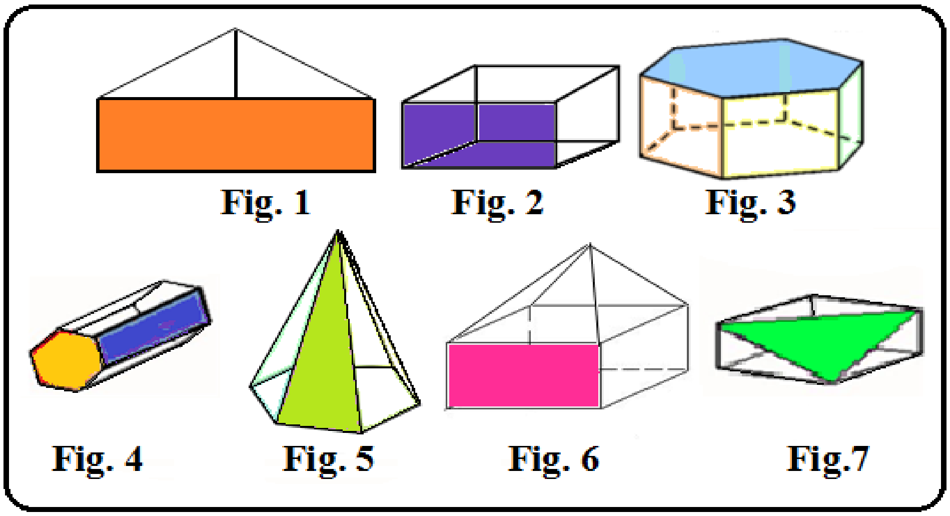


Figura 26. Elementos y formas comunes de los sólidos. Fuente: elaboración propia, en colaboración con el programa paint.

A. ¿Qué características comunes observas en todas estas figuras?
B. Describe cada una de las caras de las figuras, ¿Qué nombre reciben los polígonos que representan la parte o partes de colores en cada figura?

Tabla 10

Aporte de información sobre el concepto de poliedro.

Aporte de información:
Un poliedro es un cuerpo geométrico espacial cuyas caras se componen de una cantidad finita de polígonos planos que encierran un volumen finito y no nulo.

Nota: En la que se muestra el aporte de la información acerca de los poliedros. Fuente: elaboración propia.

Tabla 11

Segundo descriptor del nivel II de razonamiento.

Entrevista N° 2. Nivel II de razonamiento.
La entrevista contiene interrogantes relacionados con el segundo descriptor.
“Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre los poliedros regulares”.

Nota: En la que se describe la entrevista N° 2 con apartes del segundo descriptor, nivel II de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 2.2 del nivel II.

Observa la superficie de los siguientes cuerpos platónicos. En ellos encontrarás similitudes y diferencias, escribe algunas de ellas y argumenta tu respuesta.

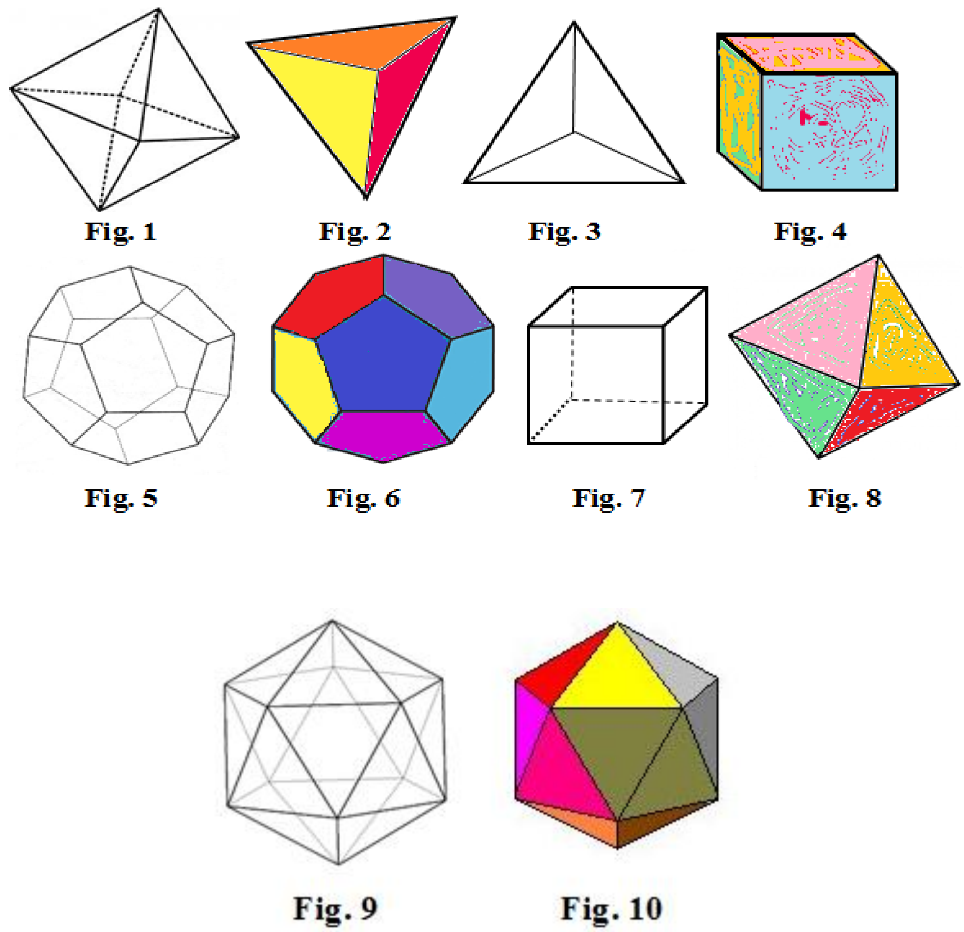


Figura 27. Diferencias y semejanzas entre poliedros construidos con pitillos y papel. Fuente: Elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

1. ¿Cuáles figuras tienen todas sus caras en forma de pentágono?
2. ¿Qué nombre recibe ese cuerpo platónico?
3. Observa cada uno de los cinco poliedros regulares del ejercicio 1 y completa la siguiente tabla.

Tabla 22
Elementos de los cuerpos platónicos.

Nombre del Poliedro	N° de Caras	N° de Vértices	N° de Aristas	C + V	(Caras+ Vértices) –Aristas

Nota: Tabla en la que se relacionan los elementos de los cuerpos platónicos. Fuente: elaboración propia.

Observa las figuras del siguiente cuadro. Luego, responde las preguntas.

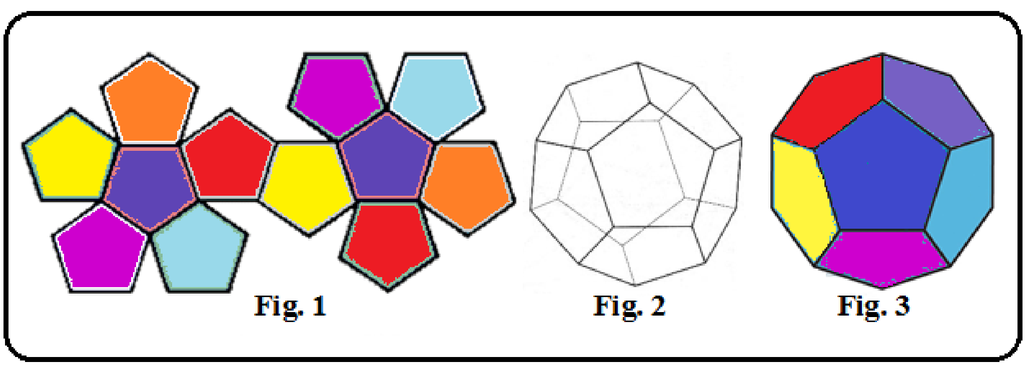


Figura 28. Comparación de diagrama, aristas y caras de un sólido platónico. Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

4. ¿Es posible construir la figura 3, con el diagrama que aparece en la figura 1? Justifica tu respuesta.

5. ¿Podrías decir qué relación encuentras entre las figuras 1, 2 y 3?
6. ¿Cuántas caras se unen en cada uno de los vértices de la figura 3?

En la siguiente figura podrás observar la representación de un poliedro. En él se indican algunos elementos característicos.

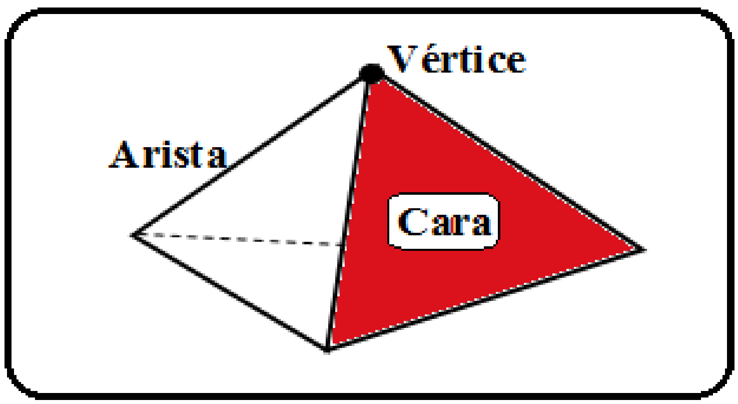


Figura 29. Elementos característicos de un sólido platónico. Fuente: elaboración propia.

7. ¿Cómo definirías cada uno de estos elementos?
8. ¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene este poliedro?
9. ¿Cuánto pueden sumar los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo?

Tabla 13

Tercer descriptor del nivel II de razonamiento

Entrevista N° 3. Nivel II de razonamiento La entrevista contiene interrogantes relacionados con el tercer descriptor. **“Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 3 con interrogantes relacionados con el segundo nivel de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 2.3 del nivel II.

1. Intenta dibujar el desarrollo de la siguiente figura en un trozo de cartulina.

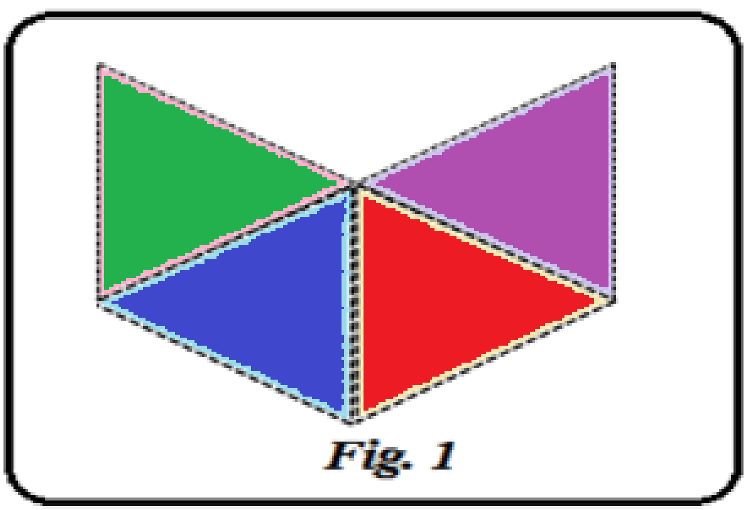


Figura 30. Diagrama para el desarrollo de un sólido. Fuente: elaboración propia.

2. ¿Crees que la figura 1, corresponde al desarrollo de un tetraedro?

Apreciación: En caso de que la respuesta sea afirmativa, se inicia con un diálogo socrático, en donde se plantea al estudiante una situación (contra ejemplo), de tal forma que éste pueda reflexionar acerca de la respuesta dada inicialmente y en la que pueda darse cuenta que aunque la figura 1, presenta el número correcto de piezas y la forma adecuada para desarrollar el sólido platónico denominado tetraedro, la posición de las piezas no es la correcta para poder armar el sólido.

Se entregará posteriormente, el material necesario para que el estudiante realice su propia construcción y lo haga razonar acerca de la respuesta dada

Se entregará al estudiante un nuevo diagrama para que lo dibuje, lo recorte y trate de armarlo (figura 2).

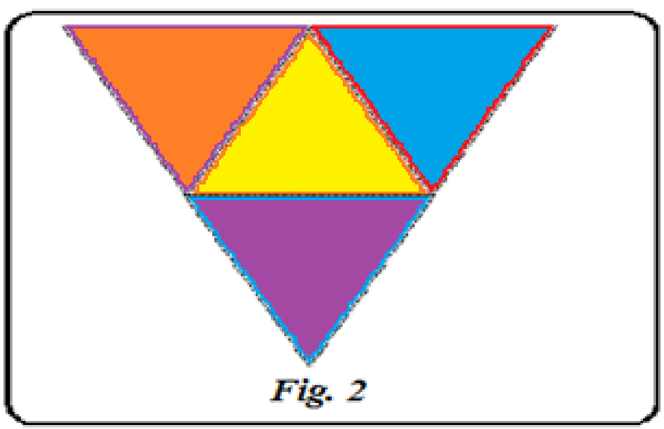


Figura 31. Diagrama para el desarrollo de un poliedro (1).
Fuente: elaboración propia.

3. ¿Es posible construir ahora el tetraedro con el diagrama de la figura 2? ¿Por qué?
4. Podrías decir entonces ¿Por qué no fue posible armar el sólido con la primera figura y con la segunda, si es posible?

Compara los siguientes diagramas y luego, responde los interrogantes.

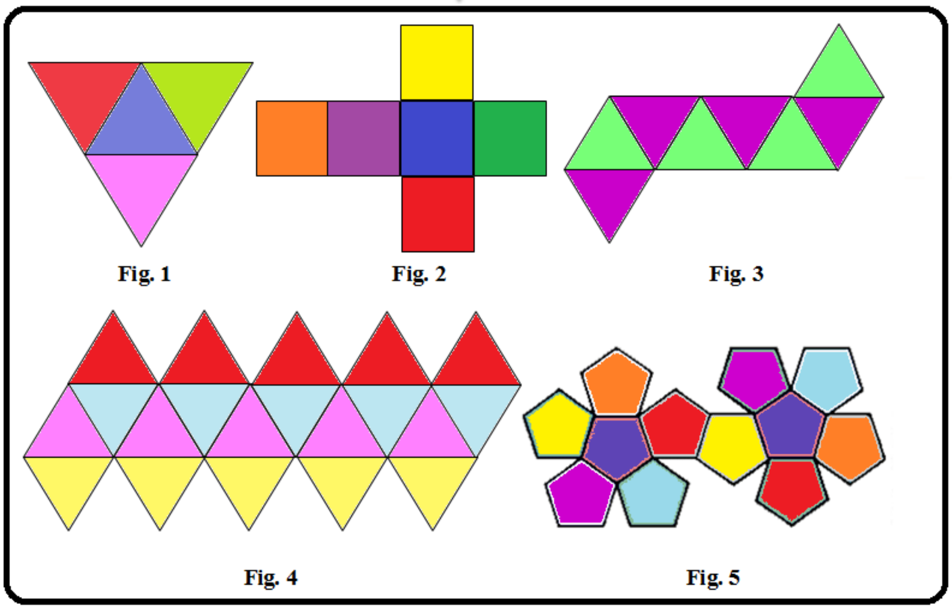


Figura 32. Diagramas para desarrollar poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

5. ¿Qué forma y tamaño tienen las cars de cada uno de estos diagramas?

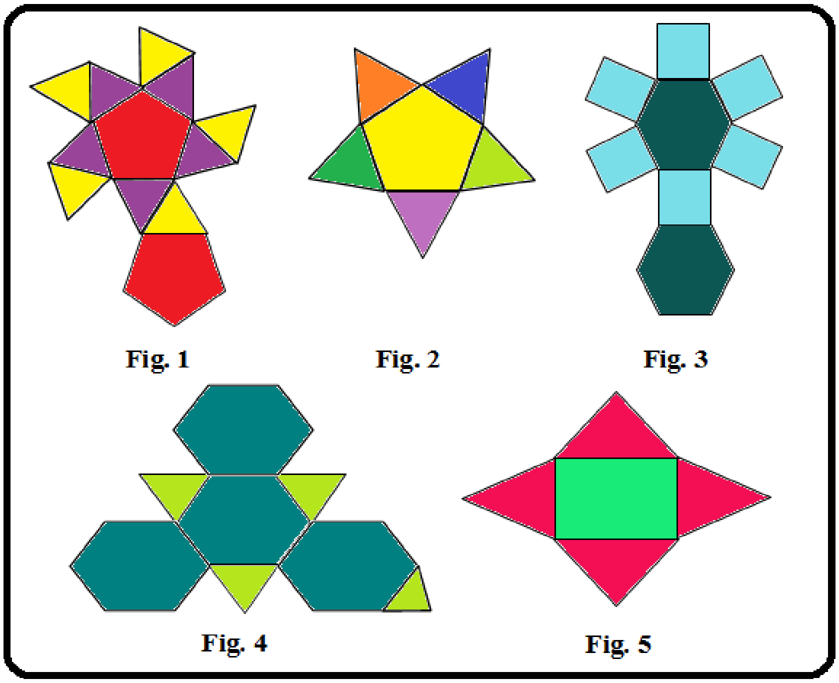


Figura 33. Diagramas para desarrollar poliedros irregulares. Fuente: elaboración propia.

6. Las figuras anteriores corresponden al desarrollo de algunos sólidos, ¿Podrías establecer la diferencia entre el primer grupo de figuras y el segundo? Justifica tu respuesta.
7. ¿Qué características son semejantes en los dos grupos de figuras? Explica por qué.
8. ¿Qué diagrama permite construir el icosaedro? ¿Por qué?
9. ¿En cuál grupo se encuentra este diagrama?
10. ¿Cuál permite construir el hexaedro? Explica por qué.

3.7.5 Entrevista Nivel III.

Para este nivel, el estudiante a través de la observación y manipulación de los objetos geométricos logra percibir las propiedades que poseen con mayor claridad. Pero tiene dificultad para establecer relaciones entre unas propiedades y otras, debido a su independencia y separación en la que se encuentran. Es posible que un estudiante ubicado en este nivel de razonamiento defina conceptos geométricos formalmente.

3.7.5.1 Descriptores de nivel III. De clasificación.

Para este nivel se define un conjunto de acciones que el estudiante debe efectuar para consolidar la red de relaciones a través de los siguientes descriptores:

- Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.
- Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas.
- Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.
- Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler.
- Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos.

3.7.5.2 Objetivos del nivel III de razonamiento.

Los objetivos en este nivel están relacionados con la comprensión de algunas propiedades de los sólidos platónicos, de la forma en que el estudiante razona frente a un conjunto de actividades propuestas, de tal manera, que pueda refinar el uso del lenguaje a través de la manipulación de material concreto, en este caso, la construcción de éstos poliedros por medio del origami y pitillos, para hacer las respectivas comparaciones y elaborar sus propios conceptos. Los objetivos que se proponen son los siguientes:

- Reconocer que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales.
- Reconocer que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas.
- Afirmar que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales.
- Comprender por qué solo existen cinco sólidos platónicos.
- Hallar la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler.
- Comprender por qué son solo cinco sólidos platónicos.

3.7.5.3 Actividades propuestas para el nivel III de razonamiento.

En este nivel de razonamiento se proponen las siguientes actividades con el fin de que el estudiante exprese sus conocimientos sobre las propiedades que cumplen los sólidos platónicos, que establezca comparaciones por medio del uso de material concreto: sólidos construidos con pitillos de gaseosa y con papel de colores-origami. Que de ser posible, pueda también encontrar alguna generalización entre estos cuerpos geométricos regulares.

Tabla 14
Primer descriptor del nivel III de razonamiento.

Entrevista N° 1. Nivel III de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el primer descriptor. **“Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 1 con interrogantes relacionados con el nivel III de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 3.1 del nivel III.

1. Observa las siguientes figuras:

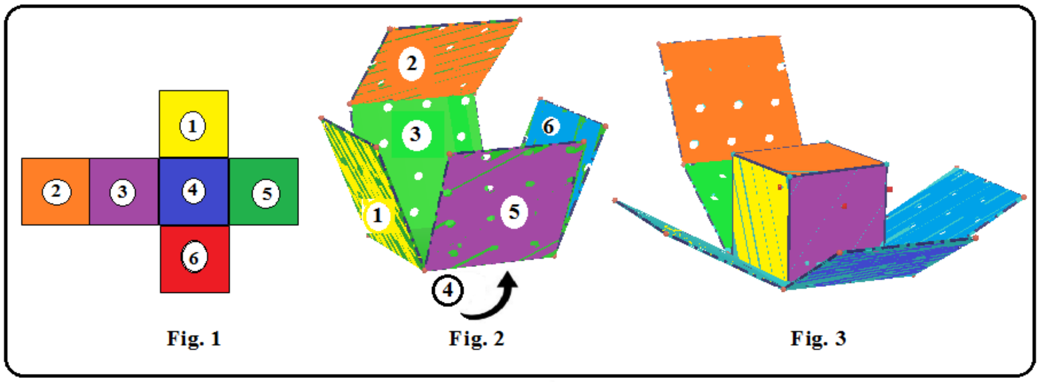


Figura 34. Diagrama para desarrollar un hexaedro regular. Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

2. ¿Cómo son las superficies de las figuras 1 y 2?
3. Ahora observa los siguientes poliedros regulares y menciona el nombre de cada uno de ellos.

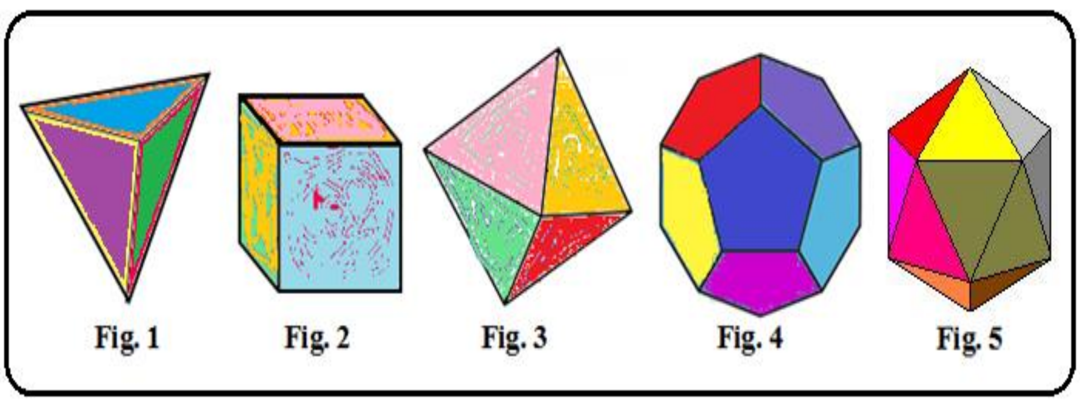


Figura 35. Estructura de los poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

4. ¿Cuántas caras se unen en cada uno de los vértices de cada poliedro regular?

5. Dibuja un polígono regular y uno irregular. Explica sus semejanzas y diferencias.
6. ¿Podrías decir cómo son las caras de los cinco sólidos platónicos?

Tabla 15
Segundo descriptor del nivel III de razonamiento.

Entrevista N° 2. Nivel III de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el segundo descriptor. **“Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 2 con interrogantes relacionados con el nivel III, segundo descriptor de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 3.2 del nivel III.

1. En los siguientes sólidos podrás identificar claramente sus elementos, ¿Podrías identificar en cada uno de ellos la cantidad de caras y de aristas que concurren en un vértice?

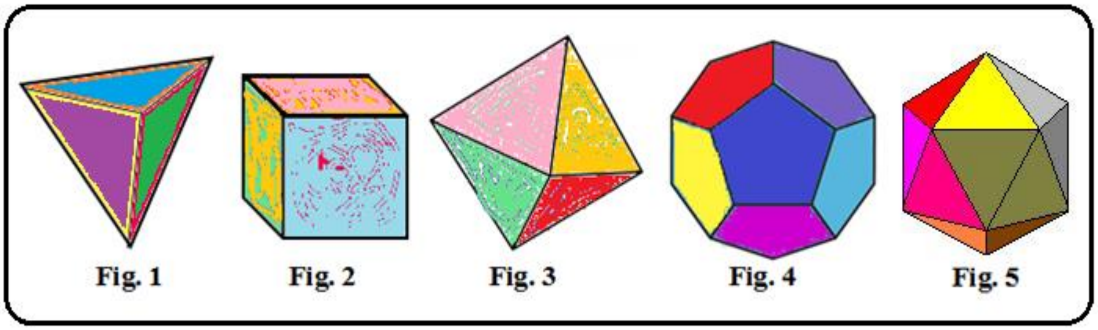


Figura 36. Estructura de los cuerpos platónicos y elementos constitutivos. Fuente: elaboración propia.

2. ¿Qué relación encuentras en el ejercicio anterior?
3. Realiza el mismo ejercicio con los siguientes sólidos irregulares.

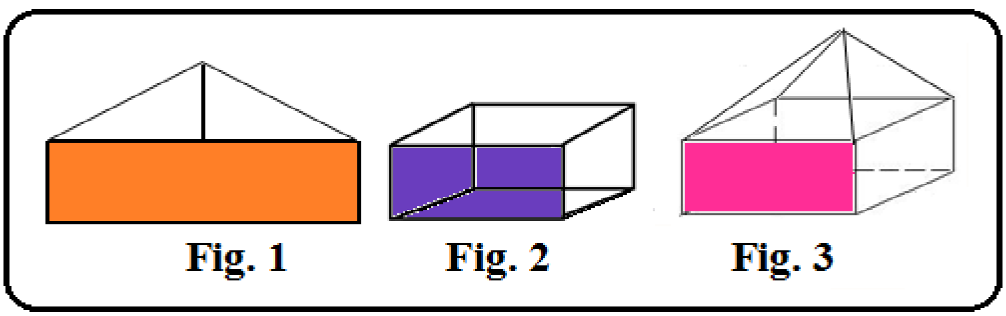


Figura 37. Estructura de los sólidos irregulares y elementos constitutivos. Fuente: elaboración propia.

4. ¿Consideras que la relación de los sólidos regulares se cumple también para los sólidos irregulares?

Tabla16.
Tercer descriptor del nivel III de razonamiento

Entrevista N° 3. Nivel III de razonamiento.
La entrevista contiene interrogantes relacionados con el tercer descriptor.
“Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales”.

Nota: En la que se describe la entrevista N° 3 con interrogantes relacionados con el nivel III, tercer descriptor de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 3.3 del nivel III.

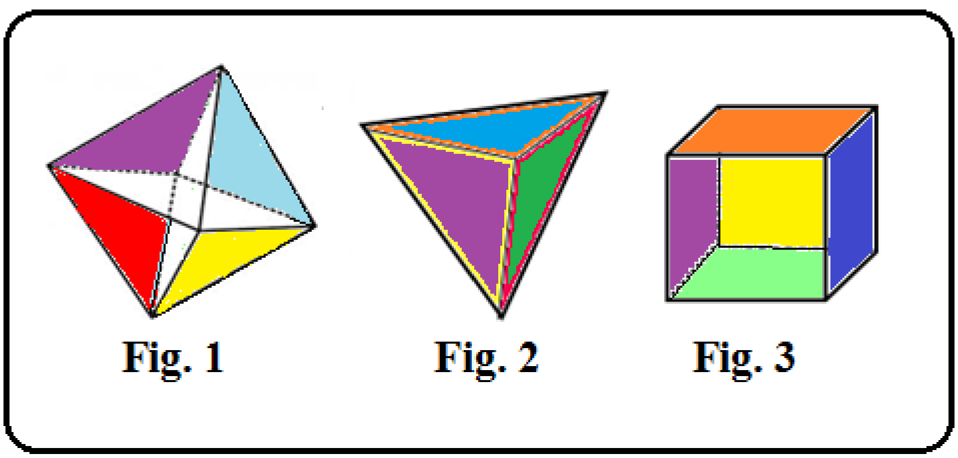


Figura 38. Poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

Para cada sólido, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo?

2. ¿Cuántos ángulos tiene una cara?
3. ¿Cuál es el ángulo de mayor abertura?
4. ¿Cuántos ángulos tiene cada poliedro?
5. ¿Cuántas aristas llegan al vértice del tetraedro?
6. ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?
7. ¿Cuántas caras llegan a una arista?

Una arista y dos caras forman un **ángulo diédrico**.

8. Ahora observa el siguiente poliedro.

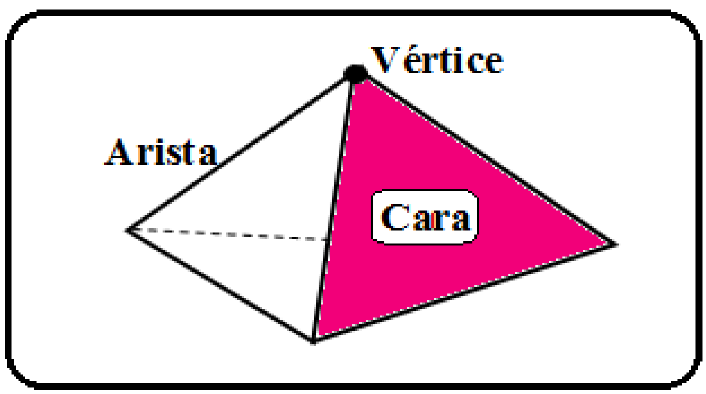


Figura 39. Elementos de un poliedro regular (tetraedro). Fuente: elaboración propia.

9. ¿Cuántas caras se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este tetraedro?
10. ¿Cuánto pueden sumar los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo?

Tabla 17

Aporte de información sobre ángulo diedro.

Aporte de información: **Ángulo diedro**
Dos planos que se cortan, dividen el espacio en cuatro regiones. Cada una de ellas se llama **ángulo diedro** o simplemente **diedro**. Las **caras** del diedro son los semiplanos que lo determinan y la recta común a las dos caras se llama **arista**.

Nota: En la que se muestra el tipo de aporte de la información: ángulo diedro. Fuente: elaboración propia.

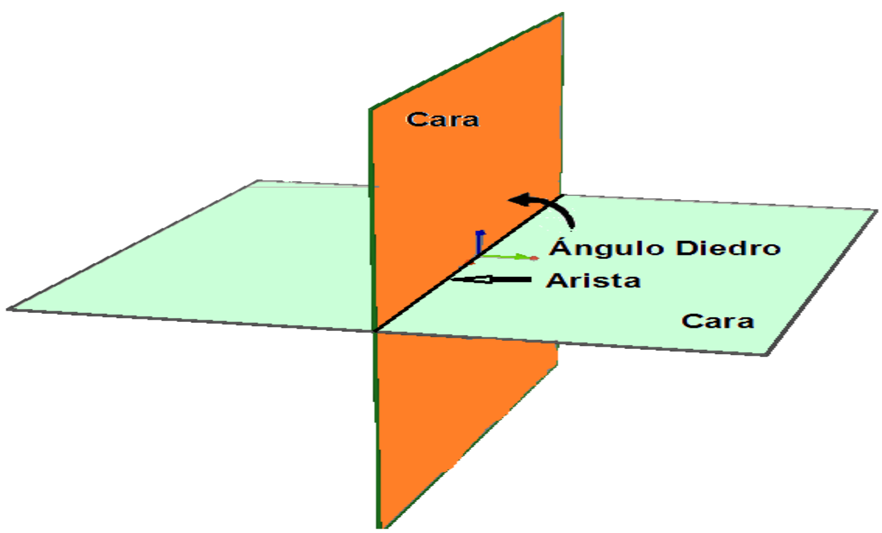


Figura 40. Estructura para identificar un ángulo diedro. Fuente: elaboración propia, en colaboración con los programas Cabri 3D y paint.

Apreciación. Con dos caras no es posible dibujar un poliedro y tampoco con más de cinco caras porque la suma de los ángulos interiores de los ***polígonos regulares*** que se juntan en un vértice ***deben valer menos de 360º***

Si intentáramos construir una figura cuya suma de sus ángulos sea igual a 360°, independientemente de cuál sea la medida de cada ángulo, al doblar la figura por las líneas para elevar el ángulo y crear el volumen de dicha figura, resultaría imposible crear un ángulo poliedro, lo cual ocurre porque estaríamos trabajando con un plano. Un ejemplo ilustrativo para aclarar lo anterior es el que observaremos a continuación.

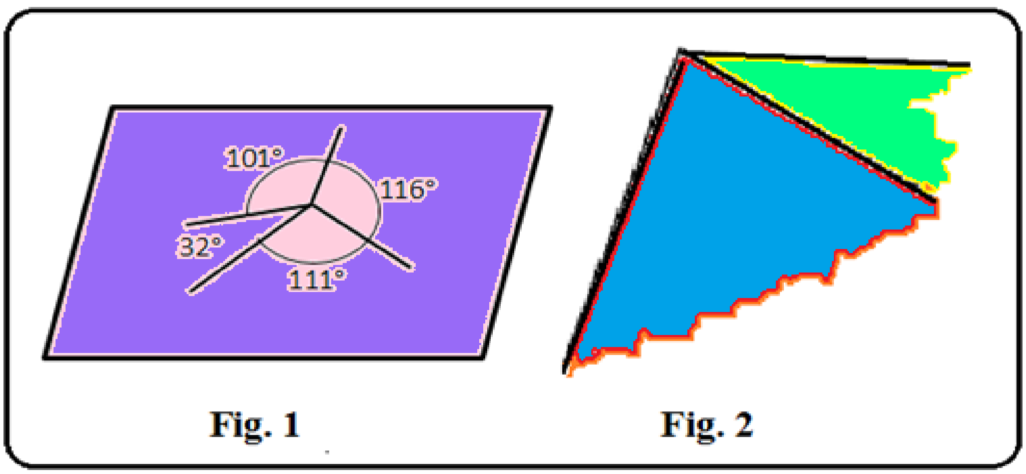


Figura 41. Ángulos interiores de un sólido para crear su volumen. Fuente: elaboración propia.

Si se suprime uno de los ángulos de la figura 1. Es posible construir el ángulo poliedro de la figura 2. De esta forma se concluye que la suma de los ángulos del poliedro debe ser menor de 360°.

Tabla 18

Cuarto descriptor del nivel III de razonamiento.

Entrevista N° 4. Nivel III de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el cuarto descriptor. **"Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler".**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 4 con interrogantes relacionados con el nivel III, cuarto descriptor de razonamiento. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 3.4 del nivel III.

1. Observa nuevamente los siguientes sólidos platónicos y luego, completa la tabla.

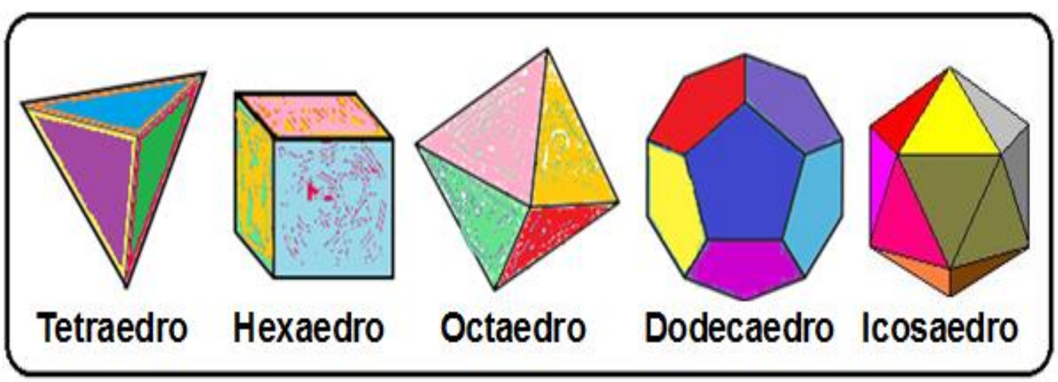


Figura 42. Características y elementos comunes de los poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

Tabla 19

Relación de Euler para los sólidos platónicos.

Nombre de Poliedro	Nª de Caras	Nª de Vértices	C + V	Nª de Aristas	(C + V) – A
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					

Nota: Tabla en la que se anota el número de elementos de cada poliedro regular para hallar la relación de Euler. Fuente: elaboración propia.

2. Ahora observa los siguientes sólidos.

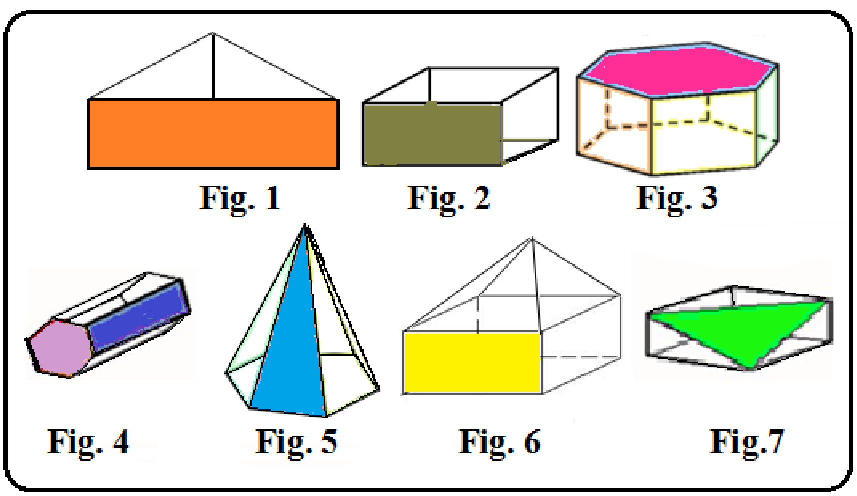


Figura 43. Diferencias y semejanzas entre los elementos de un poliedro regular y uno irregular. Fuente: elaboración propia.

3. ¿Podrías clasificarlos?

4. Intenta ahora completar una tabla similar a la trabajada en el punto 1.

Tabla 20
Relación de Euler para todos los poliedros.

Nombre de Poliedro	**Número de Caras**	**Número de Vértices**	**C + V**	**Número de Aristas**	**(C + V) – A**
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					

Nota: Tabla en la que se establece la relacione de Euler para poliedros regulares e irregulares. Fuente: elaboración propia.

5. En la relación de Euler, la suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas siempre es igual a 2, ¿Esta fórmula se cumple para todos los sólidos o sólo para los regulares? Justifica tu respuesta.

Apreciación : En caso de que la respuesta sea negativa, se inicia con un diálogo socrático, en donde se plantea al estudiante una situación (contra ejemplo), de tal forma que éste pueda reflexionar acerca de la respuesta dada inicialmente y en la que pueda darse cuenta que esta fórmula se cumple para todos los poliedros.

Se entregará posteriormente, el material necesario para que el estudiante realice su propia construcción y lo haga razonar acerca de la respuesta dada.

Se entregará al estudiante un nuevo diagrama para que lo dibuje, lo recorte y trate de armarlo (figura 2). Por ejemplo si tomamos un cubo cualquiera este tendrá seis caras, ocho vértices y doce aristas. $\boldsymbol{C = 6}$, $\boldsymbol{V = 8}$, $\boldsymbol{A = 12}$. En este caso de donde fácilmente vemos que:

$$\boldsymbol{C + V - A = 6 + 8 - 12 = 2}$$

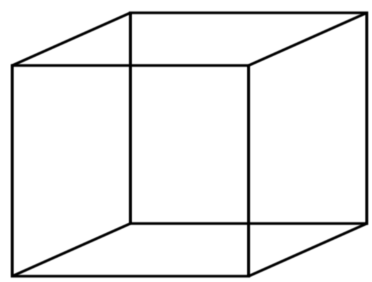


Figura 44. Poliedro regular (hexaedro).
Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, si realizamos un corte en una esquina obtenemos un nuevo poliedro irregular que guarda la misma relación entre sus caras, aristas y vértices.

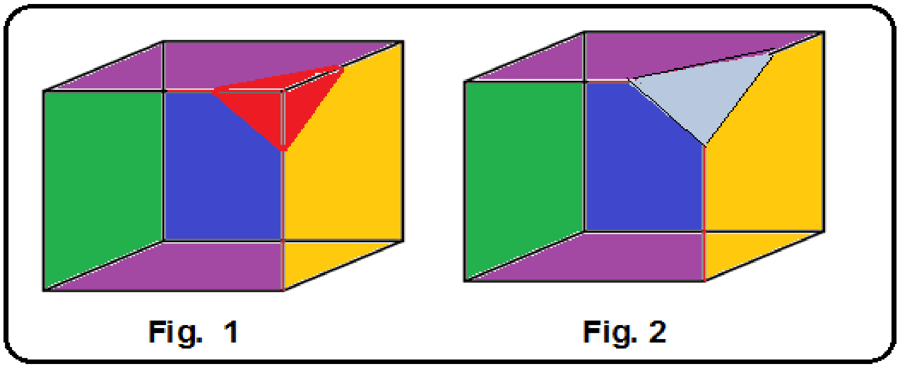


Figura 45. Poliedro regular convertido en irregular para comprobar la relación de Euler. Fuente: elaboración propia.

Cuenta ahora nuevamente las caras, los vértices y las aristas de este nuevo sólido irregular y aplica la fórmula de Euler, ¿Qué puedes concluir?

6. ¿Se cumple entonces la relación de Euler para este nuevo sólido irregular?
7. Escribe tus propias conclusiones.

Tabla 21
Aporte de información sobre la relación de Euler.

Aporte de información
Si se aplica un corte a un poliedro regular, no importa cuántos cortes se le hagan, ni la forma irregular que resulte, la relación de Euler se cumplirá siempre. En todos los poliedros se cumple siempre que el número de caras más el número de vértices menos el número de aristas es igual a dos: **C + V - A = 2**

Nota: En la que se muestra el tipo de aporte de la información: aplicación de corte a poliedro regular. Fuente elaboración propia.

Esta relación es la siguiente: La suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas siempre es igual a dos.

Tabla 22

Quinto descriptor del nivel III de razonamiento

Entrevista N° 5. Nivel III de razonamiento. La entrevista contiene interrogantes relacionados con el quinto descriptor. **“Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos”.**

Nota: En la que se describe la entrevista N° 5 con interrogantes relacionados con el nivel III, quinto descriptor de razonamiento: compresión de solidos platónicos. Fuente: elaboración propia.

Descriptor 3.5 del nivel III.

A través de la serie de actividades propuestas, el estudiante ya debe reconocer que es un poliedro regular, al igual que las partes que los componen; así, denominaremos con algunas letras sus elementos constitutivos:

- **C** a su número de caras.
- **n** al número de lados de cada cara.
- **V** a su número de vértices.
- **A** el de aristas y,
- **m** al número de aristas concurrentes en un mismo vértice.

1. Con la siguiente fórmula: $C = \frac{4m}{2\,(m+n)-(mn)}$ remplaza los valores dados y trata de identificar el tipo de poliedro que resulta.

Te presentamos un ejemplo: Si n = 3 y m= 3, se obtiene lo siguiente.

$$C = \frac{4 * 3}{2\ (3 + 3) - (3 * 3)}$$

$$C = \frac{12}{2\ (6) - (9)}$$

$$C = \frac{12}{12\ - 9}$$

$$C = \frac{12}{3}$$

$C = 4$, se obtiene el tetraedro regular con cuatro caras.

2. Realiza el mismo procedimiento con los siguientes datos: n = 3, m = 4, ¿Cuántas caras tendrá este poliedro?
3. Haz los mismo para: n = 3, m = 5, ¿Cuántas caras tendrá este poliedro?
4. De igual forma para: n = 3, m = 6, ¿Se obtiene algún poliedro?
5. Ahora intenta cuando n = 4, m = 3, ¿Cuántas caras tendrá este poliedro?
6. Finalmente, qué sucede cuando: n = 5, m = 3, ¿Qué tipo de poliedro se obtiene?

Tabla 23

Aporte de información sobre los poliedros regulares.

Aporte de información:
Existen dos condiciones básicas para que se forme un poliedro: 1. En un vértice de un ángulo poliédrico han de concurrir tres o más caras. 2. La suma de los ángulos de las caras de un ángulo poliédrico ha de ser menor que 360 grados
$$C = \frac{4m}{2\ (m+n)-(mn)}$$
Esta fórmula algebraica permite inferir por qué sólo existen 5 poliedros regulares.

Nota: En la que se muestra el tipo de aporte de la información: condiciones básicas para la formación de poliedros. Fuente: elaboración propia.

CAPÍTULO 4

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El proceso de análisis de la información, una vez observado el razonamiento de los estudiantes que participaron en este proceso investigativo, se centró en la estructura de cada una de las categorías de los niveles de razonamiento de acuerdo a los criterios de Van Hiele, con un propósito en particular sobre el objeto de estudio matemático.

La entrevista de carácter socrático aplicada arrojó unos resultados significativos, que dan respuesta al objetivo y a la pregunta de investigación, en este análisis se darán a conocer de forma detallada cada uno de los resultados obtenidos. De igual forma, se resalta la importancia de las actividades escritas para cada nivel de razonamiento y la observación como instrumento para la descripción de los resultados.

Dichos niveles de razonamiento fueron manifestados por los estudiantes en la medida en que se desarrollaron las entrevistas para cada nivel y en cada actividad propuesta, elementos que permitieron el refinamiento de los descriptores para una mejor interpretación de las respuestas dadas por los estudiantes.

El tipo de preguntas efectuadas de manera inquisitiva, hicieron posible la caracterización de los niveles en los cuales se encontraban los estudiantes de quinto grado, articulado con la red de relaciones sobre la comprensión de la fórmula de Euler, que se pudo evidenciar en varios momentos de la entrevista, por un lado, a través de la construcción de los sólidos platónicos con material concreto; pitillos de gaseosa y origami y por otro, a través de la comparación de estos poliedros para generalizar el teorema de Euler que cumplen no sólo los poliedros regulares, sino que se cumple también para todos los sólidos convexos y finalmente, inferir porqué son solo cinco sólidos regulares.

El análisis de los resultados de esta investigación comienza en primera instancia, con la selección de los estudiantes para el estudio fenomenológico de la siguiente manera: se propone a los estudiantes de quinto grado elaborar los cinco sólidos platónicos con dos tipos de material; con pitillos en donde se puede apreciar las aristas y la estructura de las figuras y con papel iris, para observar las caras y el cuerpo de las figuras.

El objetivo de estas dos actividades es poder clasificar a los cuatro estudiantes como objeto de estudio, teniendo en cuenta el trabajo desarrollado en la construcción de los poliedros, del interés demostrado por hacer un buen ejercicio práctico y de la voluntad para ser tenido en cuenta en las demás actividades que se derivan de este proceso.

Figura 46. Actividad práctica: construcción de poliedros con pitillos de gaseosa. Fuente: elaboración propia.

Figura 47. Actividad práctica: construcción de poliedros usando bloc iris y la técnica del origami. Fuente: elaboración propia.

Figura 48. Actividad práctica: construcción de poliedros con bloc iris y la técnica del origami (1). Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, se convocaron 12 estudiantes para realizar una segunda tarea consistente en resolver un cuestionario relacionado con el primer nivel de razonamiento (de reconocimiento visual). Se pudo hacer la selección con aquellos que mostraron una mayor participación, compromiso y seriedad en el trabajo propuesto y cuyas respuestas fueron consideradas apropiadas para este nivel.

Figura 49. Actividad escrita para la selección de estudiante. Fuente: elaboración propia.

De igual forma, esta actividad también ayudó a rediseñar los descriptores hipotéticos que se tenían inicialmente, para poder definir los que pudieran dar respuesta a los objetivos y a la pregunta de investigación, de ahí la importancia que se dio en primera instancia a esta actividad escrita, como instrumento previo para el desarrollo de la entrevista socrática.

La selección de los cuatro estudiantes de quinto grado, producto de las respuestas proporcionadas por éstos en la primera actividad escrita y del primer nivel de razonamiento, se llevó a cabo en horario extra clase y en jornada contraria a sus actividades curriculares habituales, ejercida por los responsables de la investigación. En dicha actividad escrita se evaluaron algunos conceptos relacionados con la identificación de los elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: identificar una recta, un segmento de recta, un punto, líneas paralelas, líneas perpendiculares, entre otros.

Se tuvieron en cuenta conceptos como: por dos puntos pasa una única recta, identificar algunas figuras geométricas planas como triángulo, rectángulo, pentágono, hexágono, diferencias existentes entre una figura plana y una redonda.

Con los sólidos platónicos construidos con pitillos y origami, los estudiantes encontraron una manera distinta de responder a los interrogantes de la prueba escrita, al poder manipular el material concreto, ellos compararon las figuras que realizaron, contaron las caras, los vértices y las aristas de cada figura y finalmente, respondieron los cuestionarios asignados por el equipo investigador.

Una de las ventajas de realizar esta primera tarea escrita, es la de posibilitarle al entrevistado la adquisición de algunas herramientas para brindarle confianza al estudiante, seguridad, afianzamiento de términos y conceptos, para los momento subsecuentes de las actividades para los niveles dos y tres y por ende, para desarrollar la entrevista de tipo socrático. En este mismo sentido, las actividades propuestas conducen al estudiante a reflexionar acerca de las dudas y poder comprender mejor los conceptos relacionados con el objeto de estudio de manera progresiva y gradual.

La triangulación de la información con las respuestas y resultados proporcionados por el grupo focalizado permiten determinar si verdaderamente estos estudiantes responden correctamente los cuestionamientos planteados de acuerdo a cada uno de los niveles de razonamiento que propone Van Hiele y los descriptores ya depurados, considerados como material significativo para el análisis de la información recogida durante el desarrollo de la investigación.

El lenguaje usado por los estudiantes es el principal vehículo que permite identificar las concepciones que tienen sobre los temas abordados y desarrollados en el contexto geométrico, al igual que la experiencia obtenida cuando se les propuso a todos ellos elaborar los cinco poliedros con material concreto, pitillos de gaseosa y la técnica del origami, para poder comprender conceptos específicos como caras, vértices, aristas, formas geométricas, ángulos, ángulo diédrico, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otros elementos.

De esta manera, el estudiante pudo manipular, observar, analizar y comprender las estructuras y los elementos que los contienen. Se pudo demostrar que los conceptos se pueden construir con mayor sentido si el estudiante encuentra otras formas de apropiación de los contenidos orientados por el docente, en este caso, al tener en sus manos el material manipulable y concreto, particularmente para la comprensión de la dimensión espacial, en donde es importante que se puedan apreciar todos los elementos, formas y características de las figuras tridimensionales.

Una vez finalizada esta primera etapa de la investigación, los estudiantes ya tienen una idea más clara del trabajo que sigue y del significado de haber desarrollado la construcción de los poliedros con los dos tipos de material sugerido.

Un primer momento en el proceso de aplicación de la entrevista socrática consistió en poder refinar los descriptores y las preguntas, de tal manera, que al ser aplicados nuevamente, pudieran arrojar los resultados y respuestas esperadas. Este proceso se hizo en la medida en que las entrevistas se llevaron a cabo, para poder establecer comparaciones que hicieran posible el perfeccionamiento y validez de la misma, al igual que la confiabilidad de los resultados.

Uno de los aspectos relevantes durante el proceso de la construcción de los poliedros con material concreto, es precisamente, la disposición de los estudiantes seleccionados para continuar en el proceso de clasificación en la siguiente actividad, dada la dedicación, compromiso, responsabilidad, entusiasmo, estética y participación activa en el momento de desarrollar la guía didáctica propuesta para identificar sus concepciones en torno a los poliedros regulares

Los cuatro estudiantes con el mejor desempeño durante las dos actividades aplicadas, fueron convocados junto con sus padres para firmar una carta de compromiso y para obtener el consentimiento de los mismos en el proceso de la investigación. Por motivos de confidencialidad, los estudiantes estuvieron de acuerdo en mantener su nombre en secreto, por esta razón, ellos mismos eligieron un seudónimo. Un niño y tres niñas son los participantes en este proceso investigativo así: Pablo, Susana, Kriss y Paola.

4.2. ANÁLISIS DEL PROCESO DE RAZONAMIENTO DE CADA ESTUDIANTE

En este apartado, se efectuará el análisis del proceso de razonamiento demostrado por cada estudiante en correspondencia con las entrevistas descritas para cada uno de los niveles descritos en el modelo geométrico de Van Hiele.

4.2.1 Análisis del proceso de razonamiento demostrado por Susana.

La estudiante que de aquí en adelante será nombrada con el seudónimo de Susana, actualmente se encuentra cursando el grado quinto en una Institución

Educativa del Municipio de Carepa, fue seleccionada para participar en el proceso de investigación por haber mostrado un excelente desempeño, compromiso, entusiasmo y cumplir con las actividades propuesta por el grupo investigador en relación con el campo de la geometría y el área de la matemática.

Esta niña se caracteriza por tener gran sentido de responsabilidad, dinamismo, participación, inquieta, extrovertida, creativa, preocupada, disciplinada y con espíritu de auto exigencia para adquirir conocimientos que le ayuden a crecer como persona.

Para el análisis y triangulación de la información concerniente al objeto de estudio matemático se tuvieron en cuenta los instrumentos descritos para esta investigación, que corresponden a observación, las actividades escritas y la entrevista.

Por consiguiente, los elementos antes mencionados permitieron conocer la realidad del estudiante en cuanto a su razonamiento de una forma más eficiente y precisa. Es importante aclarar, que durante las entrevistas los estudiantes tuvieron a su alcance algunos materiales para hacer construcciones, cortes, doblado de papel, trazos, y acciones que les permitieron una mejor comprensión de las preguntas efectuadas y por ende, poder dar respuestas concretas.

Debido a la extensión de las actividades y de las entrevistas, sólo se tienen en cuenta algunos momentos relevantes en el que se evidencia el uso del lenguaje y de las construcciones llevadas a cabo por Susana, en donde además, es notorio el progreso en cuanto al alcance de los niveles II y III de razonamiento. Esto se observa en los descriptores: 2.2; 3.4 y 3.5.

Tabla 24

Relación de Euler elaborada por Susana (1).

Susana.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) − A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la misma se evidencia como, da resolución a los descriptores de los niveles II y III de razonamiento. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

A	C	V	C+V	(C+V)−A
15	17	10	17	2

C= Caras.
V= Vertices.
A= Aristas.

R·/ Yo concluí que cuando lo hise con los solidos regulares me dio 2 y cuando lo hice con los irregulares me dio 2. por lo cual es lo mismo

24 R·/ Si, por que ese cubo esta irregular y tiene mas caras, en cambio que con el regular tiene menos caras y si se cumple la relación de Euler.

Figura 50. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusiones. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

Tabla 25

Relación de Euler para los poliedros irregulares.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Figura 1	5	5	10	8	2
2. Figura 2	6	8	14	12	2
3. Figura 3	8	12	20	18	2
4. Figura 4	6	12	18	16	2
5. Figura 5	7	7	14	12	2
6. Figura 6	9	9	18	16	2
7. Figura 7	7	7	14	12	2

Nota: En la misma se evidencia como realza el conteo de los elementos de algunos poliedros irregulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

3 Haz lo mismo para: n=3, m=5, ¿Cuantas caras tendra este poliedro?

$$C = \frac{4*5}{2(5+3)-(3*5)}$$

$$C = \frac{20}{16-15}$$

$$C = \frac{20}{1}$$

$$C = 20$$

R/ el poliedro tendra 20 caras (icosaedro)

Figura 51. Fórmula para hallar el tipo de poliedro regular. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

Según las actividades realizadas por Susana en donde se evidencian algunas construcciones teóricas, respuestas a los interrogantes para cada uno de los niveles de razonamiento y las actividades escritas, se consiguió información suficiente para efectuar el respectivo análisis y poder validar los instrumentos utilizados en todo el proceso investigativo.

4.2.1.1 Análisis de los descriptores para el nivel I

1.1 Reconoce conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros. A la estudiante se le presentó un esquema con varias figuras identificadas cada una con un número, el propósito de la entrevista fue nombrar los elementos uno a uno para que Susana los fuera mostrando. Al iniciar la entrevista, Susana se mostró un poco insegura y nerviosa, pero este comportamiento fue mejorando en la medida en que se le brindó confianza y se le generaron nuevas preguntas.

La estudiante realizó el ejercicio correctamente, además en la actividad escrita se desarrolló un ejercicio similar para que ella conociera con mayor certeza estos conceptos.

En las respuestas dadas por la estudiante, ésta sostiene que: “una recta es una línea que no tiene fin, que un segmento de recta tiene inicio y tiene fin, que dos rectas paralelas son aquellas que tienen la misma distancia y que no se encuentran en un punto, que dos rectas perpendiculares son aquellas que se unen y que forman ángulos rectos”

En el siguiente esquema se muestra la relación entre la categoría y el descriptor para el nivel I de razonamiento.

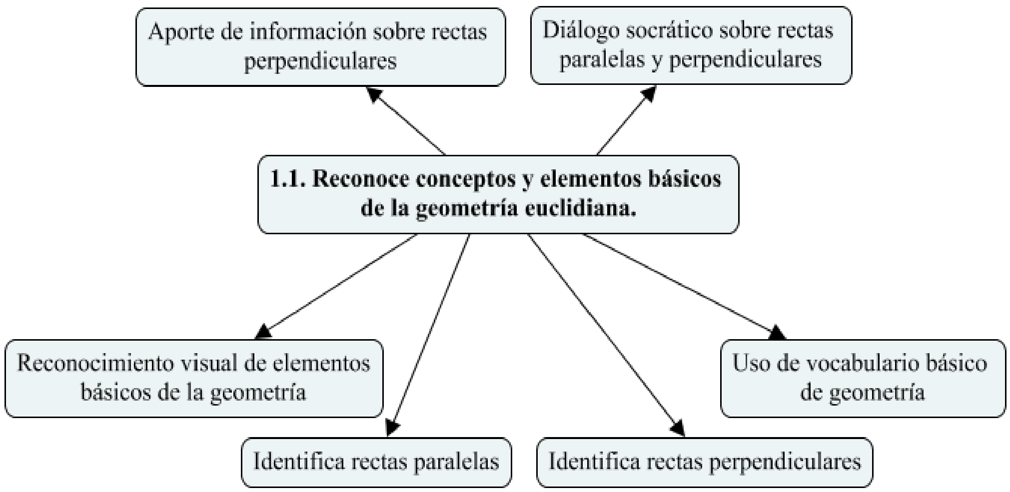


Figura 52. Categoría y descriptor 1.1. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.2 Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: "Por dos puntos pasa una única recta". Para Susana poder establecer la respuesta a este interrogante, se le entregó una hoja de papel en la cual se encontraban dos puntos dibujados, un lápiz y una regla para que trazara todas las posibles rectas que pasaran por estos dos puntos. El ejercicio realizado por la estudiante resultó sencillo, puesto que no dudó en trazar una única recta y afirmó que por estos puntos sólo podía pasar una sola recta. Esta misma respuesta fue ratificada en la actividad escrita, en la cual demostró seguridad en la respuesta proporcionada.

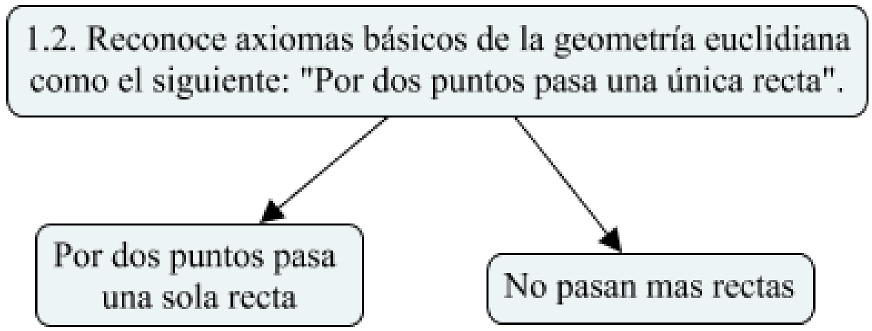


Figura 33. Categoría y descriptor 1.2. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.3 El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel. Del mismo modo, como en el anterior ejercicio, se le entregó a Susana una hoja con dos puntos dibujados en ella, para que de manera práctica realizara todos los pliegues posibles que conectaran estos puntos.

Luego de realizar el ejercicio se le preguntó cuántos pliegues tuvo que hacer para conectar los dos puntos, a lo que respondió que un solo pliegue. De esta forma ella logra establecer y comprender que por dos puntos pasa una única recta y que entre los mismos puntos se puede establecer un segmento de recta. Seguidamente, se le preguntó a Susana, si luego de hacer coincidir los dos puntos mediante el doblado de la hoja y el pliegue efectuado, era posible que en la relación entre el doblez y el segmento que unía los dos puntos resultara una línea perpendicular.

La solución de esta situación también la hizo Susana de manera práctica, ella pudo observar las líneas que se formaron en la hoja de papel y respondió, que “esas líneas que se formaron se llaman perpendiculares, porque son de ángulos rectos, ósea de 90°"

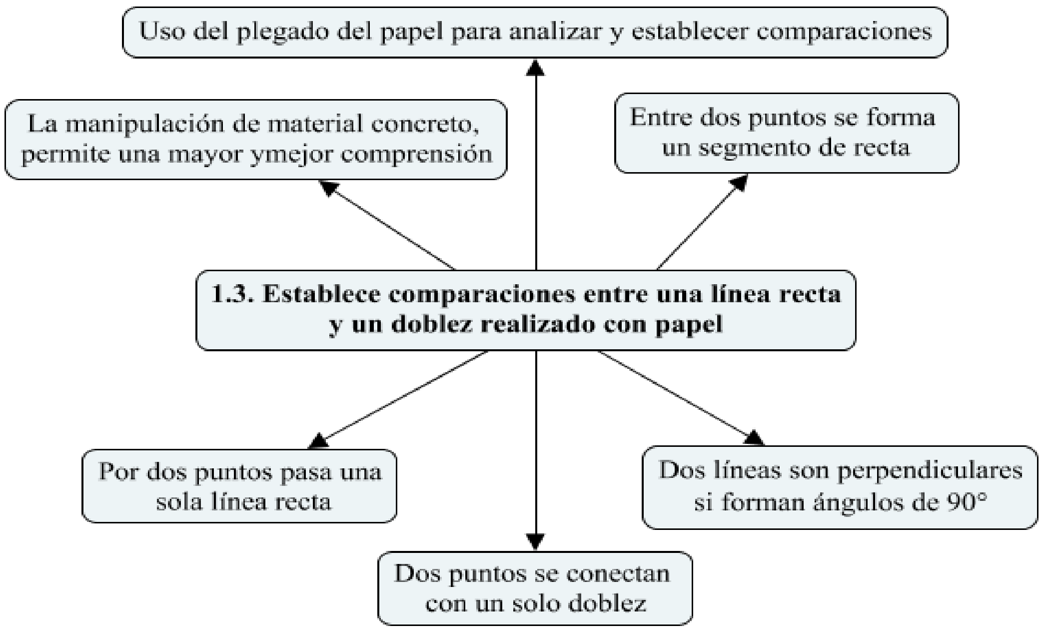


Figura 54. Categoría y descriptor 1.3. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia

1.4 Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas. La estudiante en este ejercicio observó los cinco poliedros regulares y reconoció en ellos elementos que los identifican como las caras, los vértices y las aristas. Cada elemento lo resaltó utilizando un color indicado, luego se mostraron dos figuras que ella misma construyó, una elaborada con pitillos de gaseosa, para representar las aristas y otra con papel iris, en donde se usó la técnica del origami y que muestra las caras de la figura. Se aclara además, que los modelos de las dos figuras corresponden al hexaedro.

Con base en la pregunta realizada sobre cuántas caras, vértices y aristas posee la estructura realizada con pitillos, ella antes de responder observó la figura y contó estos elementos y luego, afirmó que “esta figura tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas”. El mismo proceso lo llevó a cabo con la figura realizada con papel, pero ya no contó los elementos, solo afirmó “las dos figuras tienen la misma cantidad de elementos”.

A la pregunta ¿cuál es la arista de mayor longitud?, ella respondió: “todas las aristas son iguales, porque si no fueran iguales formaría un sólido irregular”, además la figura que forman las caras de estos cuerpos se llama “cuadrado”.

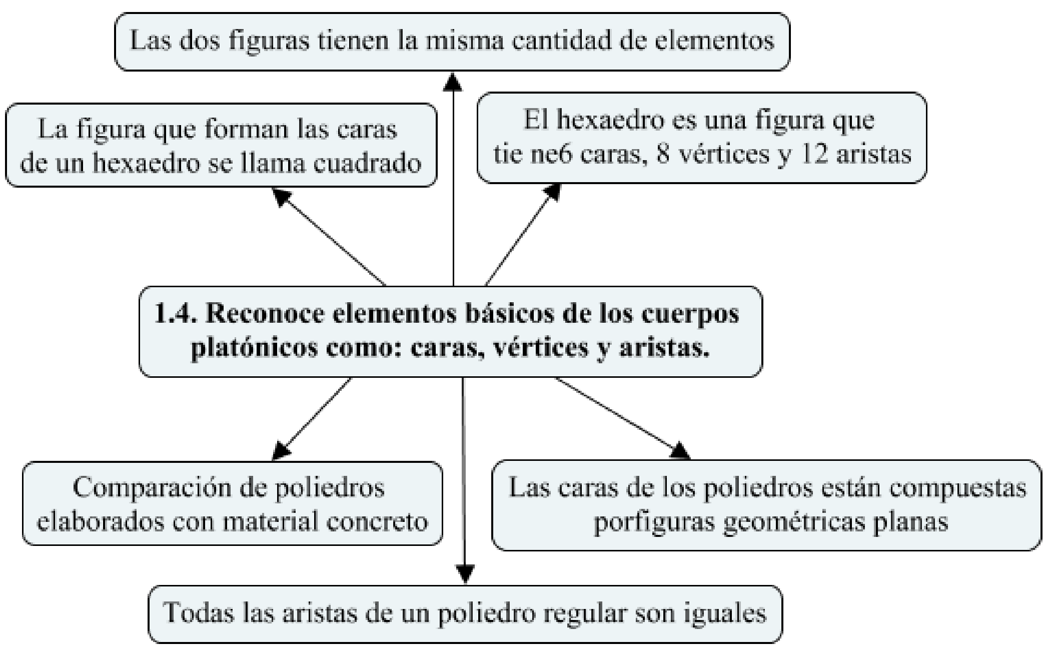


Figura 55. Categoría y descriptor 1.4. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.5 Distingue entre una figura plana y una redonda. La actividad realizada con respecto a este descriptor consistió en entregar a Susana dos conjuntos que contenían figuras planas, redondas y algunos sólidos, con el propósito de que ella identificara cuáles de éstas figuras eran planas y cuáles redondas. Al efectuar la triangulación de la información provista por Susana en la actividad escrita, la observación y la entrevista, se pudo notar que esta estudiante no tuvo dificultad para diferenciar una figura plana de una redonda.

Seguidamente se le preguntó por qué unas pueden rodar y otras no. La respuesta que da Susana es "Porque unas tienen forma curva y otras tiene superficies planas", además, se le preguntó también sobre el número de caras y la arista de mayor longitud de uno de los sólidos que se encontraba en el segundo conjunto de elementos: el tetraedro.

La respuesta que da Susana es "el tetraedro tiene cuatro caras y todas las caras son iguales".

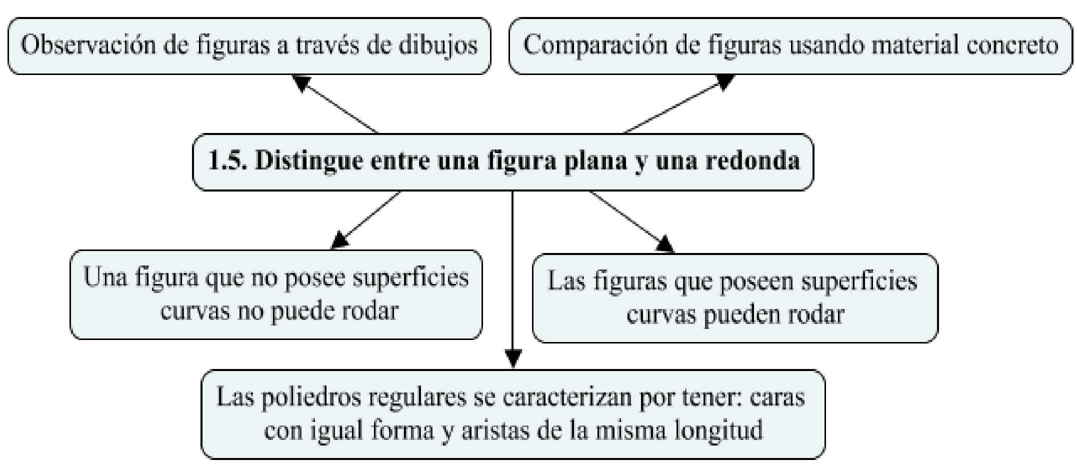


Figura 56. Categoría y descriptor 1.5. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

Finalizada la entrevista, se indicó a Susana que el aporte de información no fue necesario debido a que ella demostró que ya conocía los elementos característicos de los poliedros, los cuales recordó sin ninguna dificultad.

1.6 Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos. Durante la entrevista, Susana observó un grupo de figuras geométricas planas. Luego, se le pidió señalar las figuras que se le fueran indicando. En este ejercicio, la estudiante pudo reconocer sin ninguna dificultad los diferentes polígonos, los cuales mencionó con su respectivo número que los identificaba. De esta forma, Susana percibe las formas de los polígonos y establece la respectiva clasificación de acuerdo al número de lados que poseen éstas figuras geométricas planas.

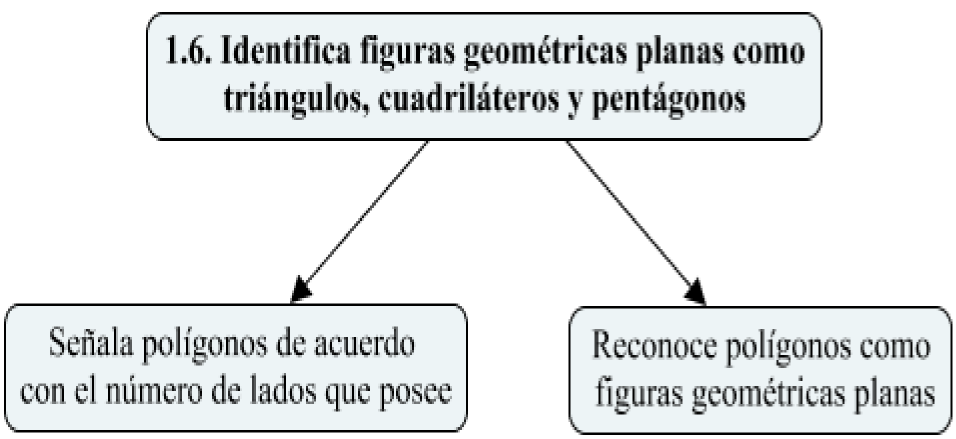


Figura 57. Categoría y descriptor 1.6. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

4.2.1.2 Análisis de los descriptores para el nivel II.

2.1 Reconoce los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares. Susana, en la entrevista identifica con propiedad dentro de un conjunto de sólidos geométricos, aquellos que son regulares. Para ella, la diferencia entre un sólido regular y uno irregular, de acuerdo a su apreciación es la siguiente: “la diferencia de los sólidos regulares a los irregulares, es que los irregulares, sus caras no son iguales y los regulares, las caras son iguales”, además “las caras de un sólido regular son iguales, porque sus aristas son de igual longitud y las de un irregular sus caras son de diferente tamaño y de diferente forma”.

Para el siguiente ejercicio, Susana observó algunos sólidos que presentaban una o varias caras coloreadas para nombrar una característica común entre ellas. Para que la estudiante pudiera mencionar una característica común entre estas figuras, se dio la necesidad de dar un aporte de información y un diálogo socrático con lo cual consiguiera relacionar esta información y lograr la comprensión a través del estímulo dado.

Después del diálogo y del aporte de información, ella afirmó que: “la característica común que tienen todas las figuras, es que todas sus partes que están coloreadas son polígonos”. En cuanto al nombre de las caras coloreadas de cada figura, la estudiante identificó y nombró plenamente cada polígono que representan las caras de los sólidos.

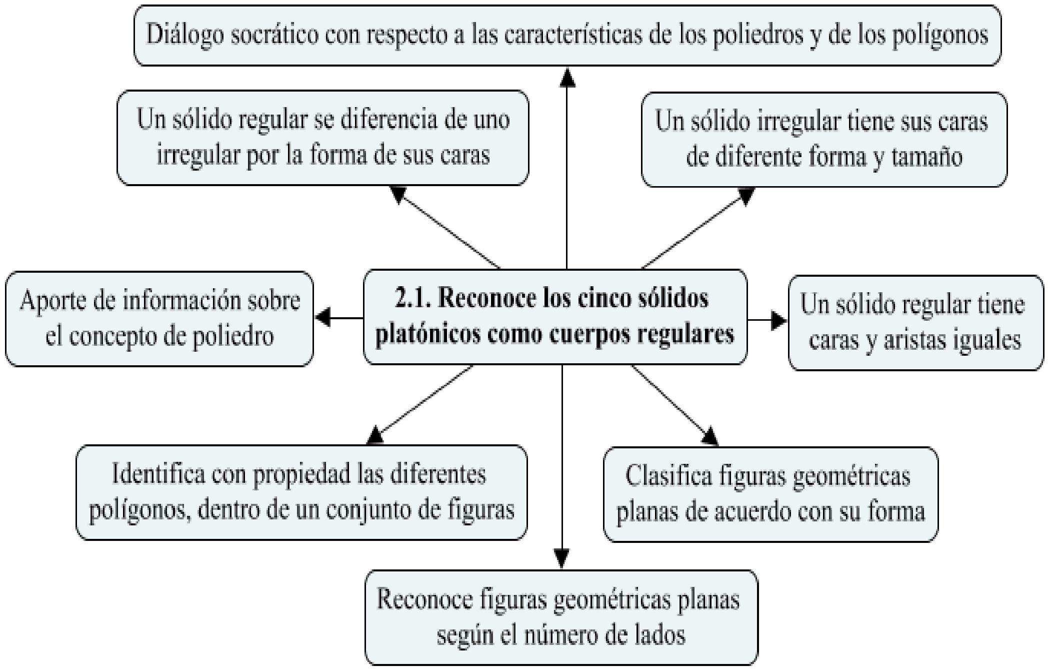


Figura 58. Categoría y descriptor 2.1. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

2.2 Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre los poliedros regulares. Para responder los siguientes interrogantes, Susana tuvo a su alcance los poliedros construidos por ella, con dos tipos de material concreto: pitillos y papel, además de las imágenes de estos cuerpos para observarlos, compararlos y luego, encontrar similitudes y diferencias entre ellos. La respuesta que da el estudiante con respecto a las similitudes entre la figuras es "que se parecen porque todos son poliedros, las semejanzas entre estos cuerpos es porque todas sus caras son polígonos regulares" y la diferencia "es que en unas representan las aristas y otras son las caras". También identifica las figuras que tienen todas sus caras en forma de pentágono y las nombra según el número de caras que tiene, después de un diálogo socrático, debido a que inicialmente no recordaba el nombre de éste poliedro.

Además al preguntarle cómo son las caras de la figura elaborada con pitillos y las de la figura elaborada con papel, ella dijo: “son iguales aunque sean en pitillos o en papel”. Por lo tanto, la estudiante consiguió establecer semejanzas y diferencias entre los cinco poliedros, al identificar en estas figuras características que los diferencian, aunque correspondan a las mismas figuras.

La tabla que se presenta a continuación, demuestra la forma en que Susana, a través del conteo de los elementos de cada poliedro regular, registró con precisión cada uno de los datos solicitados:

Tabla 26
Relación de Euler elaborada por Susana (2).

Susana.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la misma se evidencia como realza el conteo de los elementos de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

Luego de este ejercicio, la estudiante también observó tres figuras en un cuadro, así: el desarrollo de un dodecaedro (Fig. 1), las aristas del dodecaedro (Fig. 2) y las caras de este mismo sólido (Fig. 3), con el objeto de establecer la relación entre estas tres figuras.

Al preguntarle a Susana si era posible construir la figura tres con la figura uno, ella respondió: “sí, porque en la figura uno, las caras que hay ahí son las mismas que las que en la figura tres y el total de caras que hay en la figura uno, son también la cantidad de caras que hay en la tres”. Además, la relación entre estas tres figuras “es que los tres son dodecaedro” y “en la figura 1, aparece el dodecaedro sin armar, en la figura dos, aparecen las aristas y en la figura tres, las caras”. Para ella resultó sencillo responder cuántas caras se unen en cada uno de los vértices de la figura número tres.

Por último, al observar el tetraedro y sus elementos característicos, la estudiante define cada uno de los elemento así: “una cara es una parte del poliedro que sirve para armar el poliedro, para que no se caiga y no salga rodando, es decir, para afirmarlo, un vértice es un punto donde las caras y las aristas se encuentran, y una arista es una línea que sirve para unir las caras”. De la misma manera, Susana pudo enumerar la cantidad de caras, vértices y aristas que posee el tetraedro sin inconveniente, pero al referirse a la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice, fue necesario un diálogo socrático, en el cual se le hizo ver que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°.

Después de este diálogo, resulto sencillo para Susana hacer una división y responder que la suma de los ángulos de las caras que llegan a un vértice del tetraedro también suma 180°. Las preguntas inquisitivas permitieron evocar esta información por parte de la estudiante y cumplir, finalmente con el propósito de la entrevista.

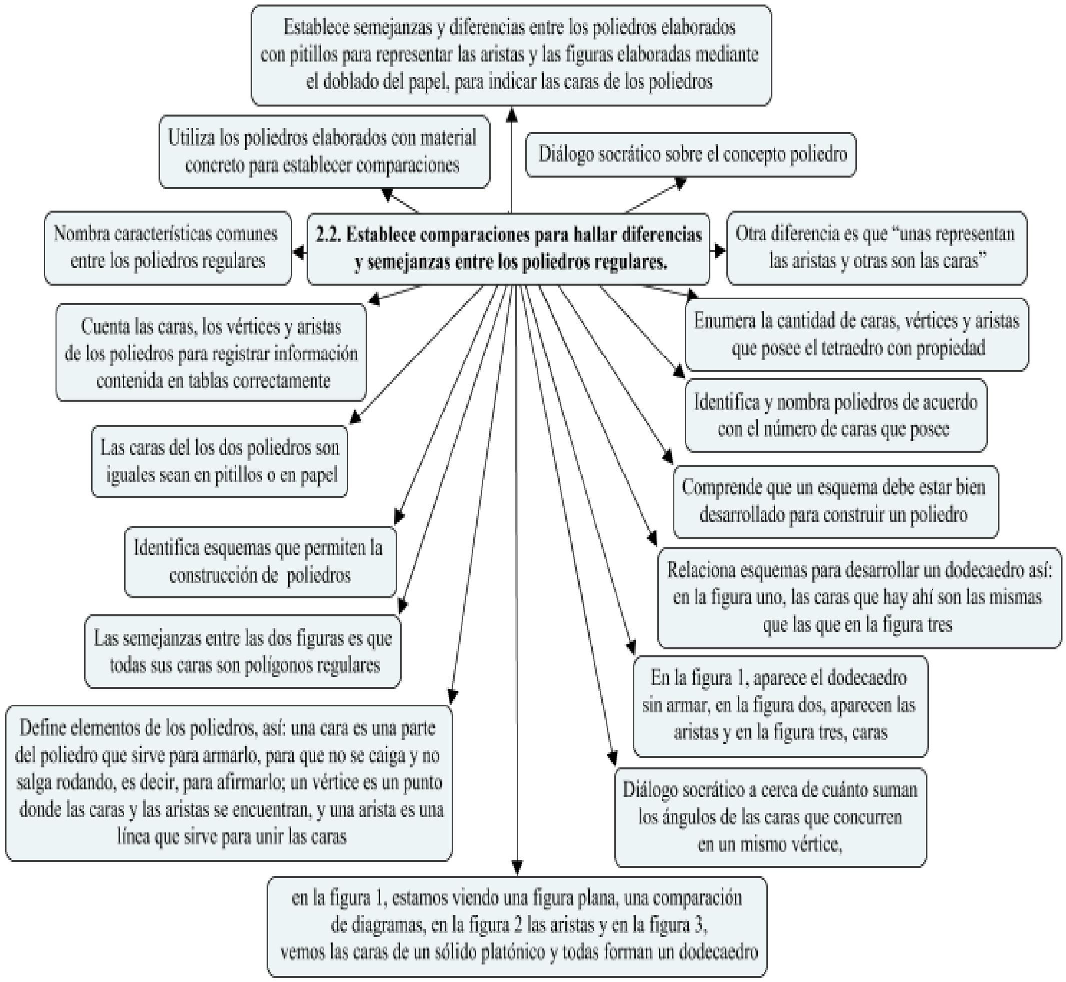


Figura 59. Categoría y descriptor 2.2. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

2.3 Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.

Para la entrevista se entregó a la estudiante un diagrama en un trozo de cartulina, para construir un tetraedro, doblando las piezas por las líneas que se indicaban en la figura.

Susana, tomó la figura y trató de armarla, pero descubrió que una de sus caras quedaba descubierta y que no era posible construir el tetraedro, ella dijo al respecto: “no se puede armar el tetraedro, porque hay cuatro caras pero no se cierra”, luego se entregó un segundo esquema para ver si con éste era posible construir el poliedro solicitado en el ejercicio anterior.

Nuevamente, Susana manipula las partes del diagrama y logra construirlo en esta oportunidad sin presentar inconveniente y dijo lo siguiente: “con el segundo esquema si se puede armar, porque tiene cuatro caras y cierran la figura, en cambio el otro tenía cuatro caras pero no la cerraban”. En la entrevista también se presentó a la estudiante los cinco diagramas para armar los poliedros regulares, para que Susana identificara en ellos, características relacionadas con la forma y tamaño. Para este análisis ella determinó que la forma de las caras de los sólidos estaban conformadas por polígonos regulares y dijo que las caras tenían igual forma y tamaño.

Una vez terminado, el análisis del primer grupo de figuras, se procedió a mostrar un segundo grupo de esquemas para encontrar diferencias entre este nuevo grupo y el primero. Las observaciones fueron las siguientes: “se diferencian porque en el primer grupo, las figuras que las conformaban eran iguales y en el grupo dos, son de diferente formas y tamaños”.

La estudiante también menciona que la relación entre los dos grupos de figuras es que todos los diseños están conformados por polígonos.

También identificó el diagrama para construir un icosaedro y un hexaedro, refiriéndose a su elección por la cantidad de polígonos o de caras de cada dibujo.

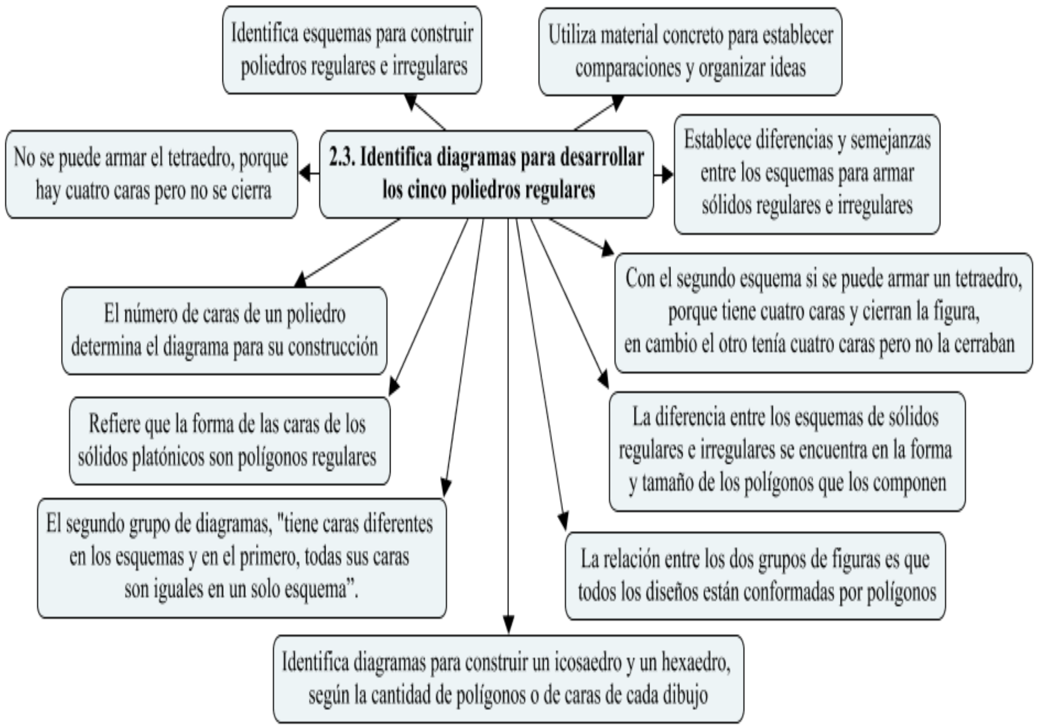


Figura 60. Categoría y descriptor 2.3. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

4.2.1.3 Análisis de los descriptores para el nivel III.

1.1 Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares Iguales. Susana debe observar las siguientes figuras: Un esquema para desarrollar un hexaedro (figura 1), la estructura del hexaedro semi-armado (figura 2) y el sólido totalmente armado (figura 3). Luego se le preguntó sobre cómo eran las superficies de las figuras 1 y 2; ella dijo respondió: “la figura 1, aparece desarmado, en la figura 2, ya aparece empezándolo a armar y son esquemas de un cubo o hexaedro”.

Para el segundo ejercicio de la entrevista, Susana observó los cinco poliedros regulares que se encontraban dibujados, pero también se le solicitó que el propósito de aprovechar el recurso didáctico para nombrarlos, de acuerdo a la figura indicada. Al nombrar con propiedad cada cuerpo platónico, se pudo comprobar que la estudiante reconoce estos poliedros y establece diferencias entre ellos, de acuerdo con el número de caras que poseen, también mencionó el número de caras que se unen en cada uno de los vértices de cada poliedro regular.

De igual manera, se solicitó a Susana dibujar un polígono regular y uno irregular para explicar las semejanzas y diferencias entre ellos. Los dibujos realizados fueron un triángulo utilizara los que ella tenía construidos en origami y pitillos, con equilátero, para simbolizar el polígono regular y un pentágono con los lados desiguales, para indicar el polígono irregular. A cerca de las semejanzas y diferencias entre los polígonos dibujados, Susana argumentó lo siguiente: “son semejantes porque todos dos son polígonos, porque todos dos se cierran y tienen segmentos de recta”, y la diferencia “es que uno tiene tres lados y el otro tiene cinco lados”, además, “uno es regular, si es regular es porque sus lados son iguales y el otro irregular porque sus lados no son iguales”.

Para finalizar esta entrevista, se le preguntó a la estudiante sobre la forma de las caras de los cinco sólidos platónicos, ella respondió: “las caras son polígonos regulares”.

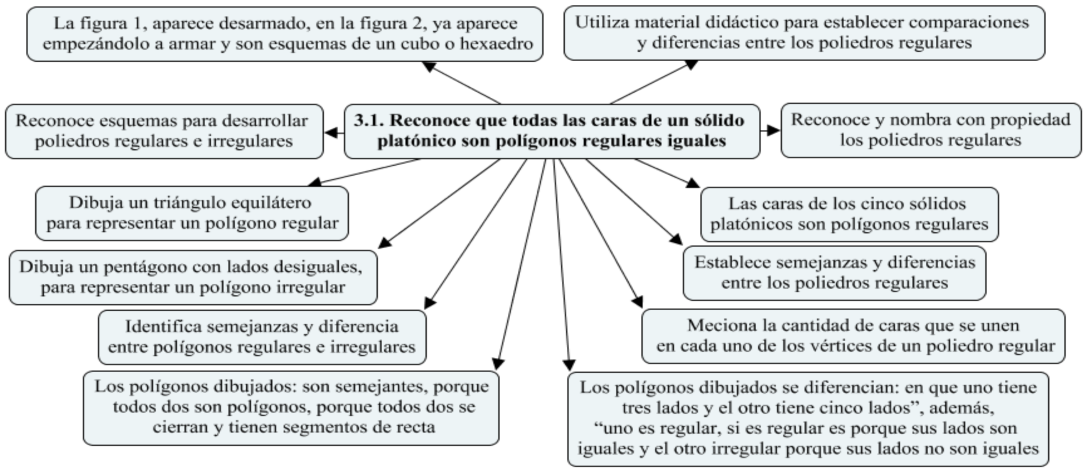


Figura 61. Categoría y descriptor 3.1. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.2 Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas. Nuevamente, para esta entrevista se le pidió a la estudiante utilizar los cinco poliedros elaborados con pitillos y doblado del papel, para contar cada uno de los elementos de estos cuerpos regulares; de esta forma, ella no sólo observa las figuras dibujadas en un cuadro, sino que además, las puede manipular e identificar en cada uno de ellos la cantidad de caras y de aristas que concurren en un vértice.

El conteo de la cantidad de caras y de aristas que llegan a un mismo vértice es realizado correctamente por Susana y llega a la siguiente conclusión al establecer la relación entre los elementos contados identificar en cada uno de ellos la cantidad de caras y de aristas que concurren en un vértice: "Que la misma cantidad que tiene de aristas, es la misma cantidad de caras".

Para finalizar, Susana realizó el ejercicio anterior con tres sólidos irregulares, pero presentó al inicio algunas dificultades, debido a que en el sólido irregular no se podían percibir algunas de sus caras y aristas, por esta razón se dibujó la figura con otra perspectiva, para fuese más fácil responder las preguntas. Fue así, como la estudiante pudo expresar que la relación de los sólidos regulares se cumple también para los sólidos irregulares, porque el número de caras y de aristas que concurren en un mismo vértice, sin importar el tipo de sólido, siempre es el mismo.

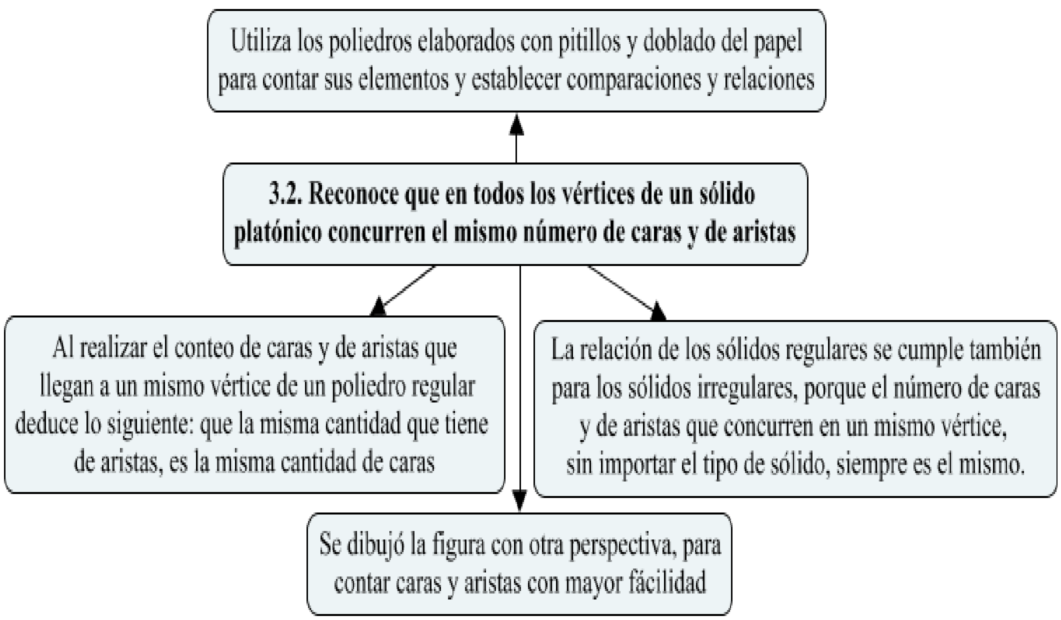


Figura 62. Categoría y descriptor 3.2. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.3 Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales. Para llevar a cabo esta entrevista, Susana debe observar una tabla con tres poliedros regulares (octaedro, figura 1; tetraedro, figura 2, y hexaedro, figura 3), para identificar en ellos: el número de vértices que tiene un ángulo, la cantidad de ángulos que tiene una cara, el ángulo de mayor abertura, el número de ángulos que tiene cada poliedro, la cantidad de aristas que llegan al vértice del tetraedro, el número de lados que llegan al vértice de una cara del tetraedro y la cantidad de caras que llegan a una arista del tetraedro.

Con los poliedros elaborados con material didáctico, la estudiante identificó y contó los elementos solicitados: la cantidad de vértices que tiene un ángulo, en los tres poliedros; la cantidad de ángulos de la cara de cada sólido; también determinó que los ángulos de cada figura son iguales, por lo tanto no existe ángulo de mayor abertura; de igual forma, contó los ángulos de los tres cuerpos platónicos, el número de aristas que llegan al vértice del tetraedro, el número de lados que llegan al vértice de una cara de este mismo poliedro, al igual que la cantidad de caras que llegan a una arista.

Por otro lado, después de terminar la primera parte de la entrevista, se mostró a la estudiante un tetraedro para señalar el número de caras que se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este poliedro, a lo cual respondió Susana “tres caras”, en cuanto a la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo, ella dijo “180°”. Una vez concluida la entrevista, se aportó información acerca del concepto de ángulo diedro, pero cabe señalar que dicha información no fue necesaria para logar el propósito del diálogo efectuado, sino para ayudar a los conceptos generados por la estudiante.

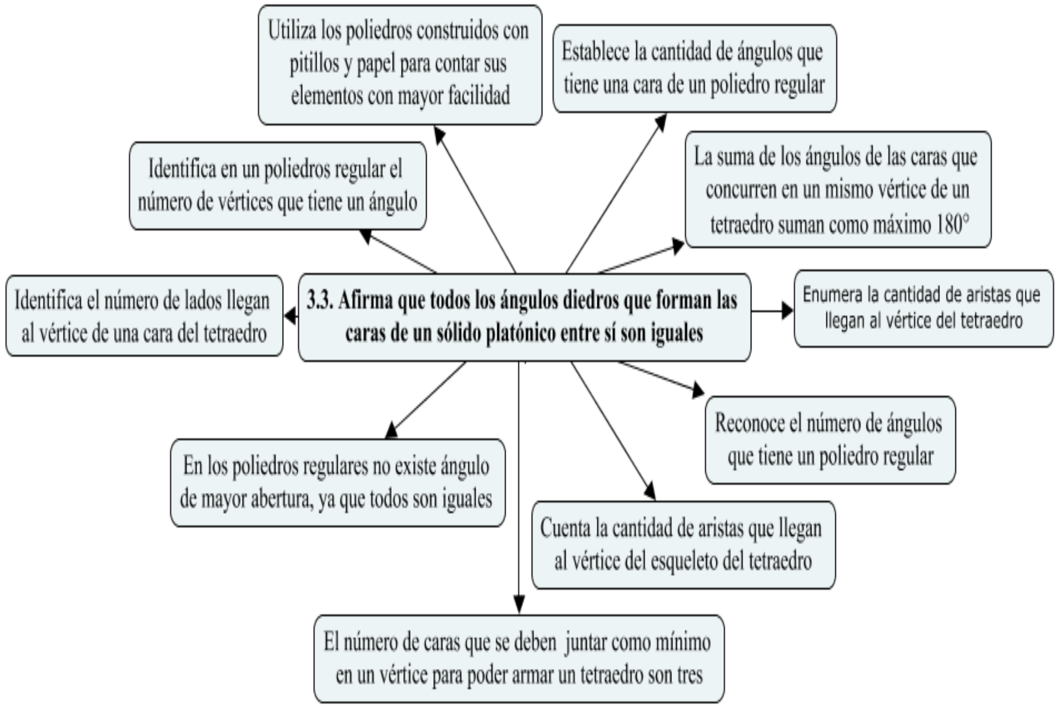


Figura 63. Categoría y descriptor 3.3. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.4 Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler. Para realizar esta entrevista, Susana ya tenía claro algunos conceptos y procedimientos que se llevaron a cabo durante la actividad escrita y las entrevistas de los niveles I y II respectivamente. Una de estas actividades se encuentra relacionada con la construcción de los cinco poliedros regulares con pitillos de gaseosa y mediante el doblado del papel, por esta razón, resultó mucho más sencillo para ella realizar el ejercicio propuesto, para completar la primera tabla que debía incluir el número de caras, vértices y aristas, de cada sólido platónico.

Susana contó con las figuras que ella misma elaboró con los materiales didácticos, esto ayudó a mejorar su forma de analizar, de razonar y de comprender el objetivo de la entrevista y sobre todo, de la propuesta de trabajo. La tabla que completó la estudiante se evidencia a continuación.

Tabla 27

Relación de Euler elaborada por Susana (3).

Susana.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la misma se evidencia el conteo de elementos de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

Cabe señalar que esta tabla ya la había completado Susana en una entrevista anterior, por lo tanto, no presentó ninguna dificultad para hacerla de nuevo, pero se volvió a trabajar para establecer comparaciones entre ésta y una segunda tabla que contiene algunos poliedros irregulares, así:

Tabla 28

Relación de Euler para los poliedros irregulares (Susana).

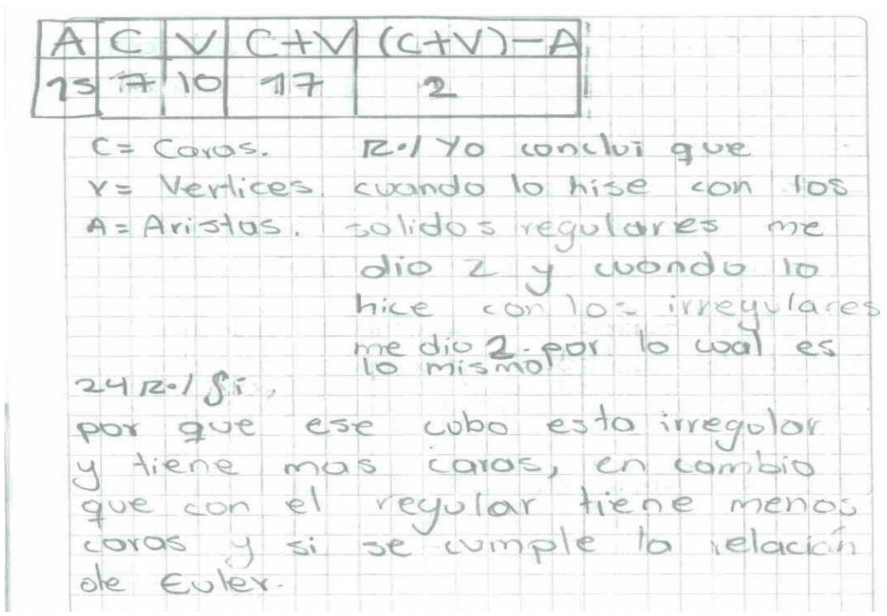
Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Figura 1	5	5	10	8	2
2. Figura 2	6	8	14	12	2
3. Figura3	8	12	20	18	2
4. Figura4	6	12	18	16	2
5. Figura5	7	7	14	12	2
6. Figura6	9	9	18	16	2
7. Figura7	7	7	14	12	2

Nota: En la misma se evidencia el conteo de elementos de algunos poliedros irregulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

La información contenida en esta tabla fue completada por Susana; para ello utilizó siete sólidos, los que ella denominó “irregulares”, durante el proceso presentó dificultad con el conteo de los elementos de algunos sólidos, esto se debió a que en los dibujos mostrados se hace menos visible las caras, los vértices y las aristas. Lo importante de este trabajo es que la estudiante pudo cumplir con el propósito de la entrevista y realizó la tabla adecuadamente.

De igual forma, se preguntó a Susana si la relación de Euler se cumple para todos los sólidos o solo para los regulares, la respuesta fue la siguiente: “para todos los sólidos, porque aunque sean regulares o irregulares, siempre dan el mismo resultado: dos”.

Posteriormente, se tomaron dos imágenes así: una primera imagen de un hexaedro para simular un corte efectuado en una esquina y una segunda imagen, para mostrar el sólido con el corte realizado. El objetivo de este ejercicio era contar las caras, los vértices y las aristas del poliedro resultante y extraer las conclusiones del proceso realizado. El ejercicio realizado por Susana y las conclusiones, se muestran a continuación:



A	C	V	C+V	(C+V)−A
15	7	10	17	2

C= Caras.
V= Vertices.
A= Aristas.

R./ Yo conclui que cuando lo hise con los solidos regulares me dio 2 y cuando lo hice con los irregulares me dio 2. por lo cual es lo mismo

24 R./ Si, por que ese cubo esta irregular y tiene mas caras, en cambio que con el regular tiene menos caras y si se cumple la relación de Euler.

Figura 64. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusión (Susana). Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

En la conclusión escrita por la estudiante, se puede apreciar que ella generalizó la relación de Euler, dado que al contar los elementos de éste nuevo poliedro, obtuvo el mismo resultado que con los poliedros regulares.

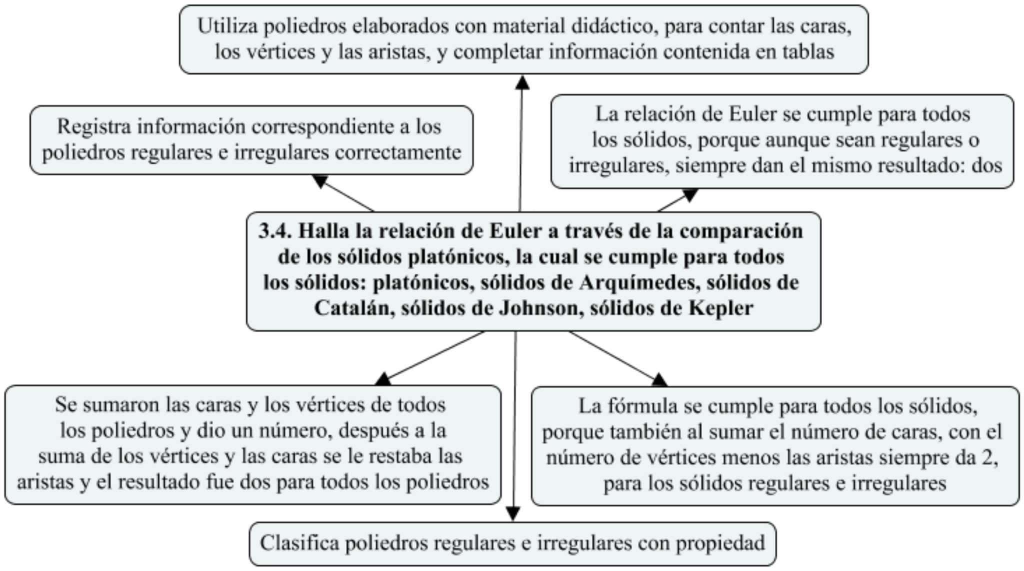
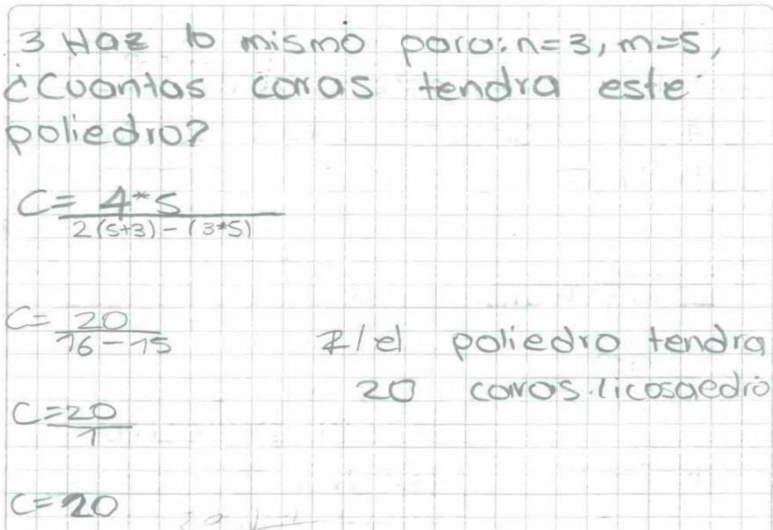


Figura 65. Categoría y descriptor 3.4. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

1.5 Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos. En esta última entrevista con Susana, se desarrolló un ejercicio práctico para que ella a través de una fórmula matemática y un modelo resuelto, encontrara el número de caras de un poliedro. La solución de uno de los ejercicios con el acompañamiento delos encargados de dirigir la entrevista, permitió que fuera más sencillo dar continuidad a las demás situaciones planteadas.

Al mismo tiempo, Susana a través de ésta fórmula matemática pudo encontrar el número de caras de los siguientes poliedros: el icosaedro, el hexaedro y el dodecaedro; incluso, hubo ejercicios en el cual descubrió que no era posible determinar el poliedro.



3 Haz lo mismo para: n=3, m=5, ¿Cuantas caras tendra este poliedro?

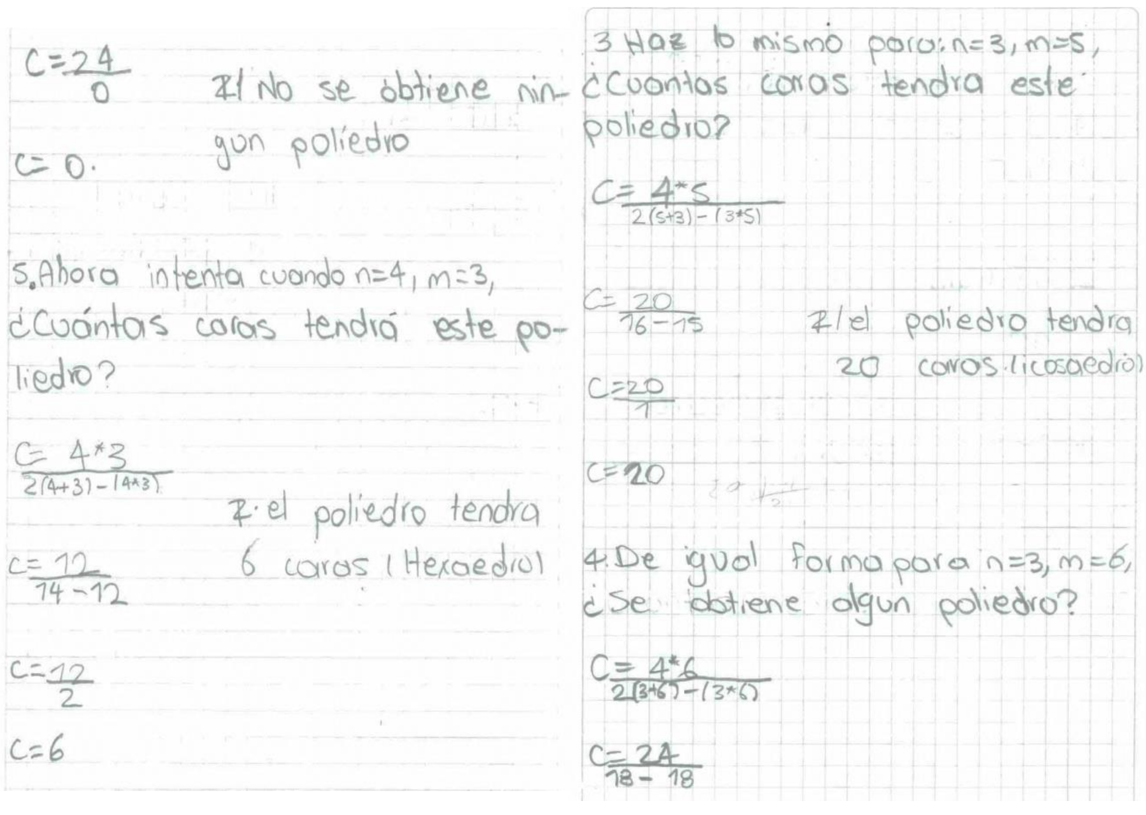
$C = \frac{4*5}{2(5+3)-(3*5)}$

$C = \frac{20}{16-15}$

$C = \frac{20}{1}$

$C = 20$

R/ el poliedro tendra 20 caras (icosaedro)



$C = \frac{24}{0}$

$C = 0.$

R/ No se obtiene ningun poliedro

5. Ahora intenta cuando n=4, m=3, ¿Cuántas caras tendrá este poliedro?

$C = \frac{4*3}{2(4+3)-(4*3)}$

$C = \frac{12}{14-12}$

$C = \frac{12}{2}$

$C = 6$

R. el poliedro tendra 6 caras (Hexaedro)

3 Haz lo mismo para: n=3, m=5, ¿Cuantas caras tendra este poliedro?

$C = \frac{4*5}{2(5+3)-(3*5)}$

$C = \frac{20}{16-15}$

$C = \frac{20}{1}$

$C = 20$

R/ el poliedro tendra 20 caras (icosaedro)

4. De igual forma para n=3, m=6, ¿Se obtiene algun poliedro?

$C = \frac{4*6}{2(3+6)-(3*6)}$

$C = \frac{24}{18-18}$

Figura 66. Fórmula matemática para calcular el número de caras de un poliedro utilizada por Susana. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Susana.

De esta manera, se concluye el proceso para cada uno de los niveles de razonamiento desarrollado con Susana, a través de las diferentes actividades propuestas y en cada descriptor descrito en las entrevistas.

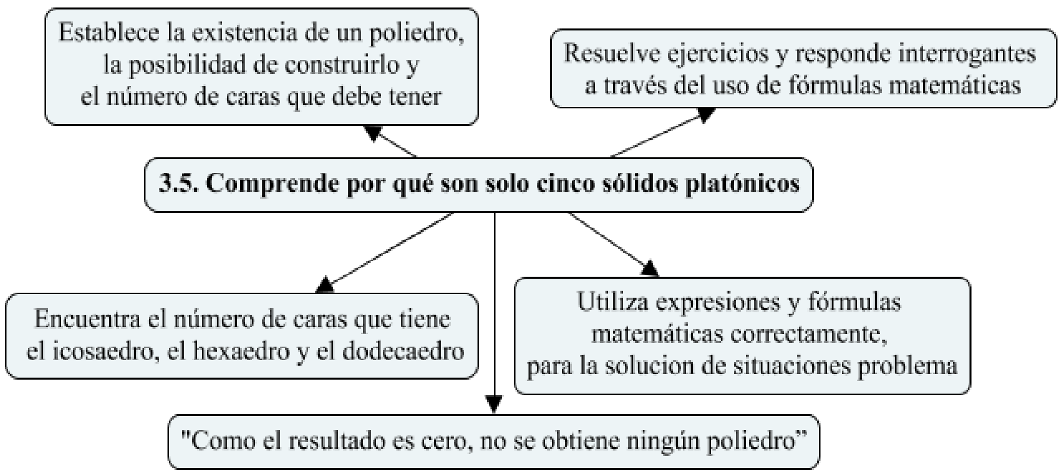


Figura 67. Categoría y descriptor 3.5. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Susana. Fuente: elaboración propia.

4.2.2 Análisis del proceso de razonamiento demostrado por Kriss.

La estudiante que de aquí en adelante usará el seudónimo de Kriss, cursa actualmente el grado quinto en una Institución Educativa del Municipio de Carepa, su selección en este trabajo de investigación fue posible gracias a su buen desempeño, compromiso, entusiasmo y cumplimiento con las actividades propuestas por el grupo que dirige este proceso, desde el contexto de la geometría y el área de la matemática.

Esta niña se caracteriza por tener un alto sentido de responsabilidad, ganas de aprender, su participación activa en todas las actividades curriculares, por ser creativa, preocupada, disciplinada y por su espíritu de superación personal, para adquirir conocimientos que le permitan un buen nivel académico.

Para la consecución del objeto de estudio matemático, esta estudiante participó en actividades como la observación, las actividades escritas y la entrevista. Todos los estudiantes que participaron en el desarrollo de esta investigación tuvieron a su alcance los poliedros que construyeron con los dos tipos de material sugerido: pitillos de gaseosa y el doblado del papel, más conocido como origami. Durante las entrevistas, también tuvieron acceso a los materiales necesarios para realizar construcciones, comparaciones, cortes, doblado de papel, trazos, y acciones que les permitieron una mejor comprensión de los interrogantes realizados para cada uno de los niveles de razonamiento.

A continuación, se muestran algunas de las construcciones realizadas por Kriss durante la aplicación de la entrevista para los niveles II y III de razonamiento de Van Hiele, en los cuales se demuestra el uso del lenguaje y del proceso llevado a cabo por la estudiante en los descriptores: 2.2; 3.4 y 3.5.

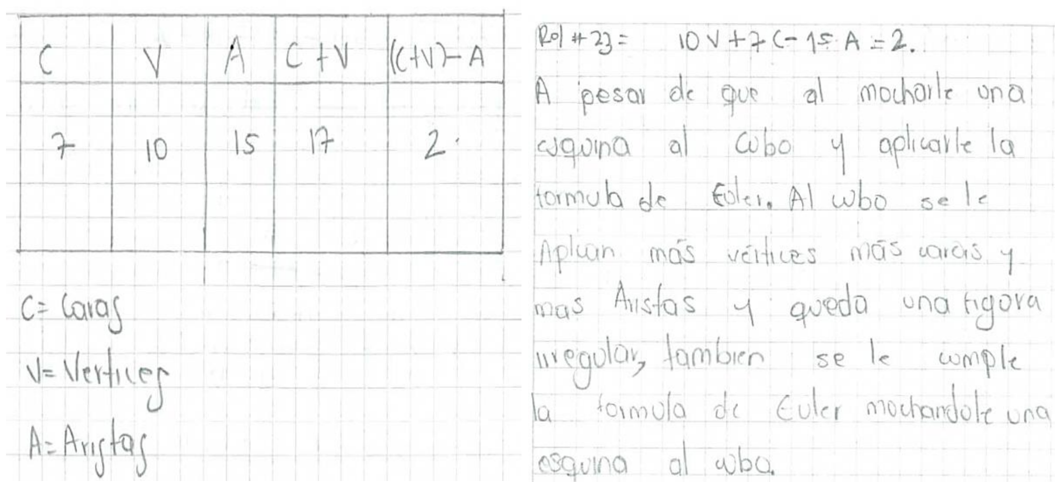
Tabla 29

Relación de Euler elaborada por Kriss (1).

Kriss

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la misma se evidencia el conteo de los elementos de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.



C	V	A	C + V	(C+V) – A
7	10	15	17	2

C = Caras

V = Vertices

A = Aristas

Rol #23 = 10 V + 7 C – 15 A = 2.

A pesar de que al mocharle una esquina al cubo y aplicarle la formula de Euler. Al cubo se le aplican más vértices más caras y mas Aristas y queda una figora irregular, tambien se le cumple la formula de Euler mochandole una esquina al cubo.

Figura 68. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusión (Kriss). Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

Tabla 30

Relación de Euler para los poliedros irregulares (Kriss).

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Fig. 1	5	6	11	9	2
2. Fig 2	6	8	14	12	2
3. Fig. 3	8	12	20	18	2
4. Fig. 4	8	12	20	18	2
5. fig. 5	7	7	14	12	2
6. Fig. 6	9	9	18	16	2
7. Fig. 7	7	7	14	12	2

Nota: En la misma se evidencia el conteo de los elementos de algunos poliedros irregulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

3. Haz lo mismo, para n=3, m=5, ¿Cuan caras tendria este poliedro?

$C = \frac{4m}{2(m+n+(mn)}$

$C = \frac{4 \times 5}{2 \times (5+3)-(5 \times 3)}$

$C = \frac{20}{16-15}$

$C = \frac{20}{1}$

$C = 20$

R/ Este poliedro tendria 20 caras

2. Realiza el mismo procedimiento con los siguientes datos n=3, m=4; ¿Cuantas caras tendria el poliedro?

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

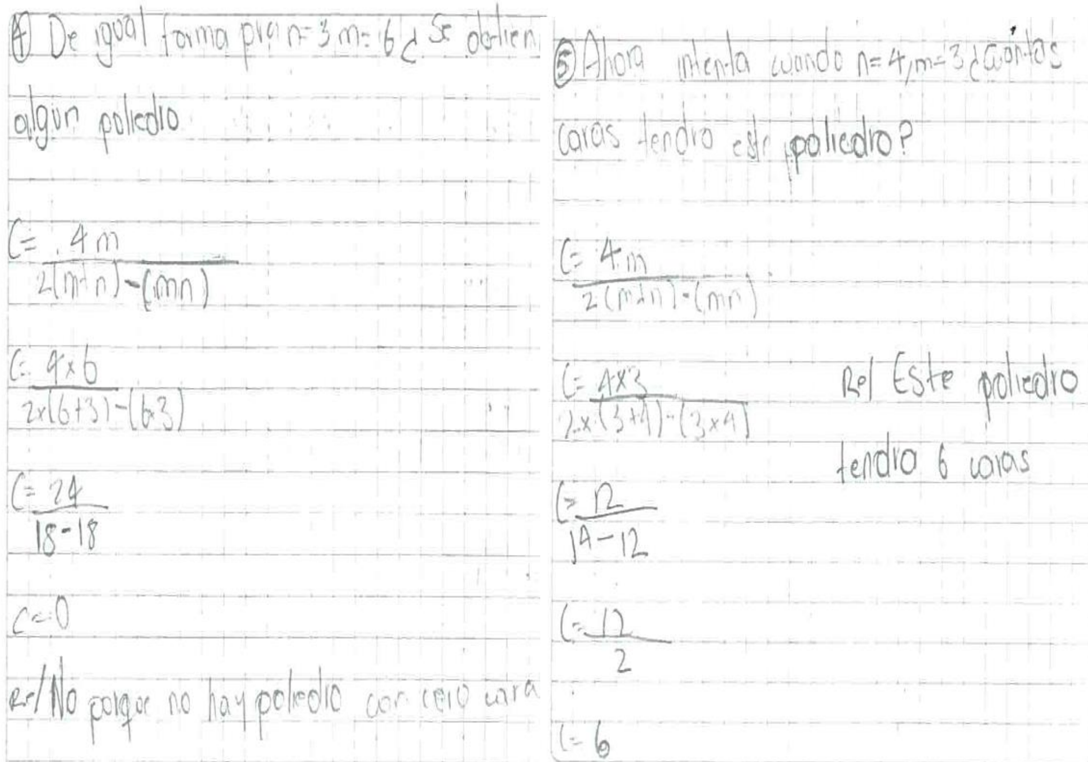
$C = \frac{4 \times 4}{2(4+3)-(4 \times 3)}$

$C = \frac{16}{14-12}$

$C = \frac{16}{2}$

$C = 8$

R/ Este poliedro tendria 6 caras



4) De igual forma para $n=3$ $m=6$ ¿Se obtien algún poliedro

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 6}{2 \times (6+3)-(6 \times 3)}$

$C = \frac{24}{18-18}$

$C = 0$

R/ No porque no hay poliedro con cero cara

5) Ahora intenta cuando $n=4$, $m=3$ ¿Cuántas caras tendría este poliedro?

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 3}{2 \times (3+4)-(3 \times 4)}$

R/ Este poliedro tendría 6 caras

$C = \frac{12}{14-12}$

$C = \frac{12}{2}$

$C = 6$

Figura 69. Fórmula matemática para calcular el número de caras de un poliedro regular. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

4.2.2.1 Análisis de los descriptores para el nivel I.

1.1 Reconoce conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros. En el proceso de la entrevista se le presentó a Kriss un conjunto de figuras para que identificara los elementos del descriptor 1.1., en este ejercicio, la estudiante se mostró un poco confundida al inicio, por lo que fue necesario un aporte de información sobre rectas perpendiculares, para que ella pudiera mejorar su razonamiento y dar respuesta a lo requerido. De esta manera, Kriss logra señalar en el esquema los siguientes elementos: una recta, un segmento de recta, dos rectas paralelas, dos rectas perpendiculares, dos puntos y un plano.

Este ejercicio es realizado por Kriss de forma apropiada, se logra dar validez al descriptor por medio de la actividad escrita, la observación del procedimiento llevado a cabo por la estudiante y la entrevista semi-estructurada.

Para el siguiente ejercicio, Kriss observó un cuadrado al cual se le suprimieron dos de sus líneas consecutivas y dos líneas no consecutivas, al respecto dijo que las líneas resultantes en la primera figura eran perpendiculares porque al unirse forman ángulos de 90°. Luego, al observar la segunda figura, dijo que las rectas resultantes eran paralelas, puesto que éstas nunca se juntan y tienen la misma distancia.

En el siguiente esquema se muestra la relación entre la categoría y el descriptor para el nivel I de razonamiento.

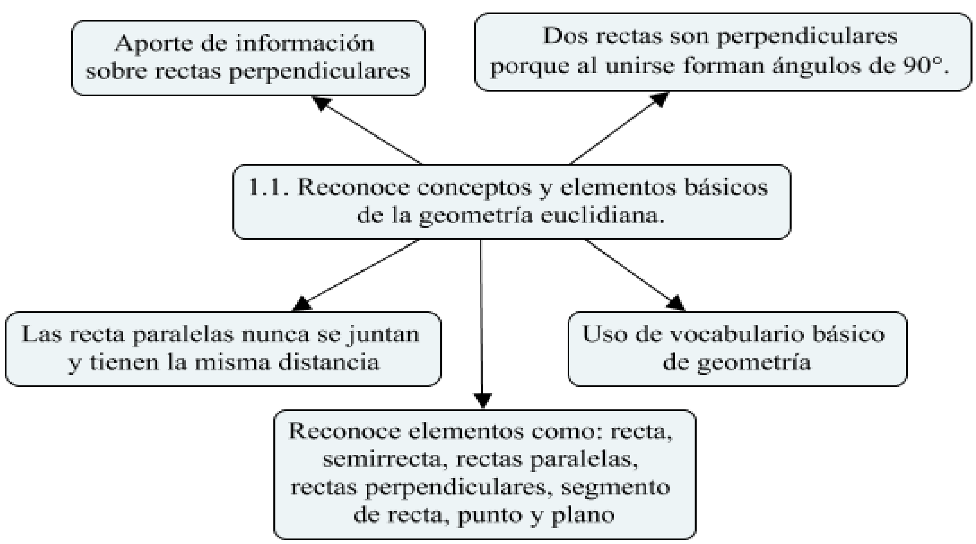


Figura 70. Categoría y descriptor 1.1. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

1.2 Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: "Por dos puntos pasa una única recta". A Kriss se le entregó una hoja de papel con dos puntos dibujados en ella, un lápiz y una regla para que trazara todas las posibles rectas que pasaran por estos dos puntos. Este ejercicio no presentó dificultad para ella, puesto que, no vaciló en trazar una sola recta y afirmó que por estos puntos sólo podía pasar una sola recta. Esta respuesta fue corroborada en la actividad escrita y en la observación efectuada a la estudiante, la cual demostró seguridad en su respuesta.

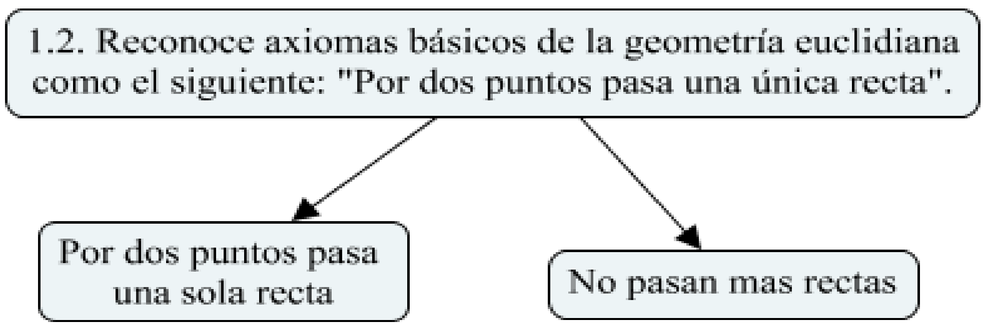


Figura 71. Categoría y descriptor 1.2. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

1.3 El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel. Nuevamente, se entrega a Kriss una hoja con dos puntos dibujados en ella, para que realice todos los pliegues posibles que conectaran estos dos puntos.

Luego de realizar el ejercicio se le preguntó sobre el número de pliegues necesarios para hacer coincidir los dos puntos, la primera respuesta antes de hacerlo de forma práctica, es que había que hacer dos pliegues, luego con el material, ella dijo que era suficiente “un solo pliegue”. De esta forma ella logra establecer y comprender que por dos puntos solo pasa una línea recta, también, que un segmento de recta se encuentra limitado por dos puntos, ella dice que “un segmento de recta tiene inicio y tiene final”.

Seguidamente, se le preguntó a Kriss, si al hacer coincidir los dos puntos mediante el doblado de la hoja y el pliegue efectuado, era posible que en la relación entre el doblez y el segmento que unía los dos puntos resultara una línea perpendicular. Kriss utilizó la hoja con los puntos que tenía en ella y el doblado realizado anteriormente, comparó, hizo el análisis, y luego observó la figura que formaban las líneas en la hoja de papel y respondió, que “esas líneas que se forman se llaman perpendiculares, porque al unirse forman ángulos de 90°, o ángulos rectos”

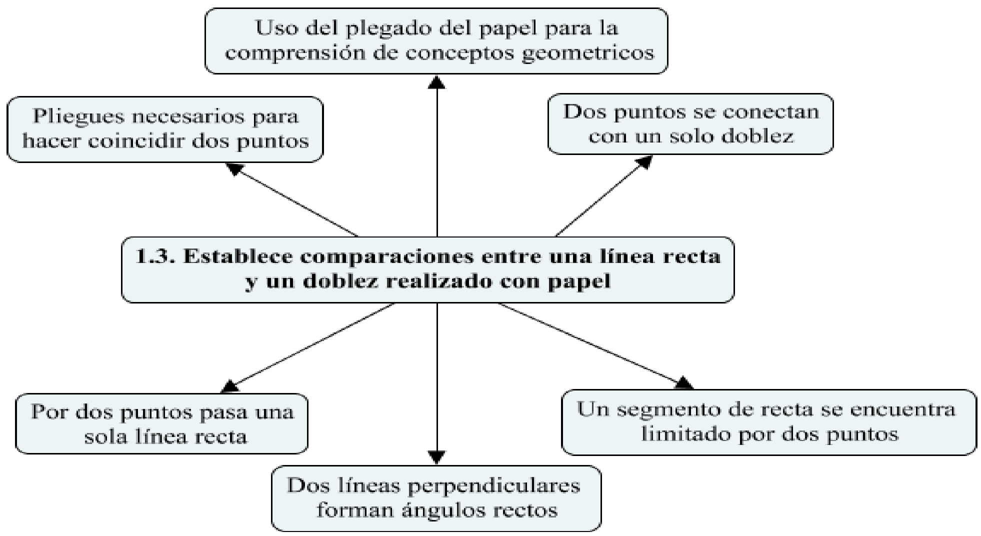


Figura 72. Categoría y descriptor 1.3. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

1.4 Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas. En este ejercicio se presentó a la estudiante los cinco poliedros regulares para que identificara en cada uno de ellos los elementos que los caracterizan como: las caras, los vértices y las aristas. Para identificar estos elementos, Kriss utilizó un color asignado, seguidamente se le mostró dos figuras que ella misma construyó, una con pitillos de gaseosa, que representa la estructura de un poliedro (hexaedro), sus aristas, y otra con papel iris, en donde se usó la técnica del origami, la cual representa las caras de la misma figura.

A la pregunta realizada sobre cuántas caras, vértices y aristas posee la estructura elaborada con pitillos, ella antes de responder tomó las dos figuras y realizó el conteo de los elementos solicitados y respondió lo siguiente: "la figura con pitillos posee 8 vértices, 12 aristas y 6 caras", con respecto a la figura construida con papel dijo: "eeh, como son los mismos también posee 8 vértices, 12 aristas y 6 caras" para esta respuesta, Kriss no consideró necesario hacer el conteo de los elementos y su respuesta fue inmediata.

A la pregunta ¿Cuál es la arista de mayor longitud?, ella respondió "no hay arista de mayor longitud porque todas las aristas son iguales", además al preguntarle por el nombre de la figura que forman las caras de las dos figuras, ella dijo "se llaman cuadrados".

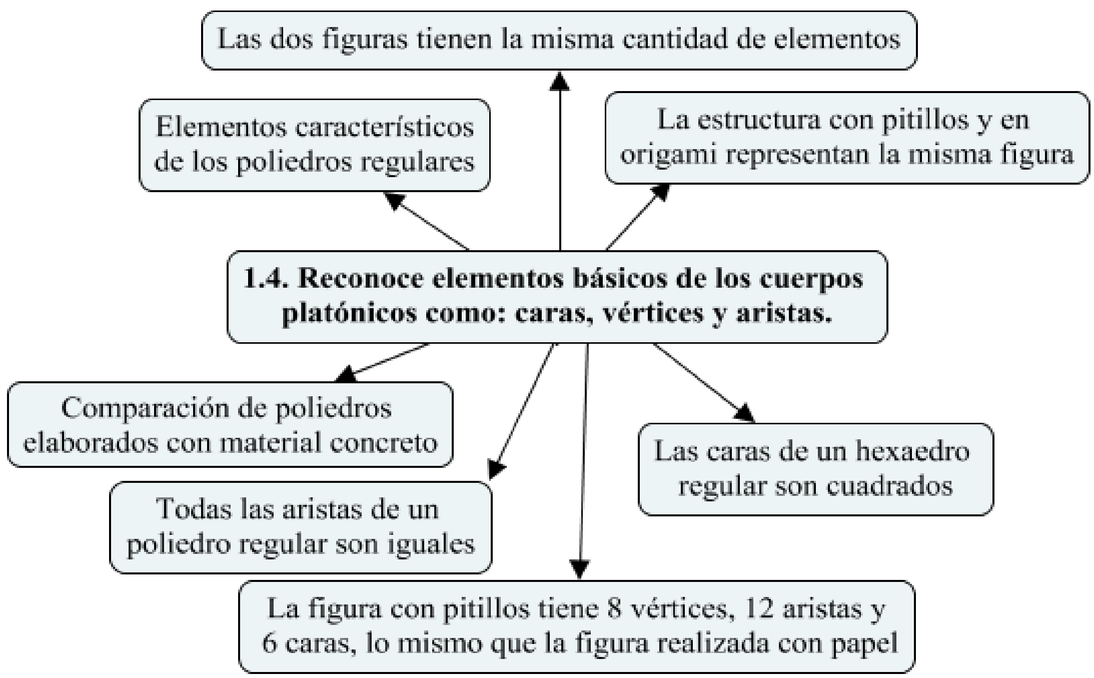


Figura 73. Categoría y descriptor 1.4. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

1.5 Distingue entre una figura plana y una redonda. Para desarrollar este ejercicio, se presentó a la estudiante dos conjuntos que contenían figuras planas, redondas y algunos sólidos, para que identificara y señalara cuáles de éstas figuras eran redondas y cuáles planas. Kriss respondió de la siguiente forma señalando cada una de las figura y nombrándolas con su respectiva numeración así: "las figuras redondas son la figura número 5, la figura número 7 y la número dos también es una figura redonda, las planas son la figura número 1, 3, 4 y 6. Al principio mostró un poco de confusión, pero observó detenidamente cada figura y pudo hacerlo correctamente.

Posteriormente, se le preguntó por qué unas pueden rodar y otras no, Kriss respondió "Bueno pues porque las demás figuras son planas, entonces no tienen movilidad de rodar". Luego se le entregó un tetraedro y se le preguntó que si al colocar esa figura sobre una superficie plana ésta podía rodar. Ella respondió "no puede rodar porque todas sus caras son planas". También se le preguntó sobre el número de caras y la cara de mayor área o superficie de este poliedro: tetraedro.

Ella respondió: "la figura tiene cuatro caras y no hay cara de mayor área porque todas las caras son iguales". De acuerdo a la información obtenida durante la entrevista, la observación y la actividad escrita, Kriss además de hacer la distinción entre una figura plana y una redonda, también comprendió que los poliedros poseen características que los hace firmes o estáticos y que por eso no pueden rodar a diferencia de las superficies redondas o curvas; por consiguiente, se evidencia la adquisición de conocimiento por parte de la estudiante al presentar sus argumentos y al establecer comparaciones y relaciones entre los sólidos y figuras planas.

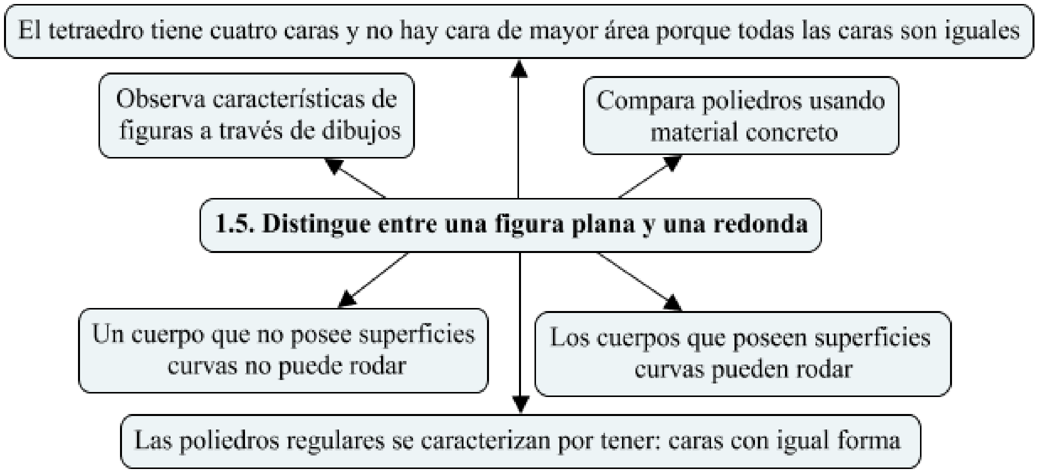


Figura 74. Categoría y descriptor 1.5. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

En este proceso de la entrevista, no fue necesario dar a conocer el aporte de información sobre los elementos constitutivos de un poliedro, esto se debió a que Kriss que ya conocía estos elementos cuando trabajó la actividad escrita, por lo cual ella pudo recordarlos con facilidad.

1.6 Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos. La estudiante en esta entrevista, observó un grupo de figuras geométricas con la intención de señalar las figuras indicadas. Kriss En este ejercicio mostró apropiación de los conceptos relacionados con los diferentes polígonos, ella pudo identificar cada uno de las figuras planas (polígonos) al nombrarlos con el número respectivo con los cuales estaba identificado cada uno.

Al realizar el respectivo análisis del descriptor y de las respuestas suministradas por la estudiante, se establece que ella reconoce los polígonos y los clasifica de acuerdo con el número de lados que posee cada figura geométrica plana.

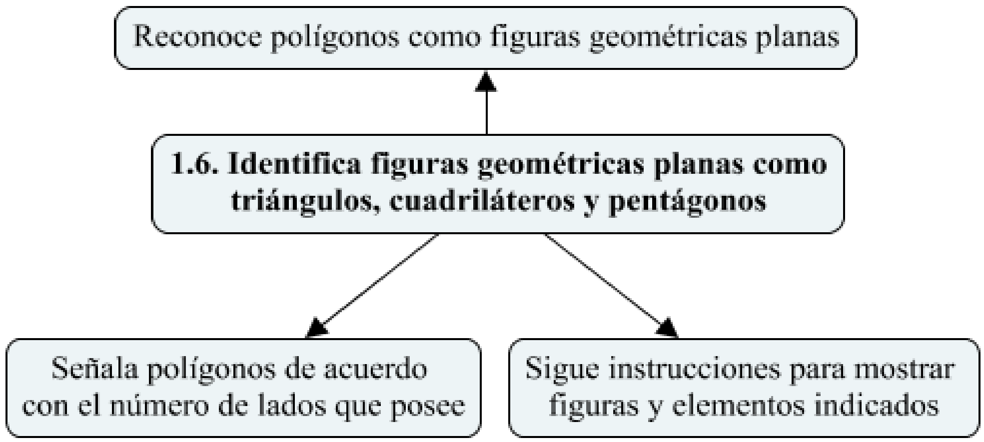


Figura 75. Categoría y descriptor 1.6. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia

4.2.2.2 Análisis de los descriptores para el nivel II.

2.1 Reconoce los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares. En la entrevista, Kriss observó algunos sólidos geométricos para identificar primero y luego mencionar aquellos cuyas caras están compuestas por polígonos regulares, es decir, los que poseen caras y aristas de igual forma y tamaño. Una de las ventajas del trabajo con material concreto que se llevó a cabo con los cuatro estudiantes que hacen parte de esta investigación, es el hecho de que ellos ya reconocen los cinco sólidos platónicos, que además, se afianzó con la actividad escrita; de tal modo, que Kriss no tuvo inconveniente en identificar los poliedros regulares dentro del conjunto de figuras suministradas.

En cuanto a la diferencia entre un sólido regular y uno irregular, esta fue la respuesta que ella dio: “es que los sólidos irregulares, sus caras son diferentes, son de distintas figuras y los regulares, sus caras son iguales”, además, “las caras de un sólido regular son iguales y los de un sólido irregular son diferentes y cambian también la medida de sus aristas”.

Para responder a la siguiente pregunta, se solicitó a la estudiante que observara un grupo de sólidos que presentaba una o varias de sus caras coloreadas, con el objeto de nombrar una característica común en todas ellas. En este ejercicio, Kriss no logra identificar dicha característica, lo que hace necesario establecer un diálogo socrático y proponer un aporte de información referente a los poliedros, para conducir a la estudiante a la comprensión explícita de la pregunta efectuada.

Luego del diálogo inquisitivo, Kriss argumentó: “la característica común entre estos sólidos, es que todas sus caras están compuestas por figuras, por polígonos”. Posteriormente, la estudiante consiguió nombrar correctamente el polígono que conformaban las caras coloreadas de cada sólido indicado en orden aleatorio.

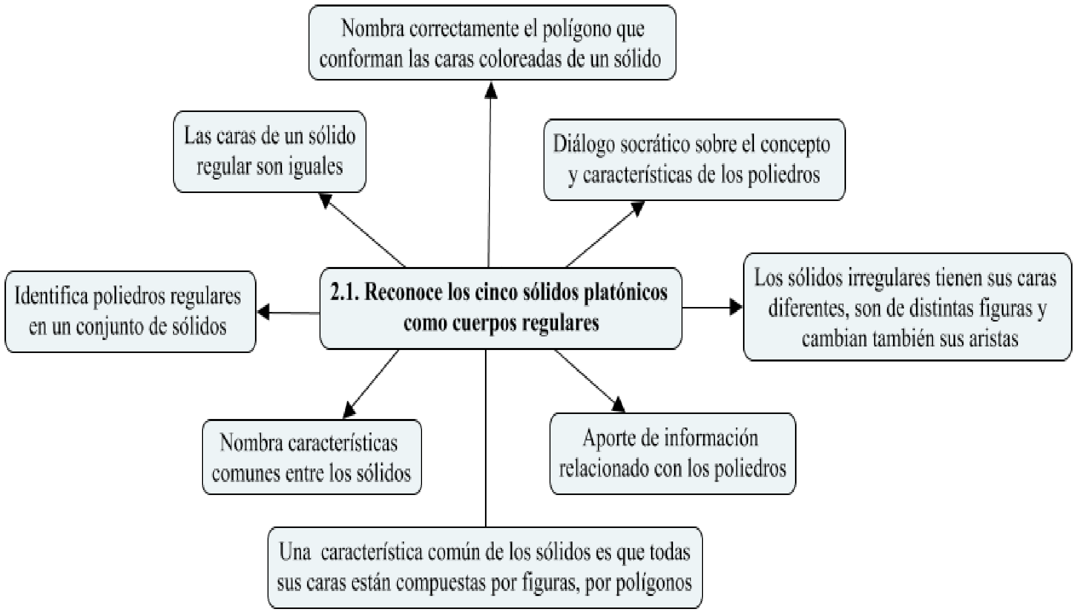


Figura 76. Categoría y descriptor 2.1. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

2.2 Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre los poliedros regulares. Para realizar esta entrevista, se utilizaron los cinco poliedros regulares elaborados por la estudiante, con dos tipos de material concreto: pitillos de gaseosa y doblado del papel (origami), para observarlos, compararlos y poder realizar mejor el conteo de sus elementos. La finalidad de la entrevista consistió en establecer similitudes y diferencias entre el conjunto de los cinco poliedros, los cuales representan la estructura de cada cuerpo, mediante sus aristas y los poliedros elaborados mediante el doblado del papel, para indicar las caras de los poliedros. El argumento presentado por Kriss fue el siguiente: “son semejantes porque así sea que estén en pitillos o en papel, son iguales y todos son poliedros” y la diferencia es “que sus caras son polígonos y los polígonos que tienen sus caras son diferentes, ósea, cada cara tiene diferentes polígonos”, otra diferencia es que “uno está hecho en pitillos y se ven las aristas y el otro en papel, se ven mejor sus caras”.

En relación a cuál de las figuras tiene todas sus caras en forma de pentágono, se aportó información a Kriss, debido a que en el momento no recordaba muy bien el concepto de pentágono. De esta manera, la estudiante supo establecer similitudes y diferencias entre los cinco poliedros. También identificó y nombró el poliedro que tenía las caras en forma de pentágonos; seguidamente, a través del conteo de los elementos constitutivos de los poliedros, ella consiguió mencionar el número de caras del dodecaedro, además este mismo ejercicio le permitió completar una tabla con los siguientes elementos: nombre del poliedro, número de caras, número de vértices y número de aristas, suma de caras y vértices, y la diferencia de la suma realizada entre el número de aristas. La tabla fue completada correctamente gracias a que utilizó el material concreto para realizar el conteo de los elementos de cada cuerpo platónico.

Tabla 31

Relación de Euler elaborada por Kriss (2).

Kriss

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: Registro de los elementos de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

Los cuestionamientos utilizados con la estudiante permitieron un efecto estimulante para obtener la información y lograr un razonamiento adecuado que condujera al logro del propósito de este descriptor.

Kriss también observó tres figuras que representaban el desarrollo de un dodecaedro en tres momentos distintos y el cuerpo de este sólido, con el fin de establecer la relación entre estos tres elementos. La estudiante comparó las figuras y luego, dijo que si era posible armar un dodecaedro con el esquema que se indicaba en la figura número 1, "porque en la figura uno estamos viendo una figura con sus caras que son pentágonos, y la figura tres está conformada por doce caras y en la figura uno también tiene doce caras". Además, en la relación que formaliza Kriss sostiene que "en la figura 1, estamos viendo una figura plana, una comparación de diagramas, en la figura dos, vemos las aristas del sólido y en la figura tres, estamos viendo las caras de un sólido platónico y todas forman un dodecaedro".

Finalmente, Kriss define los elementos de un tetraedro de la siguiente forma "un vértice es donde se unen varias caras en un sólido platónico, también se unen aristas, una cara sirve para sostener un sólido platónico y una arista, es como para diferenciar cada cara, también hace juntar cada cara". Asimismo, Kriss cuenta los elementos que posee el hexaedro con precisión, pero fue necesario establecer un diálogo para que comprendiera cuanto sumaban los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice. Luego del ejercicio propuesto afirmó que la sumatoria daba 180°.

Figura 77. Categoría y descriptor 2.2. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

2.3 Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.

Para dar inicio a la entrevista se proporcionó a la estudiante un primer esquema en un trozo de cartulina, para que, a través del doblado del papel intentara construir un tetraedro, de ser posible.

Kriss, en el intento por armar la figura descubre que no es posible construir un tetraedro, además, concluye que los polígonos que componen el esquema no se encuentran ubicados correctamente para poder armar el poliedro sugerido y no es posible cerrarlo.

Seguidamente, se entregó un segundo diagrama para ver si con este era posible construir el tetraedro, en esta ocasión, Kriss dijo: “con el segundo esquema si se puede armar, porque ahora sí sus polígonos en la figura están bien ubicados”; en cuanto al porqué no fue posible armar la figura con el primer esquema, y con el segundo si fue posible, ella afirmó lo siguiente: “con el segundo sí, porque aquí veo que me están dando un triángulo y las caras del polígono es un triángulo, y la figura uno, no me la dieron en triángulo como la segunda”.

De otro lado, se mostró a la estudiante los diagramas para armar los cinco poliedros regulares, para identificar en ellos, aspectos como la forma y el tamaño. Para esta observación, Kriss reconoció la forma de las caras de cada esquema y estableció asertivamente, que todas las caras estaban conformadas por polígonos regulares.

Un segundo grupo de esquemas fue mostrado también a la estudiante para establecer diferencias entre este y el primer grupo. La conclusión que dio Kriss fue la siguiente: “en el segundo grupo, hay caras diferentes en los esquemas y en el primero, todas sus caras son iguales en un solo esquema”.

De acuerdo con el análisis efectuado por Kriss, los esquemas del primer grupo corresponden a los poliedros regulares y los del segundo grupo, a los poliedros irregulares y con ellos es posible armar figuras o sólidos, además, una característica común entre los dos grupos de figuras, “es que todos son polígonos”. También pudo identificar con precisión el diagrama para construir un icosaedro y un hexaedro, dado que la cantidad de polígonos o de caras determina el tipo de poliedro.

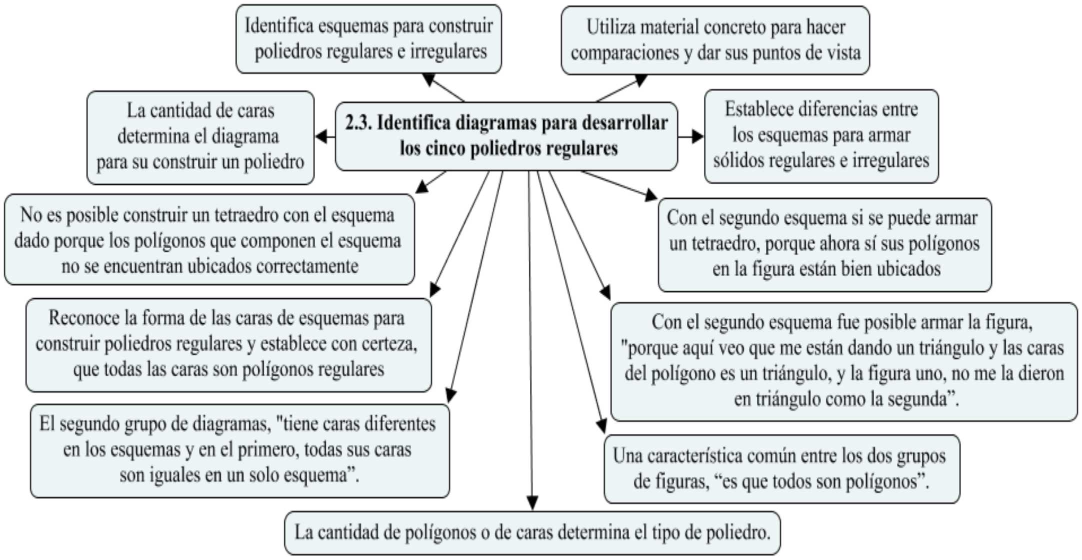


Figura 78. Categoría y descriptor 2.3. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

4.2.2.3 Análisis de los descriptores para el nivel III.

3.1 Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales. En esta entrevista se destacó el uso de tres figuras, una de ellas para representar el desarrollo de un hexaedro, otra para la estructura del hexaedro semi-armado y una tercera figura, para simbolizar el sólido construido totalmente. La intención del ejercicio con las figuras, era que la estudiante respondiera el interrogante ¿cómo son las superficies de las figuras 1 y 2? En el análisis que realiza Kriss, sostiene que la primera figura aparece desarmada y que en la segunda, ya se está empezando a armar un cuerpo, un cubo, conocido también con el nombre de hexaedro.

A continuación, se pidió a la estudiante observar los cinco poliedros regulares dibujados en un cuadro para que los nombrara, de acuerdo a las indicaciones dadas.

Con respecto a esta actividad, se menciona que Kriss reconoció y nombró cada poliedro correctamente, de igual forma, señaló la cantidad de caras que se unen en los vértices de cada poliedro regular.

Así mismo, Kriss al representar un polígono regular dibujó un cuadrado y un rectángulo para representar un polígono irregular. Al explicar las semejanzas y diferencias entre ellos, sostuvo lo siguiente: “se parecen en que todos dos son polígonos que tienen cuatro lados y cuatro ángulos; la diferencia, es que el regular como podemos ver ahí todos sus lados son iguales y en el irregular todos sus lados son de diferente medida o de diferente distancia”.

En cuanto a cómo son las caras de los cinco sólidos platónicos, la entrevistada dijo que las caras estaban conformadas por polígonos regulares.

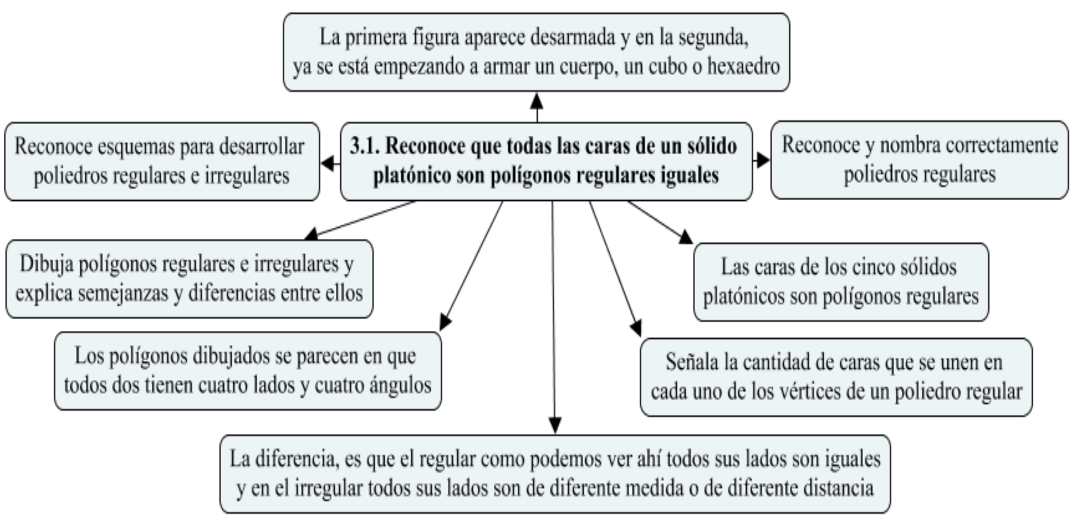


Figura 79. Categoría y descriptor 3.1. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

3.2 Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas. Para proceder con la entrevista, Kriss utilizó los cinco poliedros elaborados con pitillos y origami, con el propósito de hacer un ejercicio más práctico al contar cada uno de los elementos de estos poliedros regulares; de esta manera, ella observó las figuras dibujadas en un cuadro y utilizó el material concreto para contar todos sus elementos constitutivos y, las caras y las aristas que concurren en un mismo vértice.

La conclusión realizada por Kriss fue la siguiente: "es que en un vértice se unen el mismo número de aristas y también el mismo número de caras"**.** Este mismo ejercicio lo lleva a cabo con tres poliedros irregulares y dijo que la relación de los sólidos regulares también se cumple para los sólidos irregulares porque: "en los sólidos irregulares también se cumple porque en un vértice también llega la misma cantidad de caras y la misma cantidad de aristas".

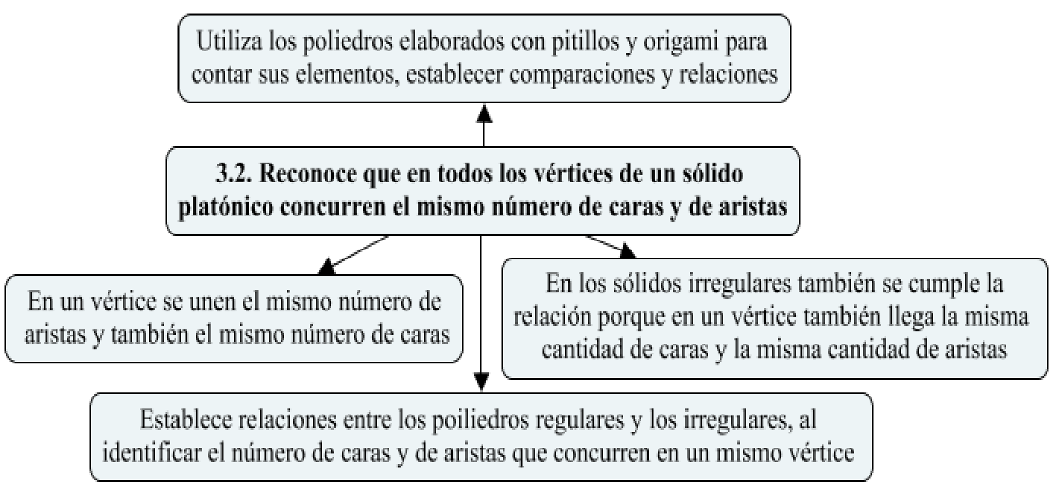


Figura 80. Categoría y descriptor 3.2. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

3.3 Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales. En la entrevista se indicó una tabla con tres poliedros regulares: un octaedro, figura 1; un tetraedro, figura 2, y un hexaedro, figura 3. En estos poliedros la estudiante señaló el número de vértices que tiene un ángulo: "un solo vértice; la cantidad de ángulos que tiene una cara: "3, 3 y 4 ángulos respectivamente"; también afirmó que no hay ángulo de mayor abertura en ninguno de los tres poliedros, porque todos son de la misma medida; el número de ángulos que tienen las figuras son: la figura uno tiene 24 ángulos, la figura dos tiene 12 ángulos y la figura tres, tiene 24 ángulo.

Al vértice del esqueleto del tetraedro llegan 3 aristas, el número de lados que llegan al vértice de una cara del tetraedro es 2 y la cantidad de caras que llegan a una arista del tetraedro, es 2. Al observar un tetraedro para responder cuántas caras se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este poliedro, ella dijo que se requieren tres caras como mínimo y que la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo es de 180°.

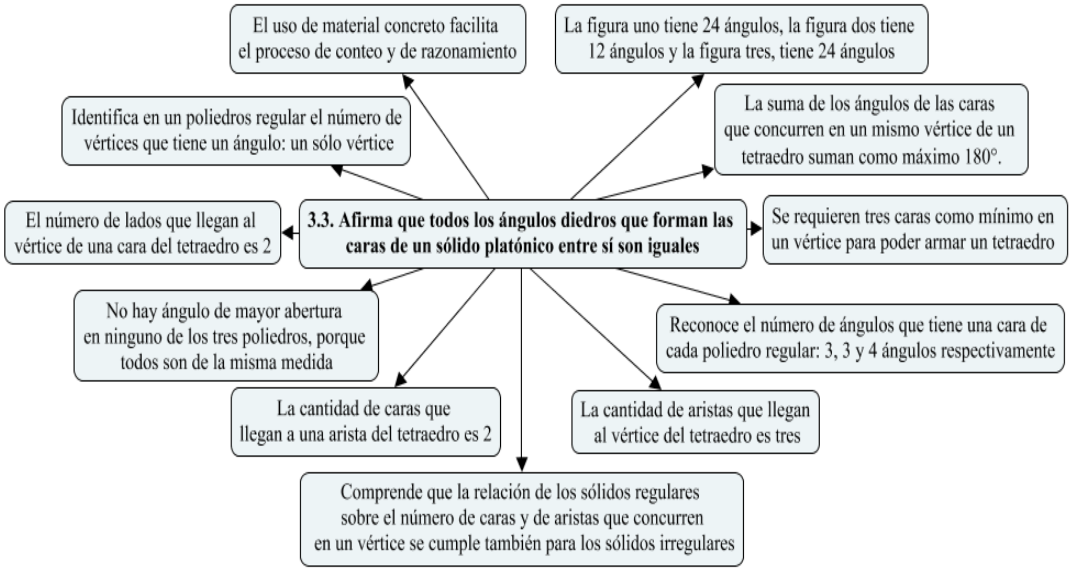


Figura 81. Categoría y descriptor 3.3. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

3.4 Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler. En esta entrevista, la estudiante utilizó los cinco poliedros elaborados con pitillos de gaseosa y en origami; además, también los observó mediante dibujos, por este motivo, resultó menos complejo para ella hacer el conteo de caras, vértices y aristas.

Con Kriss también se realizó un diálogo para que tuviera claridad sobre el porqué no es posible armar un sólido cuya suma de los ángulos fuese igual a 360°, esta charla se efectuó con algunos ejemplos ilustrativos y la información anexa en la entrevista. El siguiente ejercicio consistió en completar una tabla para establecer la relación de Euler. Se hace claridad al respecto de esta primera tabla, debido a que este ejercicio ya lo había llevado a cabalidad en una anterior entrevista, por consiguiente, resultó más sencillo al hacerlo de nuevo.

La tabla que corresponde al ejercicio realizado por Kriss es el siguiente:

Tabla 32

Relación de Euler elaborada por Kriss (3).

Kriss

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) − A
1. tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la que se pone de manifiesto el conteo de los elementos de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

En la tabla se observa con claridad que la estudiante logra establecer la relación de Euler, la cual se cumple para los poliedros regulares. La evidencia de este razonamiento se puede apreciar en la actividad escrita, en la observación que se hizo a la estudiante y en el descriptor 2.2, para el segundo nivel de razonamiento. Después de este ejercicio, la intención estuvo centrada en completar una segunda tabla, por medio de siete poliedros, los cuales clasificó como irregulares. La tabla realizada por Kriss fue la siguiente:

Tabla 33
Relación de Euler para los poliedros irregulares.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Fig. 1	5	6	11	9	2
2. Fig. 2	6	8	14	12	2
3. Fig. 3	8	12	20	18	2
4. Fig. 4	8	12	20	18	2
5. Fig. 5	7	7	14	12	2
6. Fig. 6	9	9	18	16	2
7. Fig. 7	7	7	14	12	2

Nota: En la que se registra la información sobre los elementos característicos de algunos poliedros irregulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

En esta tabla se puede observar la información registrada por la estudiante, al igual que en la tabla anterior, ella escribió el número de caras, el número de vértices y el número de aristas; luego, sumó las caras y los vértices y finalmente, a esta suma le restó el número de aristas. Al preguntarle si esta relación de Euler que se cumple para los poliedros regulares, también se cumple para los poliedros irregulares, ella dijo lo siguiente: “se cumple para todos los sólidos, porque así sea que nosotros tengamos un sólido regular o irregular, la sumatoria de caras más vértices, menos las aristas siempre nos va a dar dos”.

Para dar continuidad con la entrevista, se mostró a Kriss dos sólidos; el primero, para representar un hexaedro con un corte en una esquina y el segundo, para representar el nuevo poliedro irregular después de realizar dicho corte. El ejercicio consistió en contar las caras, los vértices y las aristas del nuevo poliedro y extraer las conclusiones correspondientes del caso.

Para poder explicar mejor el ejercicio, Kriss realizó lo siguiente:

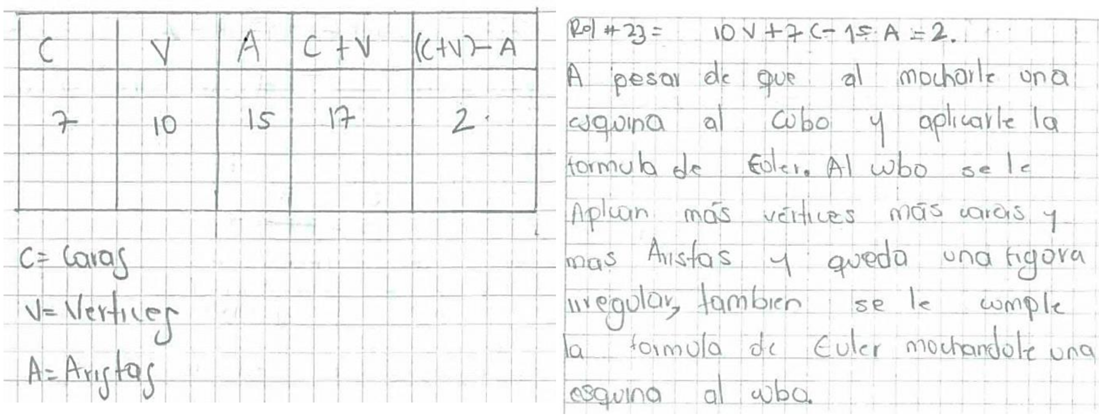


Figura 82. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusión. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

De esta manera, la estudiante demostró que la fórmula de Euler se cumple tanto para los poliedros regulares, como para los irregulares; en consecuencia, ella afirmó: “si le cortamos una esquina a un sólido regular, se obtiene un sólido irregular y también se cumple la regla de Euler”.

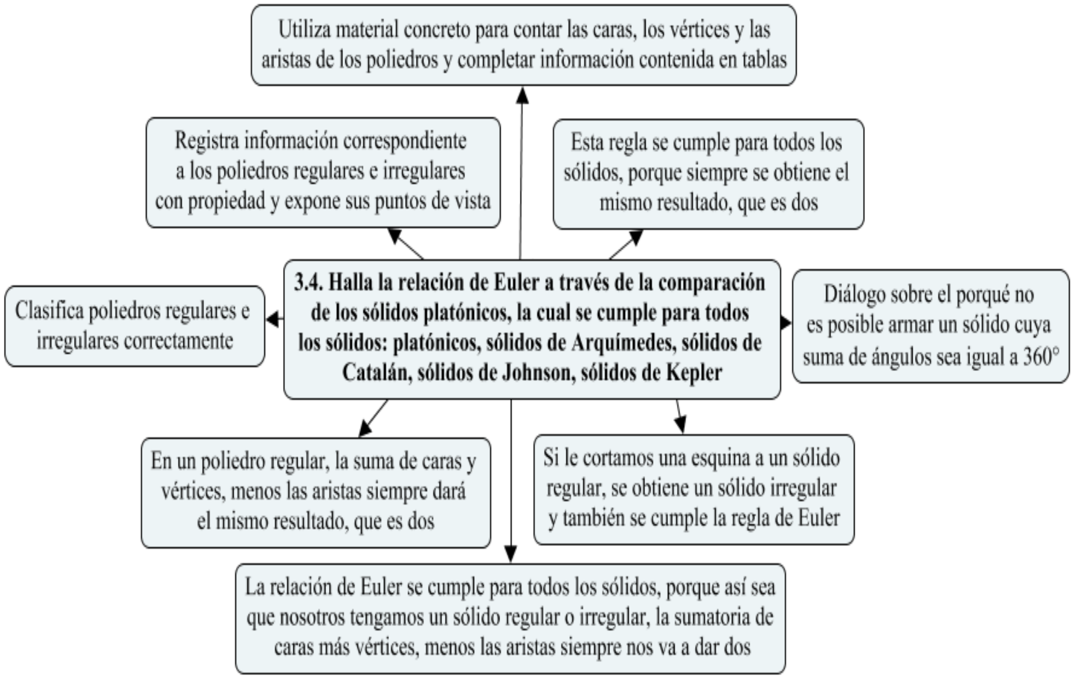


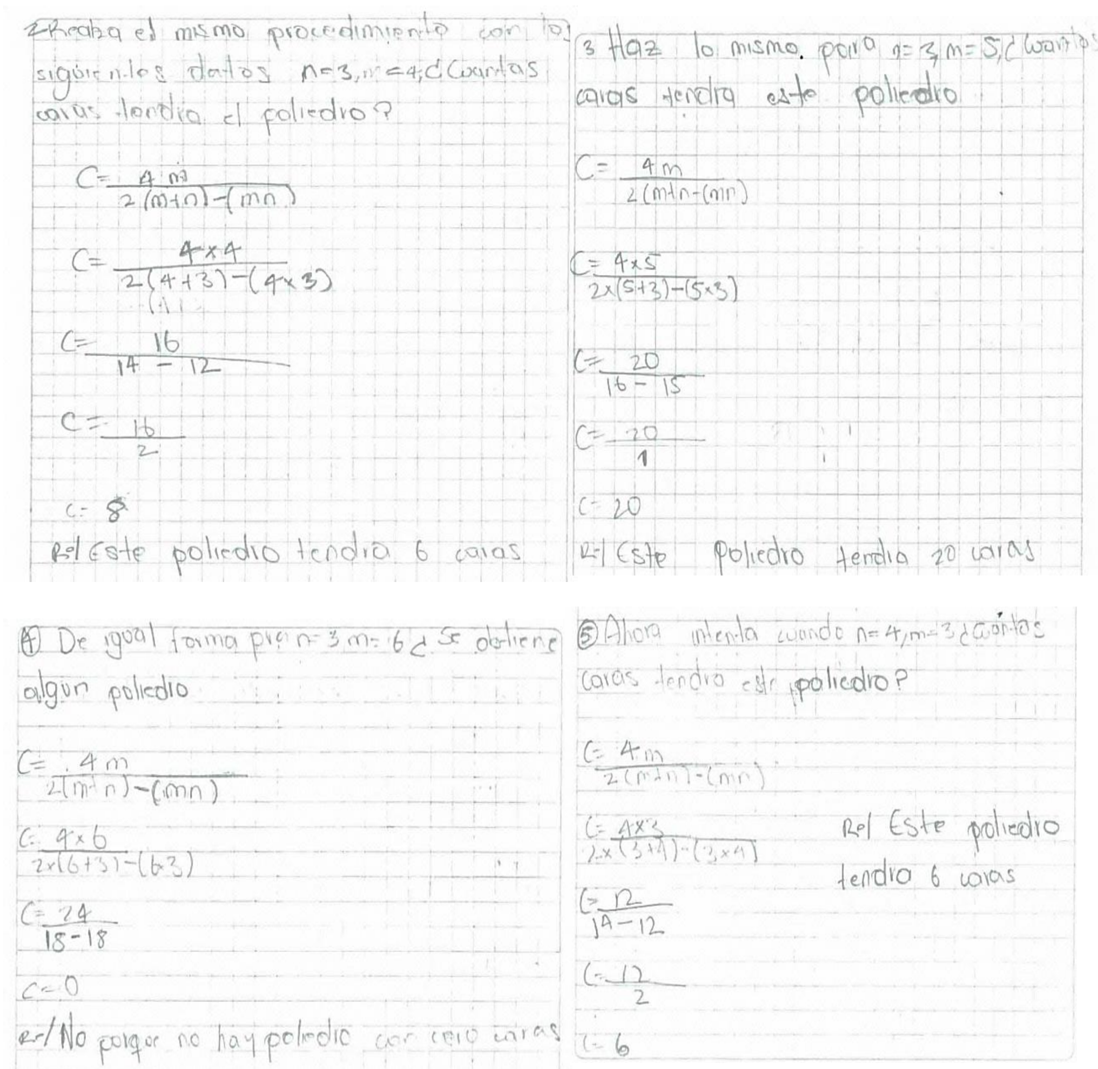
Figura 83. Categoría y descriptor 3.4. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente elaboración propia.

3.5 Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos. Para esta entrevista, se planteó una propuesta de trabajo mucho más práctica, que consistió en utilizar una fórmula matemática para encontrar el número de caras de un poliedro regular. Durante la propuesta desarrollada con la estudiante, una vez que ella iba realizando la serie de situaciones indicadas, le fue más sencillo comprender por qué solo existen cinco poliedros regulares.

Kriss realizó el mismo proceso al remplazar los datos suministrados y pudo establecer el número de caras de los siguientes poliedros: el icosaedro, el hexaedro y el dodecaedro; además, hubo un ejercicio en donde no fue posible determinar el poliedro;

la respuesta a este ejercicio fue: “no se obtiene ningún poliedro, porque no hay poliedro con cero caras”. No es posible determinar el poliedro.

La evidencia del trabajo desarrollado por Kriss, fue la siguiente:


2 Realiza el mismo procedimiento con los siguientes datos n=3, m=4 ¿Cuántas caras tendría el poliedro?

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 4}{2(4+3)-(4 \times 3)}$

$C = \frac{16}{14-12}$

$C = \frac{16}{2}$

$C = 8$

R/ Este poliedro tendría 6 caras

3 Haz lo mismo para n=3 m=5 ¿cuántas caras tendría este poliedro

$C = \frac{4m}{2(m+n-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 5}{2x(5+3)-(5 \times 3)}$

$C = \frac{20}{16-15}$

$C = \frac{20}{1}$

$C = 20$

R/ Este poliedro tendría 20 caras

4 De igual forma para n=3 m=6 ¿Se obtiene algún poliedro

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 6}{2x(6+3)-(63)}$

$C = \frac{24}{18-18}$

$C = 0$

R/ No porque no hay poliedro con cero caras

5 Ahora intenta cuando n=4, m=3 ¿Cuántas caras tendría este poliedro?

$C = \frac{4m}{2(m+n)-(mn)}$

$C = \frac{4 \times 3}{2x(3+4)-(3 \times 4)}$

$C = \frac{12}{14-12}$

$C = \frac{12}{2}$

$C = 6$

R/ Este poliedro tendría 6 caras

Figura 84. Fórmula matemática para calcular el número de caras de un poliedro regular. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Kriss.

A continuación se describe el razonamiento demostrado por Kriss a través del descriptor y la actividad escrita para este nivel de razonamiento.

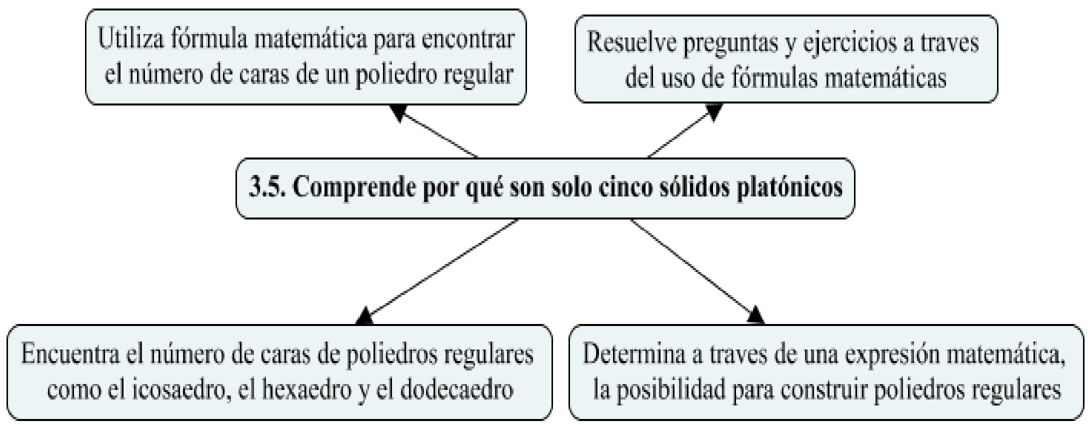


Figura 85. Categoría y descriptor 3.5. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Kriss. Fuente: elaboración propia.

4.2.3 Análisis del proceso de razonamiento demostrado por Pablo.

El estudiante Pablo, también cursa el grado quinto, en una Institución Educativa de carácter público del municipio de Carepa, se invitó a participar en este trabajo de investigación, debido su a su interés, compromiso, entusiasmo y cumplimiento con las actividades propuesta durante la construcción de los cinco poliedros regulares con material concreto: pitillos de gaseosa y origami.

Este niño se caracteriza por tener un buen desempeño académico, por su responsabilidad en la participación de todas las actividades académicas desarrolladas por la institución, por ser entusiasta, por su deseo de aprender, por ser un estudiante organizado, respetuoso, preocupado y disciplinado.

Pablo, participó en diferentes actividades durante el desarrollo de esta investigación como la observación, las actividades escritas y la entrevista semi-estructurada. Durante las entrevistas, tuvo acceso a algunos objetos que elaboró con material concreto como pitillos de gaseosa y el doblado del papel, y otros con los cuales realizó construcciones, comparaciones, cortes, plegado de papel, trazos, y acciones que les permitieron comprender conceptos a través de interrogantes realizados para cada uno de los niveles de razonamiento.

La siguiente es una muestran de algunas construcciones realizadas por Pablo durante la aplicación de la entrevista para el segundo y tercer nivel de razonamiento de Van Hiele, en donde se demuestra el uso del lenguaje y de la comprensión de conceptos sobre el objeto de estudio matemático. El avance demostrado se evidencia en los siguientes descriptores, para el nivel II y III de razonamiento: 2.2; 3,4 y 3,5.

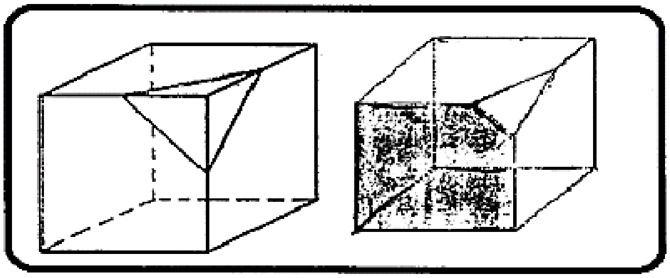
Tabla 34

Relación de Euler elaborada por Pablo (1).

Pablo

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la que se evidencia los avances por descriptores para el nivel II y III de razonamiento: Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.



C	V	A	C+V	(C+V)-A
7	10	15	17	2

Cuenta ahora nuevamente las caras, los vértices y las aristas de este nuevo sólido irregular y aplica la fórmula de Euler, ¿Qué puedes concluir? 7 + 10 − 15 = 2 (caras, vertices, aristas) si la suma de caras y vertices menos las aristas da 2.

¿Se cumple entonces la relación de Euler para este nuevo sólido irregular? R/si se cumple

Escribe tus propias conclusiones.

R/ aplique la formula de Euler y vi que el solido irregular da 2, igual que en los solidos regulares

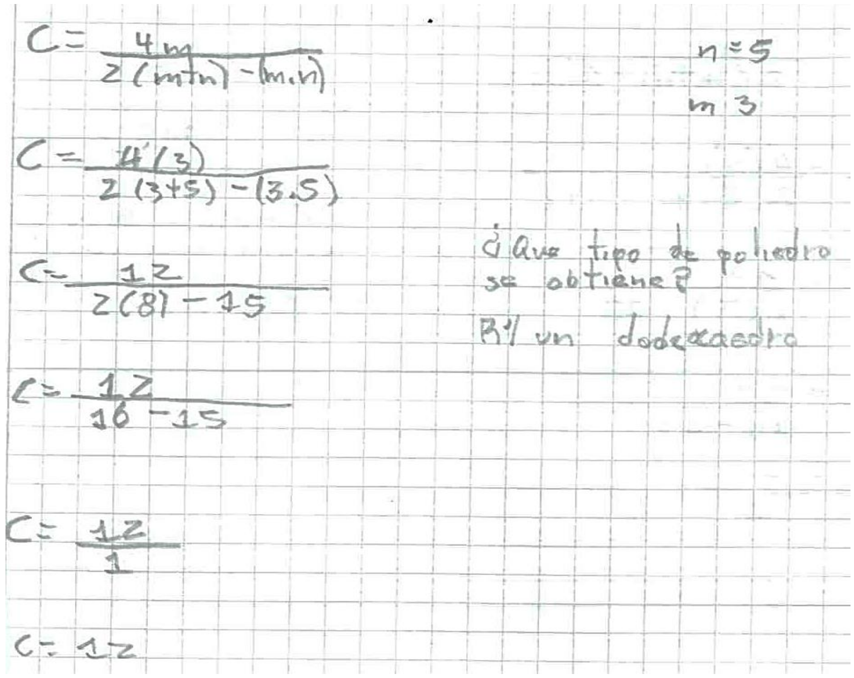
Figura 86. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusión. Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.

Tabla 35

Relación de Euler para los poliedros irregulares.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. figura 1	5	6	11	9	2
2. Figura 2	6	8	14	12	2
3. figura 3	8	12	20	18	2
4. figura 4	8	12	20	18	2
5. figura 5	7	7	14	12	2
6. figura 6	9	9	18	16	2
7. figura 7	7	7	14	12	2

Nota: En la que se evidencia el registro de información sobre los elementos de algunos poliedros irregulares, niveles II y III de razonamiento: Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.



$C = \frac{4m}{2(m+n)-(m.n)}$ $n=5$ $m\ 3$

$C = \frac{4(3)}{2(3+5)-(3.5)}$

$C = \frac{12}{2(8)-15}$ ¿Que tipo de poliedro se obtiene? R/ un dodecaedro

$C = \frac{12}{16-15}$

$C = \frac{12}{1}$

$C = 12$

Figura 87. Fórmula matemática para hallar el número de caras de un poliedro regular. Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.

4.2.3.1 Análisis de los descriptores para el nivel I

1.1 Reconoce conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros. En el desarrollo de la primera entrevista para Pablo, al igual que a los demás entrevistados, se le muestra una figura para que identifique en ella elementos como una recta, un segmento de recta, dos rectas paralelas, dos rectas perpendiculares, dos puntos y un plano.

En los primeros ejercicios, Pablo mostró seguridad al seleccionar las figuras que representan los elementos solicitados, pero cuando se le pidió que señalara dos rectas perpendiculares, éste mostró inseguridad al hacer su elección, lo cual hizo necesario realizar un diálogo socrático, con el propósito de mejorar su razonamiento. Una vez terminado el diálogo, y dado un aporte de información sobre rectas perpendiculares, Pablo pudo establecer la diferencia entre rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Seguidamente, se le indicó al entrevistado una serie de tres figuras, en donde se mostró un cuadrado (Figura.1), en la figura dos el mismo cuadrado, pero con dos lados consecutivos eliminados y una tercera figura, que representa el mismo cuadrado con dos lados no consecutivos también eliminado. El objeto de esta actividad, consistió en identificar el tipo de figura que resultó en la figura dos y luego, el tipo de figura que resultó en la figura tres. La elección realizada por el estudiante se hizo a través de preguntas de selección múltiple con única respuesta. Finalmente, Pablo pudo manifestar la diferencia entre rectas paralelas y rectas perpendiculares a través del aporte de información y del diálogo socrático, que le posibilitó a través de una serie de preguntas y planteamientos, lograr el razonamiento propicio para establecer comparaciones y diferencias entre estos elementos, inicialmente no comprendidos.

Se considera relevante mencionar que las actividades llevadas a cabo durante el proceso de preselección y selección de los estudiantes posibilitó la apropiación de algunos conceptos determinantes para dar validez a este descriptor, actividades tales como: la construcción de los cinco poliedros con dos tipos de material concreto, la actividad escrita, la observación y la entrevista. El siguiente esquema muestra la relación entre la categoría y el descriptor para el nivel I de razonamiento.

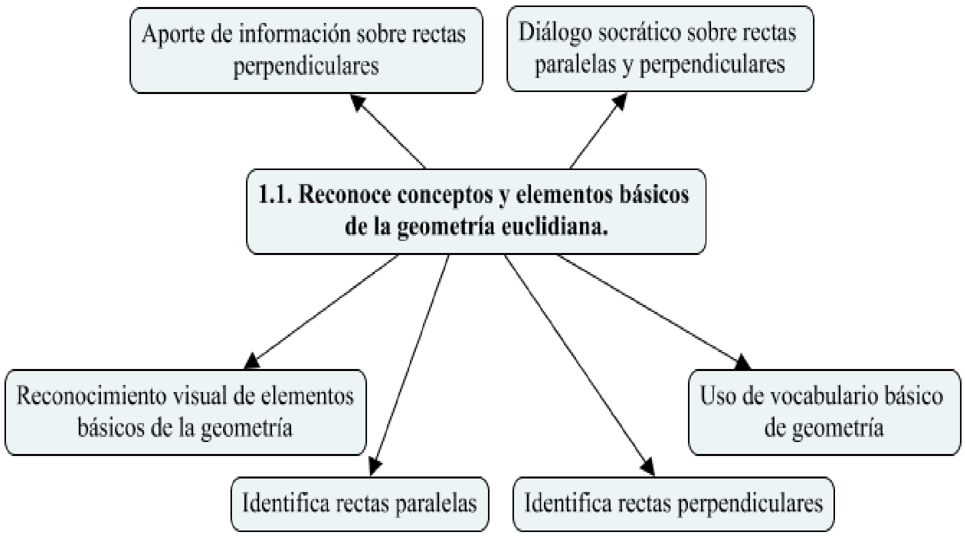


Figura 88. Categoría y descriptor 1.1. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

1.2 Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: "Por dos puntos pasa una única recta". Al entregar una hoja de papel con dos puntos dibujados en ella, un lápiz y una regla para que trazara todas las posibles rectas que pasen por estos dos puntos, pablo realiza el ejercicio sin dificultad, además afirmó "Por los dos puntos pasa una sola recta". Esta respuesta se ratifica con la actividad escrita y en la observación efectuada al estudiante, quien logró demostrar con seguridad la respuesta dada.

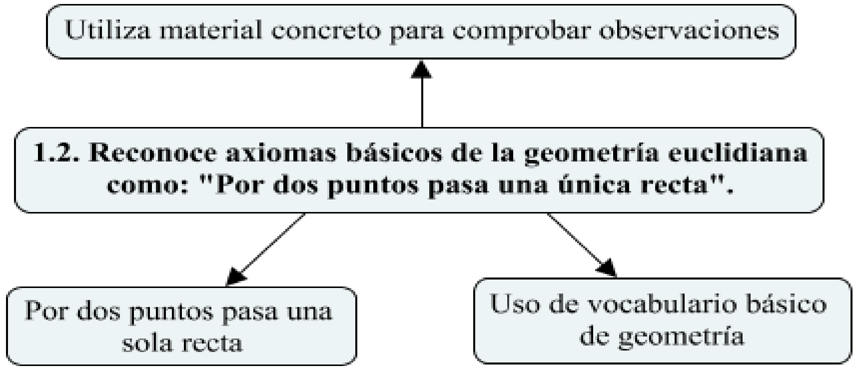


Figura 89. Categoría y descriptor 1.2. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

1.3 El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel. Para esta entrevista, se entregó a Pablo una hoja con dos puntos dibujados en ella, para que de manera práctica realizara todos los pliegues posibles que unen estos dos puntos. Después de realizar este proceso, se le preguntó sobre la cantidad de pliegues que se requieren para hacer coincidir los dos puntos, Pablo respondió: “un solo pliegue”.

El estudiante comprende que por dos puntos pasa una sola línea recta, además identifica entre una línea recta y un segmento de recta. Pablo hace coincidir dos puntos dibujados en una hoja mediante un pliegue y logra la siguiente afirmación sobre la relación entre el doblez y el segmento que une los dos puntos: “se forman ángulos rectos y las línea son perpendicular porque son los que forman ángulos de 90°”.

Este análisis lo consigue mediante la observación de las líneas que se forman al trazar una línea que conecta dos puntos y al doblar la hoja para unir estos dos puntos. La comparación y el análisis visual resulta útil para validar este descriptor.

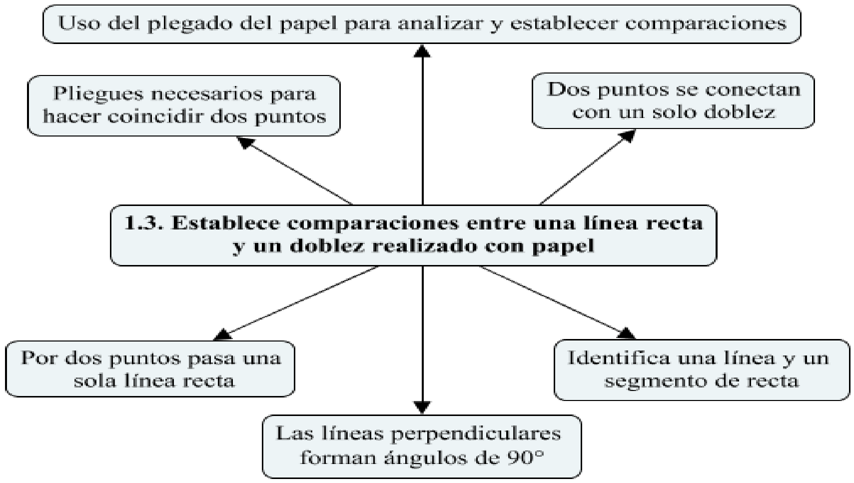


Figura 90. Categoría y descriptor 1.3. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

1.4 Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas. La entrevista consistió en presentar al estudiante los cinco poliedros regulares para identificar en cada uno de ellos elementos que los caracterizan como: caras, vértices y aristas. Para identificar estos elementos, se le pidió a Pablo que utilizara colores para señalar dichos elementos, además el estudiante tuvo a su alcance los modelos de los poliedros que él mismo elaboró, uno con pitillos de gaseosa, que representa las aristas (hexaedro) y otro con bloc iris, que representa las caras de la misma figura.

Una vez tiene en sus manos las figuras antes mencionadas, Pablo las observa con detenimiento y dice lo siguiente: “la estructura elaborada con pitillos tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas”, el estudiante realizó el conteo de cada uno de los elementos que constituyen el poliedro regular; de igual manera, realizó el procedimiento para establecer el número de elementos dela figura construida con papel, en esta oportunidad dijo: “es igual, tiene los mismos vértices que son 8, las mismas caras que son 6 y las mismas aristas que son 12”, pero esta vez no tuvo necesidad de realizar ningún conteo.

A la pregunta ¿cuál es la arista de mayor longitud?, él respondió “no tiene arista de mayor longitud porque todas son de igual tamaño”, con respecto al nombre de la figura que forman las caras del poliedro “son cuadrados” y las de la figura con pitillos también “son cuadrados”.

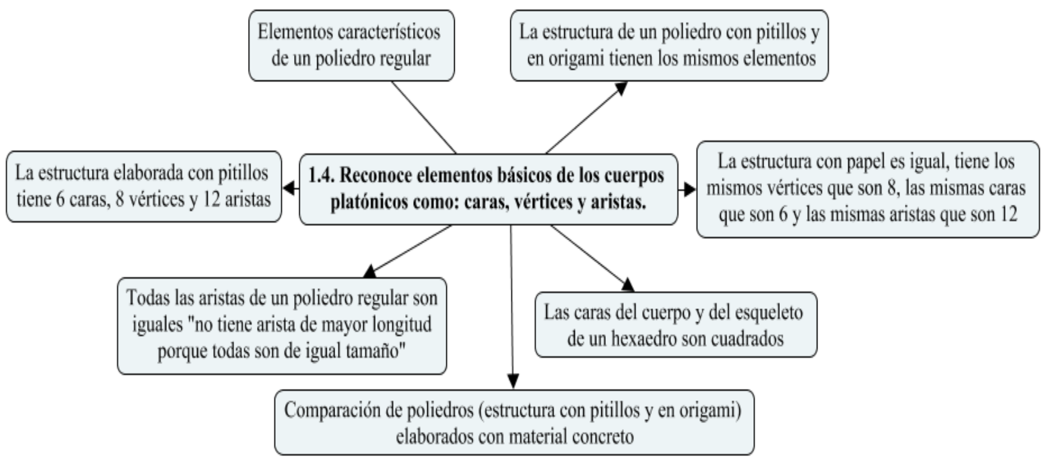


Figura 91. Categoría y descriptor 1.4. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

1.5 Distingue entre una figura plana y una redonda. Para dar inicio a esta entrevista., se mostró al estudiante dos cuadros con diferentes tipos de figuras, para identificar y señalar cuáles figuras son redondas y cuáles planas.

Pablo señaló cada una de las figuras y las nombró de la siguiente manera: “planas son la figura número 1, la figura número 3, la figura número 4 y la figura número 6”. “Las redondas son: la figuras número 5, la figura número 7 y la figura número 2”, para el segundo conjunto de elementos, las figuras planas son “la figura número 1, la figura número 2, y la figura número 5 y las figuras redondas son: la figura número 3, la figura número 6 y la figura número 4.

Pablo establece claramente cuáles superficies son planas y cuáles son redondas, además a la pregunta ¿Por qué unas pueden rodar y otras no?, él respondió: “porque unas superficies son redondas o curvas y las otras son superficies planas, y al ser planas no pueden rodar”. Seguidamente, se le entregó un tetraedro y se le preguntó que si al colocar esa figura sobre una superficie plana ésta podía rodar. A lo cual respondió lo siguiente: “no, porque sus caras son superficies planas y al ser planas no puede rodar”; también se le preguntó cuántas caras tiene el tetraedro y cuál es la cara de mayor área o superficie.

Pablo contestó “esta figura tiene cuatro caras y no tiene cara de mayor área porque todas las caras son iguales”. De esta manera, el estudiante a través de la información suministrada, no solo en la entrevista, sino también en la actividad escrita y por medio de la observación, demostró con sus argumentos, apropiación de éste descriptor para el segundo nivel de razonamiento.

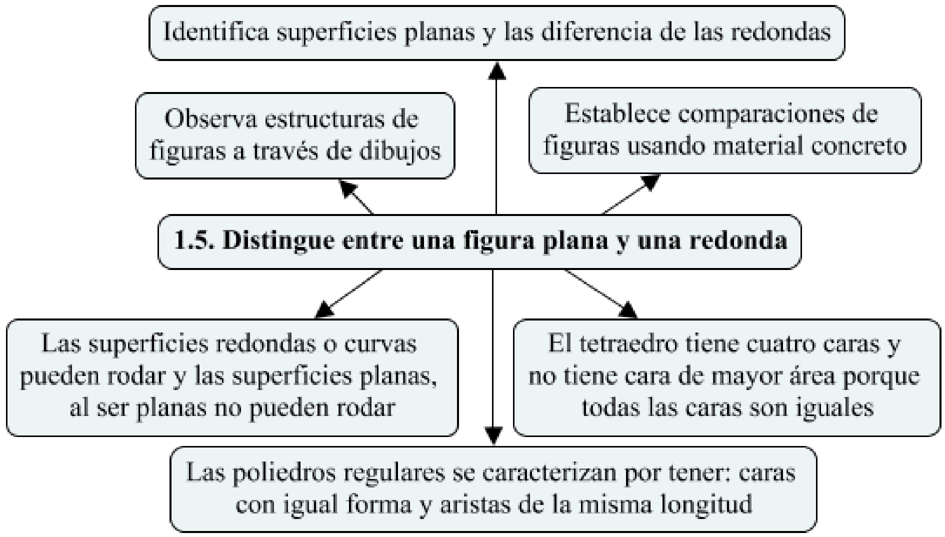


Figura 92. Categoría y descriptor 1.5. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

En esta entrevista, no fue necesario el aporte de información para el estudiante sobre los elementos constitutivos de un poliedro, puesto que Pablo tenía estos muy claros, que fueron trabajados durante la construcción de los cinco poliedros con los dos tipos de material sugerido: pitillos de gaseosa y doblado del papel, además del trabajo efectuado en la actividad escrita, en donde también se mencionan estos conceptos.

1.6 Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos. El objeto de esta entrevista consistió en presentar al estudiante un conjunto de figuras geométricas planas para que, de acuerdo a las indicaciones dadas por el entrevistador, éste señalara o diera el número de la figura solicitada.

Pablo realizó el ejercicio correctamente y no tuvo ninguna dificultad para señalar las figuras geométricas planas nombradas aleatoriamente, además demostró tener seguridad en sus respuestas y elecciones.

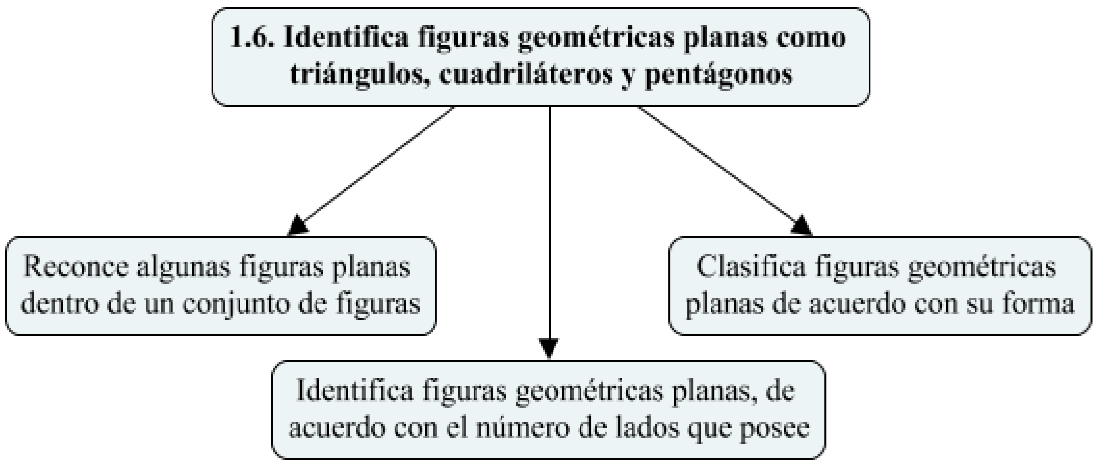


Figura 93. Categoría y descriptor 1.6. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

4.2.3.2 Análisis de los descriptores para el nivel II.

2.1 Reconoce los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares. En esta entrevista se propone a Pablo identificar dentro de un grupo de sólidos, aquellos que corresponden a los regulares. El estudiante realiza la clasificación de los sólidos correctamente. En cuanto a la diferencia entre un sólido regular y uno irregular realizó la siguiente aserción: “Es que en los sólidos regulares todas las caras son de igual forma y en los irregulares son de diferente forma”, en cuanto a las caras “en un sólido regular, son de igual tamaño y forma, y en los irregulares son de diferente tamaño y forma”.

Seguidamente, se mostró a Pablo un segundo grupo de estructuras construidas con pitillos, con una de las caras coloreada con el propósito de identificar características comunes entre ellos.

El ejercicio propuesto hizo necesario utilizar un aporte de información sobre el concepto de poliedro, de tal forma que Pablo obtuviera el razonamiento adecuado para responder al interrogante. Una vez dado el aporte de información, el estudiante afirmó que “todas las caras son polígonos” y nombró el tipo de polígono coloreado en cada figura sin problema.

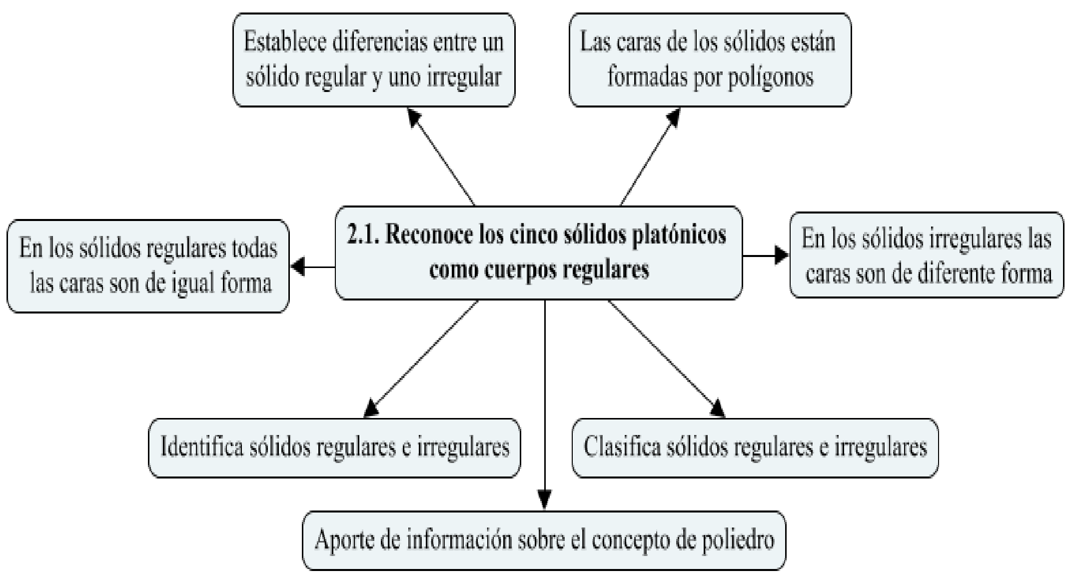


Figura 94. Categoría y descriptor 2.1. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

2.2 Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre los poliedros regulares. Para esta entrevista, Pablo utilizó los poliedros construidos con pitillos y papel, además de las imágenes de estos cuerpos para observarlos, compararlos y luego, encontrar similitudes y diferencias entre ellos. La respuesta que da el estudiante con respecto a las similitudes entre la figuras es “que tienen los mismos lados, los mismos vértices y las mismas aristas, y la diferencia es que en una está en pitillos y muestra las aristas y en la otra con papel, muestra las caras”.

Pablo identifica con exactitud las figuras que tienen todas sus caras en forma de pentágono, además, llama a ese cuerpo platónico por su nombre respectivo. Para el siguiente ejercicio Pablo contó cada uno de los elementos característicos de los cinco poliedros regulares y completo una tabla así:

Tabla 36
*Relación de Euler elaborada por Pablo (2)***).**

Pablo

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: En la que se registra información sobre los elementos característicos de los poliedros regulares. Fuente: elaboración por el estudiante Pablo.

La tabla muestra como el estudiante completa correctamente cada uno de los campos de la misma, lo cual fue posible porque se contó con los cinco poliedros construidos por este estudiante con dos tipos de material concreto, pitillos de gaseosa y doblado del papel. Consecuentemente, a Pablo se le hace más fácil efectuar el ejercicio, dado que cuenta las caras, los vértices y las aristas de los cuerpos platónicos con mayor precisión.

El estudiante también observó tres figuras que representaban el desarrollo de un dodecaedro (Fig. 1), estructura del dodecaedro con sus aristas (Fig. 2) y estructura del mismo sólido con sus caras (Fig. 3), con el propósito de encontrar la relación entre estos tres elementos.

Pablo compara las figuras y posteriormente, se le pregunta si es posible que con la primera figura se construya la tercera. Al comienzo, Pablo presenta dudas, pero luego dice que "sí" es posible, "porque hay doce caras en la figura 1". Además, "la figura 1, está desarmada y la figura 3, está armada".

Finalmente, al observar el tetraedro y sus elementos constitutivos, el estudiante define cada elemento así: "un vértice es un punto que une una arista con otra arista, una arista sirve para unir una cara con otra cara y una cara, sirve para poner la figura sobre una superficie".

Del mismo modo, cuenta cuantos elementos posee la figura sin complicación, lo mismo que al referirse a la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice, él dice "180°".

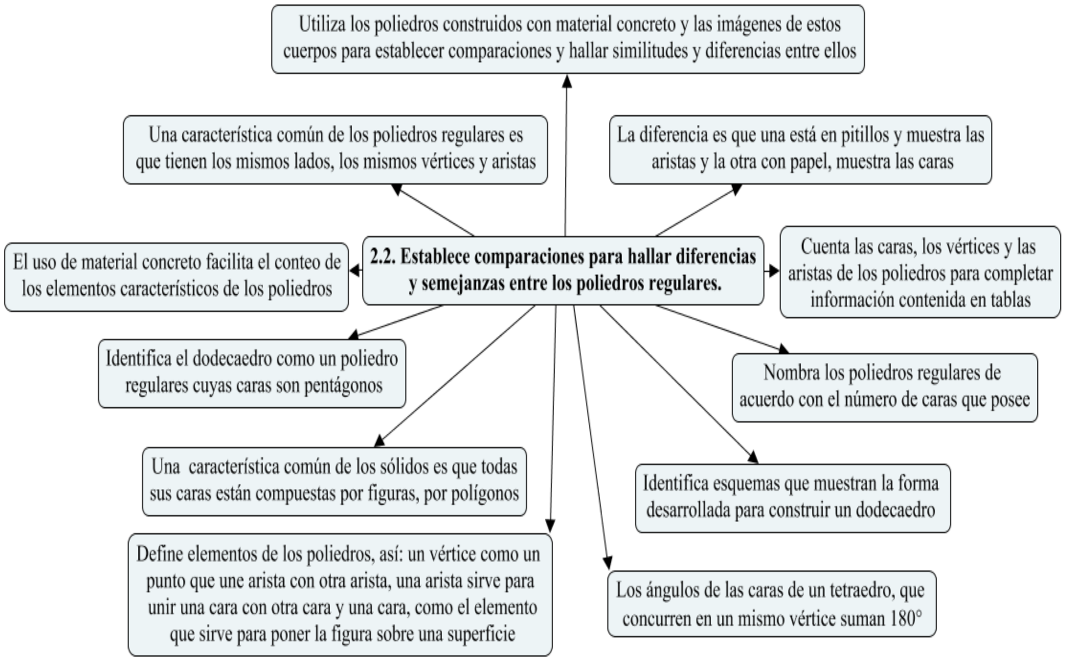


Figura 95. Categoría y descriptor 2.2. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

2.3 Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.

Para esta entrevista se elaboró una figura en un trozo de cartulina para que el estudiante, a través del doblado del papel intentara construir un tetraedro, en caso de ser posible. Pablo manipula la figura e intenta armarla, pero descubre que no es posible armar un tetraedro. Inmediatamente, se entregó un segundo esquema para ver si esta vez era posible armar el mismo sólido antes mencionado, en esta oportunidad el diagrama utilizado permitió que Pablo construyera el tetraedro.

El estudiante afirmó lo siguiente: “con el segundo esquema si se puede formar, porque si tiene las caras correctamente organizadas y uno si lo puede doblar”, además, él estudiante pudo establecer que no era posible armar la figura con el primer esquema debido a la posición en que se encontraban las partes para doblar los triángulos de este cuerpo, pese a que tenían la misma cantidad de elementos, solo cambiaba la forma. Del mismo modo, se le presentó a Pablo los diagramas para armar los cinco poliedros regulares, para que identificara la forma y tamaño de cada uno de ellos. No hubo problema alguno para nombrar la forma de las caras de cada esquema, además de señalar que el tamaño que componían las piezas de cada figura, eran iguales.

Finalmente, a través de un tercer grupo de figuras para desarrollar algunos sólidos irregulares, Pablo pudo establecer la diferencia entre éstos y los esquemas para armar sólidos regulares, con la siguiente afirmación: "que en el primer grupo, son sólidos regulares y en el segundo grupo, son sólidos irregulares", también identificó correctamente el diagrama para construir un icosaedro y un hexaedro, refiriéndose a que la elección la había efectuado debido a la cantidad de lados que tienen las figuras.

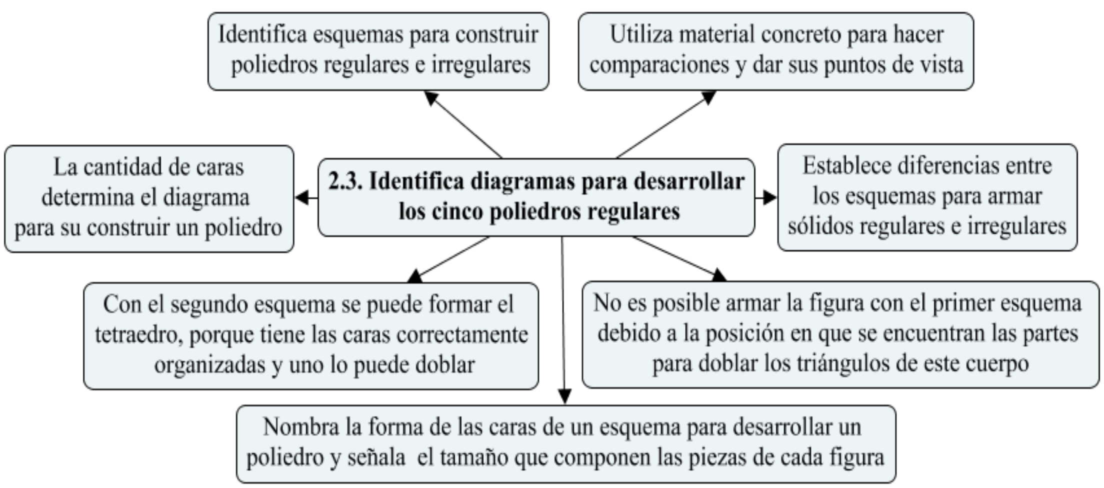


Figura 96. Categoría y descriptor 2.3. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

4.2.3.3 Análisis de los descriptores para el nivel III.

3.1 Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales. Antes de dar inicio a esta entrevista, se solicitó a Pablo que observara tres figuras en el siguiente orden: Un esquema para desarrollar un hexaedro (figura 1), la estructura del hexaedro semi armado (figura 2) y el sólido construido totalmente (figura 3). Para el primer ejercicio, el estudiante debía responder al interrogante ¿cómo son las superficies de las figuras 1 y 2?, lo cual no comprendió inicialmente, por lo que se hizo necesario establecer un diálogo con Pablo con el propósito de reflexionar en torno a la pregunta realizada y por ende, mejorar la comprensión de su razonamiento para proporcionar una respuesta que antes no pudo dar.

La respuesta es que “la figura 1 está desarmada y en la figura 2, ya la están armando, además, la figura 3 está armada y muestra una cantidad de, caras”; posteriormente se pidió al estudiante observar los cinco poliedros regulares dentro de un conjunto de figuras dibujados en un cuadro para que los nombrara, de acuerdo a la figura que se le indicara, en el ejercicio se pudo evidenciar que Pablo reconoce y nombra los cinco cuerpos platónicos con propiedad, también mencionó el número de caras que se unen en cada uno de los vértices de cada poliedro regular.

Paso seguido, se indicó a Pablo dibujar un polígono regular y uno irregular para explicar las semejanzas y diferencias entre ellos. Los polígonos dibujados fueron un cuadrado, para representar el polígono regular y un rectángulo, para indicar el polígono irregular. La explicación que realiza el estudiante acerca de las semejanzas es “que tiene la misma cantidad de lados" y la diferencia es "que el polígono regular tiene los lados de igual tamaño y el irregular de diferente tamaño".

Finalmente, en este descriptor Pablo también identificó cómo son las caras de los cinco sólidos platónicos, al nombrar las caras de cada poliedro y su forma respectiva, y también estableció un análisis general, al señalar que estos cuerpos están compuestos por aristas, vértices y caras, que representan polígonos regulares.

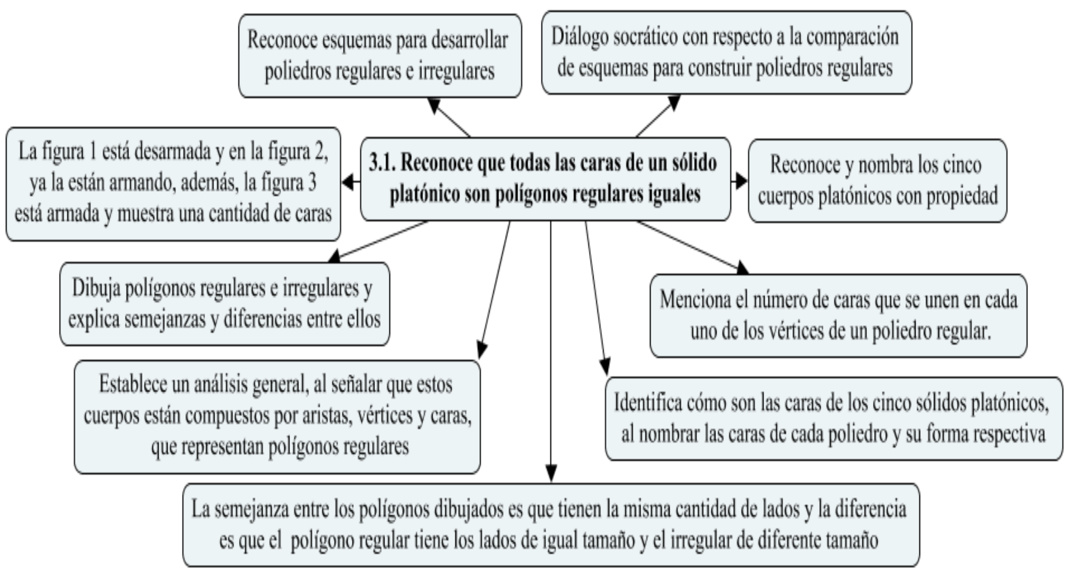


Figura 97. Categoría y descriptor 3.1. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

3.2 Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas. Para la entrevista, se pidió a Pablo utilizar los cinco poliedros elaborados con pitillos y doblado del papel, con la intención de hacer un mejor ejercicio al contar cada uno de los elementos de estos cuerpos regulares;

así, una vez el estudiante observa las figuras dibujadas en un cuadro y a través del uso de material concreto, identifica con exactitud en cada uno de ellos la cantidad de caras y de aristas que concurren en un vértice.

El análisis que hace Pablo al relacionar estos dos elementos es el siguiente: "que la cantidad de caras y aristas son la misma". Este mismo ejercicio lo realiza con tres sólidos irregulares y concluye que la relación de los sólidos regulares se cumple también para los sólidos irregulares.

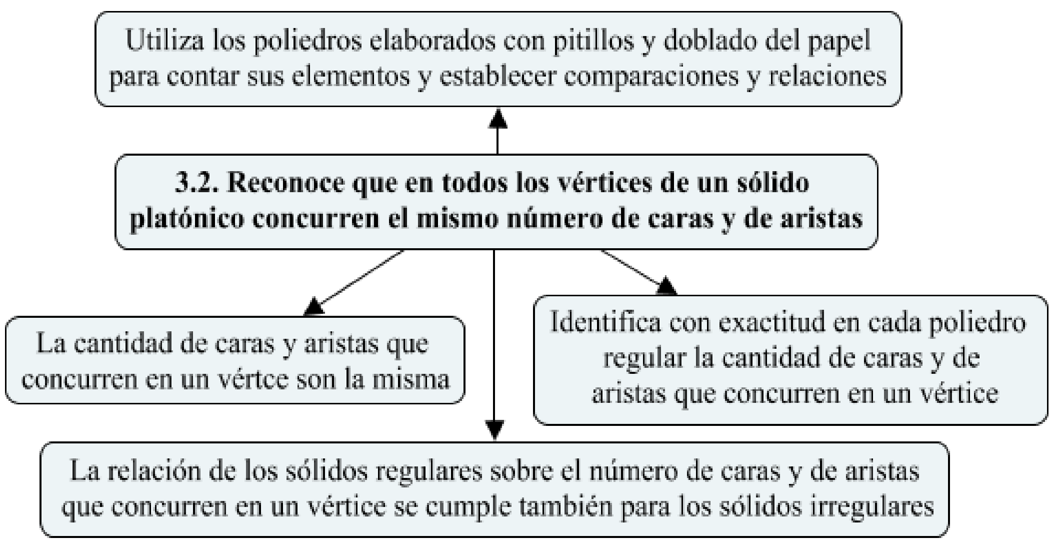


Figura 48. Categoría y descriptor 3.2. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

3.3 Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales. Para dar inicio a la entrevista, se mostró al estudiante una tabla con tres poliedros regulares (octaedro, figura 1; tetraedro, figura

2, y hexaedro, figura 3), para identificar en ellos: el número de vértices que tiene un ángulo, la cantidad de ángulos que tiene una cara, el ángulo de mayor abertura, el número de ángulos que tiene cada poliedro realizado con pitillos, la cantidad de aristas que llegan al vértice del tetraedro, el número de lados que llegan al vértice de una cara del tetraedro y la cantidad de caras que llegan a una arista del tetraedro.

El ejercicio resulta más fácil de llevar a cabo debido a que se cuenta con el material concreto para que el estudiante efectúe el respectivo conteo de los elementos antes mencionados. De esta manera, Pablo pudo responder correctamente cada una de las preguntas de la entrevista, al mismo tiempo, se solicitó que observara un tetraedro para responder cuántas caras se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este poliedro, en cuya respuesta dijo que se necesitan tres caras como mínimo y que la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo es de 180°.

Para finalizar la entrevista, se dio una información acerca del concepto de ángulo diedro, pero se aclara que no fue necesario este aporte de información durante la entrevista, este se dio para ayudar al estudiante a reorganizar algunas ideas y para dar claridad a los conceptos adquiridos en la misma.

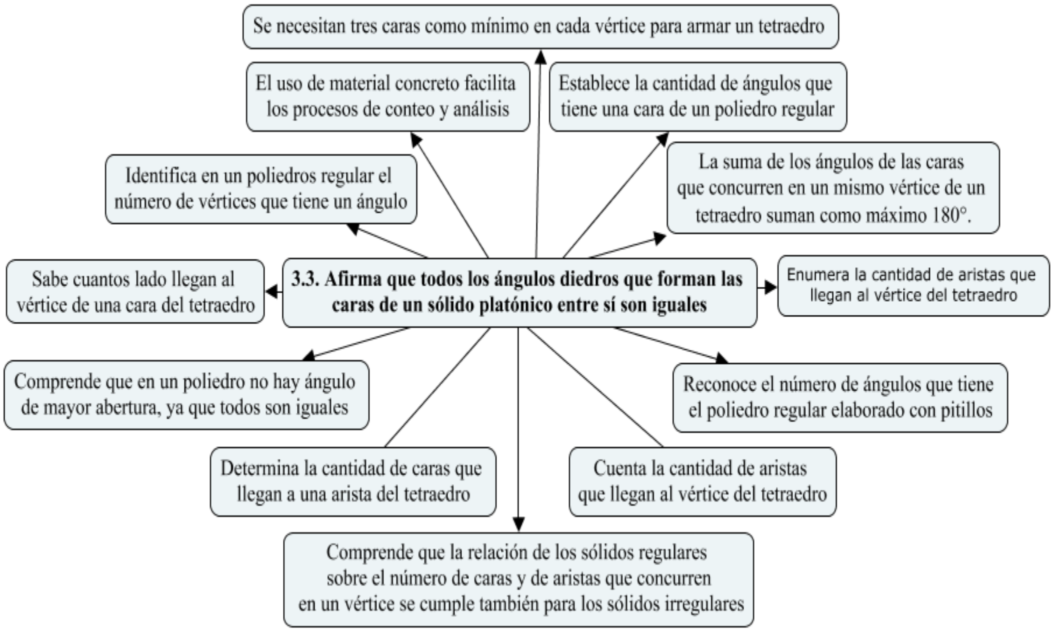


Figura 99. Categoría y descriptor 3.3. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

3.4 Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler. Una de las ventajas de realizar esta entrevista, es que el estudiante ya conocía los cinco poliedros que construyó con pitillos de gaseosa y doblado del papel, además, al mostrárselos dibujados, fue fácil para él realizar el conteo de caras, vértices y aristas, de igual forma, también se le permitió que utilizara estas figuras como estrategia didáctica para favorecer su razonamiento y comprensión. Cabe mencionar, que antes de dar inicio a la entrevista se realizó una charla con el estudiante como preámbulo para él tuviera claro porque no es posible armar un sólido cuya suma de los ángulos fuese igual a 360°, para ello se utilizaron ejemplos ilustrativos y la información anexa en la entrevista. Después de esto, se le solicitó a Pablo que completara una tabla para establecer la relación de Euler, la cual concluyó adecuadamente y se evidencia en la actividad escrita en la cual participó.

Tabla 37

Relación de Euler elaborada por Pablo (3).

Pablo

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	2
2. Hexaedro	6	8	14	12	2
3. Octaedro	8	6	14	12	2
4. Dodecaedro	12	20	32	30	2
5. Icosaedro	20	12	32	30	2

Nota: Registro de información sobre los elementos de los poliedros regulares. Fuente: Elaborado por el estudiante Pablo.

Luego de este ejercicio, procedió a completar una segunda tabla, pero esta vez con el uso de siete figuras correspondientes a los sólido, que Pablo clasificó dentro del grupo de los irregulares “porque no tiene los lados, ni las caras de igual forma y tamaño”, según sus apreciaciones.

Tabla 38
Relación de Euler elaborada por Pablo.

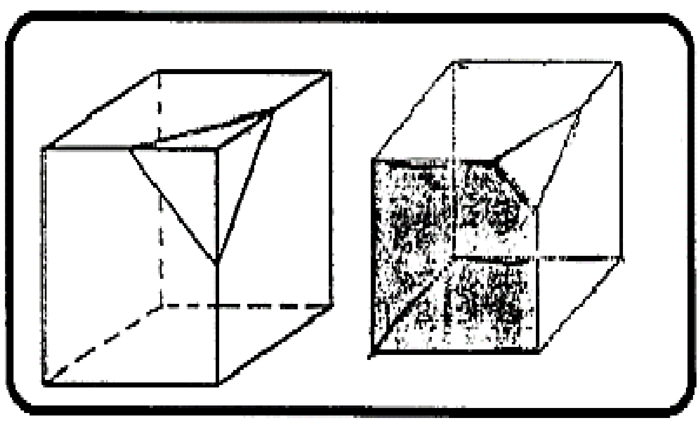
Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. figura 1	5	6	11	9	2
2. Figura 2	6	8	14	12	2
3. figura 3	8	12	20	18	2
4. figura 4	8	12	20	18	2
5. figura 5	7	7	14	12	2
6. figura 6	9	9	18	16	2
7. figura 7	7	7	14	12	2

Nota: Registro de información sobre los elementos de algunos poliedros irregulares.
Fuente: Elaborado por el estudiante Pablo.

Algo interesante al completar la tabla que contenía información sobre siete poliedros irregulares, es que Pablo descubrió que dos de las figuras, aunque presentaban formas distintas, sus bases estaban conformadas por caras hexagonales y no tuvo necesidad de contar nuevamente sus elementos, además, al completar la información para el primer campo de la tabla, obtuvo 2, como resultado del conteo; fue mucho más fácil para él inferir que los demás resultados también serían 2.

Una vez registrada la información en la tabla para los sólidos irregulares, se preguntó al estudiante lo siguiente: En la relación de Euler, la suma del número de caras con el número de vértices, menos el número de aristas siempre es igual a 2, ¿Esta fórmula se cumple para todos los sólidos o sólo para los regulares? Pablo respondió con seguridad que se cumple para todos los sólidos "porque la suma de caras y vértices, menos las aristas da dos, igual en los sólidos regulares al igual que en los irregulares". En esta ocasión, no hubo necesidad de establecer el diálogo socrático con el estudiante, dado que comprendió y descubrió que la relación de Euler se cumple para los dos tipos de sólidos trabajados.

Para finalizar la entrevista, se presentaron dos hexaedros, el primero, para representar un corte en una esquina y el segundo, para representar un nuevo poliedro irregular, con el propósito de que Pablo contara nuevamente los elementos de este poliedro que se obtuvo.



C	V	A	C+V	(C+V)-A
7	10	15	17	2

Cuenta ahora nuevamente las caras, los vértices y las aristas de este nuevo sólido irregular y aplica la fórmula de Euler, ¿Qué puedes concluir? 7 + 10 - 15 = 2 si la suma de caras y vertices men las aristas da 2.

caras vertices aristas

¿Se cumple entonces la relación de Euler para este nuevo sólido irregular? R/ si se cumple

Escribe tus propias conclusiones.

R/ aplique la formula de Euler y vi que el solido irregular da 2, igual que en los solidos regulares

Figura 500. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y conclusión. Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.

Al realizar el conteo, el estudiante descubrió que la relación de Euler también se cumple para los sólidos irregulares, además dijo lo siguiente “que al igual que en los dos sólidos, los regulares y los irregulares, me dio igual, dos”.

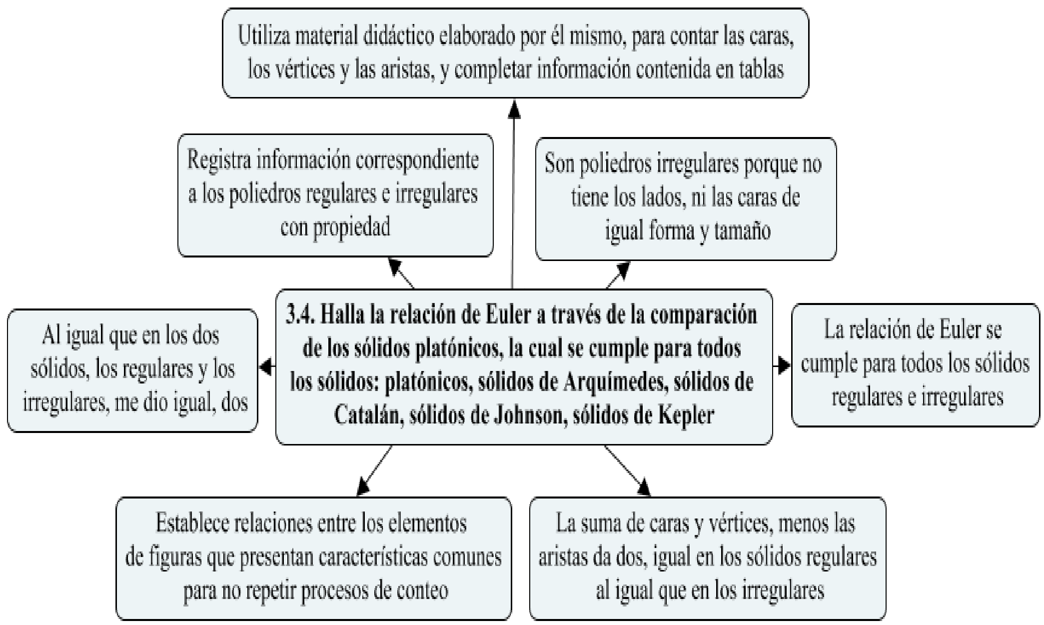
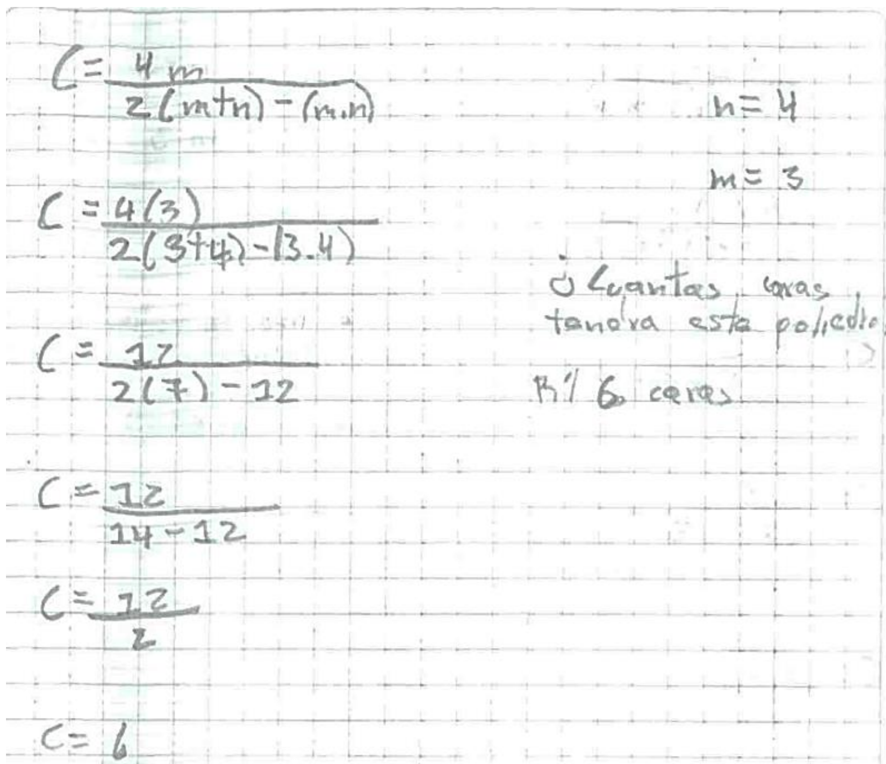


Figura 101. Categoría y descriptor 3.4. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

3.5 Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos. Para llevar a cabo esta última entrevista con el estudiante Pablo, se propuso un ejercicio diferente, en donde se mostró un modelo resuelto para hallar, a través de una fórmula algebraica el número de caras de un poliedro; además, el desarrollo del mismo posibilitó una mayor comprensión para proceder a resolver las situaciones propuestas.

Por su parte, Pablo pudo a través de ésta fórmula matemática encontrar el número de caras de varios poliedros, como el icosaedro, el hexaedro y el dodecaedro; además, en uno de los ejercicios en donde no fue posible determinar el poliedro, escribió que no era posible obtener ningún poliedro.



$$C = \frac{4m}{2(m+n) - (m.n)}$$

$n = 4$

$m = 3$

$$C = \frac{4(3)}{2(3+4) - (3.4)}$$

¿Cuantas caras tendra esta poliedro?

R/ 6 caras

$$C = \frac{12}{2(7) - 12}$$

$$C = \frac{12}{14 - 12}$$

$$C = \frac{12}{2}$$

$$C = 6$$

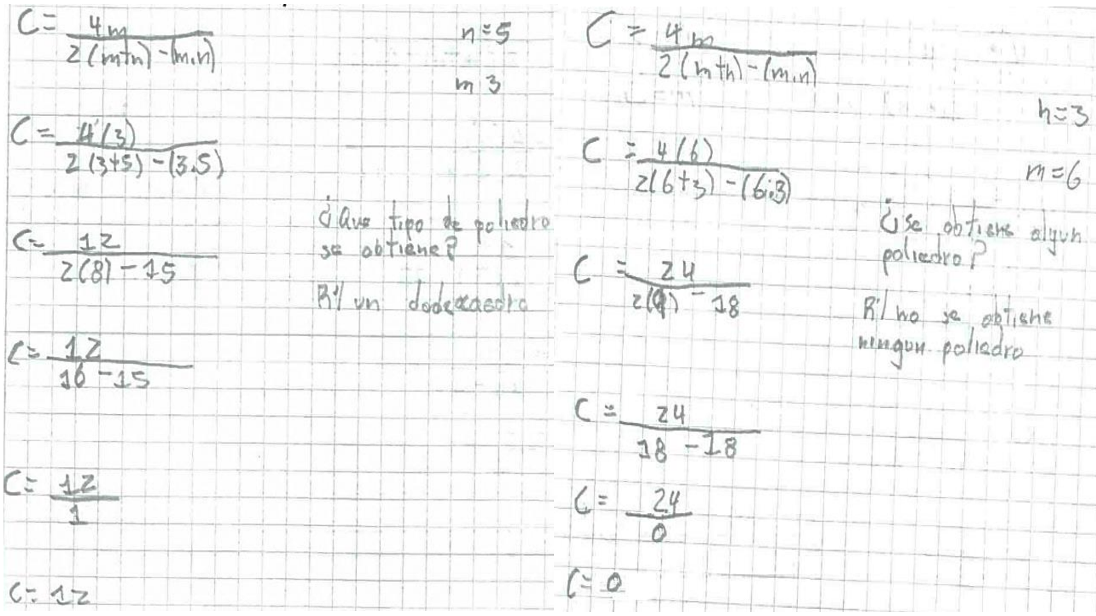


Figura 102. Fórmula matemática para calcular el número de caras de un poliedro regular. Fuente: elaboración por parte del estudiante Pablo.

De esta manera, el razonamiento demostrado por Pablo en cada uno de los niveles de razonamiento, fue validado en las diferentes actividades propuestas y en cada uno de los descriptores diseñados para cada entrevista.

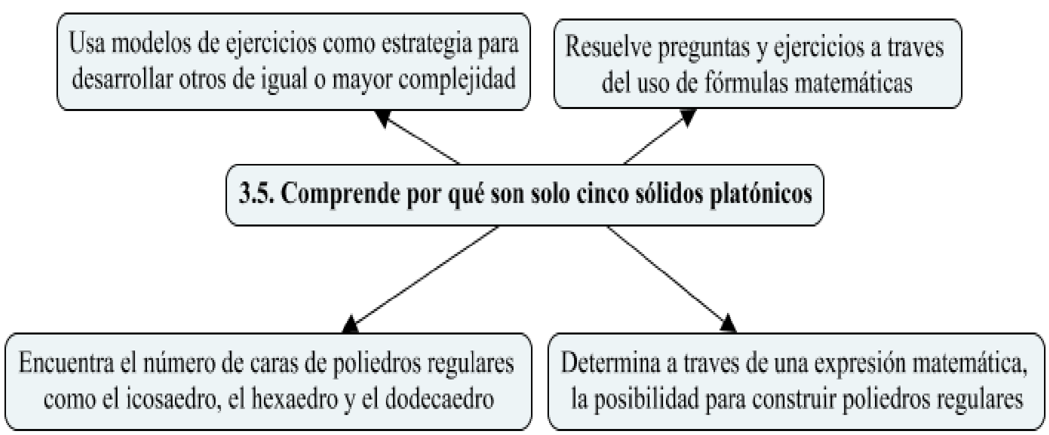


Figura 103. Categoría y descriptor 3.5. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Pablo. Fuente: elaboración propia.

4.2.4 Análisis del proceso de razonamiento demostrado por Paola.

La estudiante con el seudónimo de Paola, estudia en el grado quinto en una institución educativa del Municipio de Carepa, ella hizo parte de este trabajo investigativo. Durante el proceso desarrollado demostró responsabilidad, organización, pulcritud, estética, compromiso, seriedad y puntualidad en las secciones de campo. Paola participó en actividades como: elaboración y construcción de los cinco poliedros con dos tipos de material; pitillos de gaseosa y doblado del papel, actividad escrita y la entrevista.

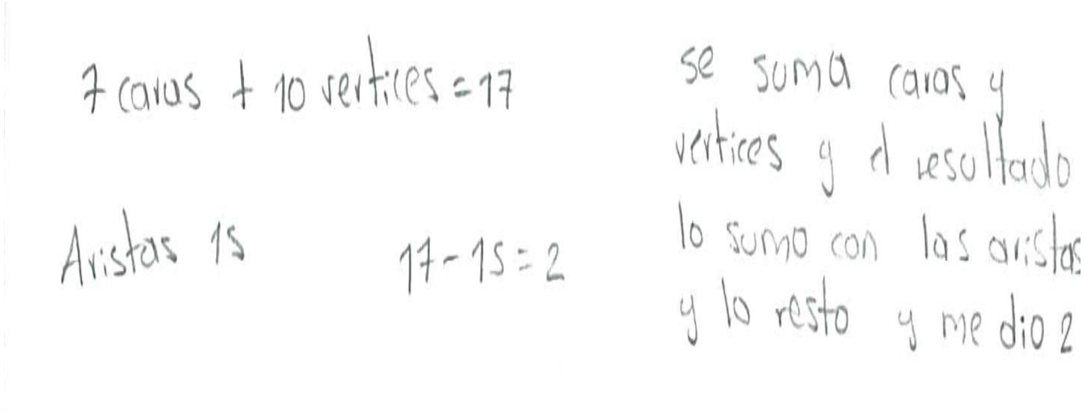
Las siguientes construcciones fueron realizadas por la estudiante durante las actividades antes mencionadas, en particular, durante la entrevista para los niveles II y III de razonamiento, concernientes a los descriptores: 2.2; 3,4 y 3,5.

Tabla 39
Relación de Euler elaborado por Paola (1).

Paola

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	8-6=2
2. hexaedro	6	8	14	12	14-12=2
3. octaedro	8	6	14	12	14-12=2
4. dodecaedo	12	20	32	30	32-30=2
5. icosaedro	20	12	32	30	32-30-2

Nota: Relación de Euler que cumplen los poliedros regulares. Fuente: Elaborada por la estudiante Paola.



7 caras + 10 vertices = 17

Aristas 15 17 - 15 = 2

se suma caras y vertices y el resultado lo sumo con las aristas y lo resto y me dio 2

Figura 104. Relación de Euler para poliedros regulares e irregulares y análisis realizado por Paola. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Paola.

Tabla 40

Relación de Euler para los poliedros irregulares elaborado por Paola.

Paola

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Fig 1	5	6	11	9	11 - 9 = 2
2. Fig 2	6	8	14	12	14 - 12 = 2
3. fig 3	8	12	20	18	20 - 18 = 2
4. fig 4	8	12	20	18	20 - 18 = 2
5. fig 5	7	7	14	12	14 - 12 = 2
6. fig 6	9	9	18	16	18 - 12 = 2
7. fig 7	7	7	14	12	14 - 12 = 2

Nota: Registro de información sobre algunos poliedros irregulares. Fuente: Elaborado por la estudiante Paola.

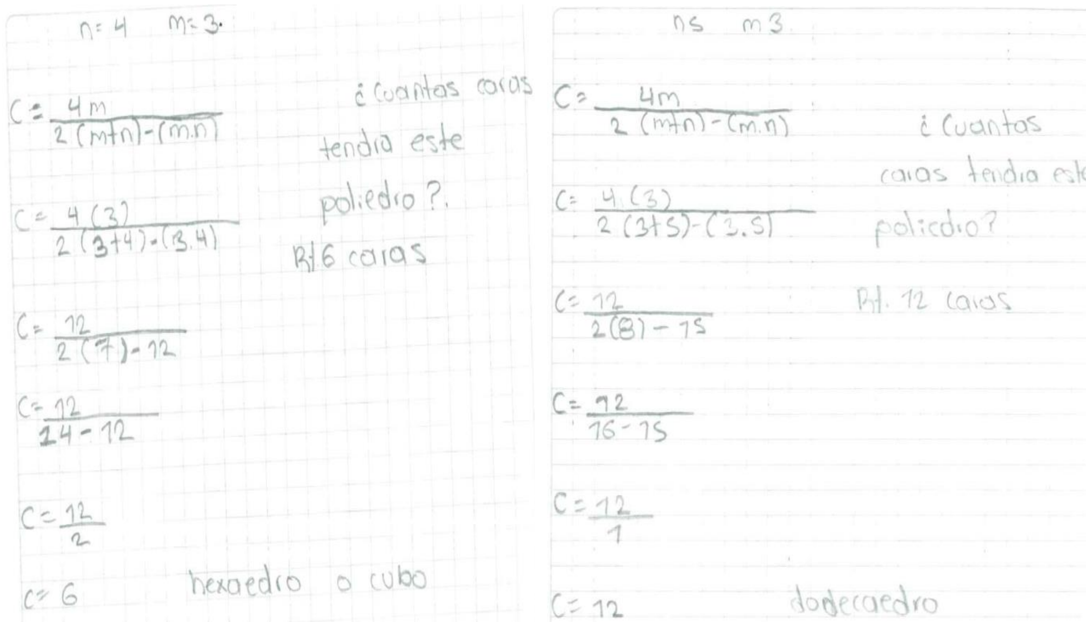


Figura 105. Fórmula matemática utilizada por Paola para hallar el número de caras de un poliedro regular. Fuente: Elaborado por el estudiante Paola.

4.2.4.1 Análisis de los descriptores para el nivel I.

1.1 Reconoce conceptos y elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como: punto, recta, segmento, recta paralela, recta perpendicular, plano, entre otros. En la aplicación de la primera entrevista para Paola, se le mostraron algunas figuras para que identificara en ellas los siguientes elementos: una recta, un segmento de recta, dos rectas paralelas, dos rectas perpendiculares, dos puntos y un plano.

En el primer ejercicio, Paola mostró inseguridad al seleccionar las figuras que representan los elementos solicitados, presentó dudas al señalar las rectas paralelas y las rectas perpendiculares; por tal motivo, se inició un diálogo socrático para mejorar el razonamiento sobre éstos elementos y se le dio además, un aporte de información sobre rectas perpendiculares para que pudiera establecer la diferencia entre esta clase de rectas y las paralelas.

El diálogo socrático permitió que la estudiante pudiera avanzar, establecer comparaciones y validar este descriptor. Una vez terminado el diálogo, Paola pudo establecer la diferencia entre rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Al finalizar la primera entrevista, Paola comprendió que las rectas paralelas son aquellas que no se encuentran en ningún punto y que conservan la misma distancia, de igual manera, entendió que las rectas perpendiculares forman ángulos rectos, es decir de 90°.

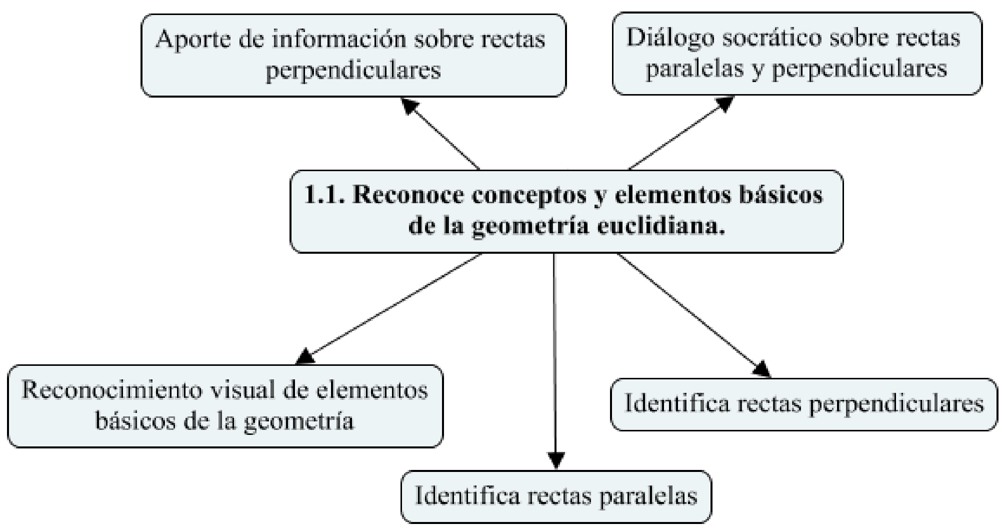


Figura 106. Categoría y descriptor 1.1. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

1.2 Reconoce axiomas básicos de la geometría euclidiana como el siguiente: “Por dos puntos pasa una única recta”. Se entregó una hoja de papel con dos puntos dibujados en ella, un lápiz y una regla para que Paola trazara todas las posibles rectas que pudieran pasar por estos dos puntos. La estudiante realizó el ejercicio correctamente, además afirmó que por estos dos puntos “pasa una sola recta”. La respuesta que da Paola se valida con la actividad escrita y la observación efectuada a la estudiante, quien demostró seguridad al realizar el ejercicio propuesto.

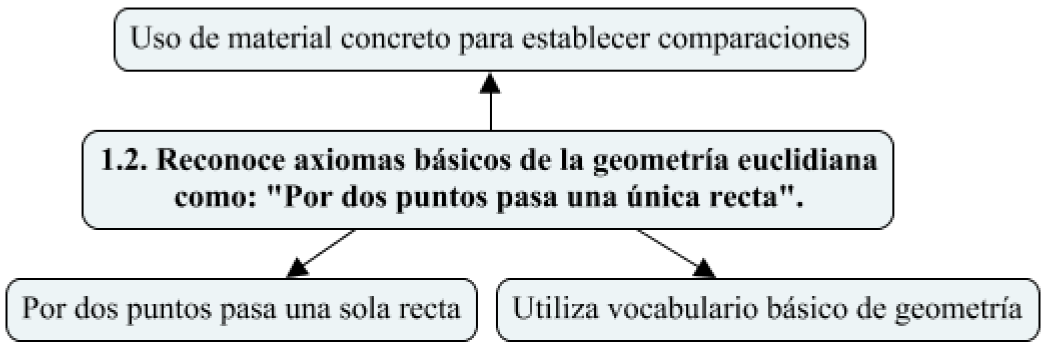


Figura 107. Categoría y descriptor 1.2. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

1.3 El estudiante establece comparaciones entre una línea recta y un doblez realizado con papel. Para esta entrevista, se entregó a Paola una hoja de papel con dos puntos dibujados en ella, para que realizara todos los pliegues posibles que unen estos dos puntos.

Después de hacer el ejercicio, se le preguntó sobre la cantidad de pliegues que se requieren para hacer coincidir los dos puntos, Paola respondió “uno solo”. Se ratifica nuevamente, que por dos puntos solo puede pasar una línea recta.

Paola toma la hoja y hace coincidir dos puntos dibujados en ella mediante un pliegue. Luego, afirma que “no” es posible que resulten líneas perpendiculares, lo cual hace necesario establecer un diálogo socrático con ella para que pueda, a través de una serie de cuestionamientos, mejorar su razonamiento frente a la comprensión y diferenciación entre rectas paralelas y rectas perpendiculares.

Después de éste diálogo, se le preguntó si era posible que en la relación entre el doblez y el segmento que une los dos puntos resultara una línea perpendicular, a lo cual Paola respondió: “si, porque las línea perpendiculares forman ángulos que miden 90°”.

El análisis lo pudo efectuar mejor al observar la línea que conecta dos puntos y al doblar la hoja para unir estos dos puntos. La comparación y la observación fueron importantes para dar confiabilidad a este descriptor.

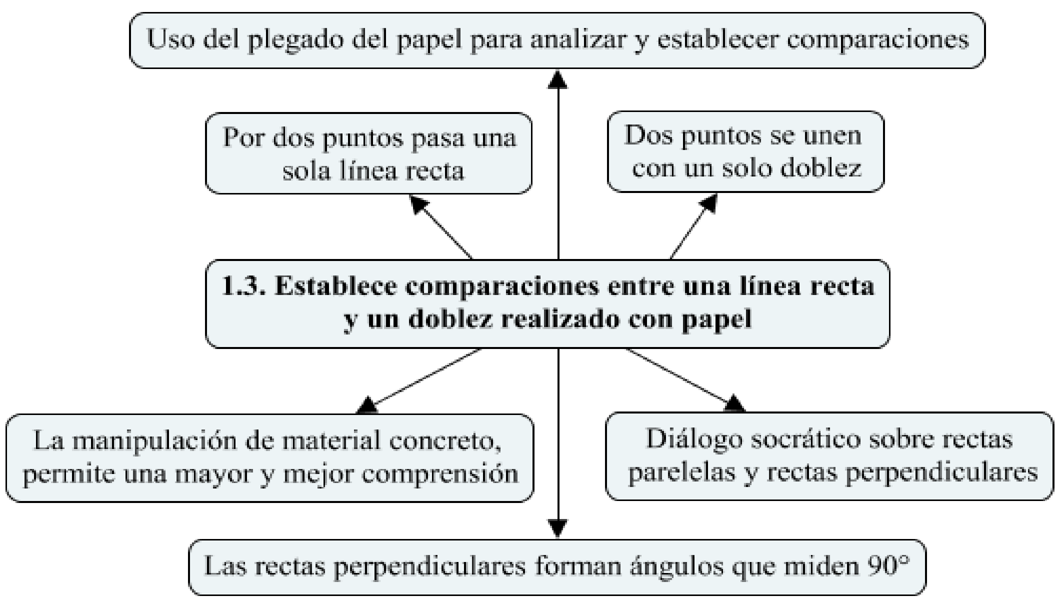


Figura 108. Categoría y descriptor 1.3. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

1.4 Reconoce elementos básicos de los cuerpos platónicos como: caras, vértices y aristas. Para esta entrevista se le pidió a la estudiante que observara cinco figuras (poliedros regulares) para identificar en cada uno de ellos los siguientes elementos: las caras, los vértices y las aristas. Para realizar este ejercicio, se utilizaron colores para indicar dichos elementos, también se contó con los modelos de los poliedros que ella misma había construido con pitillos de gaseosa para representar las aristas y otra, en origami para representar las caras, en este caso del hexaedro.

Al observar con detenimiento las figuras, Paola dice lo siguiente: “De amarillo son las caras, de azul las aristas y de rojo los vértices“, además, con respecto a la cantidad delos elementos que posee la estructura del hexaedro con pitillos y con papel, ella respondió: “6 caras posee el poliedro con pitillos, 8 vértices y 12 aristas”, ella conto cada uno de los elementos del poliedro regular, antes de responder la pregunta.

Lo mismo hizo con el sólido elaborado en origami, pero esta vez respondió con seguridad: “tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, las figuras son iguales”. A la pregunta ¿cuál es la arista de mayor longitud?, ella respondió “todas son iguales”, con respecto al nombre de la figura que forman las caras de la estructura con pitillos “son cuadrados” y las de la figura en origami son “cuadrados”.

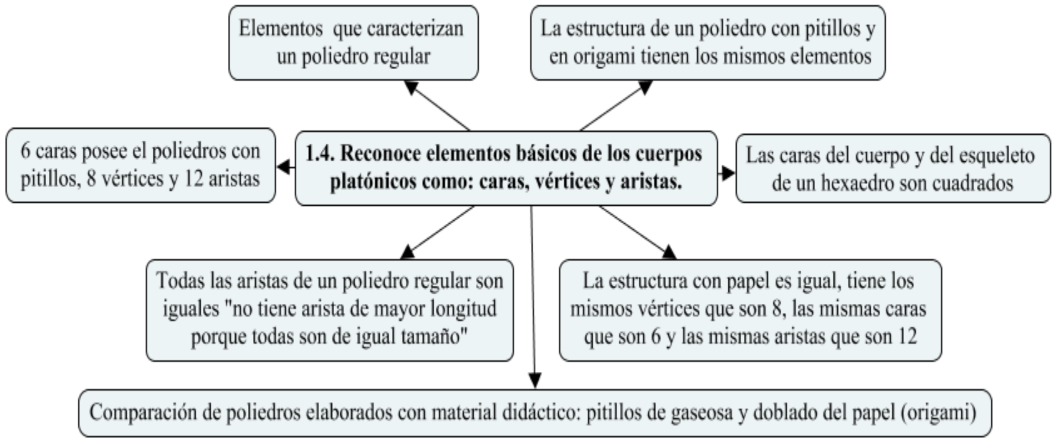


Figura 109. Categoría y descriptor 1.4. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

1.5 Distingue entre una figura plana y una redonda. Para la realización de esta entrevista, se mostró a Paola dos cuadros en los cuales se observaban diferentes tipos de figuras, con el propósito de identificar y luego, señalar las de forma redonda y las planas.

Paola indicó las figuras de la siguiente manera: las redondas son “la figura 2, la figura 5 y la figura 7” y las planas son: “figura 1, figura 3, figura 4 y figura 6”. En la clasificación de las figuras del segundo cuadro, Paola no presentó ninguna dificultad para identificar estas dos características entre cuerpos redondos y planos. La estudiante también pudo establecer con claridad el por qué unas pueden rodar y otras no, al afirmar lo siguiente: “porque si uno pone las figuras redondas sobre una superficie plana ellas van a seguir, y porque son así todas circulares y uno la pone en un lugar plano y ruedan, en cambio que si uno coloca las planas se van a quedar ahí en el mismo lugar”.

Posteriormente, se eligió uno de los poliedros (tetraedro) y se le preguntó si era posible que dicha figura pudiera rodar sobre una superficie plana. A lo cual expresó lo siguiente: “no, porque todas las caras son superficies planas”.

Con relación al número de caras del tetraedro y la cara de mayor superficie, dijo que ésta posee “cuatro caras y ninguna cara tiene mayor superficie porque todas son iguales”. La estudiante demostró tener certeza en sus respuestas, a través de la entrevista y la actividad escrita, lo cual se corroboró también en la observación que se llevó a cabo durante todo el proceso para este nivel de razonamiento.

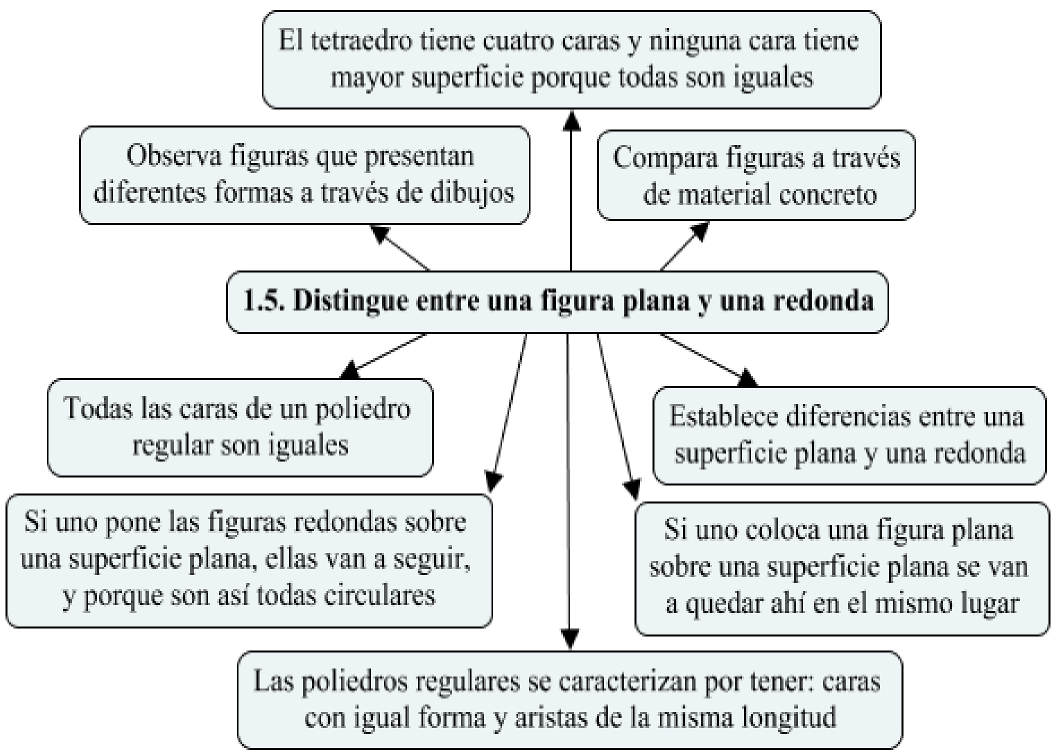


Figura 110. Categoría y descriptor 1.5. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

El aporte de información para esta entrevista no fue indispensable, debido a que Paola comprendió los temas desarrollados durante la construcción de los cinco poliedros con los materiales didácticos, además del trabajo efectuado en la actividad escrita, en donde también se mencionan estos conceptos.

1.6 Identifica figuras geométricas planas como triángulos, cuadriláteros y pentágonos. La entrevista se desarrolló con un conjunto de figuras geométricas planas, de tal manera que la estudiante, teniendo en cuenta algunas instrucciones señalara o dijera el número de la figura solicitada.

Paola demostró conocer claramente las figuras geométricas planas señaladas y no tuvo ninguna dificultad para identificarlas en la medida en que se le fueron nombrando una a una de forma aleatoria.

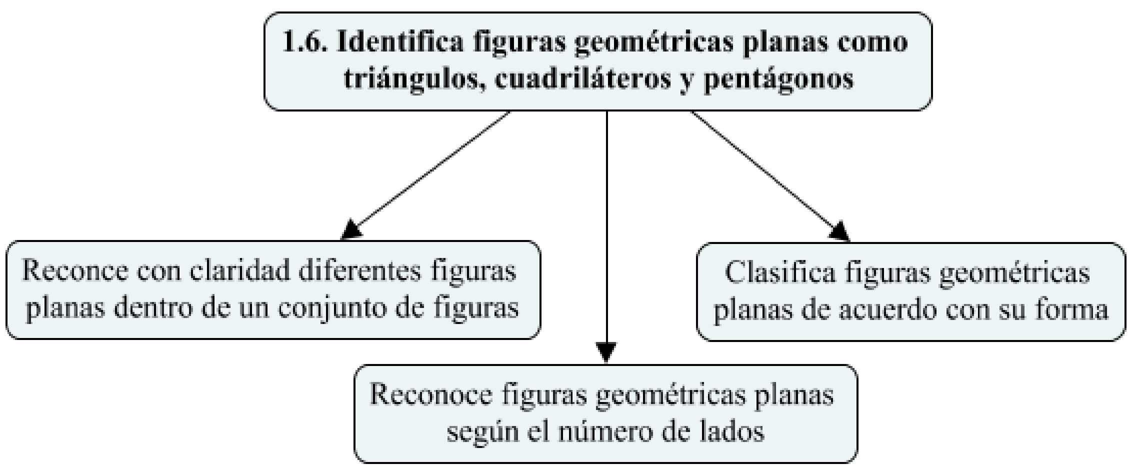


Figura 111. Categoría y descriptor 1.6. Para el nivel I de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

4.2.4.2 Análisis de los descriptores para el nivel II.

2.1 Reconoce los cinco sólidos platónicos como cuerpos regulares. En la entrevista Paola debe identificar dentro de un grupo de poliedros, aquellos que son regulares, ejercicio que lleva a cabo ninguna dificultad. Paola afirma que la diferencia entre un sólido regular y uno irregular: "es que las figuras regulares tienen los lados y las caras iguales y los irregulares tienen las caras y las aristas desiguales", es importante señalar que hubo un momento en donde se dio la necesidad de establecer un diálogo socrático con la estudiante para salir de la confusión en la que se hallaba, por medio de contraejemplos para poder incitarla a encontrar la respuesta a la pregunta: ¿cómo son las caras de un sólido regular y uno irregular?, de tal forma, que los argumentos dados por ella fueran correctos.

Del mismo modo, Paola observó un grupo de sólidos irregulares que presentaban una de sus caras coloreadas, para que mencionara una característica común en todas ellas. Para éste propósito, se dio un aporte de información sobre el concepto de poliedro, para que la información suministrada le sirviera como referente para razonar a cerca de su respuesta.

Después del aporte de información, el argumento de Paola fue el siguiente: "que todas las figuras están formadas por polígonos", luego se le indicó cada polígono coloreado en los poliedros para que ella enunciara el nombre correspondiente. En el ejercicio propuesto Paola reconoce los polígonos y los nombra de acuerdo con el número de lados que poseen.

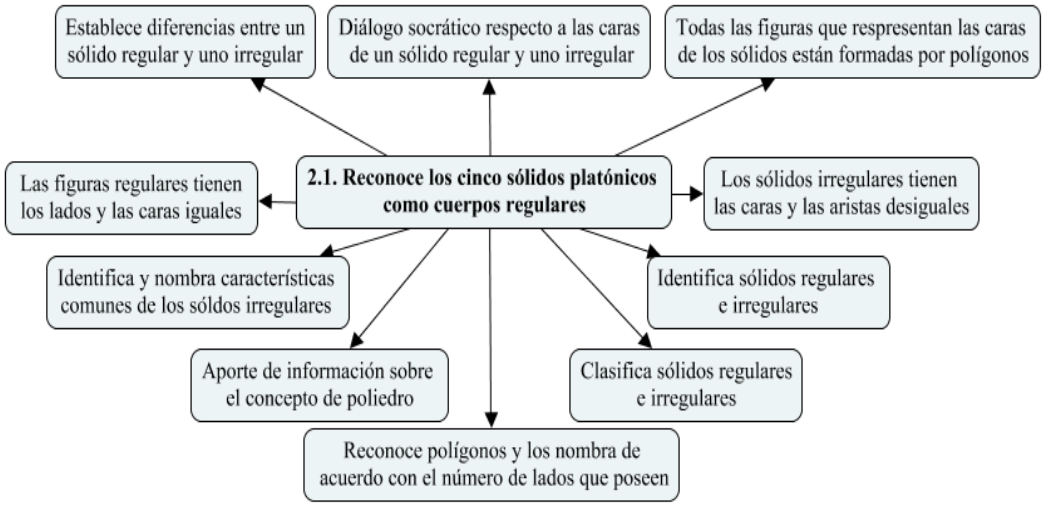


Figura 112. Categoría y descriptor 2.1. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

2.2 Establece comparaciones para hallar diferencias y semejanzas entre los poliedros regulares. La estudiante Paola utilizó los cinco poliedros construidos con pitillos y papel, también las imágenes de estos cuerpos para realizar comparaciones y encontrar similitudes y diferencias entre ellos. Con respecto a las similitudes entre la figuras ella afirmó lo siguiente “algunos representan las aristas; como los elaborados con pitillos y otros, las caras, como los que están hechos con papel”, en cuanto a la diferencia, mencionó que unos estaban elaborados con pitillos y otros con papel.

Paola reconoce y nombra las figuras que tienen todas sus caras en forma de pentágono correctamente. Después de este ejercicio Paola contó cada uno de los elementos que componen los cinco poliedros regulares y completo la siguiente tabla:

Tabla 41

Relación de Euler elaborada por Paola (2).

Paola

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	8 – 6 = 2
2. hexaedro	6	8	14	12	14 – 12 = 2
3. octaedro	8	6	14	12	14 – 12 = 2
4. dodecaedro	12	20	32	30	32 – 30 = 2
5. icosaedro	20	12	32	30	32 – 30 – 2

Nota: En la que se registra información y se establece la relación de Euler para los poliedros regulares. Fuente: elaboración por parte la estudiante Paola.

La tabla elaborada por Paola, muestra como la estudiante completa cada uno de los espacios de la misma y lo hace a través del conteo de caras, vértices y aristas de los cinco poliedros que ella construyó con pitillos de gaseosa y doblado del papel; el primer material, para tener un referente de las aristas y el segundo, para simbolizar las caras de estos poliedros. Se pudo comprobar, que para la estudiante se facilita la comprensión de conceptos y el desarrollo de ejercicios cuando los objetos son tangibles y manipulables.

Seguidamente, la estudiante también observó tres figuras que representaban el desarrollo de un dodecaedro (Fig. 1), las aristas del dodecaedro (Fig. 2) y las caras de este mismo sólido (Fig. 3), cuyo propósito consistió en descubrir la relación entre estos tres elementos.

Al preguntarle a Paola sobre la relación entre las figuras, ella dijo que la figura uno correspondía al esquema; la figura dos, mostraba las aristas y la figura tres, mostraba las caras. En cuanto a si era posible que con la primera figura se construya la tercera, ella dijo que sí era posible porque las caras eran pentágonos y que un dodecaedro está compuesto por doce caras; además, al doblar la figura uno se formaría la figura dos.

Para finalizar la entrevista, se muestra a la estudiante un dibujo del tetraedro y sus elementos característicos, la estudiante define cada elemento así: “una cara es la parte que se utiliza para sostener la figura, el vértice es el punto en donde se unen varias aristas y una arista sirve para formar las caras”. También realiza el conteo de cada uno de los elementos que posee la figura, pero presentó dificultad para referirse a la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice, razón por la cual se estableció un dialogo socrático, para mejorar la comprensión de su razonamiento en cuanto a la pregunta efectuada. Una vez, terminado el diálogo, ella pudo inferir que está suma era igual a 180°.

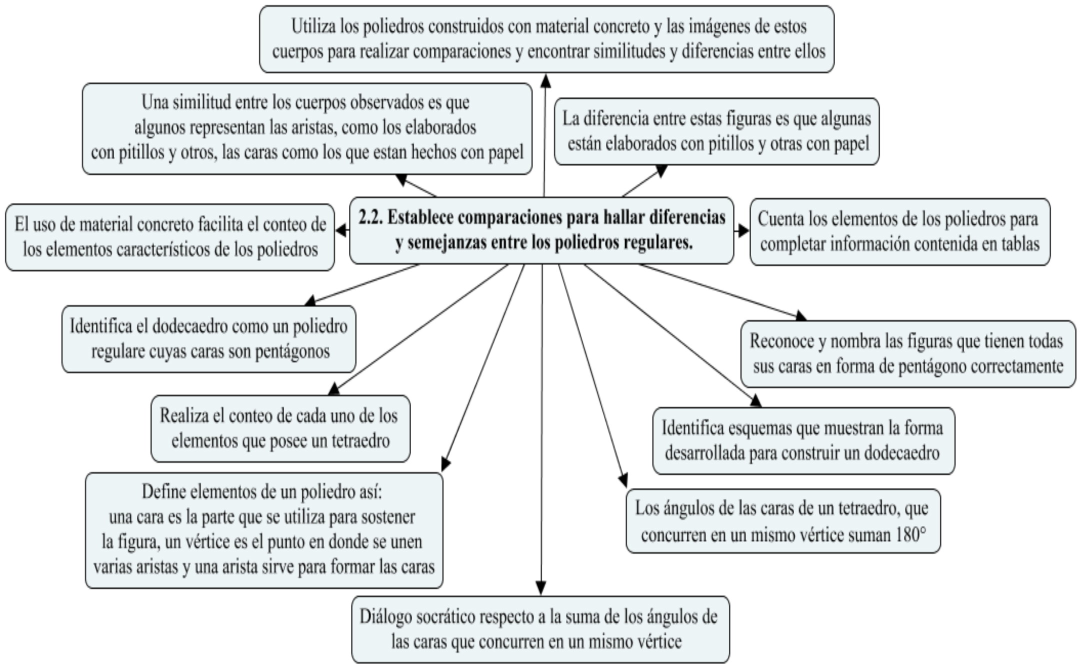


Figura 113. Categoría y descriptor 2.2. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

2.3 Identifica diagramas para desarrollar los cinco poliedros regulares.

Para esta entrevista se entregó un esquema dibujado en un trozo de cartulina para que la estudiante, a través del doblado del papel tratara de construir un tetraedro.

En el intento por armar la figura, Paola descubre que no es posible armar un tetraedro con el primer esquema asignado. Seguidamente, se entregó un segundo esquema para ver si esta vez era posible armar la figura solicitada; en esta ocasión el nuevo diagrama permitió que el ejercicio se pudiera llevar a cabo y finalmente se formara un tetraedro.

La estudiante afirmó lo siguiente: “con la primera figura no fue posible armar el sólido, porque con la primera figura tiene todas sus caras iguales, pero la forma no daba y la segunda figura al doblarla si daba". De esta manera, Paola comprende que un esquema para desarrollar un poliedro, debe tener una estructura y un orden, de lo contrario, no es posible construir el sólido, así el número de caras, vértices y aristas sea igual. Para el siguiente ejercicio, se le mostró a Paola un cuadro con los diagramas para armar los cinco poliedros regulares, con el fin de identificar la forma y tamaño de cada uno de ellos. No hubo inconveniente para decir el nombre de la forma de las caras de cada esquema, de igual manera, para afirmar que el tamaño de las piezas de cada figura, eran iguales.

En último lugar, a través de un tercer grupo de figuras para desarrollar algunos sólidos irregulares, Paola estableció la diferencia entre éstos y los esquemas para armar sólidos regulares, así: "que en el primer grupo, son los esquemas de los sólidos regulares y en el segundo grupo, de los sólidos irregulares" y una característica común entre los dos grupos de figuras es "que todos son esquemas para armar poliedros", también identificó correctamente los diagramas para construir un icosaedro y un hexaedro y afirmó que la elección de los esquemas lo hizo teniendo en cuenta el número de caras que tiene cada poliedro, para el caso del icosaedro, 20 caras y del hexaedro, 6 caras.

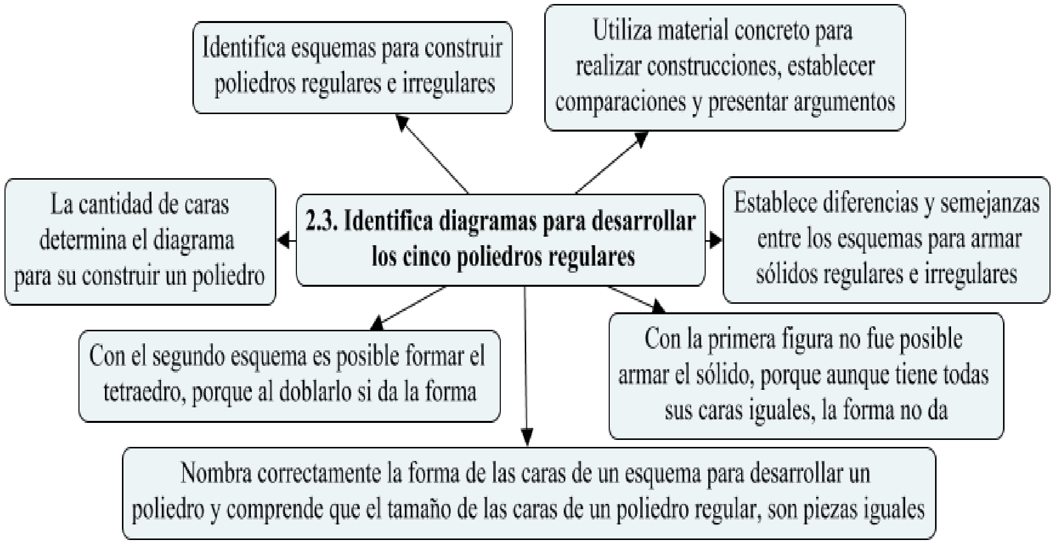


Figura 114. Categoría y descriptor 2.3. Para el nivel II de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

4.2.4.3 Análisis de los descriptores para el nivel III.

3.1 Reconoce que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales. Para desarrollar esta entrevista, Paola observó tres figuras correspondientes a los esquemas para desarrollar un hexaedro, un hexaedro semi-armado y el poliedro construido totalmente. El objetivo de este ejercicio consistió en comparar estas tres figuras y responder cómo eran las superficies de las figuras 1 y 2. La estudiante dijo que correspondían a la misma figura, que la figura uno correspondía al esquema y que en la otra, ya se estaba formando el sólido.

Para continuar, Paola observó los cinco poliedros en un cuadro, cada uno de ellos, identificado con un número. La actividad consistió en nombrarlos sin importar el orden. Este ejercicio fue realizado correctamente por la estudiante, de igual manera, mencionó el número de caras que se unen en cada uno de los vértices de cada poliedro regular. Tan pronto como se realizó, el anterior ejercicio, se entregó a Paola una hoja para dibujar en ella un polígono regular y uno irregular, para describir las semejanzas y diferencias, de acuerdo con su percepción.

Los polígonos dibujados fueron un triángulo equilátero, para representar el polígono regular y un triángulo escaleno, para indicar el polígono irregular. La explicación que dio Paola acerca de las semejanzas fue "que los polígonos regulares tienen sus lados iguales y los polígonos irregulares, tienen sus lados desiguales, además las dos figuras son triángulos, tienen tres lados, tres vértices y tres ángulos" y "la diferencia es que los regulares tienen lados iguales y los irregulares, no tienen lados iguales".

Paola, a través de algunos cuestionamientos y preguntas de carácter inquisitivo, finalmente concluyó que las caras de los cinco sólidos platónicos son polígonos, que poseen igual forma y tamaño; por lo tanto, son polígonos regulares.

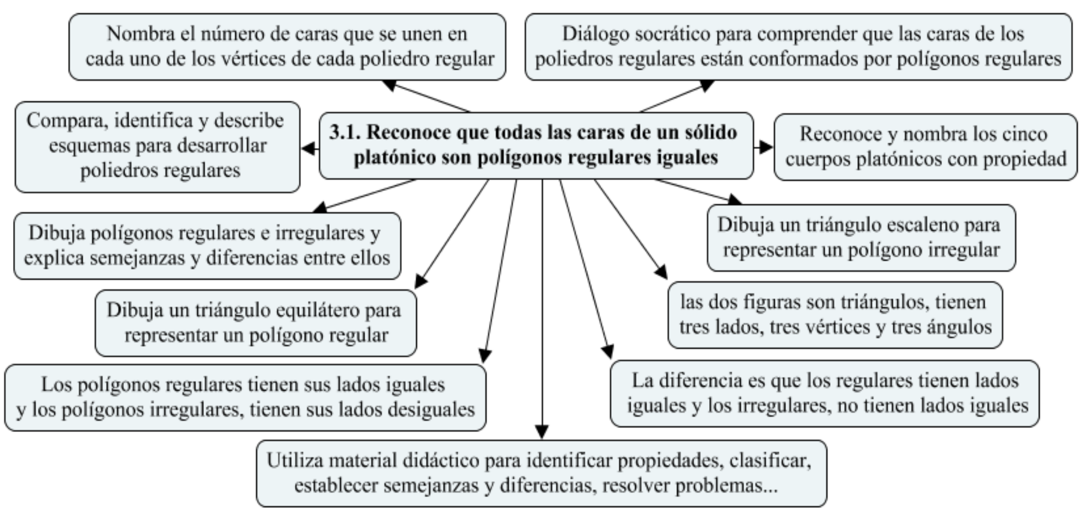


Figura 115. Categoría y descriptor 3.1. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

3.2 Reconoce que en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas. Paola debe observar cinco poliedros dibujados en un cuadro, pero utiliza además, los cuerpos que ella elaboró con pitillos de gaseosa y doblado del papel, la intención era que ella aprovechara este material para realizar el ejercicio con mayor precisión.

Después de observar las figuras y establecer comparaciones, Paola identifica con seguridad en cada uno de ellos la cantidad de caras y de aristas que concurren en un vértice. La conclusión formalizada por la estudiante es la siguiente: “que llega la misma cantidad de caras y aristas en cada vértice”. Del mismo modo, Paola realizó este ejercicio con tres poliedros irregulares y luego, dio el siguiente argumento: “La relación de los sólidos regulares se cumple también para los sólidos irregulares, porque la misma cantidad de caras y de aristas se unen en el mimo vértice”.

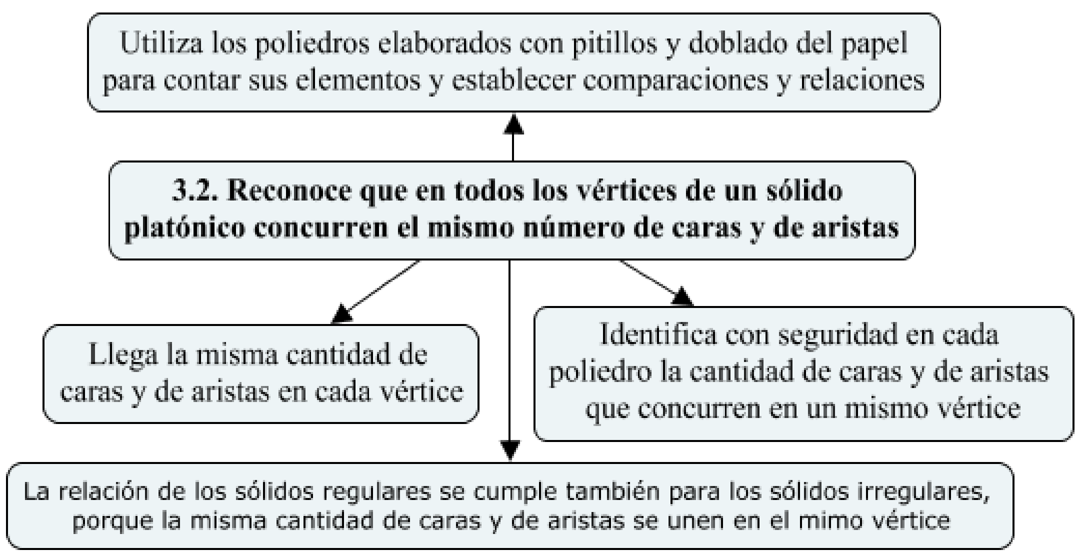


Figura 116. Categoría y descriptor 3.2. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

3.3 Afirma que todos los ángulos diedros que forman las caras de un sólido platónico entre sí son iguales. Para realizar esta entrevista a la estudiante Paola, se utilizaron tres poliedros regulares (octaedro, figura 1; tetraedro, figura 2, y hexaedro, figura 3), para que identificara en ellos: el número de vértices que tiene un ángulo, la cantidad de ángulos que tiene una cara, el ángulo de mayor abertura, el número de ángulos que tiene cada poliedro, la cantidad de aristas que llegan al vértice del tetraedro, el número de lados que llegan al vértice de una cara del tetraedro y la cantidad de caras que llegan a una arista del tetraedro.

Para el ejercicio se permitió a Paola trabajar con los poliedros construidos con pitillos y origami, para hacer más práctico y seguro el conteo de los elementos solicitados. De esta manera, ella respondió correctamente para cada poliedro, cuantos vértices tenía un ángulo, la cantidad de ángulos de cada cara, el ángulo de mayor abertura, el número de ángulos de cada poliedro, el total de aristas que llegan al vértice del tetraedro, el número de lados que llegan al vértice de una cara y la cantidad de caras que llegan a una arista.

Seguidamente, la estudiante procedió a observa un tetraedro para responder cuántas caras se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este poliedro. La respuesta que dio Paola fue la siguiente: “tres caras” y la suma de los ángulos de las caras que concurren en un mismo vértice como máximo es “60° por tres, 180 grados”.

Al final de la entrevista, se dio una información acerca del concepto de ángulo diedro, pero este no fue necesario durante el desarrollo de la entrevista para responder las preguntas formuladas.

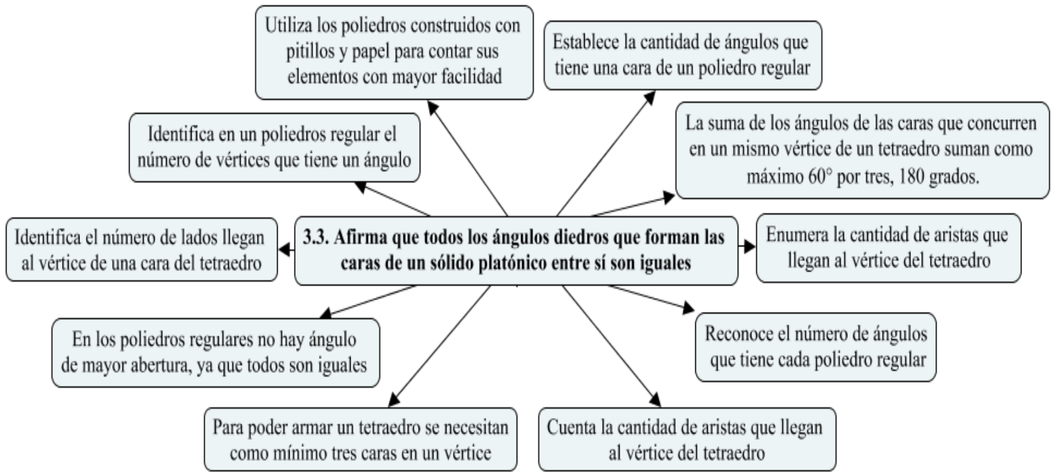


Figura 117. Categoría y descriptor 3.3. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

3.4 Halla la relación de Euler a través de la comparación de los sólidos platónicos, la cual se cumple para todos los sólidos: platónicos, sólidos de Arquímedes, sólidos de Catalán, sólidos de Johnson, sólidos de Kepler. En esta entrevista, nuevamente Paola hizo uso de los cinco poliedros que construyó con pitillos de gaseosa y doblado del papel, para ella resultó sencillo observarlos en un cuadro dibujados y compararlos con los que tenía en material concreto, para realizar el conteo de caras, vértices y aristas; de una u otra forma, el poder interactuar con este tipo de material didáctico ayudó a mejorar su forma de razonar frente a la propuesta de trabajo que se le planteo. Del mismo modo, que a los demás compañeros, se entabló una charla con ella para que dedujera por qué no es posible armar un sólido cuya suma de los ángulos fuese igual a 360°, se utilizó un ejemplo para ilustrar los conceptos y la información anexa en la entrevista.

El siguiente paso consistió en completar una tabla en cuyo caso, la estudiante debía inferir el tipo de relación observado en éstos poliedros. La conclusión obtenida por Paola es que en todos los sólidos se obtiene el mismo resultado, al sumar las caras con los vértices de cada poliedro y luego, al restar las aristas a la suma anterior, se obtiene siempre el mismo resultado “dos”. La tabla elaborada por Paola fue la siguiente:

Tabla 42
Relación de Euler elaborada por Paola (3).

Paola

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Tetraedro	4	4	8	6	8-6=2
2. hexaedro	6	8	14	12	14-12=2
3. octaedro	8	6	14	12	14-12=2
4. dodecaedro	12	20	32	30	32-30=2
5. icosaedro	20	12	32	30	32-30-2

Nota: En la que se observa el registro de información y la relación de Euler para los poliedros regulares. Fuente: elaborado por la estudiante Paola.

Terminado este ejercicio, la estudiante completó una segunda tabla, pero esta vez utilizó siete poliedros, los cuales clasificó como irregulares. Al registrar la información de la tabla, Paola contó nuevamente el número de caras, vértices y aristas de cada poliedro y obtuvo la misma relación que en la primera tabla. El análisis realizado por ella fue el siguiente: “Que yo, al sumar caras y vértices me da un resultado, y ese resultado lo resto con las aristas y lo que me dio, me dio dos en todas”, esta regla se cumple para todos los sólidos, porque siempre se obtiene el mismo resultado, que es dos.

Tabla 43

Relación de Euler para los poliedros irregulares elaborada por Paola.

Paola

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	C + V	Número de Aristas	(C + V) – A
1. Fig 1	5	6	11	9	11 - 9 = 2
2. Fig 2	6	8	14	12	14 - 12 = 2
3. fig 3	8	12	20	18	20 - 18 = 2
4. fig 4	8	12	20	18	20 - 18 = 2
5. fig 5	7	7	14	12	14 - 12 = 2
6. fig 6	9	9	18	16	18 - 12 = 2
7. fig 7	7	7	14	12	14 - 12 = 2

Nota: Se observa el registro de elementos de algunos poliedros irregulares y la relación de Euler. Para los poliedros irregulares. Fuente: elaboración por parte de la estudiante Paola.

Finalmente, se mostró a Paola dos hexaedros, el primero, para representar un corte en una esquina y el segundo, para indicar el corte realizado y, también para mostrar el nuevo poliedro que se obtuvo. Con el primer poliedro, Paola obtuvo la relación de Euler, lo mismo sucedió con el segundo poliedro. Al realizar el conteo, la estudiante descubrió que la relación de Euler se cumple tanto para los poliedros regulares, como para los irregulares.

El ejercicio realizado por Paola se presenta a continuación:

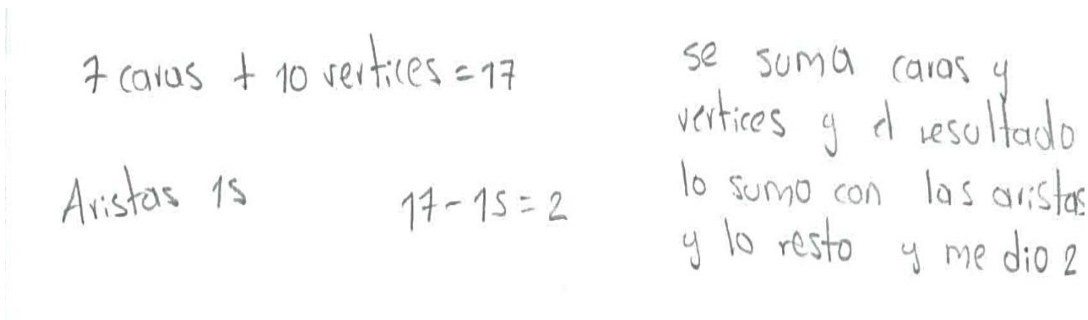


Figura 118. Relación de Euler aplicado a un poliedro irregular. Fuente: elaborado por la estudiante Paola.

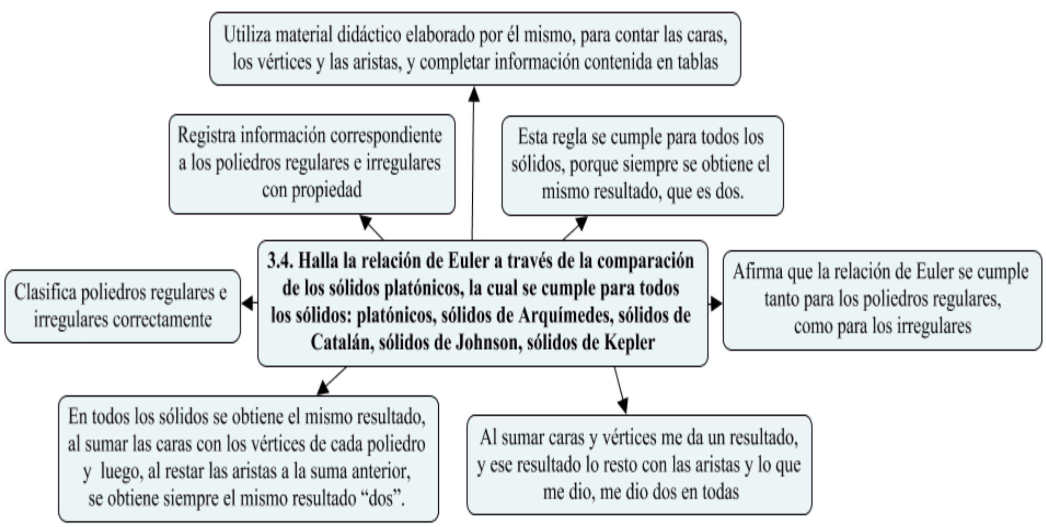


Figura 119. Categoría y descriptor 3.4. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

3.5 Comprende por qué son solo cinco sólidos platónicos. Esta última entrevista con Paola, consistió en utilizar una fórmula matemática para que ella pudiera comprender que a través de ésta, es posible establecer si el poliedro existe, si se podía construir y cuántas caras tendría. Para ello, primero se efectuó un ejercicio con uno de los poliedros en donde se hizo uso de la fórmula matemática, se resolvió el ejercicio y hubo comprensión para que la estudiante procediera solucionar los siguientes interrogantes y demás situaciones propuestas.

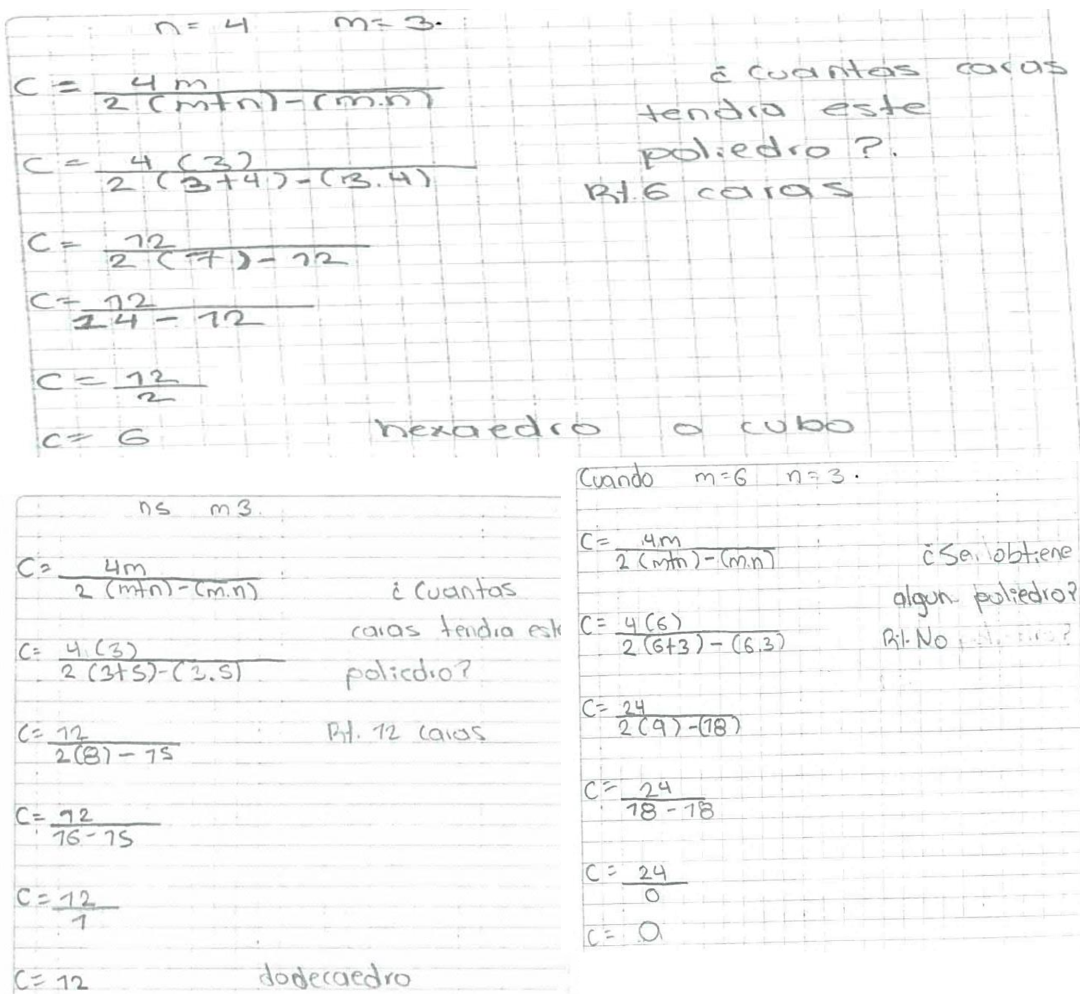


Figura 120. Fórmula matemática para calcular el número de caras de un poliedro regular. Fuente: elaborado por la estudiante Paola.

De esta manera, Paola determinó el número de caras de algunos poliedros, entre ellos, el icosaedro, el hexaedro y el dodecaedro; además, en uno de los ejercicios, en donde el resultado dio cero, escribió lo siguiente: “No se obtiene ningún poliedro, porque no hay poliedro con cero caras”.

Es así como, se valida el razonamiento demostrado por Paola en cada uno de los niveles de razonamiento, a través de las actividades propuestas y en cada uno de los descriptores diseñados durante las entrevistas.

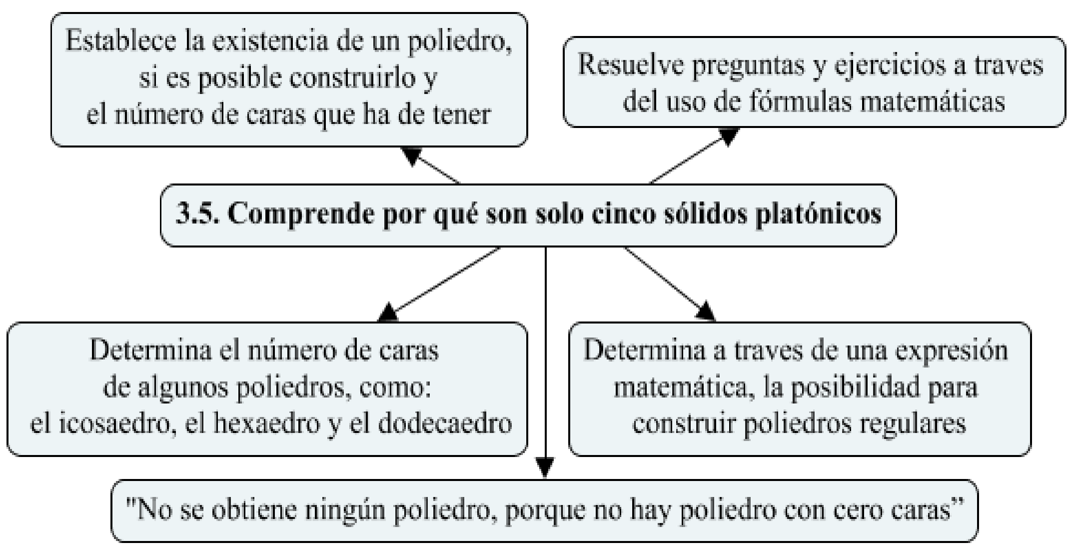


Figura 121. Categoría y descriptor 3.5. Para el nivel III de razonamiento demostrado por Paola. Fuente: elaboración propia.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSIONES

Los resultados que dieron mayor sentido a este proceso de investigación, en correspondencia con los objetivos propuestos y a la pregunta planteada en el estudio fueron los siguientes:

El desarrollo de las actividades con dos tipos de material concreto: pitillos de gaseosa y doblado del papel, permitieron que los cuatro estudiantes que participaron en el proceso investigativo, afianzaran conceptos de la geometría euclidiana, conocieran elementos nuevos de las matemáticas y potenciaran sus niveles de razonamiento.

La actividad escrita para cada uno de los tres niveles de razonamiento, permitió depurar y refinar los descriptores finales para definir el guion entrevista, el cual fue útil para caracterizar y analizar el proceso de comprensión de cada estudiante en esta investigación. Los cuatro participantes alcanzaron el tercer nivel de razonamiento, lo cual se evidencia en las entrevistas aplicadas de forma individual para cada sujeto; por consiguiente, este guion entrevista de carácter socrático se convierte en una propuesta metodológica para la comprensión del teorema de Euler que cumplen los poliedros regulares, en donde se utilizó un alto contenido geométrico, a través de la comparación de figuras geométricas planas, construcción de los cinco poliedros regulares mediante la técnica del origami y pitillos de gaseosa, para tener varios referentes y establecer comparaciones y relaciones entre estos cuerpos y sus elementos característicos.

El uso de material concreto permite además, una mayor comprensión de conceptos por medio de la percepción visual y de las actividades escritas, al construir los poliedros, los estudiantes descubrieron propiedades, elementos y características comunes que sirvieron para avanzar por cada nivel de razonamiento con seguridad. El vocabulario utilizado por los estudiantes también mejoró debido al nivel de exigencia en las nuevas entrevistas.

Otros elemento característico en esta investigación corresponde al contenido algebraico que se generó en algunas entrevistas y que fue usado por los participantes para comprender por qué de la existencia de solo cinco sólidos platónicos. Por tal razón, se concibe la entrevista diseñada como experiencia significativa para el aprendizaje, ya que fue posible identificar el nivel de razonamiento en el cual se encontraba cada estudiante, esto permitió avanzar en los procesos de comprensión, al identificar dificultades, que luego fueron analizadas y superadas con nuevas estrategias o nuevos descriptores, con aportes de información y diálogos de tipo socrático para fortalecer las concepciones de los entrevistados.

Durante todo el proceso de comprensión de los estudiantes se mantuvo la iniciativa para desarrollar los cuestionamientos con material concreto, para hacer más práctico y eficaz el desempeño de los mismos hacia la aproximación del objeto de estudio.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se concluye que el objetivo general de este trabajo investigativo se logró. El análisis de resultados da cuenta de ello, a través del razonamiento demostrado por cada uno de los cuatro participantes del proceso investigativo, sobre la comprensión de la fórmula de Euler por medio de la construcción de los sólidos platónicos con material didáctico (origami). El producto final muestra evidencias sobre los descriptores que permitieron caracterizar el nivel de razonamiento de cada participante con respecto al objeto de estudio matemático obtenido satisfactoriamente.

Para el diseño del guion entrevista, se construyeron en primera instancia unos descriptores hipotéticos, que luego fueron evaluados y refinados, de acuerdo con los niveles del modelo teórico de Van Hiele; además, se tuvieron en cuenta unos descriptores de separación entre un nivel y otro inmediatamente superior. Las preguntas inquisitivas estuvieron relacionadas con las construcciones realizadas por los estudiantes mediante el doblado del papel (origami), además de otros elementos didácticos como pitillos de gaseosa, para establecer comparaciones y relaciones entre los poliedros regulares y alcanzar un mayor nivel de comprensión frente a las situaciones planteadas.

El desarrollo de la entrevista fue un instrumento que aportó significativamente al aprendizaje de los participantes, dado que los cuatro estudiantes fueron ubicados en el tercer nivel de razonamiento, al comprender el teorema de Euler y aplicarlo a los cinco poliedros regulares que ellos construyeron con material concreto y luego, relacionaron mediante procedimientos geométricos y algebraicos. Este resultado alcanzado se evidencia a través de la actividad escrita, las observaciones efectuadas y la entrevista socrática.

La entrevista socrática, según Van Hiele (1957) hace referencia a la importancia del aporte de información en cuanto a la comprensión de preguntas, de tal manera que se pueda establecer una relación de confianza entre entrevistado y entrevistador. Es por este motivo, que en algunos momentos de la entrevista se dio lugar al uso de cierta información, que permitió el razonamiento y la comprensión de conceptos por parte del estudiante. Los tiempos establecidos para la aplicación de cada entrevista también fueron moderados, debido a que los niños y niñas no estaban familiarizados con este tipo de ejercicio.

Los mediadores didácticos permitieron, además de instaurar un clima de confianza entre los participantes, propiciar mejores y mayores condiciones para el aprendizaje, a través de la manipulación, trazo, recorte de papel, plegado de papel, recorte y doblado de pitillos y conectores, ensamble de figuras por medio del origami modular y uso de materiales de colores para darle elegancia, estética y presentación a los trabajos efectuados.

Se elaboró una guía metodológica para fortalecer el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos por medio de la construcción y comparación de los sólidos platónicos a través del uso del origami y de pitillos de gaseosa, para lograr una aproximación de la fórmula de Euler. La guía didáctica se puede adaptar para todos los grados y niveles de la educación básica, con la orientación adecuada del docente del área.

Por lo tanto, los objetivos específicos trazados en esta investigación fueron conseguidos según lo expuesto en los párrafos anteriores, así como la validación de las entrevistas para cada uno de los niveles de razonamiento a través de los descriptores finales, según el modelo didáctico para la enseñanza de la geometría diseñado por los esposos Van Hiele.

5.1. RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Los descriptores finales para los tres niveles de razonamiento alcanzados por los cuatro estudiantes en la entrevista socrática, permitieron establecer con propiedad la comprensión de la fórmula de Euler a través de la construcción y comparación de los sólidos platónicos con material didáctico. El razonamiento de cada estudiante que participó en esta investigación para la comprensión del objeto matemático fue demostrado en la transición entre un nivel y otro inmediatamente superior. Por lo tanto, cada participante avanzó gradualmente y las dificultades encontradas en un determinado nivel, fueron superadas explícitamente en el siguiente nivel; da cuenta de ello, el uso del lenguaje y de la red de relaciones observadas al interactuar en cada una de las actividades desde el contexto geométrico y algebraico.

En la dinámica de las entrevistas se tuvo en cuenta la manera de expresarse de cada estudiante, así como los gestos, el lenguaje usado, el léxico, las respuestas aportadas en cada entrevista, las actividades escritas, las construcciones realizadas de los poliedros y otros elementos relacionados con los descriptores para cada nivel de razonamiento, como las entrevistas individuales, ayudaron a identificar la comprensión de cada uno de ellos y la aprehensión de conceptos que iban más allá del contexto matemático y geométrico.

La propuesta de trabajo para los participantes se centró en la visualización y comparación de las construcciones realizadas por ellos, mediante el doblado del papel, más conocido como origami y también con otro tipo de material como pitillos de gaseosa, de este modo se prioriza el trabajo investigativo con alto componente visual que proveen los materiales didácticos.

Finalmente, el modelo teórico de Van Hiele a través de las entrevistas diseñadas con preguntas inquisitivas, las actividades escritas, el estudio fenomenológico, el análisis de la información y la validación de los descriptores, permitieron responder satisfactoriamente a la pregunta planteada en esta investigación.

5.2. APORTES DESDE EL SABER ESPECÍFICO DE LA GEOMETRÍA Y EL ÁLGEBRA

El origami es un recurso didáctico que permitió el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos, debido a que los estudiantes a través de la construcción, manipulación y comparación de los cinco poliedros regulares con material concreto, desarrollaron habilidades de comprensión de forma significativa; por este motivo, se diseñó una entrevista de carácter socrático para la comprensión de la fórmula de Euler. Las entrevistas realizadas para los niveles de razonamiento I, II y III, facilitaron no solo el logro de conocimientos frente al objeto de estudio, sino también la comprensión de axiomas de la geometría euclidiana, como: "Por dos puntos pasa una única recta", y de conceptos, tales como: punto, recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, ángulo, ángulo diedro, ángulo poliedro, vértice, cara, arista, poliedro regular, entre otros

En general, son diversos los conceptos, propiedades y relaciones de la geometría que pudieron desarrollar los estudiantes por medio del doblado de papel, los cuales fueron abordaron en la entrevista para contribuir al fortalecimiento del proceso pedagógico a partir del gado quinto de la educación básica.

El trabajo con origami ayudó a fortalecer la destreza manual, la exactitud y precisión de los estudiantes; además, se desarrolló la transversalización de la matemática con otras áreas del conocimiento como las artes.

Otro elemento valioso fue la motivación de los estudiantes para despertar la curiosidad sobre las conexiones existentes entre la geometría plana y la espacial.

Las habilidades de comportamiento adquiridas por quienes utilizaron el origami para la construcción de los sólidos platónicos, fue un ejemplo de "aprendizaje esquemático", dado que, a través de un número repetido de acciones, el individuo consiguió con éxito la realización de construcciones que le permitieron una mayor comprensión de las propiedades y características de los objetos geométricos en tercera dimensión, a través de la observación cuidadosa y el seguimiento atento de instrucciones específicas que luego llevó a la práctica.

La comprensión de la fórmula de Euler por medio del uso de material didáctico con estudiantes de quinto grado, es una valiosa oportunidad para incursionar hacia el desarrollo del pensamiento variacional y potenciar los pensamientos lógico, numérico y espacial.

Para el docente de matemática resultó ser una herramienta pedagógica que le ayudó a desarrollar diferentes contenidos no solo conceptuales, sino también procedimentales, también se potenciaron habilidades motoras finas y gruesas que a su vez condujeron a los alumnos a mejorar otros aspectos, como lateralidad, percepción espacial y la psicomotricidad.

El trabajo con material concreto como el uso de pitillos de gaseosa y la técnica del doblado de papel (origami) fue ideal para enriquecer el trabajo grupal y colaborativo. La aplicación de la didáctica con los elementos mencionados en esta investigación, es un enlace directo entre la matemática y la geometría puesto que, al transformar un pedazo plano de papel en una figura tridimensional, es un ejercicio único en la comprensión espacial. El origami es también importante en la enseñanza de la simetría, puesto que al doblar una hoja de papel, lo que se hace en un lado, se tiene que hacer también al otro lado.

Dado lo anterior, cabe destacar la importancia que tiene la geometría para simbolizar y solucionar situaciones problema en otras áreas del conocimiento, donde las matemáticas entran a hacer parte fundamental en los procesos de contextualización del estudiante, para que aprenda de una forma más armoniosa y sencilla con base en situaciones reales y no imaginarias como se ha venido haciendo a través de la enseñanza tradicional.

Por esta razón, se hizo necesario despertar y mantener el interés por conocer algunas cualidades de las aplicaciones del origami al trabajar con niños y niñas en relación con el aprendizaje de la matemática y de la geometría, para contribuir a la creatividad y la imaginación y obtener un buen desempeño, para producir los resultados que aportaron a nuestra prácticas pedagógica.

Por medio de este estudio fue posible comprobar la comprensión de los estudiantes sobre una serie de conceptos geométricos inmersos en la geometría del doblado de papel, a través de acciones concretas como la manipulación, observación, descripción y comparación de objetos.

Es importante señalar que el estudio del álgebra, solo inicia de manera formal en el grado octavo de educación básica, y los estudiantes no están familiarizados con situaciones distintas a las que se plantean con el pensamiento numérico, por tal circunstancia, el aprendizaje del álgebra se torna en muchas ocasiones traumático para el alumno, debido a la forma tan abstracta como se enseña, además de la cantidad de símbolos, números y letras combinados que le resultan difíciles de razonar.

Para tal efecto, esta investigación es un referente para iniciar a los estudiantes desde los primeros años de escolaridad, por medio del uso de mediadores didácticos a través de la construcción y exploración de los cinco sólidos platónicos como estrategia que ayudó en la transición del pensamiento numérico hacia algunos conceptos básicos del pensamiento algebraico en los estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento del Municipio de Carepa.

5.3. ALCANCES E IMPACTOS EN LA REGIÓN

Nota aclaratoria: Dado que esta investigación recién cumplió la fase de aplicación a nivel institucional, se hace necesario mencionar que durante dicha fase, se notó el interés por parte del señor rector de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento del municipio de Carepa, para que este estudio se extienda a los ocho grupos del grado quinto de la Institución, para fortalecer las prácticas pedagógicas, atendiendo a los (DBA) Derechos Básicos de Aprendizaje, a los estándares básicos de competencias y a los lineamientos curriculares emanados por el Ministerio de Educación Nacional.

El grupo de investigación cuenta con dos años para multiplicar este estudio y llevarlo a otros escenarios de índole municipal, regional y nacional.

Existe el interés por parte del equipo investigador en realizar una publicación de un artículo científico en revistas nacionales e internacionales.

Se tiene como propósito establecer contacto con las mesas de matemáticas de la región de Urabá para difundir el estudio y promover el uso del origami en la enseñanza de la geometría y del álgebra, como estrategia didáctica que conduzca al fortalecimiento de los planes de estudio de las instituciones educativas en el contexto matemático.

5.4. INVESTIGACIONES FUTURAS

Este trabajo de investigación, abre la posibilidad para continuar con futuras investigaciones en el marco de los niveles de razonamiento de Van Hiele como las siguientes:

- La comprensión y demostración formal del teorema de Leonhard Euler, para promover al estudiante hacia niveles de razonamiento de mayor jerarquía.
- La implementación de la guía metodológica para la construcción de los cinco sólidos platónicos ayudará a la formalización de otros estudios referidos al pensamiento geométrico y espacial.
- La realización de una guía metodológica para la comprensión axiomática de la geometría euclidiana y para la geometría que resulta del doblado de papel.
- La elaboración de un guión de entrevista semi-estructurada con carácter socrático en el contexto del modelo geométrico de Van Hiele, para el estudio de estructuras de mayor complejidad sobre el pensamiento algebraico por medio del doblado de papel.
- La longitud del estudio, los temas investigados o el número de participantes pueden ser modificados para obtener resultados más exactos sobre los niveles de razonamiento de los individuos hacia la comprensión del teorema de Euler.
- Una posterior investigación sobre la comprensión del teorema de Euler podría utilizar los descriptores de razonamiento para evaluar el nivel en el que se encuentra cada estudiante y rediseñar las actividades para lograr un guión

entrevista refinado como instrumento para establecer generalizaciones con grupos más numerosos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ministerio de Educación Nacional. (7 de Junio de 1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Recuperado el 2 de Febrero de 2015, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares Básicos de Competencias.* Recuperado el 25 de Abril de 2015, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Amador Moncada, M. F. (2013). *El uso de tres tipos de material didáctico en la solución de una situación problema con objetos tridimensionales.* Recuperadoel 2 de Noviembre de 2014, de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/11059/3180/1/37276A481.pdf

Amaya De Armas, T. y. (2009). *De lo lúdico del origami al trabajo con funciones .* Recuperado el 8 de Noviembre de 2014, de CLAME: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.: http://funes.uniandes.edu.co/4631/1/AmayaDelol%C3%BAdicoALME2010.pdf

Blanco García, C. y. (2006). *La Papiroflexia como herramienta en el Estudio de las matemáticas.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2014, de sctm. Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemática 2006: http://sctmates.webs.ull.es/modulo2tf/2/cblanco.pdf

Briceño, M., Díaz, B., Ocamdo, M., Parra, L., Pérez, R., Quintero, C., & Rosales, J. y. (Mayo de 2013). Recuperado el 10 de Noviembre de 2014, de *El origami como técnica para el desarrollo de habilidades mentales en niños con mayor compromiso cognitivo (retardo mental)*: http://es.slideshare.net/juaandiiegoo/el-origami-como-tcnica-para-el-desarrollo-de-habilidades-mentales-en-nios-con-mayor-compromiso-cognitivo-retardo-mental

Buitrón Jácome, P. A. (9 de Julio de 2012). *Repositorio Digital. Universidad Técnica del Norte.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2014, de http://repositorio.utn.edu.ec/bitstream/123456789/1524/1/FECYT%201322%20Tesis%20 Final.pdf

Burger, W., y Shaughnessy, J. (1986). *Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry*. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), 31- 48. Recuperado de http://math.buffalostate.edu/~MED595/Casestudy1.pdf

Butto Zarzar, C. M. (Septiembre de 2009). *Pensamiento Algebraico Temprano.* Recuperado el 20 de Abril de 2015, de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1391-F.pdf

Cañadas, M. C., Durán, F., Gallardo, S., Martínez-Santaolalla, M. J., Peñas, M., & Villegas, J. L. (2003). *Universidad de los Andes.* Recuperado el 9 de Noviembre de 2014, de Geometría con papel: http://funes.uniandes.edu.co/273/1/CannadasM03-2780.PDF

De la Torre, A. (2003). *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de Van Hiele.* Tesis de Doctorado publicada. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia - España

García, M. T. (Marzo de 2003). *Matemática: Manual de apoyo para material didáctico.* Recuperado el 02 de Febrero de 2015, de http://www.red-ler.org/Matematica-rural.pdf

Gil, R. (Febrero de 2014). *Métodos de la investigación cualitativa.* Recuperado el 14 de Junio de 2016, de http://es.slideshare.net/roxanagill/mtodos-de-la-investigacin-cualitativa

Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele.* Recuperado el 25 de Junio de 2015, de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaramillo, C. (2003). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele*. (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Valencia. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=8912

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). *Educación Matemática.* Recuperado el 24 de Febrero de 2015, de http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/235537/mod_resource/content/2/TEXTO%201-Kilpatrick,%20J.pdf

Kim, B., Kim, T. K., & Kim, J. (3 de Mayo de 2013). *Springer Link. Diseño e implementación de una aplicación del origami como entretenimiento geométrico.* Obtenido de http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-6738-6_48

Martínez C, L. A. (5 de Mayo de 2009). *Inventum No. 6 Facultad de Ingeniería Uniminuto.* Recuperado el 9 de Noviembre de 2014, de file:///C:/Users/PERSONAL/Downloads/48-167-1-PB.pdf

Mor i Edo, E. (13 de Julio de 2012). *La papiroflexia como recurso didáctico en la formación de personas adultas.* Recuperado el 4 de Noviembre de 2014, de http://mail.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_76/nr_829/a_11214/11214.pdf

Piedrahita, M. y. (Sin fecha). Guía de geometría. Proyecto U de A. Medellín.

Quesada, C. (20 de Diciembre de 2006). *Los Sólidos Platónicos. Historia, Propiedades y Arte.* Recuperado el 25 de Junio de 2015, de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Los%20solidos%20platonicos.pdf

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la evaluación cualitativa.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Royo Prieto, J. I. (24 de Julio de 2002ª). *Matemáticas, papiroflexia y balones de fútbol.* Recuperado el 24 de Junio de 2015, de http://www.rsme.es/rec/pgt0102.pdf

Royo Prieto, J. I. (Octubre de 2002b). *Revista SIGMA N°21. Matemàticas y papiroflexia.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2014, de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_21/11_matematicas_y_papiroflexia.pdf

Sarmiento Rojas, M. I. (2008). *Sistema modular didáctico de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la geometría fractal. Diseño y construcción de un módulo funcional.* Recuperado el 26 de Junio de 2015, de file:///C:/Users/PERSONAL/Downloads/126034%20(2).pdf

Souza, A. S. (2012). *Manakin. El arte de la papiroflexia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: construcciones de poliedros.* Recuperado el 8 de Noviembre de 2014, de http://dspace.bc.uepb.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/823

Steen, L. (1999). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* México: Limusa.

Straus, A. y. (Diciembre de 2002). *Bases de la investigación cualitativa: Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* (U. d. Antioquia, Ed.) Recuperado el 7 de Febrero de 2015, de http://books.google.com.co/books?id=TmgvTb4tiR8C&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievements in Secondary School Geometry.CDASSG Project. National Council of Teachers of Mathematics.*

Washington. D.C, E.U.A. Recuperado el 26 de Junio de 2015, de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220288.pdf

Valencia Montenegro, A. K. (Octubre de 2012). *Biblioteca Digital Universidad del Valle.* Recuperado el 6 de Noviembre de 2014, de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4649/1/CB-0473261.pdf

Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight. A theory of Mathematics Education.London: Academic Press.

Van Hiele, Pierre M. El Problema de la Comprensión. Tesis Doctoral. 1957. p. 72. (Traducción al español realizada en 1990).

Villarroel, S. y. (Noviembre de 2011). *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Recuperado el 03 de Diciembre de 2014, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf

Wares, A. (2011). *EBSCOhost. El uso de cajas de origami para explorar conceptos de geometría y cálculo.* Recuperado el 27 de Febrero de 2015, de http://eds.a.ebscohost.com.consultaremota.upb.edu.co/ehost/detail/detail?vid=47&sid=66725d1b-a4c1-461a-b2de-0fd95f9d85ca%40sessionmgr4005&hid=4205&bdata=Jmxhbmc9ZXMmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#db=ehh&AN=58528621

Wares, A. (Marzo de 2013). *EBSCOhost. La apreciación de las matemáticas a través de origami.* Recuperado el 26 de Febrero de 2015, de http://eds.a.ebscohost.com.consultaremota.upb.edu.co/ehost/detail/detail?vid=3&sid=66725d1b-a4c1-461a-b2de-0fd95f9d85ca%40sessionmgr4005&hid=4211&bdata=Jmxhbmc9ZXMmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#db=ehh&AN=86413007

Zapata, F. y. (18 de Octubre de 2008). *Funes. Universidad de los Andes.* Recuperado el 5 de Noviembre de 2014, de http://funes.uniandes.edu.co/942/1/11Taller.pdf

Zapata, S. y Sucerquia, E. (2009). Módulo de Instrucción en el Marco del Modelo Educativo de Van Hiele para el concepto de convergencia de una serie infinita".(Tesis de maestría no publicada), Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

ANEXOS

Anexo 1. Actividad escrita para cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele

Actividad escrita para el primer nivel de razonamiento

El objeto de esta actividad es poder obtener en primera instancia, la información escrita que aporten los sujetos que están siendo investigados de forma espontánea, para analizarla y consecuentemente, poder realizar un análisis riguroso al efectuar la triangulación de los datos obtenidos.

1. En la siguiente figura repasa con los colores indicados los siguientes elementos:
   A. Una recta con color azul.
   B. Un segmento de recta con color rojo
   C. Dos rectas paralelas con color verde.
   D. Dos rectas perpendiculares con color amarillo.
   E. Dos puntos con color negro.
   F. Un plano de color gris.

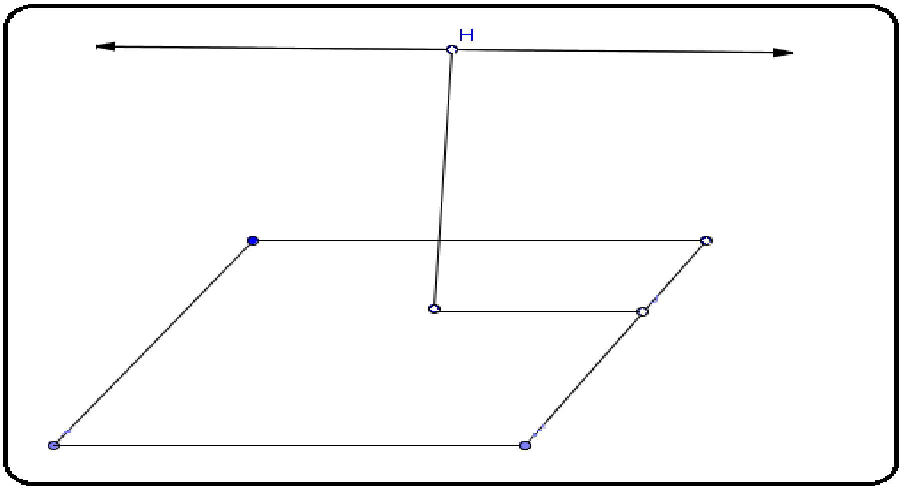


Figura 1. Elementos básicos de la geometría Euclidiana. Fuente: elaboración propia.

1. Considera los siguientes puntos un una hoja de papel. Luego, traza todas las rectas posibles que pasen exactamente por estos dos puntos.

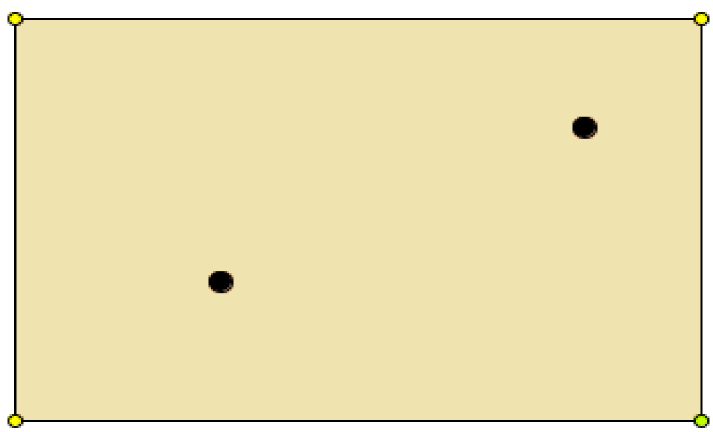


Figura 2. Por dos puntos pasa una única recta. Fuente: elaboración propia en colaboración con el programa GeoGebra.

2. Considera los siguientes puntos un una hoja de papel, luego realiza todos los pliegues posibles que pasen exactamente a través de estos dos puntos.

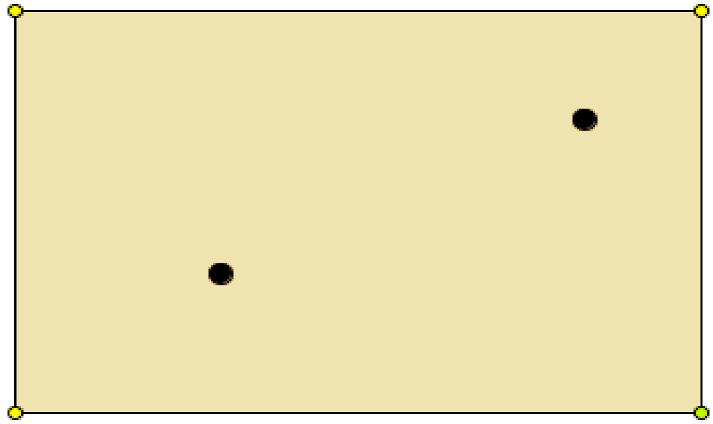


Figura 3. Por dos puntos pasa sólo una recta. Fuente: elaboración propia.

3. Se han dibujado dos puntos en el interior de una hoja de papel. Si se hacen coincidir los dos puntos doblando la hoja y realizando un pliegue, resulta una línea perpendicular, es decir líneas que forman ángulos rectos.

Señala la figura que corresponde a esta relación de perpendicularidad.

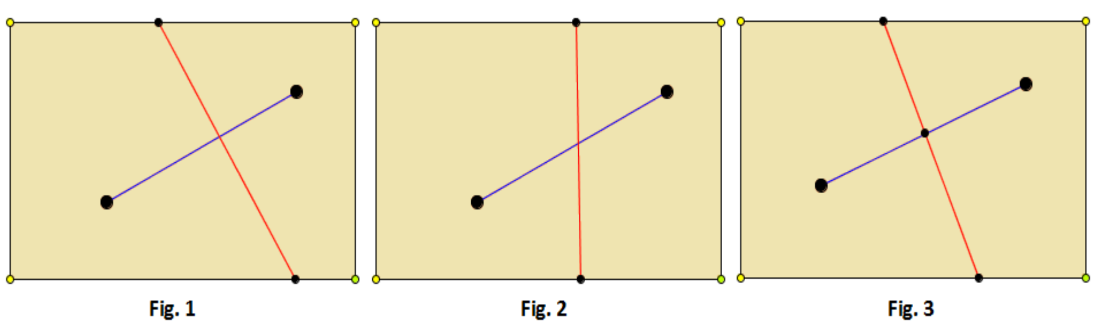


Figura 4. Rectas perpendiculares. Fuente: elaboración propia en colaboración con el programa GeoGebra.

Observa las siguientes figuras.

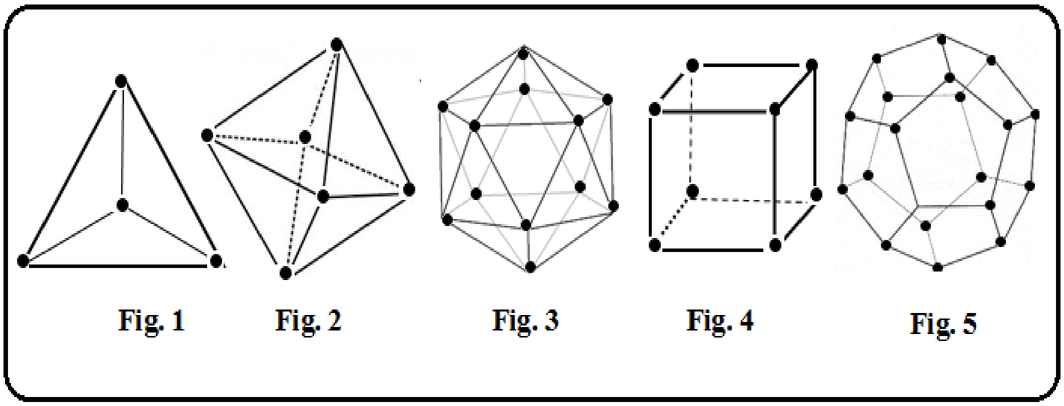


Figura 5. Elementos notables de los sólidos platónicos. Fuente: elaboración propia.

4. Utiliza los siguientes colores para resaltar en cada figura los vértices, las caras y las aristas, así:

A. Vértices: rojo

B. Caras: amarillo

C. Aristas: azul

5. Relaciona el enunciado que se encuentra al lado izquierdo, con la palabra del centro que lo complementa y con la respectiva figura de la derecha.

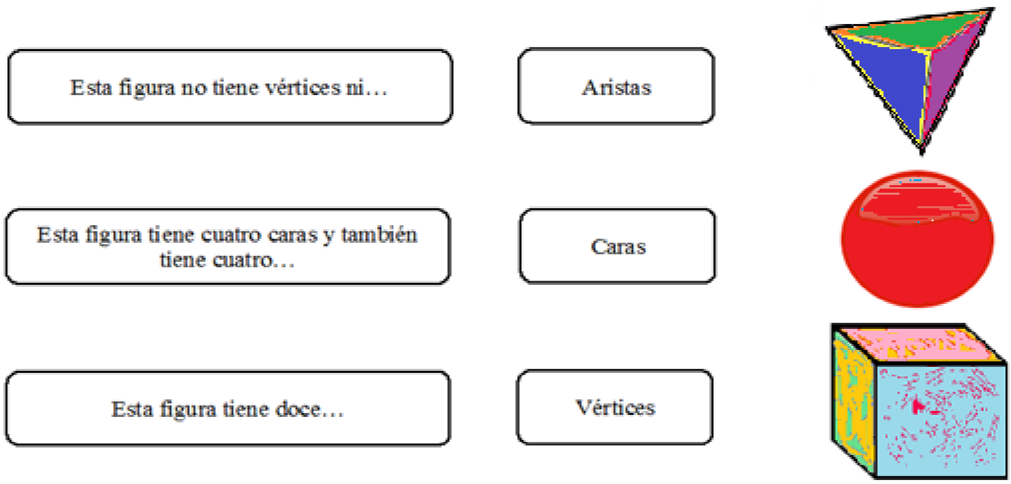


Figura 6. Elementos notables y características de los sólidos. Fuente: elaboración propia.

Considera el siguiente par de figuras que representan las aristas de un hexaedro construido con pitillos y las caras del mismo cuerpo en origami.

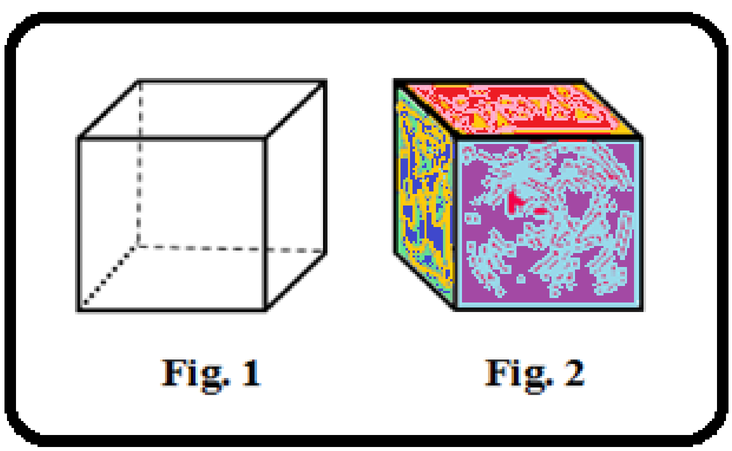


Figura 7. Comparación de elementos de un hexaedro regular: caras, vértices y aristas. Fuente: elaboración propia

6. ¿Podrías indicar cuántas caras, vértices y aristas posee la figura 1?

7. Ahora haz lo mismo para la figura 2, realizada con papel.

8. ¿Cuál es la arista de mayor longitud?

9. Identifica el nombre de la figura plana que forman las caras de las figuras 1 y 2:

A. Triángulo

B. Pentágono

C. Cuadrado

D. Hexágono.

10. Entre los siguientes conjuntos de figuras planas y sólidos identifica y luego, señala cuáles son redondas y cuáles son planas.

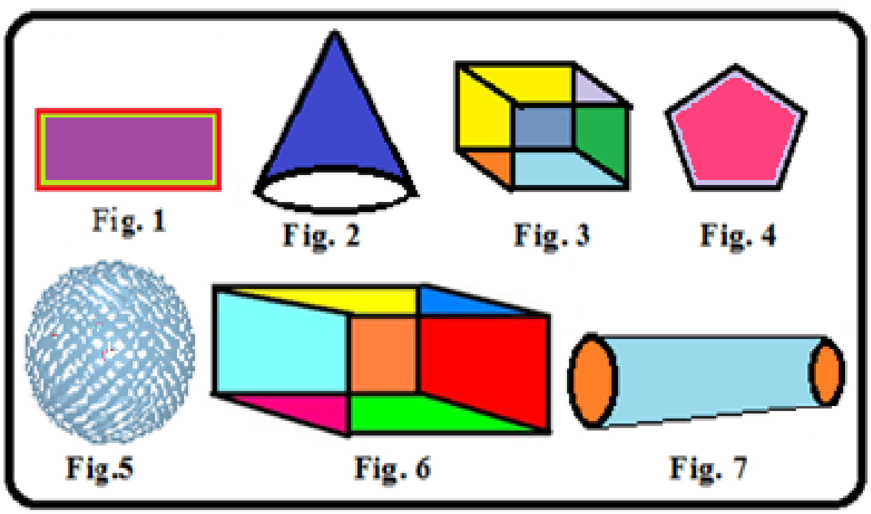


Figura 8. Sólidos y figuras geométricas planas. Fuente: elaboración propia.

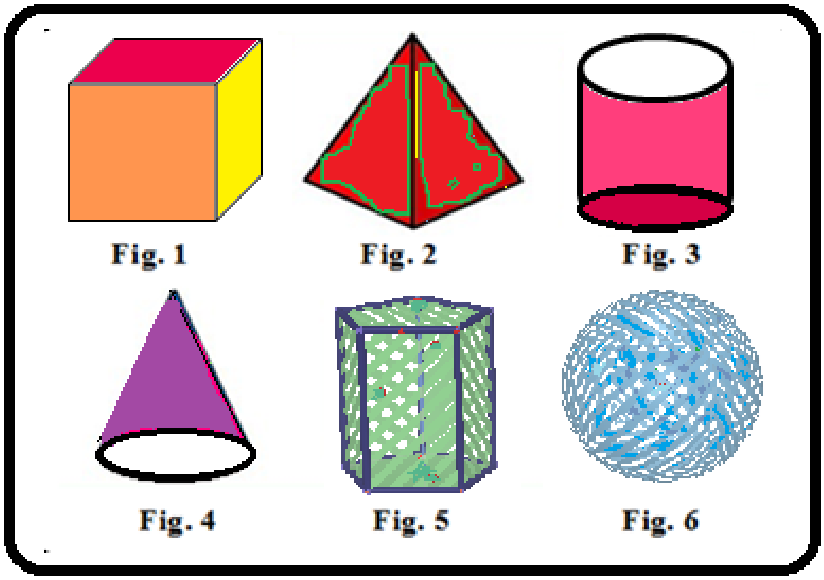


Figura 9. Sólidos regulares e irregulares. Fuente: elaboración propia.

11. ¿Cuáles de éstas figuras pueden rodar?

12. Observa las siguientes figuras geométricas planas y luego, escribe el nombre de cada una de ellas.

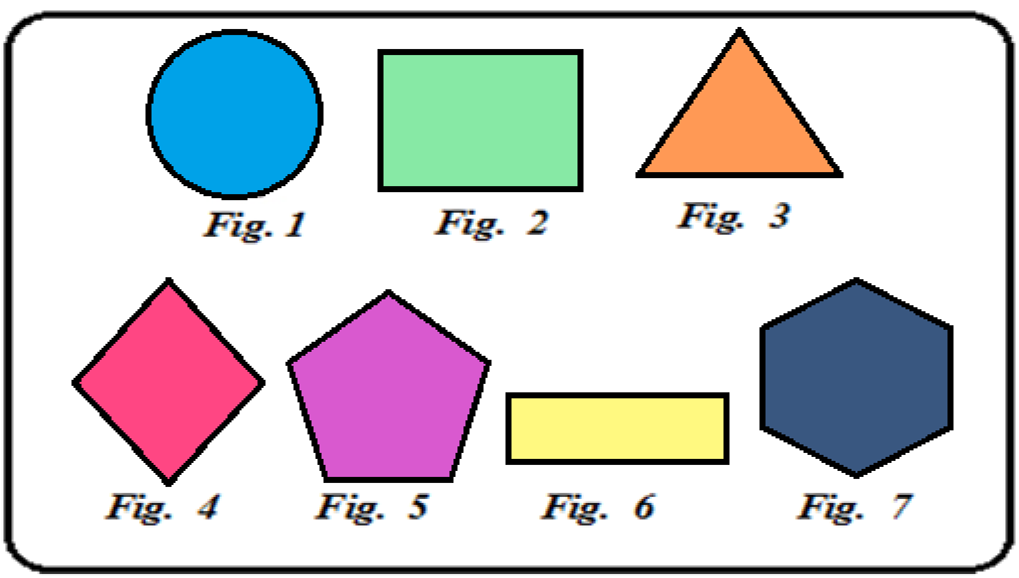


Figura 10. Figuras geométricas planas. Fuente: elaboración propia.

13. Dibuja un cuadrado exactamente igual al que aparece en la parte inferior y borra dos lados consecutivos.

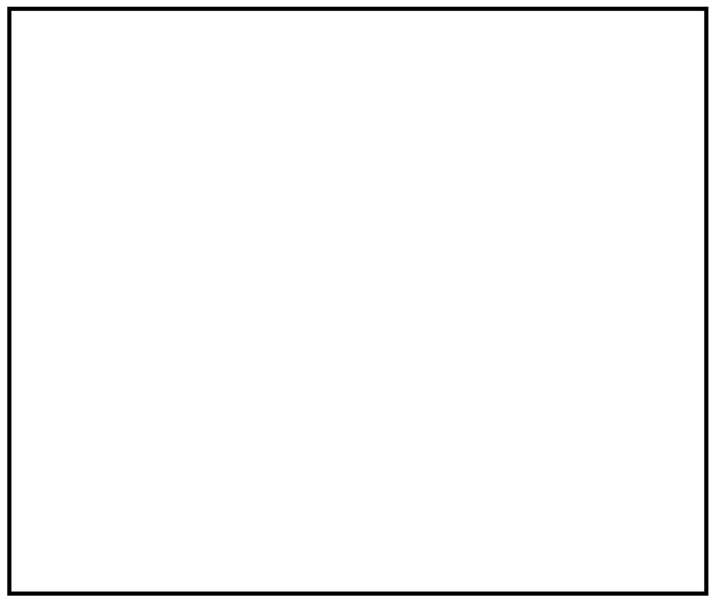


Figura 11. Superficie de un cuadrado. Fuente: elaboración propia.

14. La figura que resulta se denomina:

A. Líneas paralelas.

B. Líneas perpendiculares.

C. Ángulo.

D. Diagonales

15. Dibuja nuevamente un cuadrado como el que te presentamos a continuación y borra dos lados no consecutivos del mismo.

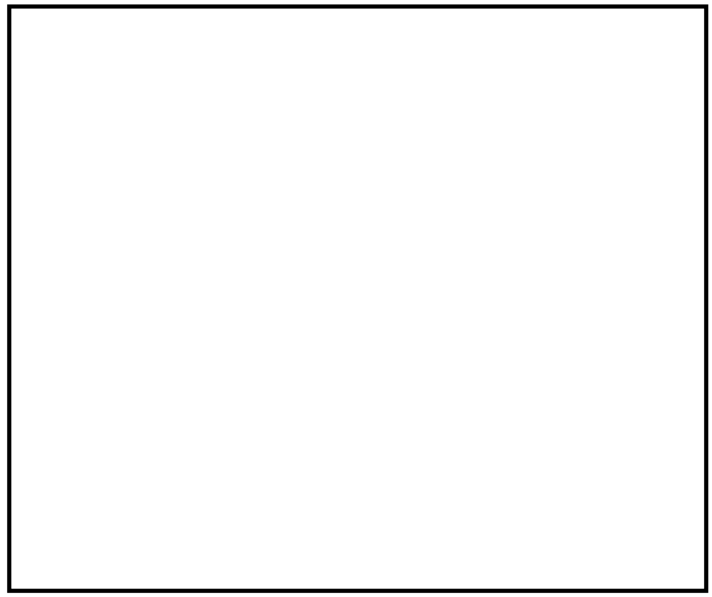


Figura 12. Superficie de un cuadrado. Fuente: elaboración propia.

16. ¿Cuántos lados quedaron?

17. El nombre que reciben las líneas que quedaron es:

A. Líneas rectas.

B. Líneas paralelas.

C. Líneas perpendiculares.

D. Ángulos.

Actividad escrita propuesta para el segundo nivel de razonamiento

Los poliedros regulares tienen las caras formadas por polígonos regulares iguales entre sí.

Los poliedros regulares son cinco: el tetraedro, el octaedro, el hexaedro o cubo, el dodecaedro y el icosaedro.

1. En los siguientes sólidos geométricos se encuentran algunos que son regulares, identifícalos y luego, coloréalos e intenta colocarles el nombre respectivo.

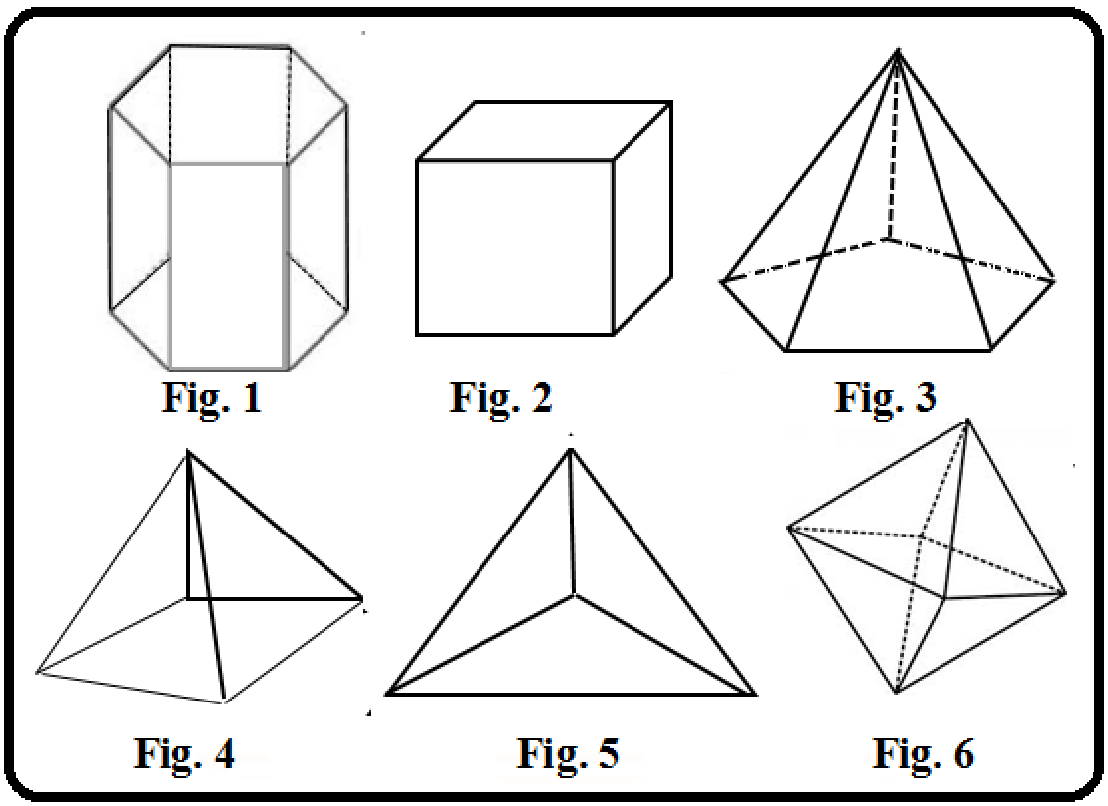


Figura 13. Sólidos regulares e irregulares. . Fuente: elaboración propia.

2. En el cuadro anterior, los sólidos regulares son respectivamente:

    A. La fig. 2, la fig. 5, y la fig. 6

B. La fig. 1, la fig. 3, y la fig. 4

C. La fig. 2, la fig. 4, y la fig. 6

D. La fig. 1, la fig. 3, y la fig. 5

3. ¿Cómo son todas las caras de las figuras: 2, 5 y 6?
4. En la imagen que representa los sólidos regulares e irregulares, identifica y luego escribe el número de la figura que corresponde a un poliedro regular con ocho caras que son triángulos equiláteros.

En la siguiente figura encontrarás el cuerpo de un sólido construido con papel para representar las caras y uno con pitillos, para representar las aristas.

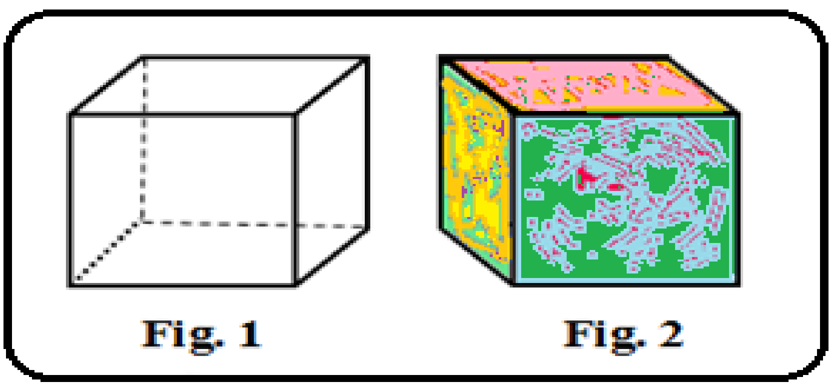


Figura 14. Comparación de caras, vértices y aristas de un sólido regular. Fuente: elaboración propia.

5. Señala el lugar donde se unen varios pitillos de la primera figura, este lugar recibe el nombre de:

A. Cara

B. Vértice

C. Arista

D. Ángulo

6. El número de vértices que tienen las figuras 1 y 2 es:

A. Diferente porque la figura 2 tiene siete vértices y la figura 1 tiene 8 vértices.

B. La figura uno es diferente a la figura dos, por eso esta debe tener más vértices.

C. Las dos figuras tienen el mismo número de vértices (6 vértices).

D. Tanto la estructura 1 como la estructura 2 son la misma figura, por tanto, la cantidad de vértices es la misma (8 vértices).

7. El número de pitillos que se usaron para hacer la figura 1 es:

A. 6 pitillos.

B. 12 pitillos.

C. 8 pitillos.

D. 14 pitillos.

Observa la superficie de los cinco sólidos platónicos, luego responde las siguientes preguntas:

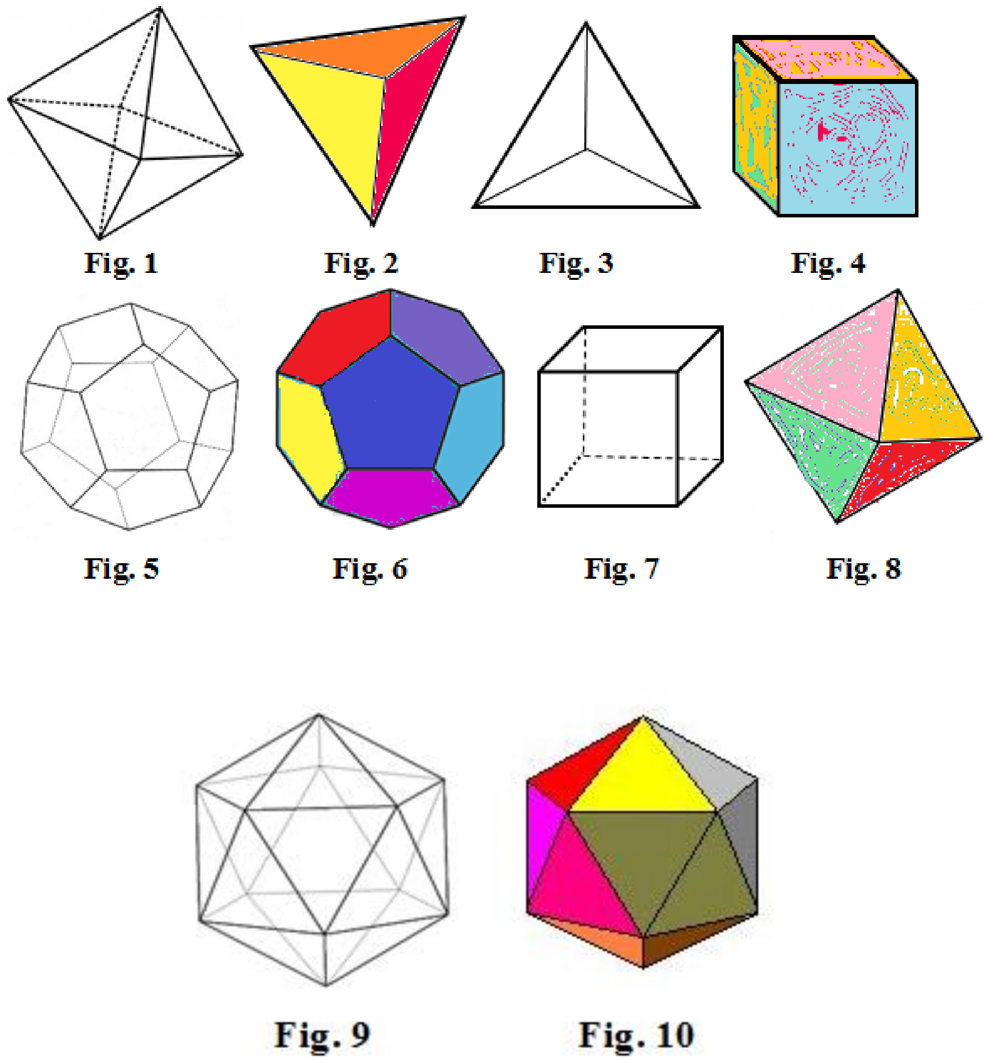


Figura 15. Diferencias y semejanzas entre los poliedros construidos con dos tipos de material. Fuente: elaboración propia.

8. Escribe cuántos y cuáles elementos comunes poseen estos cinco sólidos.

9. ¿Qué diferencias encuentras entre las figuras 4 y 7?

10. ¿Qué diferencias encuentras entre las figuras 3 y 7?

11. Identifica el concepto de triángulo equilátero en los siguientes enunciados.

A. Un triángulo es un polígono formado por cuatro lados y cuatro ángulos rectos.

B. Es un polígono de cuatro lados, que son iguales dos a dos.

C. Es un polígono que tiene cinco lados y cinco ángulos.

D. Es un polígono que tiene tres lados y tres ángulos de la misma medida.

12. Relaciona el poliedro con su respectiva característica.

a) Poliedro regular con 6 caras que son cuadrados.	Dodecaedro
b) Poliedro regular con 20 caras que son triángulos equiláteros.	Icosaedro
c) Poliedro regular con 4 caras que son triángulos equiláteros.	Hexaedro
d) Poliedro regular con 8 caras que son triángulos equiláteros.	Tetraedro
e) Poliedro regular con 12 caras que son pentágonos regulares.	Octaedro

Actividad escrita propuesta para el tercer nivel de razonamiento

Se debe aclarar lo siguiente: en la actividad propuesta para este nivel de razonamiento, los estudiantes ya tienen en sus manos todas los sólidos construidos con pitillos y papel iris, lo cual hace posible que éste utilice el material concreto para contar las caras, los vértices y las aristas de los respectivos poliedros.

1. Observa los siguientes poliedros regulares, luego identifica los nombres en su orden respectivo.

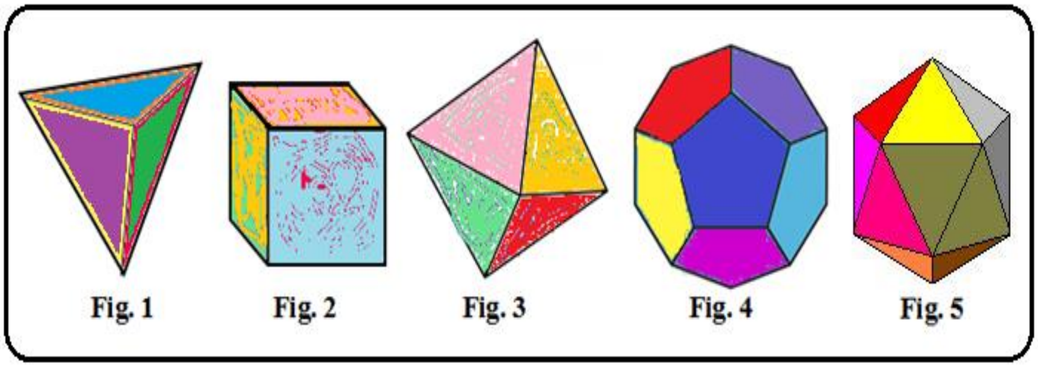


Figura 16. Estructura de los sólidos platónicos. Fuente: elaboración propia.

A. Dodecaedro, icosaedro, tetraedro, hexaedro, octaedro.

B. Icosaedro, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro.

C. Hexaedro, tetraedro, dodecaedro, octaedro, icosaedro.

D. Tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

2. ¿Cuántas caras se unen en cada uno de los vértices de cada poliedro regular?
3. Una característica común que poseen los cinco sólidos platónicos es:

A. Que las caras de estos cuerpos son todas diferentes.

B. Todas las caras de estas figuras están compuestas por polígonos regulares.

C. Las cinco figuras tienen caras triangulares.

D. Todas tienen el mismo número de caras, vértices y aristas.

4. Cuenta en cada figura el número de caras, vértices y aristas. Luego, completa la tabla.

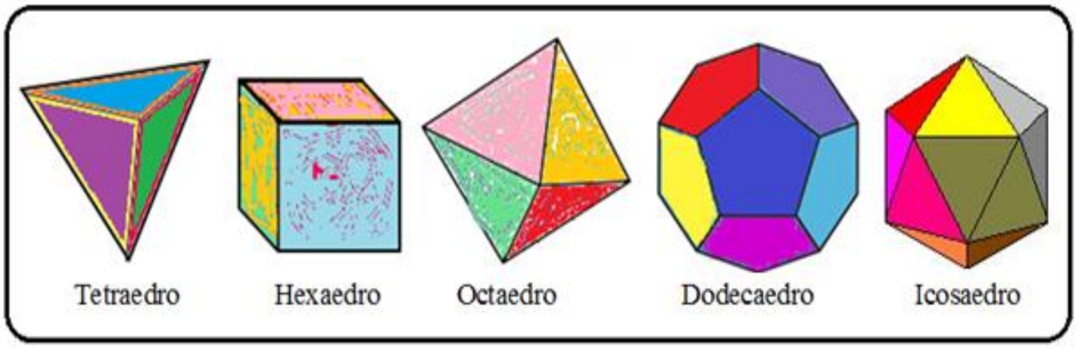


Figura 17. Estructura de los sólidos platónicos y elementos constitutivos. Fuente: elaboración propia.

Tabla 1.
Poliedros regulares y elementos constitutivos.

Nombre de Poliedro	Número de Caras	Número de Vértices	Número de Aristas
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Nota: En la que se debe completar el número de caras, vértices y aristas de cada uno de los cinco poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

5. Realiza el mismo ejercicio con el siguiente conjunto de sólidos. Intenta escribir el nombre de cada sólido.

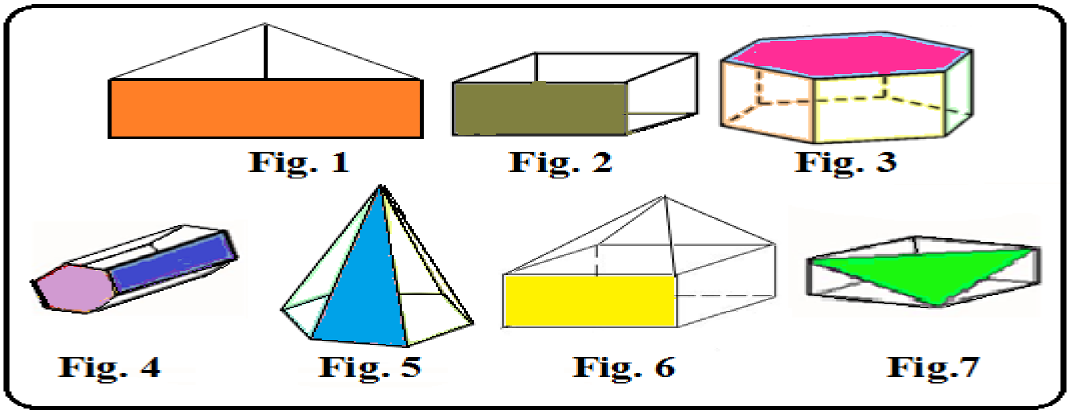


Figura 18. Estructura de los sólidos irregulares y sus elementos constitutivos. Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.
Número de elementos constitutivos de un poliedro irregular.

Nombre de la figura	Número de Caras	Número de Vértices	Número de Aristas
Fig. 1			
Fig. 2			
Fig. 3			
Fig. 4			
Fig. 5			
Fig. 6			
Fig. 7			

Nota: En la que se debe completar el número de caras, vértices y aristas de algunos poliedros irregulares. Fuente: elaboración propia.

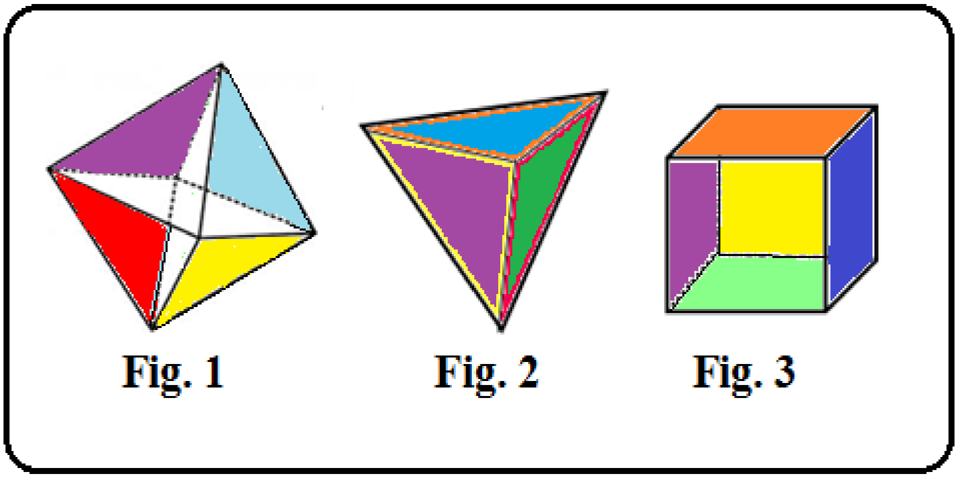


Figura 19. Algunos sólidos platónicos. Fuente: elaboración propia.

Observa los sólidos platónicos del cuadro anterior y responde las siguientes preguntas:

6. En la figura 1, ¿Cuántos vértices tiene una cara?
7. En la figura 2, ¿Cuántos ángulos tiene el esqueleto?
8. En la figura 3, ¿Cuántas aristas llegan a cada vértice?
9. En las figuras 1, 2 y 3, ¿Cuántas caras llegan a una arista?

Ahora observa el siguiente sólido.

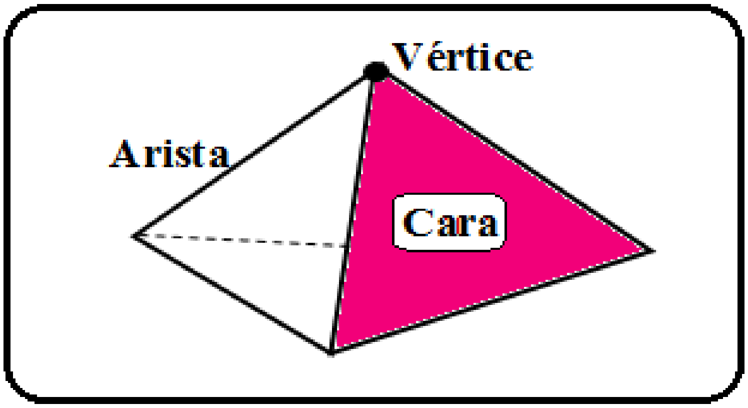


Figura 20. Elementos de un sólido platónico (tetraedro). Fuente: elaboración propia.

10. El número de caras que se deben juntar como mínimo en un vértice para poder armar este tetraedro corresponde a:

   A. Dos caras.
   B. Tres caras.
   C. Cuatro caras.
   D. Ninguna cara.

Anexo 2. Consentimiento de Participación

Yo, **_______________________________________** estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada "**Los sólidos platónicos en origami para la comprensión de la fórmula de Euler en el contexto de Van Hiele**" que es conducido por los docentes: Erlin Blandón Rivas, Joel de Jesús Gulfo Pacheco y Wilson Marín Barco, estudiantes de maestría en ciencias naturales y matemática de la Universidad Pontificia Bolivariana y profesores de las Instituciones Educativas Unión Quince y Luis Carlos Galán Sarmiento, respectivamente. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mí o destruida. Por lo tanto, permito que se graben las entrevistas realizadas a mí, permito que se publiquen fotos para fines académicos.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es analizar los procesos de razonamiento de algunos estudiantes, mediante la construcción de unos descriptores que permitan evidenciar el nivel de comprensión de la fórmula de Euler, a través de la construcción de los sólidos platónicos por medio de la técnica del origami en el contexto de Van Hiele.

Beneficios: Al ser participante en esta investigación podrá adquirir conocimiento y mejorar la capacidad de razonamiento sobre algunos temas de geometría y conceptos algebraicos, en particular lo que se refiere a la comprensión de la fórmula de Euler, por medio de la construcción de los cinco sólidos platónicos en origami.

Procedimiento: Como participante en este estudio será observado, entrevistado y grabado, fotografiado y posiblemente filmado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigador y sólo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: La investigación responderán a cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico wilsonmar6098@hotmail.com o al teléfono celular número: 3122855217

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones miércoles y viernes de 9:00 a 10:00 de la mañana y sábados de 9:30 a 11:30 am, (ocasional).

Nombre del investigador	**Firma**	**Fecha**

Nombre del participante	**Firma**	**Fecha**
Nombre del padre de familia	**Firma**	**Fecha**

ANEXO 3. GUIA DIDÁCTICA PARA CONSTRUIR Y EXPLORAR LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Materiales: Pitillos de gaseosa, bloc iris y tijeras.

Preconceptos: ángulo, caras, vértices, aristas, diagonal, recta, segmento, punto, triángulo, cuadrado, pentágono, polígonos,

El estudio formal de las matemáticas debe estar fundamentado en la construcción y exploración de los sólidos platónicos, estos objetos se deben exhibir y enseñar desde los primeros años de escolaridad, lo anterior debido a que desde el contexto geométrico es muy importante que los estudiantes desarrollen aprendizajes con el uso de material concreto, para luego poder pasar a lo conceptual y finalmente, a lo simbólico.

PROCEDIMIENTO

Los estudiantes recibirán los esquemas o grafos para la construcción de los cuerpos platónicos con pitillos de gaseosa, este trabajo será desarrollado en subgrupos de trabajo, con orientación del docente.

Seguidamente, los estudiantes elaborarán las mismas figuras utilizando papel iris a través del origami “doblado del papel” para construir los cuerpos sólidos, también lo podrán realizar en los subgrupos de trabajo ya establecidos en el ejercicio anterior.

Los poliedros a construir son los siguientes:

Tetraedro-Hexaedro-Octaedro-Dodecaedro-Icosaedro

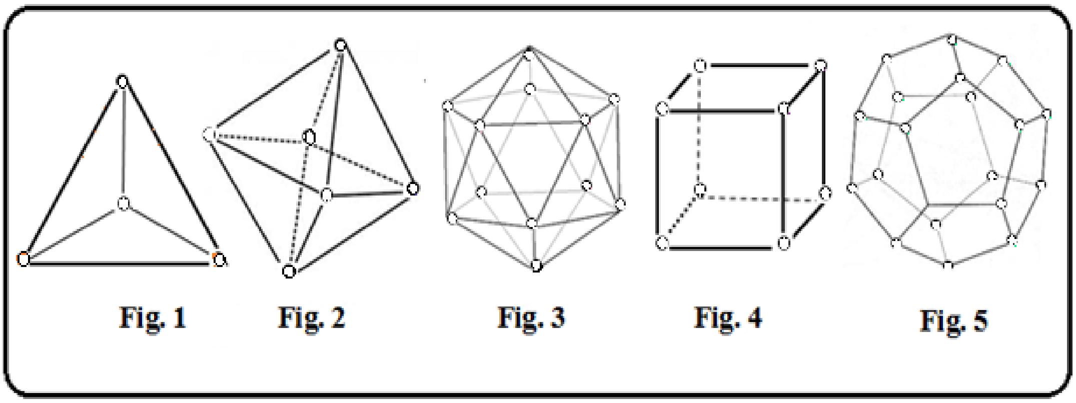


Figura 21. Estructura de los sólidos platónicos construidos con pitillos de gaseosa. Fuente: elaboración propia.

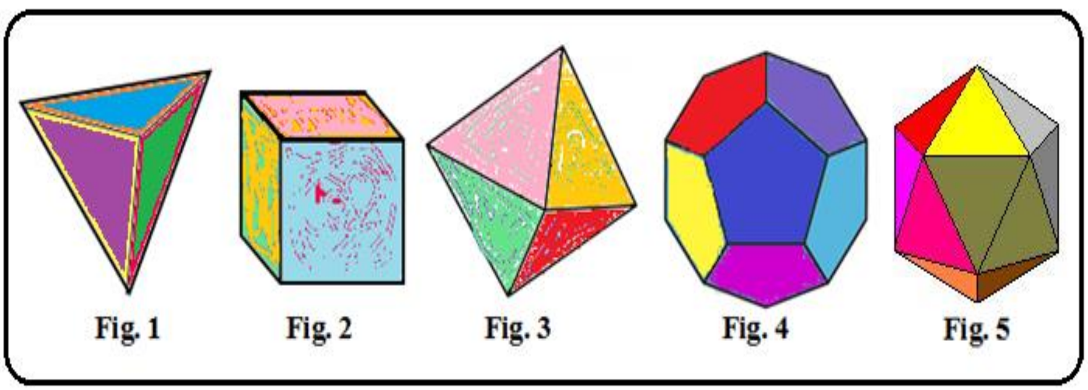


Figura 22. Cuerpo de los sólidos platónicos construidos con block iris. Fuente: elaboración propia.

Luego de haber construido los poliedros con los tipos de material sugerido, se presentarán al estudiante para que los observe y los explore.

Debemos escribir en el tablero todo lo que ellos digan de ellas.

Tomar la estructura del tetraedro construida con pitillos de gaseosa y luego, preguntar:

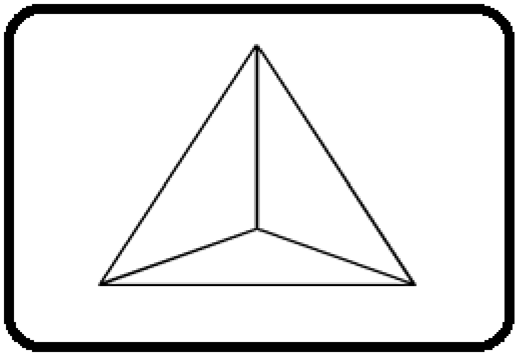


Figura 23. Tetraedro. Fuente: elaboración propia.

1. Señala el lugar donde se unen los pitillos

2. Ese lugar se llama VÉRTICE

¿Qué es un vértice?
____

3. ¿Cuántos vértices tiene la estructura elaborada con pitillos de gaseosa?

4. En una hoja dibuja un vértice*

5. ¿Qué figura dibujaste?

¿Qué es un punto?
____

6. ¿Cuántos pitillos se usaron para hacer la estructura con los pitillos de gaseosa?

7. En esta estructura cada pitillo se llama ARISTA.

¿Qué es una arista?
____

8. ¿Cuántas aristas tiene el esqueleto?

9. ¿Cuál es la arista de mayor longitud?

10. En una hoja que te represente el plano, dibuja una arista.

11. ¿Qué figura dibujaste?

12. Esa figura se llama SEGMENTO DE RECTA.

¿Qué es un segmento de recta?
____

13. Prolonga ese segmento por uno de los extremos hasta que termines la hoja.

14. Esa figura se llama SEMIRRECTA.

¿Qué es una semirrecta?
____

15. Prolonga esa semirrecta por el otro extremo hasta que termines la hoja.

16. Esa figura se llama RECTA.

¿Qué es una recta?
____

17. Coloca la estructura construida con pitillos en una superficie plana. ¿Rodará?

18. ¿Por qué?

19. Esa superficie que los hace firmes (estático) se llama CARA.

¿Qué es una cara?
____

20. ¿Cuántas caras tiene la estructura del tetraedro?

21. ¿Cuál es la cara de mayor área o superficie?

22. Dibuja en un papel la cara del tetraedro construido con pitillos y coloréala.

23. Esa figura se llama TRIÁNGULO.

¿Qué es un triángulo?

____

24. ¿Cuántos segmentos trazaste?

25. En el triángulo cada una de esas líneas se llama LADO.

¿Qué es un lado del triángulo?

____

26. ¿Cuántos lados tiene un triángulo?

27. ¿Cuál es el lado de mayor longitud?

28. Señala el lugar en donde se unen los lados.

29. ¿Cómo se llama ese lugar?

30. ¿Cuántos vértices tiene una cara?

31. Para construir un triángulo semejante al que se presenta en la cara del tetraedro traza un segmento de recta $\overline{AB}$.

32. Toma el compás y coloca su eje en el punto A y el lápiz en el extremo B.

33. Traza un arco a un lado del segmento.

34. Coloca el eje del compás en el punto B.

35. Traza un arco tal que corte el anteriormente trazado, ese punto llámalo C.

36. Construye los segmentos de recta $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

37. ¿Qué figura haz construido?

38. Borra el segmento de recta $\overline{BC}$.

39. Esa figura se llama ángulo.

¿Qué es un ángulo?

____

40. ¿Cuántos lados tiene un ángulo?

41. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo?

42. ¿Cuántos ángulos tiene una cara?

43. ¿Cuál es el ángulo de mayor abertura?

44. ¿Cuántos ángulos tiene la estructura construida con pitillos?

45. ¿Cuántas aristas llegan al vértice de la estructura del tetraedro elaborada con pitillos?

46. ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?

47. ¿Cuántas caras llegan a una arista?

48. Una arista y dos caras forman un ÁNGULO DIÉDRICO.

¿Qué es un ángulo diédrico?
____

49. Construye con una hoja de papel, un ángulo diédrico.

50. ¿Cuántas caras llegan a un vértice?

51. Un vértice y tres o más caras forman un ÁNGULO POLIÉDRICO.

¿Qué es un ángulo poliédrico?
____

52. Construye con una hoja un ángulo poliédrico.

53. ¿Cuántos ángulos poliédricos tiene el cuerpo?

54. En el cuerpo ¿cuál es el ángulo poliédrico que cubre mayor espacio?

55. Esta estructura por tener sus caras congruentes y sus ángulos sólidos congruentes forma parte de la familia de los cuerpos Platónicos y es llamado el TETRAEDRO.

Seguidamente, los estudiantes observarán el hexaedro y responderán los siguientes interrogantes:

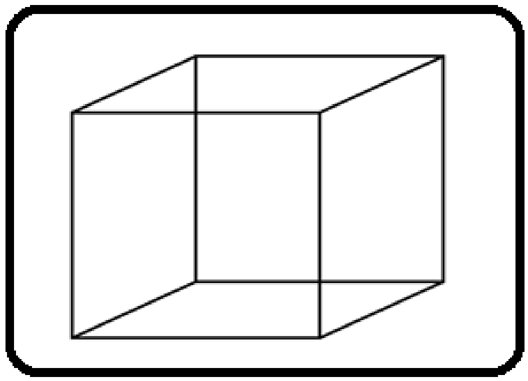


Figura 24. Hexaedro. Fuente: elaboración propia.

1. ¿Cuántos vértices tiene el hexaedro?
2. ¿Cuántos pitillos se usaron para hacer la estructura del hexaedro?

4 En la estructura del hexaedro cada pitillo representa:

5 ¿Cuántas aristas tiene el hexaedro?

6 ¿Cuál es la cara de mayor área o superficie?

7 Para dibujar la cara del hexaedro se traza un segmento de recta $\overline{AB}$.

8 Toma el compás y coloca el eje su eje en el punto A.

9 Traza media circunferencia con la condición que corte el segmento $\overline{AB}$ en un punto. Llámalo C.

10 Coloca el eje del compás en el punto C y traza un corte en la semicircunferencia. El punto de corte llámalo D.

11 Coloca el eje del compás en el punto D y haz otro corte en la semicircunferencia en un punto. Llámalo F y otro arco fuera de la semicircunferencia.

12 Coloca el eje del compás en el punto F y corta el arco trazada fuera de la semicircunferencia. El punto de corte llámalo G.

13 Traza la semirrecta $\overrightarrow{AG}$.

14 Esta semirrecta es perpendicular al segmento de recta $\overline{AB}$.

15 Con el compás toma la medida del segmento de recta $\overline{AB}$ y sobre la semirrecta traslada esta medida. Haz el punto de corte; llámalo H.

16 Coloca el eje del compás en el punto H y traza un arco en la misma dirección del segmento $\overline{AB}$.

17 Coloca el eje del compás en el punto B y traza un arco tal que corte el arco anteriormente trazado. El punto de corte llámalo I.

18 Construye los segmentos de recta $\overline{BI}$ e $\overline{IH}$.

19 Esa figura se llama CUADRADO.

¿Qué es un cuadrado?

____

20 ¿Cuántas líneas trazaste?

21 En el cuadrado cada una de esas líneas se llama LADO.

22 ¿Cuántos lados tiene un cuadrado?

23 ¿Cuál es el lado de mayor longitud?

24 ¿Cuántos vértices tiene una cara?

25 Dibuja un cuadrado y borra dos lados consecutivos.

26 ¿Cómo se llama esa figura?

27 Dibuja un cuadrado y borra dos lados no consecutivos del cuadrado.

28 ¿Cuántos lados quedaron?

29 Prolonga ambos lados por los dos extremos hasta transformarlos en rectas.

30 ¿Estas se cortarán en algún punto?

31 Esas rectas se dice que son PARALELAS.

32 Otra forma de construir paralelas es trazando en una cartulina una recta.

33 Elije un punto sobre la recta y llámalo A.

34 Toma el compás y coloca su eje en el punto A y traza un arco tal que corte a la recta en dos puntos; llámalos B y C.

35 Elije la abertura del compás.

36 Coloca el eje del compás en el punto B y corta el arco en un punto; llámalo D.

37 Coloca el eje del compás en el punto C y con la misma abertura corta el arco en un punto; llámalo E.

38 Traza la recta $\overleftrightarrow{DE}$.

39 ¿Cómo son las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DE}$?

40 Se dice que las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ son paralelas y se simboliza $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$

41 ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?

42 ¿Cuántas caras llegan a una arista?

43 Una arista y dos caras forman un ÁNGULO DIÉDRICO.

44 Construye con una hoja de papel, un ángulo diédrico.

45 ¿Cuántas caras llegan a un vértice?

46 Un vértice y tres o más caras forman un ÁNGULO POLIÉDRICO.

47 Construye con una hoja un ángulo poliédrico.

48 En la estructura construida con block iris ¿cuál es el ángulo poliédrico que cubre mayor espacio?

49 Esta estructura por tener sus caras congruentes y sus ángulos sólidos congruentes forma parte de la familia de los cuerpos Platónicos y es llamado el HEXAEDRO.

El siguiente paso es presentar al estudiante el octaedro construido con los pitillos y realizar las siguientes preguntas:

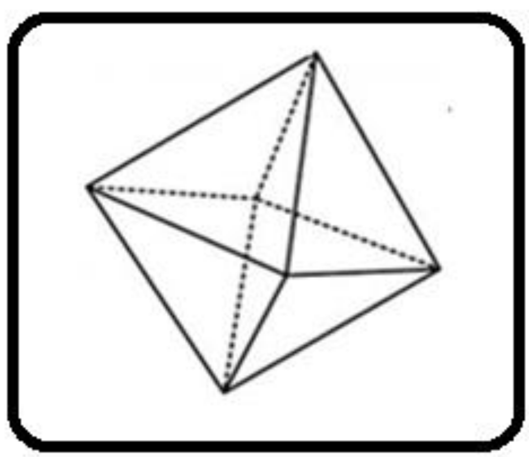


Figura 25. Octaedro. Fuente: elaboración propia.

1. ¿Cuántos vértices tiene la estructura del octaedro?
2. ¿Qué figura geométrica es el vértice?
3. ¿Cuántos pitillos se usaron para hacer la estructura del octaedro?

4. ¿Qué elemento geométrico es la arista?

5. ¿Qué es una semirrecta?

6. ¿Qué es una recta?

7. ¿Qué figura geométrica es una cara?

8. ¿Cuántos ángulos tiene una cara?

9. ¿Cuántas aristas llegan al vértice del octaedro?

10. ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?

11. ¿Cuántas caras llegan a una arista?

12. ¿Cuántas caras llegan a un vértice?

13. ¿Cuál es la cara de mayor área?

14. ¿Cuántos ángulos poliédricos tiene el esqueleto del octaedro?

15. En el cuerpo ¿cuál es el ángulo poliédrico de mayor espacio?

16. Esta estructura por tener sus caras congruentes y sus ángulos sólidos congruentes forma parte de la familia de los cuerpos Platónicos y es llamado el OCTAEDRO.

Para continuar con el proceso desarrollado, procedemos a mostrar al estudiante la siguiente construcción elaborada con pitillos y que corresponde al dodecaedro.

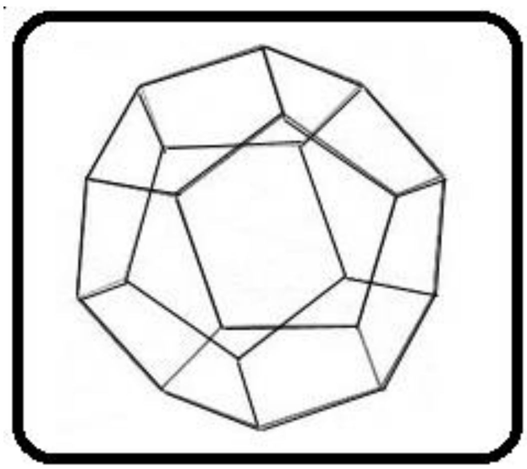


Figura 26. Dodecaedro. Fuente: elaboración propia.

1. ¿Cuántos vértices tiene la figura realizada con pitillos?

2. ¿Cuántos pitillos se usaron para hacer la estructura del dodecaedro?

3. ¿Cuántas aristas tiene esta estructura?

4. ¿Cuántas caras tiene este sólido

5. Para dibujar la cara del dodecaedro con el compás se construye una circunferencia.

6. Coloca el eje del compás en el punto C y el lápiz en el punto D y traza un arco hasta cortar el diámetro $\overline{AB}$ en el punto E.

7. Coloca el eje del compás en el punto D y el lápiz en el punto E.

8. Con esta medida haga cortes sobre la circunferencia en forma sucesiva a partir de D para crear los puntos F, G, H, I

9. Une los puntos DFGHID por medio de una línea poligonal cerrada.

10. Esta figura se llama PENTÁGONO.

¿Qué es un pentágono?
____

11. ¿Cuántos segmentos de recta trazaste?

12. ¿Cómo se llaman esas líneas en el pentágono?

13. ¿Cuántos lados tiene el pentágono?

14. ¿Cuántos vértices tiene una cara?

15. Dibuja un pentágono y borra tres lados consecutivos del pentágono.

16. ¿Cómo se llama esa figura geométrica?

17. ¿Cuántos ángulos tiene una cara?

18. ¿Cuál es el ángulo de mayor abertura?

19. ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?

20. ¿Cuántas caras llegan a una arista?

21. ¿Cuántas caras llegan a un vértice?

22. En el sólido construido con la técnica del origami ¿cuál es el ángulo poliédrico que abarca mayor espacio?

23. Esta estructura por tener sus caras congruentes y sus ángulos sólidos congruentes forma parte de la familia de los cuerpos Platónicos y es llamado el DODECADRO.

Para finalizar, realizamos el mismo proceso con el Icosaedro, para luego proceder a responder algunos interrogantes.

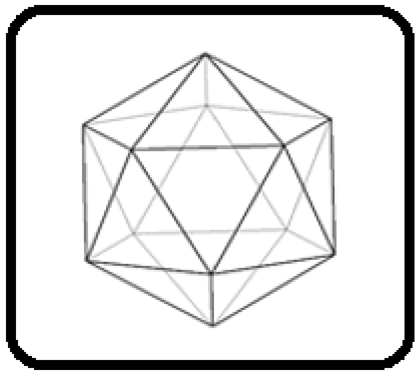


Figura 26. Icosaedro. Fuente: elaboración propia.

1. ¿Cuántos vértices tiene la estructura construida con pitillos?
2. ¿Cuántos pitillos se usaron para hacer esta estructura?
3. ¿Qué figura geométrica es una cara?
4. ¿Cuántos lados tiene un ángulo?
5. ¿Cuántos vértices tiene un ángulo?
6. ¿Cuántos ángulos tiene una cara?
7. ¿Cuántos ángulos tiene este poliedro?
8. ¿Cuántas aristas llegan al vértice del poliedro?
9. ¿Cuántos lados llegan al vértice de una cara?
10. ¿Cuántas caras llegan a una arista?
11. ¿Cuántas caras llegan a un vértice?
12. ¿Cuál es la cara de mayor área?
13. ¿Cuántos ángulos poliédricos tiene esta estructura?

14. En el poliedro elaborado con block iris ¿cuál es el ángulo poliédrico que cubre mayor espacio?

15. Esta estructura por tener sus caras congruentes y sus ángulos sólidos congruentes forma parte de la familia de los cuerpos Platónicos y es llamado ICOSAEDRO.

Para concluir con el desarrollo de esta guía, los estudiantes procederán a completar la siguiente tabla, utilizando los poliedros elaborados con pitillos de gaseosa y por medio de la técnica del doblado del papel.

Tabla 3.
Relación de Euler para los sólidos platónicos.

Nombre del Poliedro	**CARAS**	**VÉRTICES**	**C + V**	**ARISTAS**	**C + V – A**

Nota: En la que se registra la información sobre los elementos característicos de los poliedros regulares. Fuente: elaboración propia.

La relación que resulta al completar la tabla anterior es la siguiente:

$$\boldsymbol{C + V - A\ (CARAS + VERTICES - ARISTAS) = 2}$$

Es una ley descubierta por Leonera Euler, que cumplen los sólidos platónicos.

Nota: Cabe señalar lo siguiente: La guía se puede adaptar para ser aplicada en cualquier grado de la educación básica, de acuerdo a los niveles de razonamiento en los que se encuentran los estudiantes y también, los que se pretenden lograr.