

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN  
SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DE POTENCIA ELÉCTRICA SUBTERRÁNEA

FEISAL HUMBERTO BUITRAGO SANDOVAL

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURA  
INGENIERÍA MECÁNICA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA, ÁREA DE SISTEMAS ENERGÉTICOS  
MEDELLÍN  
2014

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN  
SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DE POTENCIA ELÉCTRICA SUBTERRÁNEA

FEISAL HUMBERTO BUITRAGO SANDOVAL

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA, ÁREA DE SISTEMAS ENERGÉTICOS  
MEDELLÍN  
2014

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN  
SISTEMAS DE TRANSMISIÓN DE POTENCIA ELÉCTRICA SUBTERRÁNEA

FEISAL HUMBERTO BUITRAGO SANDOVAL

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ingeniería

Director

CARLOS ANDRÉS BUSTAMANTE CHAVERRA

Doctor en Ingeniería

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS Y ARQUITECTURA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA, ÁREA DE SISTEMAS ENERGÉTICOS

MEDELLÍN

2014

## DECLARACIÓN ORIGINALIDAD

“Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad”. Art. 82 Régimen Discente de Formación Avanzada, Universidad Pontificia Bolivariana.

FIRMA AUTOR 

*A mis padres, hermanos y sobrino; la vida los premiará  
por lo que han hecho por mí*

## AGRADECIMIENTOS

Al director de esta tesis de grado, Carlos A. Bustamante por su inmenso e incansable apoyo en el desarrollo del trabajo.

Profesores, compañeros de estudio y de trabajo, por siempre animarme a seguir en esta maravillosa profesión y apasionamiento por el conocimiento.

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1 SISTEMAS DE TRANSMISION ELECTRICA SUBTERRANEOS (STES)	4
1.1 CAPACIDAD DE CORRIENTE EN STES	5
1.1.1 IEC 60287	6
1.2 FUNCIONES DE BASE RADIAL (RBF)	12
2 MÉTODO DE COLOCACIÓN CON FUNCIONES DE BASE RADIAL PARA PROBLEMAS DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN	15
2.1 MÉTODO DE COLOCACIÓN CON RBF	16
2.2 VERIFICACIÓN DEL MÉTODO	19
2.2.1 Problema de convección – difusión unidimensional	19
2.3 PROBLEMA DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN BIDIMENSIONAL	23
2.3.1 Distribuciones nodales homogéneas	23
2.3.2 Distribuciones nodales no homogéneas	25
2.3.3 Análisis para condiciones de interfase	27
3 MODELACIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO DE STES POR EL MÉTODO DE COLOCACIÓN CON RBF	29
3.1 PROBLEMA DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL DE CALOR PARA CILINDRO ENTERRADO	29
3.2 SISTEMA DE UN SOLO CABLE ENTERRADO	31
3.3 PROBLEMA DE STES TRIFÁSICO DIRECTAMENTE ENTERRADO	38
4 CRITERIOS DE DISEÑO PARA STES BAJO VARIACIONES DE FACTORES AMBIENTALES Y PARAMETROS DE INSTALACIÓN	44
4.1 METOLOGÍA DE COMPARACIÓN	45
4.1 RESULTADOS DE ANÁLISIS	46

CONCLUSIONES	51
BIBILOGRAFÍA	53



## LISTA DE GRAFICAS

Gráfica 1. Circuito térmico del cable (IEC 60287) .....	6
Gráfica 2. Representación de unión cruzada en chaquetas (Cross bonding).....	10
Gráfica 3. Error para la variación del parámetro de forma para el análisis del problema de convección – difusión .....	21
Gráfica 4. Error en términos del espaciamiento entre nodos para el análisis del problema de convección – difusión .....	22
Gráfica 5. Error como una función del parámetro de forma en el caso bidimensional .....	24
Gráfica 6. Error en términos del espaciamiento entre nodos en el problema 2-d..	25
Gráfica 7. Error en términos del número de Peclet en el problema 2-d con malla no homogénea .....	26
Gráfica 8. Error como una función del parámetro de forma en el caso bidimensional para condiciones de interfase.....	28
Gráfica 9. Cilindro infinito enterrado .....	30
Gráfica 10. Sistema de un solo cable directamente enterrado en suelo nativo.....	31
Gráfica 11. Malla estructurada refinada para los nodos cercanos a la superficie del cable.....	32
Gráfica 12. Error en términos del parámetro de forma en el problema de un solo cable con malla estructurada.....	33
Gráfica 13. Mallas no estructuras aplicadas sobre problema, a. (2024 nodos), b. (5449 nodos), c (12255 nodos) .....	34
Gráfica 14. Error en términos del parámetro de forma aplicando la solución analítica a las fronteras .....	35
Gráfica 15. Error en términos del parámetro de forma aplicando la solución analítica a las fronteras (Ns=8).....	35

Gráfica 16. Error en términos del parámetro de forma aplicando condiciones de frontera tipo Neumann ( $N_s=8$ ).....	37
Gráfica 17. Distribución de temperatura aplicando condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann.....	38
Gráfica 18. Sistema trifásico de transmisión de energía eléctrico directamente enterrado (Direct Buried).....	39
Gráfica 19. Distribución en STES directamente enterrado con condiciones de frontera tipo Dirichlet en la superficie del cable.....	40
Gráfica 20. Distribución de temperatura en STES a 66 kV (700 A).....	43
Gráfica 21. Distribuciones de temperatura para diferentes profundidades de instalación y una misma conductividad térmica del suelo nativo.....	46
Gráfica 22. Desviación de la temperatura de operación ante variaciones de la profundidad de instalación y la conductividad térmica del suelo nativo.....	47
Gráfica 23. Variación de la capacidad de corriente en función de la altura de instalación.....	48

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Valor de los coeficientes en el caso unidimensional.....	20
Tabla 2 . Pérdidas en STES directamente enterrado a 66 kV (700 A) .....	41
Tabla 3. Variables eléctricas para STES directamente enterrados a 66 kV (700 A) .....	42
Tabla 4. Resistividad térmica T4 y capacidad de corriente STES.....	43

## RESUMEN

En el diseño de sistemas de transmisión eléctrica subterránea (STES) es primordial encontrar la capacidad de corriente máxima, a la cual la temperatura promedio del cable no supere los límites permisibles para los materiales del sistema y las pérdidas por efectos térmicos no afecten la capacidad final de transmisión de potencia. Los métodos presentados por los estándares internacionales (IEC y IEEE) son los más empleados para este propósito. Estos están basados en el cálculo de la resistividad térmica entre el sistema de cables y el ambiente externo mediante ecuaciones aproximadas obtenidas en 1957 por Neher y McGrath, bajo asunciones de suelo homogéneo y conductividad térmica uniforme. Recientemente se ha aumentado el interés por el uso de métodos numéricos para la solución de la ecuación de calor con el objetivo de ofrecer métodos de diseño más precisos, versátiles y realistas que permitan analizar STES en estado estable.

De acuerdo con lo anterior y empleando el método de colocación local con funciones de base radial, se pretende en el presente trabajo desarrollar un código para el modelamiento térmico bidimensional de los STES. A partir de simulaciones para diseños específicos de STES y los resultados hallados con los parámetros de diseño mediante los estándares actuales (IEC 60287 e IEEE Std 685), se pretende determinar limitaciones y funcionalidad de dichos estándares.

**Palabras claves:** STES, capacidad de corriente, circuito térmico, conductividad térmica, funciones de base radial, pérdidas Joule, pérdidas dieléctricas.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de transmisión eléctricos subterráneos (STES) se componen principalmente por capas de materiales metálicos y dieléctricos. La combinación de todos estos elementos diseñados para su funcionamiento y protección (eléctrica y mecánica), hace que los parámetros térmicos del sistema sean altamente dependientes de los elementos constitutivos del cable y del medio donde está instalado. Esto se debe básicamente a la capacidad del sistema de evacuar el calor generado por la conducción de corriente (perdidas Joule y dieléctricas) y los efectos de no estar instalados en suelos homogéneos que permitan describir el comportamiento de la distribución de temperatura en el sistema.

Se hace necesario, según la bibliografía actual (M.S Al Saud – 2012 y LietoVollaro 2011) y la experiencia de las empresas diseñadoras, verificar el comportamiento térmico y la capacidad de corriente de estos sistemas ante variaciones geométricas y de instalación del sistema. Lo anterior obedece a que los costos asociados a los STES son bastante altos comparados con las líneas áreas y se ha encontrado en diseños actuales, un sobredimensionamiento debido al uso de ecuaciones empíricas y factores de diseño bastante conservadores (UPME,-2010)

El análisis térmico de sistemas de transmisión subterránea es necesario para determinar la capacidad de corriente. Esta depende principalmente de la

temperatura máxima a la que el sistema puede operar (90 °C – IEC - 2002), la cual se obtiene realizando una evaluación acertada de la disipación de calor a través del cable y del suelo que lo rodea. El método tradicional adoptado por la Comisión Eléctrica Internacional (IEC) y el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE) (IEC 60287 e IEEE 835) para el cálculo de la capacidad de corriente, se basan en ecuaciones empíricas y por lo tanto su utilización debe hacerse siguiendo los lineamientos establecidos por los autores.

En la práctica se presentan casos en los cuales no es apropiado aplicar los métodos anteriores (suelos no homogéneos, cruces de vías, simultaneidad con otros sistema, entre otros) y es necesario recurrir a análisis experimentales o la solución de las ecuaciones de transferencia de calor. Recientemente, el interés por el uso de métodos numéricos ha aumentado. Esta metodología ofrece una mayor precisión en los resultados calculados, puesto que se modela detalladamente el sistema y el ambiente circundante en cuanto a geometría y valores de la resistividad térmica.

En el presente trabajo se presenta la solución de la ecuación de calor en el sistema de cables subterráneos y sus alrededores a partir de un método de colocación local con funciones de base radial, lo cual representa un aporte importante puesto que no se reporta en la literatura análisis térmicos de estos sistemas con métodos sin malla.

A partir de lo anterior, se realizan simulaciones para diseños específicos de STES, se compararán los resultados hallados con los parámetros de diseño encontrados mediante los estándares actuales (IEC 60287), dejando claro sus limitaciones y su funcionalidad. Como aplicación del código, se realizara el dimensionamiento de un STES para estado estable a condiciones ambientales de un lugar específico del país.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentan los conceptos generales (estado del arte) de los STES y del modelo matemático que se va a desarrollar. En el segundo, se realiza el desarrollo matemático para la validación del modelo matemático a través de un código y las diferentes variaciones según diferentes condiciones para preparar el código para el modelamiento de los STES. En el tercero, se adecua el código y el modelo matemático para representar el STES de diseño planteado, se realizan comprobación con un dimensionamiento realizado por la norma IEC y se comparan resultados. Por último, en el cuarto capítulo se presentan diferentes variaciones de las condiciones principales de diseño e instalación de los STES para determinar los limitantes y principales factores de diseño en el cálculo y posterior diseño de los STES, se presentan los resultados obtenidos bajo diferentes condiciones reales de instalación.

## **1 SISTEMAS DE TRANSMISION ELECTRICA SUBTERRANEOS (STES)**

El crecimiento en la demanda de energía eléctrica ha llevado a algunas centrales generadoras a ampliar su rango de potencia suministrada, llevando al aumento de capacidad de algunos sistemas de transmisión y de los elementos relacionados con la distribución de energía eléctrica.

Para niveles de tensión muy elevados, las pérdidas de energía se incrementan, generando deficiencias en el suministro de electricidad y disminución de la vida útil de los elementos constitutivos del sistema de transmisión, que son finalmente los elementos más importantes en la distribución de la energía a todos los centros de consumo.

Las líneas aéreas han sido los principales medios para la transmisión de energía eléctrica. La razón principal es el menor costo de implementación en comparación con la transmisión subterránea. Estudios recientes (El-Khady – 2012 y ABB – 2011), sugieren que el costo de los sistemas de transmisión subterránea es 5 a 15 veces mayor que los sistemas de transmisión aérea convencionales. En el pasado, el costo era un factor determinante en contra de su uso; sin embargo, los siguientes factores están modificando este paradigma: las limitaciones medio ambientales están aumentando los costos y el tiempo de implementación de la transmisión aérea (Ravermark, 2005), se han desarrollado métodos de producción de hasta un 30% menor y se ha aumentado la confiabilidad de los sistemas de transmisión subterránea (Europacable, 2010). Es por esto que el desarrollo de sistemas transmisión de potencia tiende a la opción de sistemas subterráneos como una solución económica y técnicamente efectiva cuando obstrucciones físicas, medio ambientales y de opinión pública se antepone en el desarrollo de estos.



El uso de líneas de transmisión subterránea mejora el rendimiento de las mismas, disminuyendo las pérdidas ocasionadas por radiación y aumentando la potencia transmitida y la vida útil.

## **1.1 CAPACIDAD DE CORRIENTE EN STES**

Diversos análisis teóricos acerca de la capacidad de corriente en un sistema de cables se han realizado desde que estos han sido empleados en el transporte de energía. Los métodos presentados por Kenelly (1893), Neher (1957) y Anders (1987) representan los primeros aportes en este tema y aún en la actualidad son utilizados como base de los estándares modernos. Las primeras tablas de rateo de cables fueron publicadas en Inglaterra en la década de 1920; por la Electrical Research Association (ERA) (Kenelly, 1893).

El mayor adelanto se presentó cuando Neher y McGrath (1957) compilaron satisfactoriamente las principales investigaciones sobre la capacidad realizadas hasta la fecha. Con esto, se obtuvo un método basado en el balance de energía, representado como una analogía entre el flujo de corriente eléctrica y el flujo de calor. Sin embargo, este método presentaba grandes debilidades, puesto que era necesario conocer las resistencias térmicas de todo el circuito térmico equivalente del sistema de cables antes de hacer los cálculos de capacidad de corriente. Los valores de la resistencia térmica depende de la temperatura y por tanto, la temperatura en puntos locales en el circuito térmico deben ser conocidos para poder resolver el problema. El método Neher & McGrath toma valores asumidos de temperatura con el fin de resolver el problema no lineal (Anders, 1997).

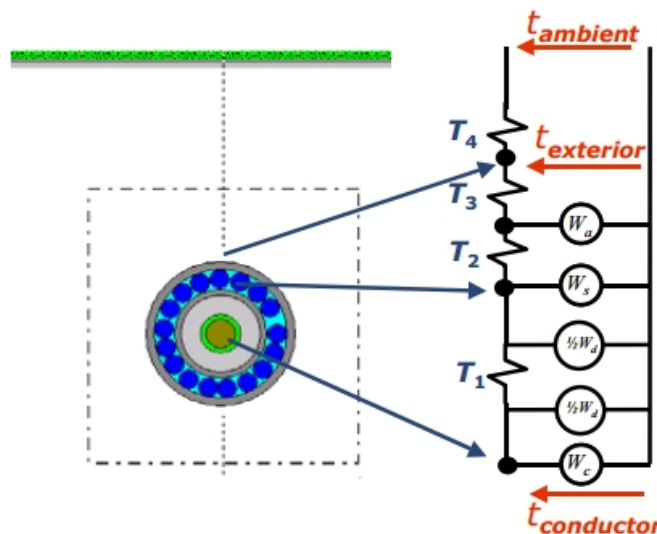
Posteriormente, se realizaron investigaciones por los entes reguladores más importantes en el mundo: IEEE (Std 685), IEC (Std 60287), AIEE, IPCEA, ICC. Todos ellos basados en el método anterior incluyendo aportes y simplificaciones

del mismo. Siendo los dos primeros y en especial el segundo (IEC), los más utilizados a nivel mundial para los diseños realizados.

### 1.1.1 IEC 60287

El movimiento de cargas en un cable produce calor en el proceso de degeneración de la energía conocido como el efecto Joule. Dependiendo de las condiciones de instalación, el calor podrá ser disipado hacia el exterior a una tasa dada. Las pérdidas y por tanto, el calor generado, dependen directamente de la corriente que fluye a través de los cables. En un nivel de corriente, la temperatura del cable igualará la máxima temperatura admisible para el aislamiento y el conductor del cable ( $90^{\circ}\text{C}$ ). A esta corriente, se le conoce como la capacidad de corriente para la instalación de STES en análisis.

La analogía mencionada en la sección anterior entre circuito térmico y eléctrico presentado por este estándar se puede apreciar en la gráfica 1, comenzando en la capa más interna (conductor) hasta la más externa (medio exterior).



Gráfica 1. Circuito térmico del cable (IEC 60287)

A partir de lo anterior, la IEC calcula la capacidad de corriente para cables enterrados (STES) o para cables en el aire a partir de la siguiente expresión:

$$I = \left[ \frac{\Delta\theta - W_d [0.5 T_1 + n (T_2 + T_3 + T_4)]}{R T_1 + n R (1 + \lambda_1) T_2 + n R (1 + \lambda_1 + \lambda_2) (T_3 + T_4)} \right]^{0.5} \quad (1)$$

De la anterior expresión, es necesario calcular las resistividades térmicas ( $T$ ), los factores de pérdida ( $\lambda$ ) y la resistencia en corriente alterna del conductor del cable ( $R$ ). Los factores  $\lambda$ , tienen en cuenta las pérdidas Eddy ( $\lambda_1$ , corrientes inducidas entre los conductores por el cambio del campo magnético en el conductor) y las corrientes circulantes ( $\lambda_2$ , generadas por el confinamiento del campo eléctrico en los cables). Mientras la resistencia  $R$ , tiene en cuenta la dependencia de la temperatura de esta resistencia. Las resistividades térmicas  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ , están relacionadas con el material del aislamiento y las dimensiones físicas del cable. Las pérdidas dieléctricas  $W_d$ , están relacionadas con las que se dan en el aislamiento del cable dada su construcción en materiales dieléctricos (polietileno, PVC o EPR). Por el contrario,  $T_4$  (resistividad térmica del medio exterior), no depende de las propiedades constructivas del cable, si no, del coeficiente resistivo del suelo.

El proceso que se realiza se basa en calcular inicialmente la resistencia eléctrica en corriente alterna (AC) del conductor de cobre, lo cual se realiza en dos etapas. Primero, se calcula el valor de la resistencia en corriente directa (DC) en ohm/m a partir de la siguiente expresión:

$$R' = \frac{1.02 \cdot 10^6 \rho_{20}}{S} [1 + \alpha_{20}(\theta - 20)] \quad (2)$$

En la segunda etapa, el valor calculado por la anterior expresión es modificado teniendo en cuenta los efectos de proximidad y piel:

$$R = R'(1 + y_s + y_p) \quad (3)$$

De donde se puede calcular el efecto piel ( $y_s$ ) y el de proximidad ( $y_p$ ) por medio de las siguientes expresiones:

$$y_s = \frac{x_s^4}{192 + 0.8x_s^4} \quad (4) \quad y_p = F_p \left( \frac{d_c}{s} \right)^2 \left[ 0.312 \left( \frac{d_c}{s} \right)^2 + \frac{1.18}{F_p + 0.27} \right] \quad (5)$$

El segundo paso es calcular las pérdidas dieléctricas que se dan por la influencia de la circulación de una corriente alterna a través de un dieléctrico, éste actúa como grandes capacitores y corrientes circulan a través del material. Esto produce calor y por tanto pérdidas. Estas pérdidas dependen de la constante dieléctrica del material del aislamiento (normalmente XLPE o PVC), las dimensiones del cable y el voltaje de operación del sistema.

$$W_d = 2\pi f \cdot C \cdot U_o^2 \cdot \tan \delta \quad (6)$$

Se debe calcular la capacitancia eléctrica:

$$C = \frac{\epsilon}{18 \ln \left( \frac{D_i}{d_c} \right)} \cdot 10^{-9} \quad (7)$$

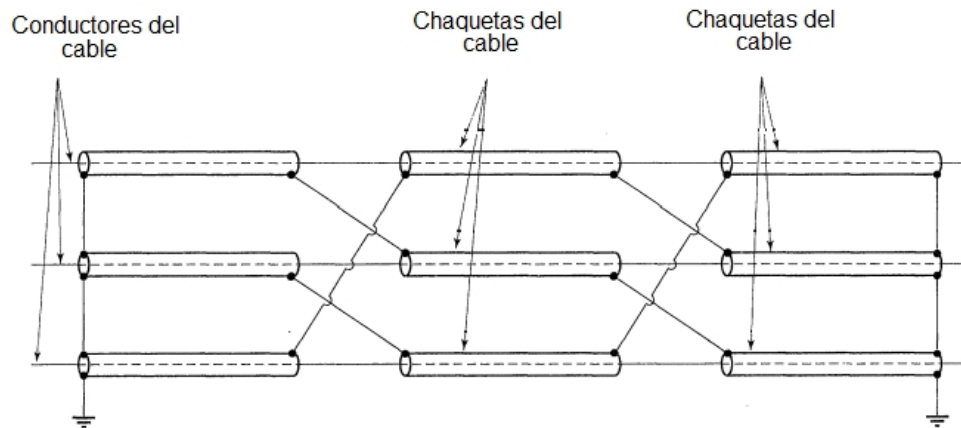
El tercer paso es calcular el factor de pérdida en las chaquetas metálicas del cable, éstas son dependientes de la corriente y se dividen en dos: pérdidas debidas a corrientes circulantes que fluyen en las chaquetas y las corrientes debidas a corrientes Eddy, las cuales circulan radialmente (efecto piel) y azimutal (efecto de proximidad). Las pérdidas por corrientes Eddy en las pantallas dependen directamente de cómo están aterrizadas las pantallas.

Después de la resistencia térmica externa del cable (analizada en capítulo 3), el cómo están aterrizadas las pantallas es el parámetro más importante en los cálculos de capacidad de corriente de un sistema. Por razones de seguridad, las pantallas de los cables deben ser aterrizadas y por tanto, unidas en al menos un punto del tendido. Existen tres opciones básicas para unir las pantallas en los STES y líneas aéreas en general: en un solo punto, unión solida (ambos extremos) o unión cruzada (cross bonding) (IEEE, 1988).

En la unión en un solo punto, el efecto por el calentamiento producido por las corrientes circulantes es obviado, pero se inducen voltajes a lo largo del recorrido del cable. Estos voltajes son proporcionales a la corriente del conductor y la longitud del cable y aumenta, a medida que el espaciamiento del cable aumenta.

Una manera de eliminar los voltajes inducidos es realizando una unión de la chaqueta en ambos extremos del cable (unión solida). La desventaja de este proceso es que las corrientes circulantes que fluyen en la chaqueta reducen la capacidad de corriente del conductor.

La unión cruzada o cross bonding, es el método para eliminar las corrientes circulantes y voltajes altos den las chaquetas (producidas por los métodos anteriores). De igual forma, permite incrementar el espaciamiento de los cables y tener grandes longitudes de cable. Esto último, aumenta la independenciamiento térmica de cada cable y por tanto, aumenta la capacidad de corriente del sistema. El cross bonding divide el tendido de cable en tres secciones donde se conectan las chaquetas de tal manera que los voltajes inducidos se cancelan. Una desventaja de esta instalación, es su alto costo y por tanto, es aplicado básicamente en sistemas de alta tensión (mayores a 110 kV). La siguiente figura presenta las conexiones de un sistema en cross bonding:



**Gráfica 2. Representación de unión cruzada en chaquetas (Cross bonding)**

Las pérdidas en las chaquetas ( $\lambda_1$ ) consiste en las pérdidas causadas por las corrientes circulantes ( $\lambda'_1$ ) y las corrientes Eddy ( $\lambda''_1$ ) descritas anteriormente. Por tanto:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + \lambda''_1 \quad (8)$$

Los anteriores factores dependen de las dimensiones del cable y de la geometría de la instalación y se puede encontrar en la sección 2.3 del estándar IEC 60287-1, en donde se analiza para cada caso, como se calculan estas pérdidas.

Después de calcular lo descrito anteriormente, se procede a calcular las resistencias térmicas. Las resistencias y capacitancias internas son características constructivas de un cable específico y están basadas en el circuito térmico descrito en la gráfica 1. Se asume, por consideraciones prácticas, que estas cantidades son constantes e independientes de la temperatura de cada componente. Las unidades de la resistencia térmica son los K/W para una longitud específica. Se considera una longitud de 1 m, por tanto, la resistencia térmica de un determinado componente del cable esta expresada en K/W por metro: K.m/W y debe ser diferenciado de la resistividad térmica, que también está dada como

K.m/W. Las resistencias térmicas del aislamiento (al ser el componente más grande del cable) y la del suelo externo, tienen la mayor influencia sobre la capacidad de corriente del sistema. Para STES, la resistencia exterior representa más del 70% del aumento en la temperatura del conductor.

La resistencia térmica del aislamiento y la chaqueta ( $T_1$ ) está determinada por los elementos constitutivos del cable y se puede calcular por medio de la siguiente expresión:

$$T_1 = \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{2t_1}{d_c}\right) \quad (9)$$

La resistencia de la cobertura exterior ( $T_3$ ) está dada por:

$$T_3 = \frac{\rho}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{2t_3}{D_a'}\right) \quad (10)$$

La capacidad de corriente del cable depende altamente en las características térmicas del suelo, el diámetro del cable, la profundidad de la instalación, el modo de instalación (directamente enterrados, en bancos de ductos, etc...) y el campo térmico generado por los cables vecinos. El método descrito en la norma IEC 60287, consiste en calcular dos valores de la resistencia térmica exterior ( $T_4$ ); una, correspondiente a las pérdidas dieléctricas y la otra, correspondiente a las pérdidas Joule. Dependiendo del modo de instalación del sistema, el procedimiento varía y se presenta en la sección 2-1 del estándar IEC 60287, donde se analiza para cada caso, la forma de calcularla.

Teniendo calculado cada una de los valores según se describió anteriormente, se puede calcular por medio del estándar, la capacidad de corriente del sistema y a partir de ahí, realizar consideraciones de diseño para mejorar la instalación.

En la práctica se presentan casos en los cuales no es apropiado aplicar el método mencionado (suelos no homogéneos, cruces de vías, simultaneidad con otros sistemas, entre otros) y es necesario recurrir a análisis experimentales o la solución de las ecuaciones de transferencia de calor. La primera, busca mejorar los métodos tradicionales y la segunda, se basa en métodos numéricos para la solución de problemas de transferencia de calor y electromagnetismo, cuya solución analítica no se ha encontrado (Anders, 1999).

En la mayoría de las investigaciones el objetivo principal es el de analizar los efectos de las restricciones (o condiciones) físicas del sistema: forma y tamaño del relleno, localización del cable, propiedades físicas del suelo nativo y el relleno y el posicionamiento de los cables (Hiranandan, 1991). Sin embargo, estos estudios trabajan con condiciones restringidas a un sistema específico o se caracterizan por aproximaciones paramétricas que limitan considerablemente el uso de estos resultados para propósitos de diseño (LietoVollaro, 2011).

En este trabajo se pretende utilizar un método de colocación local con funciones de base radial para la solución de la ecuación de calor en sistemas de cables subterráneos y sus alrededores, dada la alta versatilidad del método en cuanto a modelamiento geométrico y condiciones de frontera por tratarse de una aproximación sin malla.

## **1.2 FUNCIONES DE BASE RADIAL (RBF)**

Las funciones de base radial (RBFs) son funciones cuyo valor depende solamente de la distancia euclidiana al origen o a otro punto conocido como centro y por lo tanto su valor sólo depende de la distribución de los puntos en un dominio. La combinación lineal de RBFs, han sido empleadas ampliamente en la aproximación e interpolación espacial de datos dispersos mediante métodos de colocación (Franke, 1982).



Esta estrategia de interpolación se convirtió en el fundamento de los métodos de colocación sin malla para resolver ecuaciones diferenciales parciales a través del desarrollo del método de Kansa (Kansa, 1990). El autor obtuvo soluciones precisas de problemas de Poisson y convección-difusión sin malla ni tratamiento espacial para el término convectivo, puesto que el esquema resultante es de orden superior y existe una relación intrínseca entre las ecuaciones gobernantes y las funciones de interpolación.

A pesar que el método de Kansa fue usado por muchos autores para resolver las ecuaciones de Laplace, Poisson, Helmholtz y Parabólicas mostrando una mejor precisión comparada con los métodos tradicionales (Zerroukat – 1998, Cheng – 2003, Chantasiriwan - 2004), Kansa y Hon (2000) concluyeron que el condicionamiento de la matriz de interpolación empeoraba a medida que el número de nodos se incrementaba y en caso de utilizar una función multicuádrica, la matriz de interpolación se hacía singular para algunos valores del parámetro de forma.

Con el objetivo de mejorar el método de Kansa se implementaron nuevos métodos de colocación local, en los cuales la función de interpolación, en un nodo específico, sólo relaciona los nodos que se encuentran en una vecindad con centro en el nodo.

Diversos autores han obtenido soluciones para problemas de transferencia de calor empleando métodos de colocación local con errores menores y ordenes de convergencia mayor que los métodos tradicionales (Sarler y Vertnik – 2006, Divo y Kassab – 2007 y Stevens y Power – 2009). Por lo tanto el uso de un método de colocación local con funciones de base radial es idóneo para la modelación y simulación de la transferencia de calor en los STES que se plantea en este trabajo.

En los siguientes capítulos se presenta el análisis de la aplicación del método de colocación local por RBF y el modelo matemático para diversos problemas de transferencia de calor y su aplicabilidad para el modelamiento de STES bajo diferentes condiciones de instalación y valores de parámetros relevantes.

## 2 MÉTODO DE COLOCACIÓN CON FUNCIONES DE BASE RADIAL PARA PROBLEMAS DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN

Actualmente, las RBF son ampliamente utilizadas en la interpolación de datos dispersos por colocación y constituyen la estrategia base de algunos de los procedimientos numéricos que se enmarcan en los métodos sin malla para la solución de PDEs. Es Kansa (Kansa, 1990) quien fundamenta el método sin malla mediante RBF, al desarrollar el esquema asimétrico o Método de Kansa, haciendo énfasis en la relación intrínseca entre el esquema de interpolación y las ecuaciones diferenciales a solucionar (C.Bustamante, 2009).

Hardy (Hardy, 1971) empleó por primera vez en la interpolación de un conjunto de datos dispersos una RBF llamada función de base radial multicuádrada (MQ-RBF) para. Este tipo de interpolantes, al igual que otras RBFs, pueden ser aplicadas para aproximar la solución de una PDE. En estos métodos, la función de aproximación es construida mediante la superposición de funciones radiales estándar centradas en puntos dispersos en el dominio de influencia.

Las RBF se caracterizan por depender únicamente de la distancia euclidiana entre el argumento y el origen, lo que establece una simetría radial de la función, es decir, su valor no cambia al realizar rotaciones del sistema de coordenadas.

La función multicuádrada (MQ) se expresa como:

$$\Psi(r) = (r^2 + c^2)^{m/2} \quad (11)$$

Donde  $r = \|x - \xi_j\|$ , es la distancia euclidiana entre un punto del dominio  $x$  y un punto de prueba  $\xi_j$  y  $m$  es el orden de la función. El parámetro de forma  $c$  permite variar la pendiente de la función cerca del punto de colocación. Para valores pequeños del parámetro la función tomará forma de cono que se irá aplanando con el incremento del mismo.

La validación método de colocación con RBFs se hace a partir de la solución analítica de una PDE asociada al fenómeno por describir, en este caso del tipo convección-difusión. Mediante la comparación de las soluciones analíticas y numéricas (obtenidas con el código computacional desarrollado) se realiza un análisis de convergencia del error. Posteriormente, se realizan modificaciones a las variables del problema: condiciones de frontera, variación de parámetros de los métodos y de las condiciones físicas del problema y se evalúa el desempeño del código.

## 2.1 MÉTODO DE COLOCACIÓN CON RBF

La ecuación de convección-difusión que describe el comportamiento de una variable genérica  $\Phi$  en un medio continuo, está dada por:

$$D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial U_i \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

Donde  $D$ , es el coeficiente difusivo,  $U_i$  el componente de la velocidad convectiva en la dirección  $i$  y  $\Phi$  el potencial.

A partir del método de colocación con RBF, se busca solucionar numéricamente la ecuación (2). A continuación se explica brevemente el uso de RBF en la interpolación por colocación y se presenta su aplicación a la solución de PDE. La función de interpolación se construye a partir de la combinación lineal de las RBF evaluadas en  $n$  puntos de prueba según la siguiente expresión:

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|x - \xi_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(x) \quad (13)$$

A partir de la información de la función a interpolar en los puntos de colocación, se puede construir el sistema de ecuaciones lineales  $A\alpha = B$ , evaluando la función de interpolación en los puntos de colocación, de la siguiente forma:

$$S(x_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|x_i - \xi_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(x_i) \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j P_{m-1}^k(x_j) = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (15)$$

$$A = \begin{pmatrix} \Psi & P_{m-1} \\ P_{m-1}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Problemas de valores en la frontera lineales se definen por las expresiones (8) y (9), donde  $L$  y  $B$  son operadores diferenciales lineales que aplican sobre el dominio  $\Omega$  y en la frontera  $\delta\Omega$ , respectivamente; y  $\Phi$ , la variable dependiente. Para solucionar este problema se pueden utilizar dos métodos a partir de RBF, el método de Kansa (asimétrico) y el método simétrico.

$$L[\phi(\vec{x})] = f(\vec{x}) \quad (18)$$

$$B[\phi(\vec{x})] = g(\vec{x}) \quad (19)$$

Para ambos procedimientos, se requiere un conjunto de puntos  $N$  puntos ubicados en el dominio  $\Omega$  y su frontera  $\delta\Omega$ , a los que se le denomina como puntos de prueba  $\xi_j$  con  $j=1, \dots, N$ . Igualmente, para el proceso de colocación, se necesita un conjunto de puntos  $\vec{x}_i$ , que normalmente coincide con el conjunto de puntos de prueba. Del conjunto de puntos dispersos  $N$ , se ubican  $n$  en la frontera y  $N-n$  en el dominio; de

esta manera, se conoce el valor de  $B[\Phi]$  en  $n$  ubicaciones y  $L[\Phi]$  en  $N-n$  puntos como puntos necesarios para la solución del problema.

El valor de la variable dependiente se aproxima mediante la combinación lineal de RBF evaluadas en los puntos de prueba  $\xi_j$ :

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_j\|) + \sum_{j=1}^m \alpha_{j+N} P_{m-1}^j(\vec{x}) \quad (20)$$

Se requiere encontrar los valores de los coeficientes  $\alpha_j$  a partir de la información del comportamiento de las expresiones (8) y (9). Al aplicar los operadores lineales  $L$  y  $B$  a la expresión (10) y evaluando las funciones resultantes en cada uno de los  $n$  puntos de colocación, se obtiene un sistema de ecuaciones en forma matricial  $A\alpha=B$ , agregando la restricción en (5). La matriz  $A$  es no simétrica, según (11) y el subíndice  $x$  hace referencia a la aplicación del operador con respecto a la variable  $\vec{x}$ :

$$A = \begin{pmatrix} B_x[\Psi] & B_x[P_{m-1}] \\ L_x[\Psi] & L_x[P_{m-1}] \\ P_{m-1}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$B = \begin{pmatrix} g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

## 2.2 VERIFICACIÓN DEL MÉTODO

A continuación se presenta el análisis realizado a partir de la comprobación de algunas soluciones analíticas para problemas de convección y difusión que fueron solucionados por el código desarrollado, con el fin de verificar su funcionamiento ante variaciones en el comportamiento de los sistemas analizados, de los parámetros del código y del método de las RBF. Lo anterior con el fin de preparar el código programado para las modelaciones que se pretenden hacer en los STES, a partir de pruebas en variación en los parámetros que a continuación se describen.

### 2.2.1 Problema de convección – difusión unidimensional

Se considera un canal de dimensiones [1x0.2x0.2] para analizar el transporte de la propiedad  $\Phi$  en estado estacionario, para la cual la ecuación gobernante está dada por la expresión (2). Las condiciones de frontera Dirichlet impuestas, están dadas a continuación:

$$\begin{aligned}\phi &= 1, & x &= 0, & 0 < y < 0.2, & 0 < z < 0.2 \\ \phi &= 2, & x &= 1, & 0 < y < 0.2, & 0 < z < 0.2\end{aligned}$$

Y  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  (Neuman), en las restantes fronteras del dominio para garantizar la solución numérica unidimensional. Para este caso,  $U_1$  es constante y  $U_2=U_3=0$  y el problema tiene la siguiente solución analítica:

$$\phi(x) = 2 - \frac{1 - \exp(U_1(x-1))}{1 - \exp(-U_1)} \quad (23)$$

En el problema de convección y difusión, el parámetro que describe la influencia relativa de los términos convectivo y difusivo, se conoce como el número de Péclet

( $Pe=U_1L/D$ ). Donde,  $U_1$  es la velocidad,  $L$  la longitud del canal y  $D$ , el coeficiente difusivo (P. Orsini, 2008).

Como caso práctico, se definieron los siguientes valores para los coeficientes

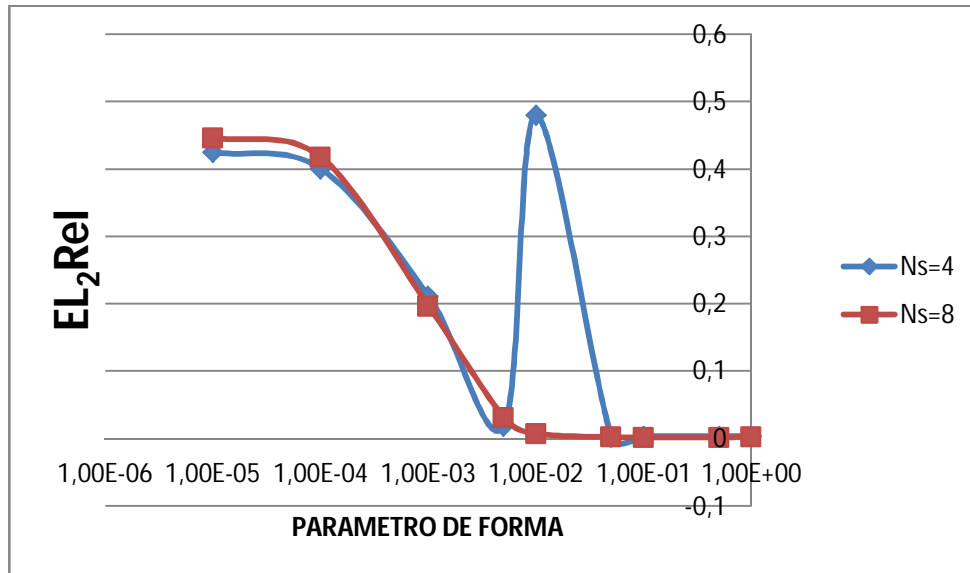
<b>Coeficiente</b>	<b>Valor</b>
U1	50
D	1
Pe	50

Tabla 1 Valor de los coeficientes en el caso unidimensional

Se aplica el código creado para las condiciones anteriormente descritas para obtener la solución numérica por medio del método de RBF local. Se realizaron análisis de convergencia del método y del código, para verificar su funcionalidad ante variaciones de las condiciones iniciales del problema y de los parámetros del método numérico: parámetro de forma, densidad de nodos y cantidad de nodos que forman cada stencil. Un stencil es el subdominio donde la función de interpolación local es válida.

En primer lugar, se varía el parámetro de forma para las RBF y se determina la norma L2 relativa del error para cada valor. El dominio es representado por una distribución nodal homogénea. Empleando stencils de cuatro y ocho nodos (ver Gráfica 3), se comparan los errores obtenidos con respecto a la solución analítica empleando RBFs multicuádricas, con  $m=1$ .





**Gráfica 3. Error para la variación del parámetro de forma para el análisis del problema de convección – difusión**

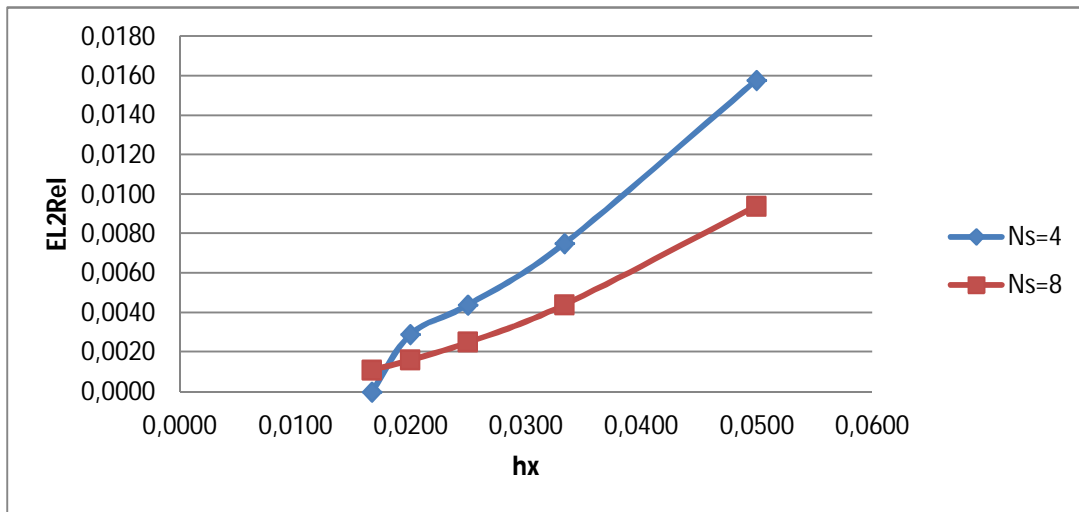
El error global está calculado por la siguiente expresión:

$$EL_2Rel = \sqrt{\frac{\sum(Sln\ analitica - Sln\ Numérica)^2}{\sum(Sln\ analitica)^2}} \quad (24)$$

La Gráfica 3, muestra el comportamiento del error en términos del parámetro de forma, tanto para stencils de cuatro, como de ocho nodos. Se observa como el error disminuye a medida que el valor del factor de forma aumenta, mostrando un comportamiento común en los métodos de colocación con RBFs (Kansa, 1990) (Jumarhon B., 2000). Debe tenerse en cuenta para posteriores simulaciones, con el fin de emplear valores adecuados del parámetro de forma, lo suficientemente altos para que la solución sea precisa sin causar el mal condicionamiento de la matriz de solución

A partir de los resultados obtenidos, se seleccionó un factor de forma de 0.5, con el cual, según la Gráfica 4, se obtuvo un error bajo (4,40E-3 para un stencil de

cuatro nodos y 2,50E-3 para uno de ocho) y se realizó el análisis de convergencia, en términos del espaciamiento entre nodos con el objetivo de obtener información sobre el orden de convergencia del método.



**Gráfica 4. Error en términos del espaciamiento entre nodos para el análisis del problema de convección – difusión**

El valor de  $h_x$ , se puede calcular con la siguiente expresión, según la cantidad de nodos en la dirección  $x$ :

$$h_x = \frac{1}{(N_n - 1)} \quad (25)$$

La utilización de un parámetro de forma fijo para las RBF, es la razón para la variación presentada en el grafica para stencils de cuatro nodos, en las distribuciones nodales más densas. Se puede observar en la gráfica 2, que el orden de convergencia es similar para los dos stencils empleados pero, como se esperaba, el error es menor cuando se incluyen más nodos. En posteriores capítulos, cuando se analicen casos particulares, se buscará la mejor opción para la densidad de la distribución nodal y el patrón de esparcimiento de los puntos. Lo anterior teniendo en cuenta que para casos prácticos, se utilizarán distribuciones

nodales obtenidas a partir de mallas no estructuradas que permitan el mejor modelamiento del sistema en análisis.

Con los anteriores resultados, se garantiza la solución del problema de convección- difusión en una dimensión a partir de las condiciones de frontera descritas (Dirichlet y Neuman), RBF multicuádricas y diferentes parámetros de forma.

## **2.3 PROBLEMA DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN BIDIMENSIONAL**

### **2.3.1 Distribuciones nodales homogéneas**

A continuación se analiza el comportamiento de una variable genérica  $\Phi$  en una placa cuadrada, con coeficiente difusivo y velocidad dados por las siguientes expresiones:

$$u(x, y) = x \cos(0.5 \pi y) \quad (26)$$

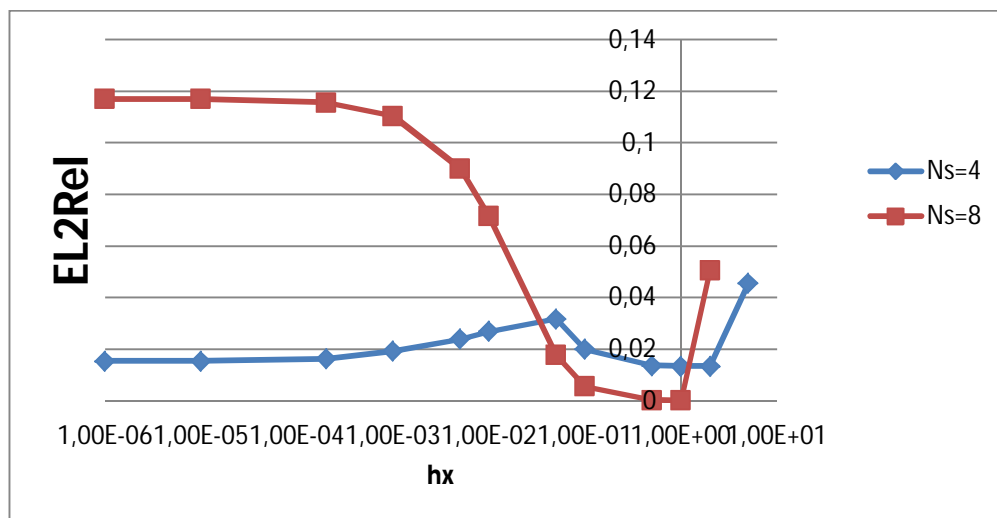
Para el caso donde, según ecuación (2), el coeficiente difusivo es 1 ( $k=1$ ) y la velocidad está dada por:

$$\vec{v} = (1, -1)^T$$

A partir de la solución exacta anterior, se puede determinar la función fuente y la información de las fronteras, según el tipo de frontera impuesto (Dirichlet y Neuman).

Con el fin de evaluar el comportamiento de la solución hallada mediante el método de colocación con RBF-MQ en términos del parámetro de forma y del espaciamiento, se parte de una distribución nodal uniforme de 31x31 puntos, y con diferentes parámetros de forma se calcula el error de la solución para stencils de cuatro y ocho nodos, como se presenta en la Gráfica 3.

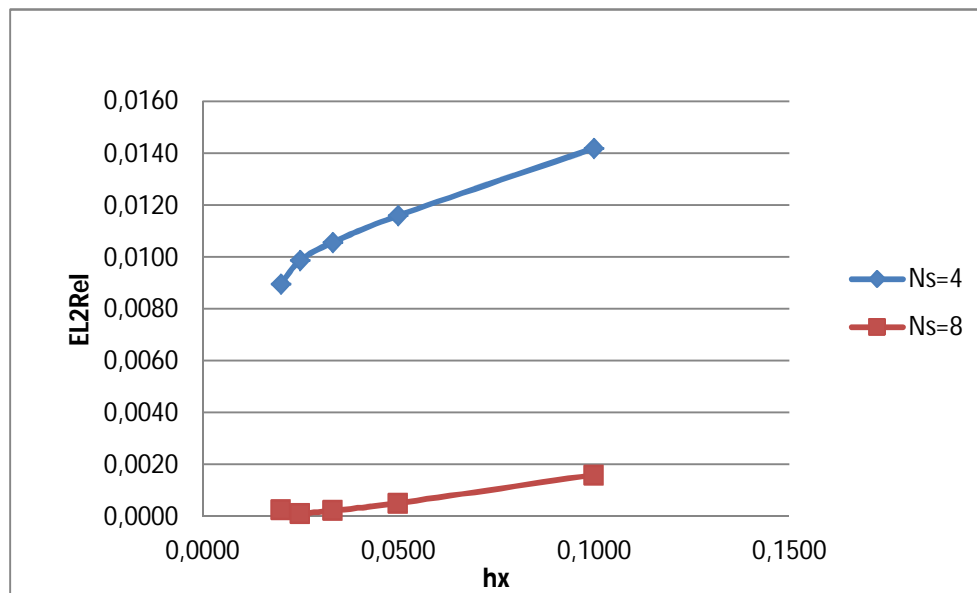
Nuevamente, se utiliza  $m=1$  para las funciones MQs. Se presenta un comportamiento común a los métodos de colocación con RBFs: la solución es más exacta para formaciones de stencils de ocho nodos pues el método, como se mencionó al comienzo de este capítulo, tiene más información de los nodos que rodean el nodo central del stencil y puede con esto solucionar de manera más acertada, sin incrementar significativamente el tiempo de computo. Aunque se pueden obtener menores errores con  $N_s=8$ , es importante anotar que el rango en que se obtienen resultados precisos es menor al caso con  $N_s=4$ , debido a problemas de mal condicionamiento de las matrices conforme se aumenta el número de nodos en el dominio de influencia.



**Gráfica 5. Error como una función del parámetro de forma en el caso bidimensional**

Con los resultados obtenidos, se selecciona nuevamente un parámetro de forma que garantice un error bajo para ambos casos analizados ( $N_s=4$  y  $N_s=8$ ). Con el fin de analizar el orden de convergencia del método en el caso bidimensional, se obtienen soluciones con un factor de forma igual 0.5 para diferentes distribuciones nodales. Más adelante se realizan verificaciones para distribuciones nodales basadas en mallas no estructuradas que garanticen la exactitud del método ante futuras variaciones de la geometría.

Errores para diferentes espaciamentos entre nodos se presentan en la figura 4, donde se aprecia como el error disminuye acorde al aumento en la densidad de nodos, asegurándose la convergencia del método.



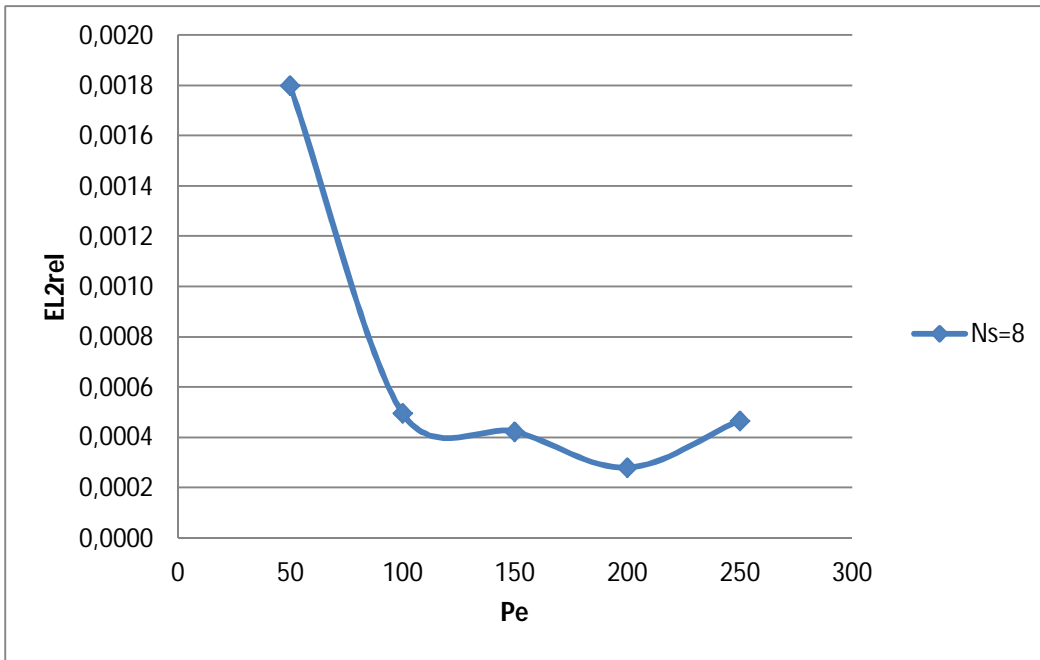
**Gráfica 6. Error en términos del espaciamento entre nodos en el problema 2-d**

A partir de las soluciones obtenidas en las ecuaciones 3 y 4, se puede afirmar que el código implementado, es apto para la solución por medio del método de Kansa local, a partir de RBF multicuádricas de problemas convectivos dominantes con las condiciones enumeradas al inicio de esta sección

### **2.3.2 Distribuciones nodales no homogéneas**

Se debe tener en cuenta, una distribución de puntos formada a partir de una malla no estructurada que permita comprobar y comparar los resultados en la sección anterior, usando el mismo procedimiento utilizado: diferentes parámetros de forma y se calcula el error de la solución para stencils de ocho nodos, como se presenta en la Gráfica 3.

Se pretende solucionar lo planteado en la ecuación (16) y con el fin de evaluar el comportamiento de la solución, se parte de una distribución nodal no homogénea de 369 nodos. Nuevamente y manteniendo los parámetros para las funciones MQs utilizados en la sección anterior, se realizan variaciones en el número de Peclet y se calcula el error de la solución para stencils de ocho nodos.



**Gráfica 7. Error en términos del número de Peclet en el problema 2-d con malla no homogénea**

El comportamiento presentado es una consecuencia de la solución analítica planteada, puesto que en otras soluciones es de esperarse que el error aumente con el número de Peclet dado que la discretización del término convectivo dependerá más en la estrategia de upwinding empleada. Sin embargo, los errores obtenidos son bajos, verificándose así el buen comportamiento del código desarrollado en distribuciones nodales no homogéneas. ., Está comprobación es fundamental para aplicar el código a posteriores problemas donde las distribuciones nodales homogéneas no describe adecuadamente la geometría del problema.

### 2.3.3 Análisis para condiciones de interfase

A partir del caso analizado en la sección 2.3, se procede a implementar una condición de interfase en  $x_1=0,5$  (mitad del dominio) que separa dos subdominios con diferentes valores del coeficiente difusivo. Esto para garantizar que el código pueda responder ante situaciones que en posteriores análisis se presentaran, con materiales de diferentes conductividades térmicas.

Conociendo la solución analítica  $u = x \cos(0.5\pi y)$ , se puede determinar  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y}$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(0.5\pi y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -0.5\pi x \sin(0.5\pi y) \quad (27)$$

En la interfase se cumple la igualdad:

$$K_1 \frac{\partial u}{\partial n_1} = K_2 \frac{\partial u}{\partial n_2} \quad (28)$$

Reemplazando (17) en (18), se puede obtener:

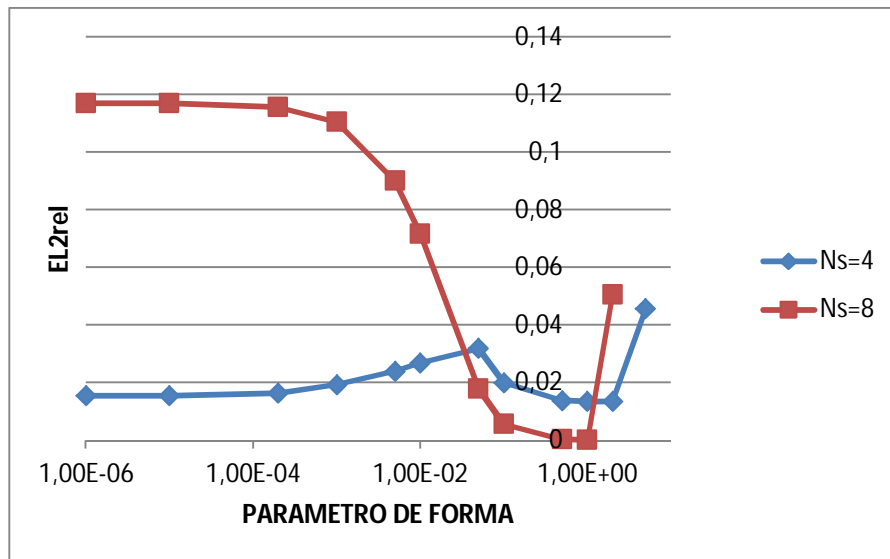
$$K_1 \frac{\partial u}{\partial x} + K_2 \frac{\partial u}{\partial y} = K_1 \cos(0.5\pi y) - K_2 0.5\pi x \sin(0.5\pi y) \quad (29)$$

A partir de (13), la condición se puede expresar en términos de RBF, obteniendo:

$$(K_1 + K_2) \frac{\hat{x}_k}{r} n_k \frac{d\phi}{dr} = h(\vec{x}) \quad (30)$$

Con la ecuación (19), se realizó una verificación de la convergencia del método para la variación del parámetro de forma. Se comprobó que no hay mayor variación con lo obtenido en las secciones anteriores, lo cual comprueba el buen funcionamiento del método con condiciones de interfase. El código obtenido

queda verificado para posteriores análisis donde la geometría hace necesaria la aplicación de distribuciones no homogéneas con condiciones de interfase, debido el cambio de propiedades de zona a zona en el dominio. Además, se requerirá refinación de la distribución nodal en algunos puntos del problema con el objeto de modelar correctamente altos gradientes de los potenciales y así disminuir el error de la solución.



**Gráfica 8. Error como una función del parámetro de forma en el caso bidimensional para condiciones de interfase**



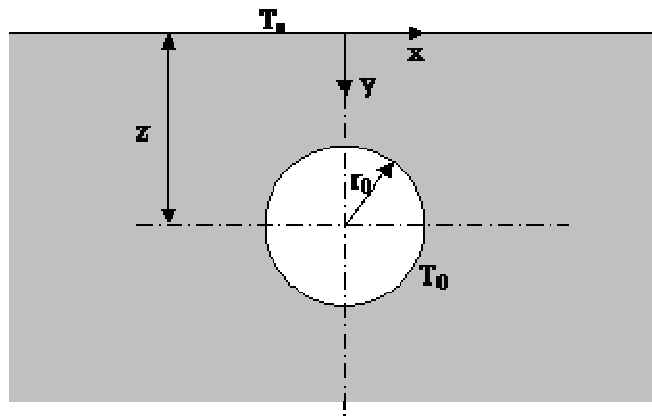
### **3 MODELACIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO DE STES POR EL MÉTODO DE COLOCACIÓN CON RBF**

El modelo analizado y las verificaciones realizadas en el capítulo anterior, son importantes como preparación y mejoramiento del código ante variaciones en las propiedades del medio y en condiciones de frontera. Sin embargo, es necesario solucionar problemas cuya geometría y condiciones de frontera sean similares al problema de transferencia de calor por conducción en los STES.

En primer lugar y a partir de un problema clásico con solución analítica y el código ya analizado, se realiza un estudio de un sistema supuesto de un STES de un solo cable, se analiza su interacción con el entorno y se realizan validaciones del código creado mediante el análisis del comportamiento de la norma del error en términos de la distancia promedio entre nodos (diferentes distribuciones nodales) y el valor del parámetro de forma. Posteriormente se evalúa el rendimiento del código al emplear diferentes condiciones de frontera en la superficie del cable.

#### **3.1 PROBLEMA DE CONDUCCIÓN BIDIMENSIONAL DE CALOR PARA CILINDRO ENTERRADO**

En un cilindro infinito (su longitud mucho mayor que su radio) enterrado en un medio homogéneo (ver Gráfica 9), la temperatura de la superficie del cilindro es uniformemente  $T_0$  y la de la superficie es  $T_s$ . (Faghri, 2010)



**Gráfica 9. Cilindro infinito enterrado**

La ecuación de energía que modela el anterior sistema en estado estacionario está dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (31)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} T &= T_s, & y &= 0 \\ T &= T_0, & x^2 + (y - z)^2 &= r_0^2 \end{aligned} \quad (32)$$

De (Eckert, 1987) se puede obtener la siguiente relación para el flux de calor (tasa de calor por unidad de área) en dirección radial hacia afuera del cable:

$$q' = \frac{2\pi k}{\ln \left[ z/r_0 + \sqrt{(z/r_0)^2 - 1} \right]} (T_0 - T_s) \quad (33)$$

Integrando y reorganizando la ecuación (3), se puede obtener el valor de la temperatura para cualquier punto (x,y) alrededor del cilindro:

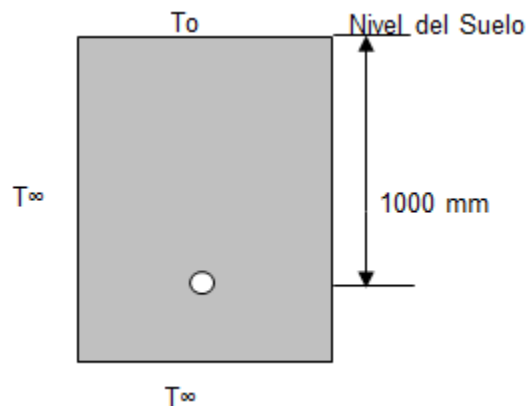
$$\theta = \frac{\theta_0}{2 \cosh^{-1}(z/r_0)} \ln \left[ \frac{x^2+(y+a)^2}{x^2+(y-a)^2} \right] \quad (34)$$

Donde,  $\theta$  es el exceso de temperatura ( $T-T_s$ ) en cualquier punto alrededor del dominio y  $\theta_0$ , el exceso de temperatura en la superficie del cilindro.

### 3.2 SISTEMA DE UN SOLO CABLE ENTERRADO

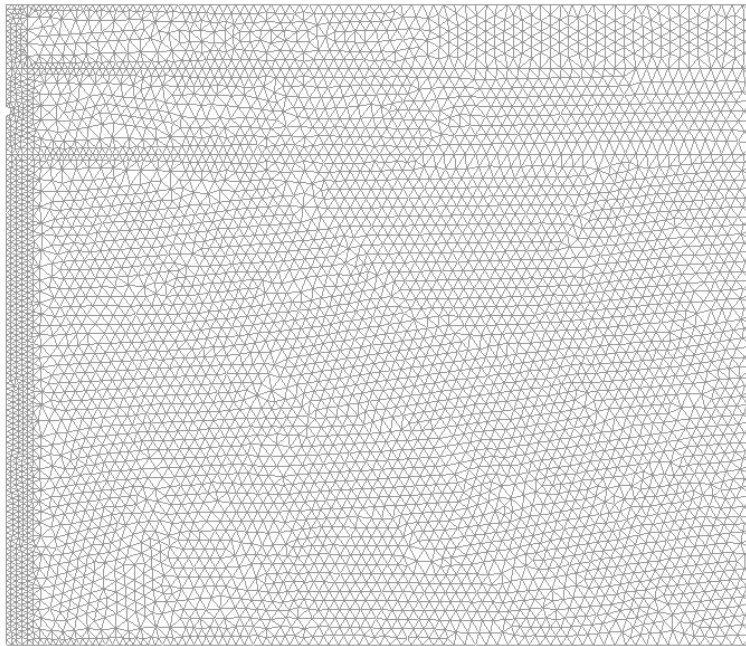
La expresión (4) permite conocer la diferencia de temperatura para cualquier punto en el dominio. A continuación se presenta el dominio computacional y las condiciones de frontera para las que se verificará el código desarrollado, empleando la solución analítica mencionada.

Partiendo de la geometría del problema que se muestra en la Gráfica 10, se resuelve y se calcula el error con respecto a la solución numérica con el objetivo de verificar el código computacional. Las condiciones de frontera se definen como  $T_0$  en la frontera superior (temperatura del ambiente) y  $T_\infty$  (solución analítica), en las fronteras laterales, inferior y superficie del cable respectivamente. La condición de frontera  $T_\infty$ , se puede calcular a partir de la expresión (4).



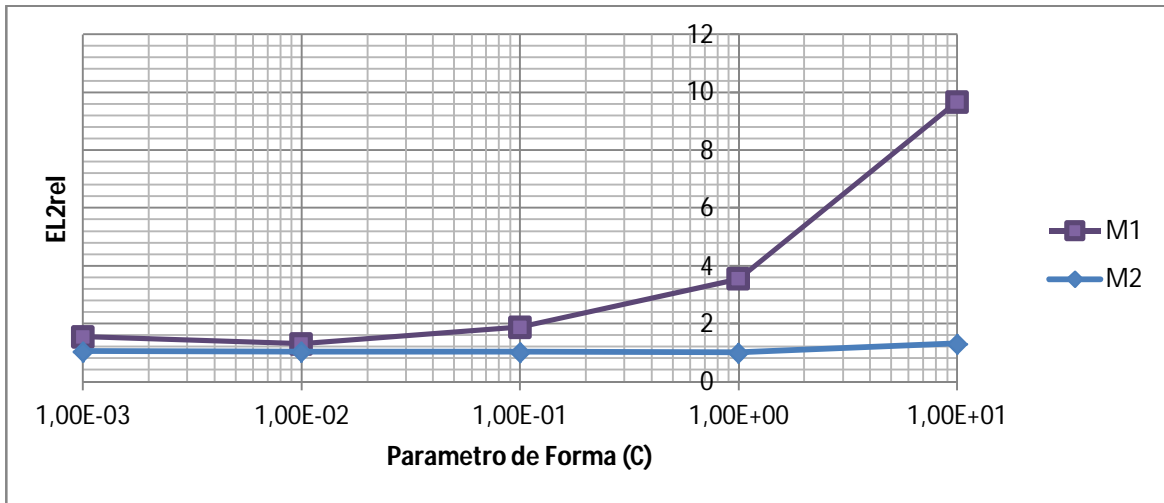
**Gráfica 10. Sistema de un solo cable directamente enterrado en suelo nativo**

En una primera aproximación se obtiene una distribución nodal basada en un solo dominio y una malla estructurada, la cual se refina en los nodos cercanos a la superficie del cable, como se puede observar en la Gráfica 11. Adicionalmente, se puede observar la condición de simetría del problema para optimizar los tiempos de compilación analizando solo la mitad del dominio.



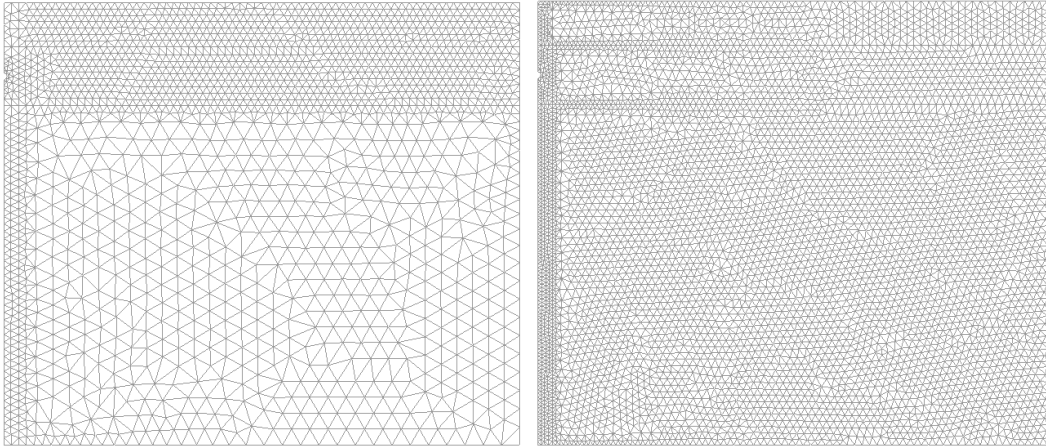
**Gráfica 11. Malla estructurada refinada para los nodos cercanos a la superficie del cable**

Como se puede apreciar a continuación, el error es inapropiadamente alto porque no se tienen suficientes nodos en las cercanías del cable para aproximar de forma precisa la temperatura, cuya variación es mayor en la zona mencionada. Adicionalmente, el hecho basar la distribución nodal en una malla estructurada no permite, como se determinó en el capítulo anterior, modelar la geometría del sistema adecuadamente.



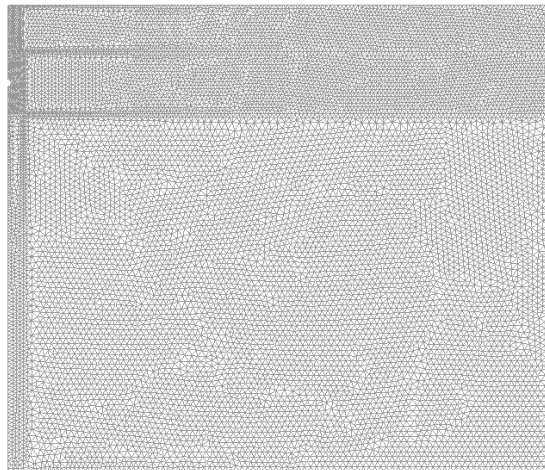
**Gráfica 12. Error en términos del parámetro de forma en el problema de un solo cable con malla estructurada**

Dividiendo el sistema en subdominios y empleando distribuciones nodales basadas en mallas diferentes no estructuradas para cada uno de ellos, se busca mejorar la solución en los nodos cercanos al cable. De esta manera se incrementa la densidad de nodos donde los gradientes de temperatura son mayores y se disminuye el tiempo de cálculo al disminuir la densidad de nodos en zonas alejadas del cable puesto que las variaciones de temperatura son mínimas. En la Gráfica 13, se presentan las mallas no estructuradas a partir de las cuales se obtuvieron las distribuciones nodales empleadas.



a.

b.

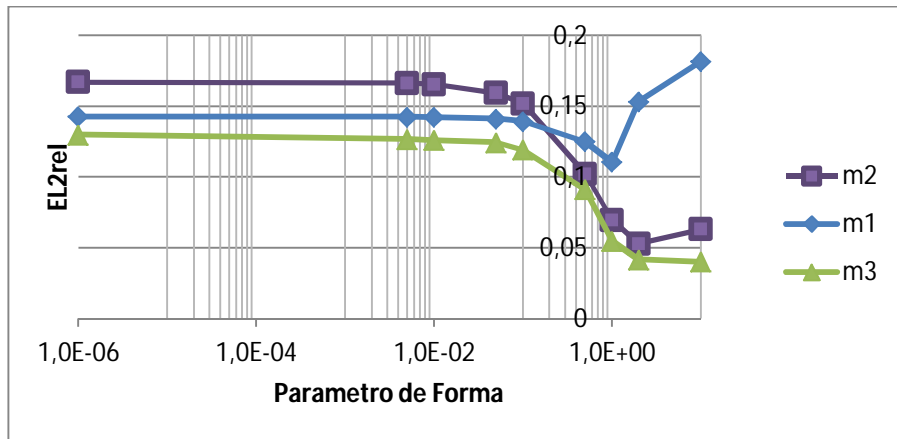


c.

**Gráfica 13. Mallas no estructuras aplicadas sobre problema, a. (2024 nodos), b. (5449 nodos), c (12255 nodos)**

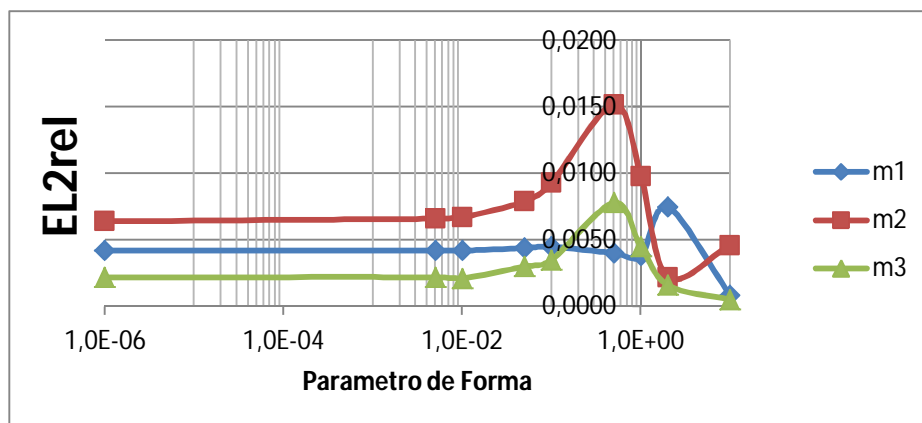
La Gráfica 14 presenta un error menor al mostrado en la Gráfica 12, pues se garantiza una mejor aproximación en los casos donde las variaciones de temperatura son altas. Como es de esperarse y de acuerdo a la literatura, (Cheng – 2003), el sistema pierde precisión para valores del parámetro de forma extremos debido al mal condicionamiento de las matrices locales de interpolación. También

puede observarse el efecto del aumento del número de nodos en el error, puesto que menores errores se obtienen con distribución nodal más densa (m3).



**Gráfica 14. Error en términos del parámetro de forma aplicando la solución analítica a las fronteras**

Aumentando el número de nodos por stencil a ocho, es posible reducir el error sin aumentar demasiado el tiempo de cálculo, sin embargo y como se puede observar en la Gráfica 15, la solución numérica se hace más sensible al parámetro de forma. En conclusión, al aumentar el número de nodos por stencil es posible aumentar la precisión del método con parámetros de forma menores a  $1 \times 10^{-2}$ .



**Gráfica 15. Error en términos del parámetro de forma aplicando la solución analítica a las fronteras (Ns=8)**

Los resultados anteriores fueron obtenidos empleando condiciones de frontera tipo Dirichlet y como se puede observar en las gráficas presentadas, el código tiene un buen comportamiento ante las variaciones de los parámetros de forma y de malla. Por tanto, se puede garantizar su convergencia para posteriores análisis.

A continuación se soluciona el problema anterior, empleando condiciones del tipo Neumann para las fronteras izquierda, derecha e inferior, y, del tipo Dirichlet en la frontera superior, y en la superficie del cable con el objetivo de analizar su rendimiento.

Partiendo de la definición:

$$q = -k \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}} \quad (35)$$

O, lo que es lo mismo:

$$q = -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right) \quad (36)$$

Donde  $n_x$  y  $n_y$  corresponden a las componentes en  $x$  y  $y$  del vector normal unitario a la superficie. La solución analítica (34) se puede derivar en  $x$  y en  $y$  para determinar la condición de frontera Neumann:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_0 x}{\cosh^{-1}(z/r_0)} \left[ \frac{1}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{1}{x^2 + (y-a)^2} \right] \quad (37)$$

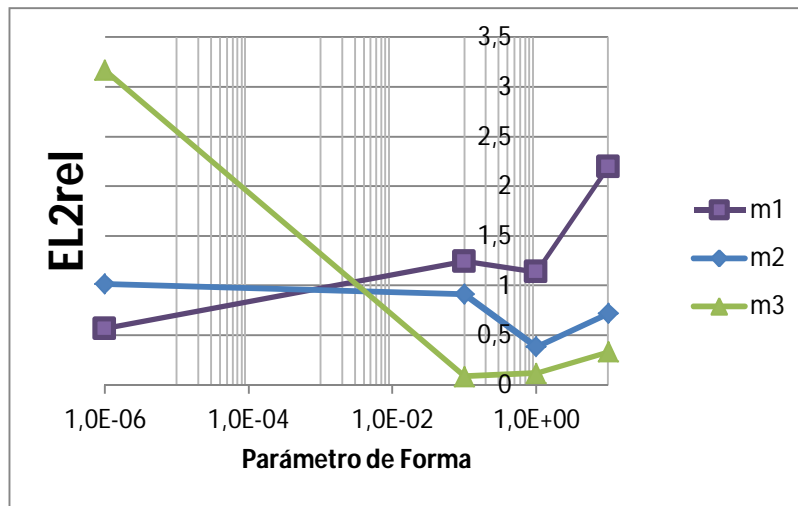
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\theta_0 (y+a)}{\cosh^{-1}(z/r_0)} \left[ \frac{1}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{1}{x^2 + (y-a)^2} \right] \quad (38)$$

Reemplazando las ecuaciones (7)

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_0 x}{\cosh^{-1}(z/r_0)} \left[ \frac{1}{x^2 + (y+a)^2} - \frac{1}{x^2 + (y-a)^2} \right] \quad (37 \text{ y } 8)$$



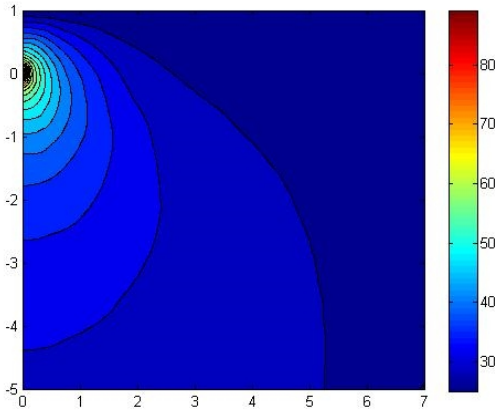
$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta_0 (y+a) \cosh^{-1} \left( \frac{zr_0}{1x^2 + (y+a)^2 - 1x^2 + (y-a)^2} \right)$  (38 en (6), se obtiene la condición tipo Neumann aplicable para las fronteras con sus respectivos vectores normales. A partir de esto se analiza para las distribuciones nodales presentadas en la Gráfica 16. Como se puede observar en la Gráfica 7, (menos densa) los errores son elevados para la distribución m1, dado que la aproximación de derivadas con RBFs, en el nuevo problema, genera inestabilidad en la solución. Sin embargo, para las distribuciones nodales más densas y parámetros de forma iguales a 1, las soluciones numéricas son adecuadas:



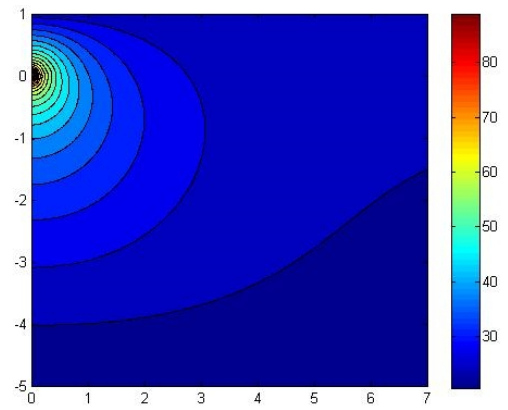
**Gráfica 16. Error en términos del parámetro de forma aplicando condiciones de frontera tipo Neumann (Ns=8)**

En las siguientes gráficas, se pueden analizar los resultados obtenidos para los casos Dirichlet, Neumann y son comparados con la solución analítica analizada. Adicionalmente, validan la convergencia del código ante las nuevas variaciones en las condiciones iniciales y de frontera, con lo cual se puede proceder a realizar su validación para un caso práctico de diseño de un STES trifásico que presenta condiciones similares a las ya analizadas, involucrando los dos cables adicionales de un sistema trifásico y la forma en la que se presentan las condiciones de frontera por las pérdidas presentes en el STES como fuentes de calor generadas

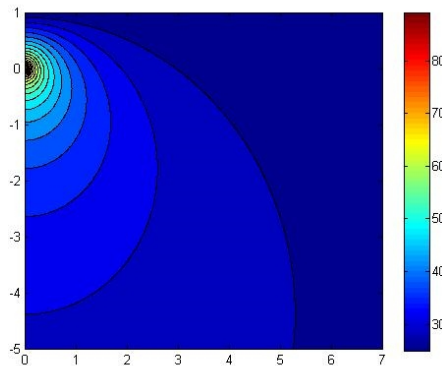
por las pérdidas Joule, pérdidas dieléctricas y pérdidas en las capas metálicas de los componentes del cable.



Solución numérica para caso Neumann



Solución numérica para caso Dirichlet



Solución Analítica

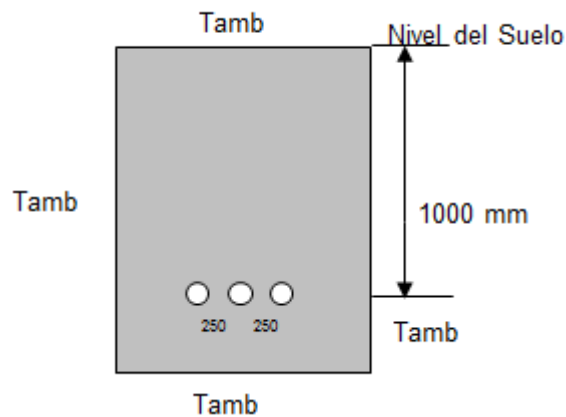
**Gráfica 17. Distribución de temperatura aplicando condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann**

### **3.3 PROBLEMA DE STES TRIFÁSICO DIRECTAMENTE ENTERRADO**

Las validaciones realizadas en secciones anteriores garantizan un comportamiento adecuado del método ante las variaciones geométricas y las

diferentes condiciones de frontera del problema, además del parámetro de forma. Sin embargo, aún no se ha demostrado su aplicabilidad para solucionar problemas que emulen situaciones reales.

A continuación se presenta la solución de un caso de estudio de un sistema trifásico directamente enterrados en el suelo (direct buried) que tiene conductividad térmica de  $0,5 \text{ W/K.m}$ , a una tensión de  $66 \text{ kV}$  y que pretende transportar  $700 \text{ A}$ ; la temperatura del ambiente y las condiciones de instalación son presentadas en la gráfica 9.

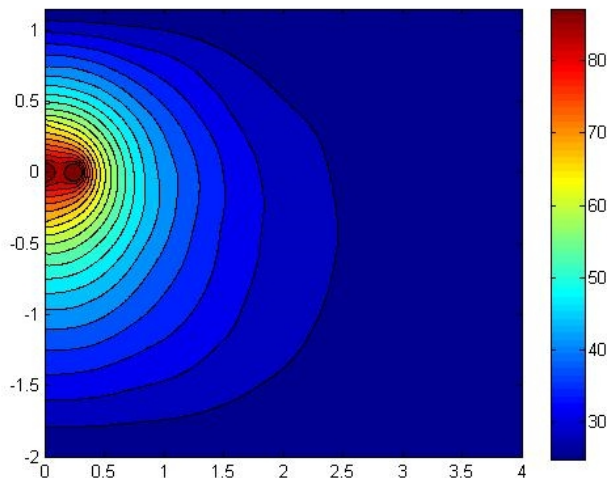


**Gráfica 18. Sistema trifásico de transmisión de energía eléctrica directamente enterrado (Direct Buried)**

Se impone la condición de simetría mencionada en la sección anterior, la temperatura ambiente ( $T_{amb}$ ) en la superficie es  $30^{\circ}\text{C}$  y en las fronteras laterales e inferior, la temperatura es igual a la del ambiente bajo las siguientes hipótesis:

- Sí se retiran los cables, el dominio tendría aproximadamente la misma temperatura que la superficie, lo que significa que la variación con respecto a la profundidad es despreciable
- Las fronteras están lo suficientemente alejadas para que la temperatura vuelva al valor de temperatura del suelo sin el cable

Inicialmente, se asume el sistema con condiciones Dirichlet (en la superficie del cable) para ver el comportamiento del código y del sistema ante la temperatura operación, la cual está dada en el estándar IEC 60287. Establece que la temperatura máxima de operación del cobre y el aluminio (principales materiales para la fabricación del conductor) se debe limitar a los 90°C en estado estable. De esta forma se garantiza en el análisis que, para las peores condiciones de operación del STES, el código se comporta adecuadamente y la interacción con los cables adicionales no limita su funcionalidad.



**Gráfica 19. Distribución en STES directamente enterrado con condiciones de frontera tipo Dirichlet en la superficie del cable**

Posteriormente, se realiza el análisis de un caso de diseño real, basado en la simulación anterior, realizando los cálculos eléctricos por la norma IEC 60287. Se compara, para el estado estable, el resultado de la capacidad de corriente obtenido a partir del código implementado, teniendo como partida, condiciones de frontera tipo Neumann para la superficie del cable, generada por las pérdidas en forma de calor (Joule) por la corriente de diseño a través del sistema (700 A a 66 kV), las pérdidas dieléctricas y las pérdidas en las capas metálicas de los materiales constitutivos del cable, que se presentan en la Tabla 1 y se obtienen

mediante el modelo de cálculo detallado en la sección 1.1.1. La temperatura ambiente es de 30°C y la resistividad térmica del suelo nativo es de 0.5 °C.m/W.

<b>I<sup>2</sup>R</b>	11,50188
<b>Wd - Dieléctrico</b>	0,168561
<b>Capas metálicas</b>	0,111769
<b>Wtotal</b>	<b>11,78221</b>

Tabla 2 . Pérdidas en STES directamente enterrado a 66 kV (700 A)

Las pérdidas, que finalmente se convierten en fuentes de calor desde los cables, son elementos determinantes para el diseño del STES. La temperatura de operación del cable que está determinada principalmente por las características de instalación, de las pérdidas que se generan en los cables y la capacidad del sistema de evacuar el calor generado, será la limitante más importante en el diseño de STES.

El STES planteado, es de uso común por su fácil instalación y bajo costo. Siempre es la primera opción que se analiza para un diseño de una nueva línea subterránea. A partir de allí, parten posteriores análisis según los resultados de capacidad de corriente que se obtienen.

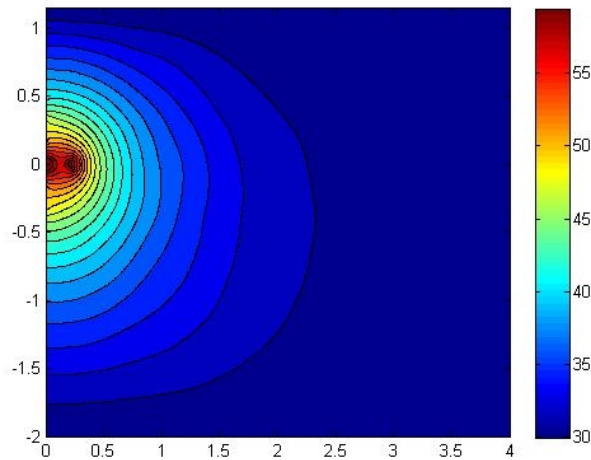
Los datos de entrada para el diseño (calculados por IEC 60287) son presentados en la tabla 2 y siguen la metodología descrita en el capítulo 1 (sección 1.1.1).

Variable	Magnitud	Unidades
$\Delta\theta_{\text{grd}}$	60	$^{\circ}\text{C}$
R	0,0000232	$\Omega\cdot\text{m}$
T1	0,321	$^{\circ}\text{C}\cdot\text{m}/\text{W}$
n	1	
$\lambda_1$	0,0469	
T2	0	$^{\circ}\text{C}\cdot\text{m}/\text{W}$
$\lambda_2$	0	
T3	0,0469	$^{\circ}\text{C}\cdot\text{m}/\text{W}$

Tabla 3. Variables eléctricas para STES directamente enterrados a 66 kV (700 A)  
A partir de la temperatura máxima sobre la superficie del cable (ver Tabla 4), se puede obtener la resistencia térmica equivalente para el medio exterior ( $T_4$ ) mediante la siguiente ecuación y determinar la capacidad de corriente del sistema:

$$T_4 = \frac{\theta_{\text{max}} - \theta_{\text{suelo}}}{W_{\text{total}}} - T_3$$

De la anterior expresión,  $W_{\text{total}}$  es calculado en Tabla 2,  $T_3$  son las resistividad térmica de la capa más externa del cable y la temperatura del suelo es conocida ( $\theta_{\text{suelo}}=30^{\circ}\text{C}$ ).



**Gráfica 20. Distribución de temperatura en STES a 66 kV (700 A)**

Conocidas todas las variables calculadas por metodología IEC 60287 y modelo numérico, se puede calcular la capacidad de corriente del STES directamente enterrado en el suelo nativo:

Variable	Magnitud	Unidades
Temperatura máxima numérica	61,0151	°C
T4 numérica	2,5833	°C.m/W
T4 IEC	2,6722	°C.m/W
I numérica	881,94	A
I IEC	868,76	A

Tabla 4. Resistividad térmica T4 y capacidad de corriente STES

De la tabla 3, se puede apreciar, la principal falencia de los métodos clásicos de dimensionamiento de STES (IEC y IEEE), el sobredimensionamiento. Como se podrá ver en el siguiente capítulo, en condiciones donde no se tiene homogeneidad en el suelo o variaciones de la profundidad de instalación de los cables, se hace necesario tener elementos de juicio más precisos que como objetivo final, reduzcan los costos de la instalación y el apropiado desempeño de los STES.

#### **4 CRITERIOS DE DISEÑO PARA STES BAJO VARIACIONES DE FACTORES AMBIENTALES Y PARAMETROS DE INSTALACIÓN**

En el capítulo anterior se verificó la aplicabilidad del método para la solución de la ecuación de transferencia de calor para un STES directamente enterrado, lo cual corresponde a una condición de diseño inicial convencional y la configuración geométrica presentada es de uso recurrente como base para los diseños finales. Sin embargo, no es común el uso de este tipo de instalación porque las condiciones ambientales no son favorables; por la presencia de cruces de vías, de tuberías de agua u otro elemento en las cercanías, o simplemente porque la capacidad de corriente no es la adecuada.

A continuación se presentan diferentes casos de diseño para el mismo STES planteado en el capítulo anterior, con el objetivo de identificar las falencias del método clásico (IEC) y los principales factores que influyen en la capacidad de corriente del sistema y posteriormente del diseño.

Como se ha mencionado anteriormente, el modelo utilizado de la norma IEC 60287 se basa fundamentalmente en garantizar que, para estado estable, la temperatura de operación no supere los 90°C y por tal motivo se limite la capacidad de corriente. Esta última dada finalmente por la capacidad del sistema de evacuar el calor generado por pérdidas Joule y dieléctricas.

De acuerdo con la literatura, el análisis de la norma es válido para el análisis térmico de STES, pero presenta falencias en el cálculo de la resistividad térmica equivalente del medio que rodea al sistema. Es claro que el cable seguirá siendo el mismo sin importar el lugar donde vaya a ser instalado. Sin embargo, las variables ambientales del medio que rodea a los cables influye notoriamente en la capacidad de corriente del sistema, la cual es la principal restricción: el sistema es



capaz de transportar efectivamente la energía necesaria o no. Las variables ambientales más relevantes son: resistividad térmica (conductividad) del suelo nativo, temperatura del suelo y temperatura del ambiente (que se asumen equivalentes), profundidad de la instalación, separación entre fases del sistema y la presencia de otros elementos en el sistema (ductos de agua/gas, cruce de vías, etc...). La variación de la profundidad a la que se localiza el sistema de cables en la zanja es una de las variables más relevantes puesto que a mayor profundidad de instalación, mayor la temperatura del sistema y menor la capacidad de corriente.

#### **4.1 METODOLOGÍA DE COMPARACIÓN**

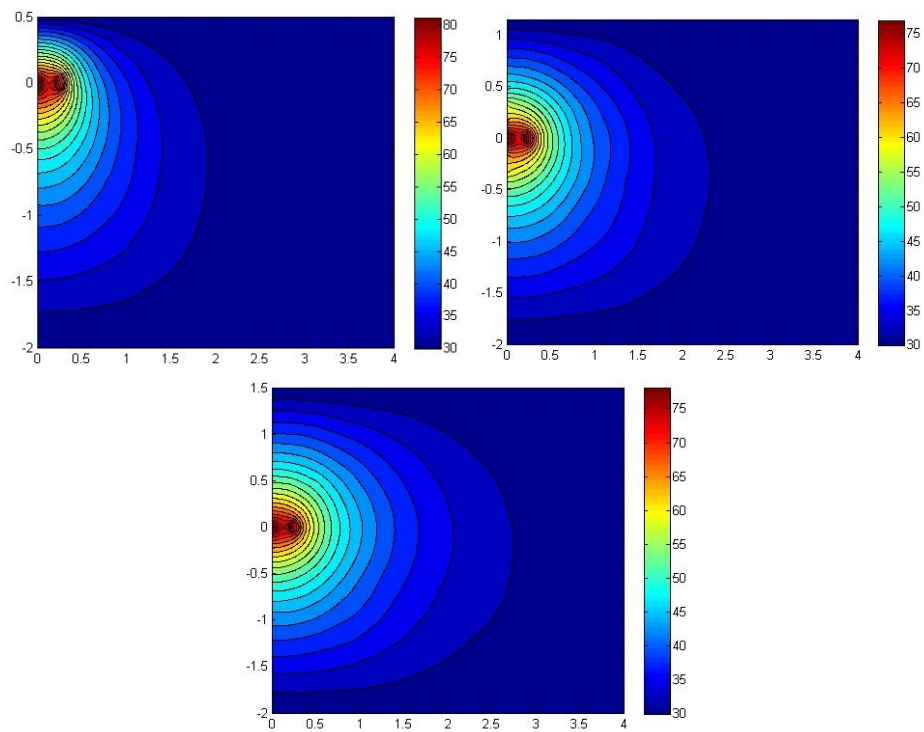
Partiendo del STES analizado en el capítulo anterior, se presentan a continuación los resultados obtenidos a partir de la variación en las profundidades de instalación del sistema de cables y la conductividad térmica del suelo nativo. El procedimiento utilizado se basa en el cálculo de la capacidad de corriente a partir de la norma IEC 60287, el cual, según su metodología, debería entregar el valor de la capacidad de corriente a una temperatura de operación igual a los 90°C. Posteriormente, el dato de corriente calculado es utilizado como dato de entrada para calcular las pérdidas de energía por calor en el sistema (Joule y dieléctricas) de cables. A su vez, se emplea el calor calculado en la condición de frontera del modelo computacional desarrollado y se soluciona para diferentes alturas y conductividades térmicas del suelo nativo con el objetivo de hallar máxima temperatura de operación del sistema la cual es comparada con los 90°C, mediante una medida de la desviación.

Lo anterior permite replantear varias condiciones y parámetros del diseño: disminución de la sección nominal ( $\text{mm}^2$ ) del cable (disminuiría notablemente el costo del sistema), uso de rellenos que mejoren la conductividad térmica del suelo nativo, aumento de la confiabilidad del sistema (ya que se garantiza la operación

adecuada para corrientes mayores) y determinación de la capacidad del sistema más cercana a los valores reales.

#### 4.1 RESULTADOS DE ANÁLISIS

Antes de presentar los resultados obtenidos, se muestra a continuación dos de las geometrías modeladas y sus contornos de temperatura obtenidos, para una profundidad diferentes profundidades de instalación (0.5 m, 1 m y 1.5 m) para la misma conductividad del terreno:

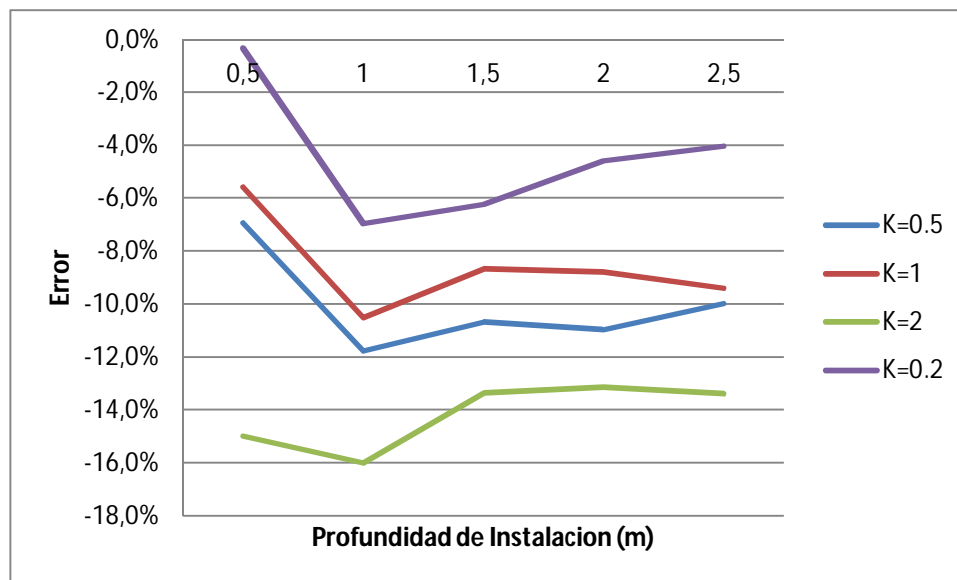


**Gráfica 21. Distribuciones de temperatura para diferentes profundidades de instalación y una misma conductividad térmica del suelo nativo**

La gráfica 22 presenta la diferencia porcentual (ver ecuación 39) entre las temperaturas máxima según la norma (90°C) y la temperatura máxima hallada mediante el código desarrollado en términos de la altura de instalación y de la conductividad térmica para una temperatura ambiente de 30°C:

$$\Delta\% = \frac{T_{simulada} - 90}{90} \quad (39)$$

El símbolo negativo en la diferencia porcentual implica que las temperaturas máximas halladas están por debajo de la temperatura máxima establecida en la norma (90°C):

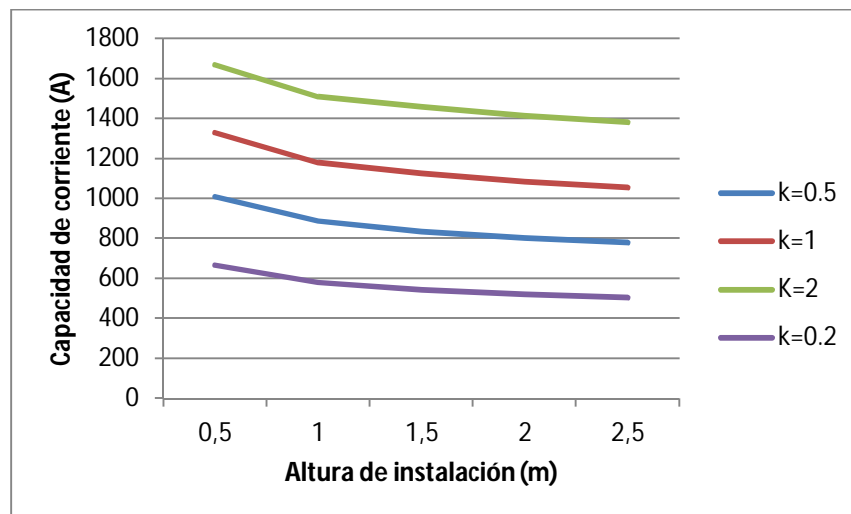


**Gráfica 22. Desviación de la temperatura de operación ante variaciones de la profundidad de instalación y la conductividad térmica del suelo nativo**

Es claro que para la menor profundidad (Gráfica 22), el calor generado por las pérdidas generadas en el cable, es disipado de una forma más adecuada hacia el exterior en comparación con las profundidades mayores. Es por lo anterior que las capacidades de corriente son mayores en alturas menores. Sin embargo, se debe considerar en el momento de diseñar un STES, los efectos ambientales y de

instalación: tuberías cercanas de otros sistemas (agua o gas), peligro de fácil acceso para personal no calificado a la instalación, aumento en la temperatura del suelo, entre otras. Por tanto, ninguna instalación se realiza a menos de un metro de profundidad, la norma IEC 60287, sección 3.2, después de diferentes estudios, recomienda no utilizar alturas menores a este valor para evitar efectos electromagnéticos sobre las demás instalaciones en la ruta del sistema.

A partir de la variación en la altura de instalación, según la gráfica 21, se puede determinar que las variaciones de capacidad de corriente están en un rango entre el 12 y 3% para diferentes conductividades térmicas del suelo nativo. Es claro que para valores mayores a un metro, esta variación no es tan grande, dado a que la influencia de la altura es cada vez menor..



**Gráfica 23. Variación de la capacidad de corriente en función de la altura de instalación**

Se ha mencionado que la temperatura del STES, está ligada principalmente a la capacidad del sistema de disipar el calor generado por las pérdidas del sistema. Igualmente, es claro que existe una relación entre la temperatura y la profundidad del sistema: a mayor profundidad, mayor la temperatura. Por otro lado y por

consiguiente, existe una dependencia directa de la capacidad de corriente con la variación de la temperatura del sistema que finalmente estará limitada por los ya mencionados 90°C. Variaciones de un grado en el STES arrojan incrementos de aproximadamente el 5% en la capacidad de corriente por cualquiera de los dos métodos (norma o cálculo computacional).

De acuerdo con la gráfica 22 es evidente el sobredimensionamiento en el cual se incurre cuando se realiza el dimensionamiento por medio de la norma. Poder determinar la temperatura máxima de operación permite tener elementos de juicio para:

- En instalaciones existentes: verificar si existe algún tipo de condicionante o limitante en la operabilidad ante variaciones de las condiciones del suelo en diferentes temporadas del año de acuerdo a las condiciones ambientales ( humedad el suelo y variación de la temperatura en el año).
- En nuevos diseños: determinar temperaturas máximas en los peores escenarios de operación del sistema y concluir sobre la viabilidad o no de un proyecto. Adicionalmente, es posible calcular la capacidad de corriente máxima que podrá ser tenida en cuenta ante futuras ampliaciones del sistema eléctrico y el continuo incremento en la demanda.

La relevancia de lo anterior radica en los altos costos de la instalación, la dificultad en el mantenimiento, la localización de fallas eléctricas o mecánicas del sistema, los tiempos de reparación y de salida del sistema de interconexión. Esto último es de gran importancia, considerando que el desabastecimiento de energía a algún sector que cuenta con una instalación subterránea, asegura, según se presentó en el capítulo uno, que sea un sector bastante poblado que tiene condiciones ambientales difíciles para realizar una instalación área como zonas urbanas edificadas, zonas culturales, entre otras que requieren el abastecimiento permanente de energía eléctrica.

Las conductividades térmicas analizadas representan un amplio rango de suelos para el territorio colombiano, que también es una de las falencias de la norma y los cálculos computacionales, dado el desconocimiento del tema y ya que no se encuentran consideraciones para el país, lo que obliga a utilizar valores aproximados (sobredimensionados) o incluso erróneos para modelar la real instalación. Igualmente, las profundidades presentadas son aplicables aquí y en cualquier instalación futura o existente.

## CONCLUSIONES

La transmisión de energía eléctrica se han basado fundamentalmente en las líneas aérea dados los menores costos de implementación en comparación con la transmisión subterránea. Estudios recientes, sugieren que el costo de los sistemas de transmisión subterránea es 5 a 15 veces mayor que los sistemas de transmisión aérea convencionales. Es por lo anterior que el desarrollo de sistemas transmisión de potencia tiende a la opción de sistemas subterráneos como una solución económica y técnicamente efectiva cuando obstrucciones físicas, medio ambientales y de opinión pública se antepone en el desarrollo de estos. Más aún, si se considera el rápido aumento de la demanda de energía eléctrica y la gran expansión de las aéreas sobre pobladas.

A partir de la solución de la ecuación diferencial de convección – difusión, se analizó su comportamiento para variaciones de los factores de forma y de las condiciones de frontera. Se pudo verificar la convergencia del método y determinar los valores extremos y óptimos para el funcionamiento del método. El código obtenido se verificó para análisis en los cuales la geometría hace necesaria la aplicación de distribuciones nodales no homogéneas con diferentes condiciones geométricas y de interfase, debido el cambio de propiedades de zona a zona en el dominio. Además, se empleó refinación de la distribución nodal en algunos puntos del problema con el objeto de aproximar correctamente altos gradientes de los potenciales y disminuir el error en la solución.

Comparando los resultados obtenidos al solucionar la ecuación diferencial de conducción de calor mediante método de colocación con RBF y la capacidad de corriente obtenida mediante la norma IEC 60287, se comprobó la principal falencia de los métodos clásicos de diseño de STES: el sobredimensionamiento. Se obtiene una capacidad de corriente que debería, al analizarse su real comportamiento térmico, tener una temperatura real de operación cercana a la máxima mencionada (90°C). Se obtuvo que siempre la temperatura de operación estaba por debajo (entre el 10 y el 15 %), lo que hace que se utilicen cables de calibres mayores y utilizar rellenos de instalación que para el diseño, lleva a que el costo de la instalación final sea bastante alto. En condiciones donde no se tiene homogeneidad en el suelo o variaciones de la profundidad de instalación de los cables, se hace necesario tener elementos de juicio más precisos que como objetivo final, reduzcan los costos de la instalación y el apropiado desempeño de los STES.

La dependencia directa de la temperatura del cable y la capacidad de corriente del sistema es evidente para variaciones de profundidad de instalación. Para profundidades pequeñas (menores a un metro), el calor generado por las pérdidas en el cable, son disipadas de una forma más adecuada hacia el exterior que para el caso de mayores profundidades (mayores a un metro).

El código generado puede servir como herramienta de diseño para determinar la capacidad de corriente en STES, como validación ante un diseño realizado por otro método y para instalaciones existentes o futuras, para la determinación de la temperatura de operación del sistema.



## BIBLIOGRAFÍA

- David Tobón, German Valencia (2003). Seminario institucional de la industria eléctrica Colombiana: propuestas para un cambio. Medellín: Lecturas de Economía, No.58.
- David E. Dismukes, Robert F. Cope III(2008).Capacity and economies of scale in electric power transmission.USA : Utilities Policy 7.
- Steve A. Fenrick, LullitGetachew (2012). Cost and reliability compariosn of underground and overhead power lines.USA. Utilities Policy 20.
- DagRavermark, Bo Nomark (2005). Ligero e invisible, ↓ Transmisión subterránea con HVDC Light. USA: Revista ABB 4.
- Roberto de LietoVollaro, Lucia Fontana, Andrea Vallati. (2011) Thermal analysis of underground electrical power cables buried in non-homogeneous soils. USA: Applied ThermaEngineering 31.
- International Standard IEC 60287-1-1, Electric Cables - Calculation of thecurrent rating - Part 1-1: Current rating equations (100% load factor) andcalculation of losses- General.
- Kenelly, A.E (1893). Minutes, ninth anual meeting. Association of Edison Illuminating Companies. USA Roberto de LietoVollaro, Lucia Fontana.
- George J. Anders (1997). Rating of Electric Power Cables: Ampacity computations for Transmission, Distribution and Industrial Applications. IEEE Press/McGraw Hill.
- J.H Neher and M.H. McGrath (1957). The Calculation of the Temperature Rise and Load Capability System. AIEE Transactions Part II. Vol. 76. 752-772
- G.J. Anders, M. Chaaban, N. Bedard. (1987) New approach to ampacity evaluation of cables in ducts using finite element technique. IEEE Transactions on Power Deliver 2. 969 -975.

- A. Hiranandan (1991). Calculation of conductor temperatures and ampacities of cable systems using a generalized finite difference model. IEEE Transactions on Power Deliver 6. 5- 24
- M. S. Al-Saud (2012). Comparison of intelligent methods for thermal assessment of power cables under geometrical parameter variations. Global Journal of Technology & Optimization. Vol. 3.
- DagRavermark, Bo Nomark (2011). Liger e invisible, Transmisión subterránea con HVDC Light. USA: Revista ABB 4.
- Unidad de Planeación Minero Energética (UPME) (2010). Plan de Expansión de Referencia: Generación y Transmisión 2010 -2024. Colombia.
- Empresas Públicas de Medellín (EPM) (2010). Impactos de las redes de energía subterránea. Colombia.
- Guillermo Aponte Mayor (2011). Experiencia en la medición de Campos Eléctricos y Magnéticos en redes eléctricas. Universidad del Valle, Colombia
- E. J. Kansa (1990). Multiquadrics -a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-ii solution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. Computers & Mathematics with applications, 19(8-9).
- E. J. Kansa and Y. C. Hon (2000). Circumventing the ill- conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations. Computers & Mathematics with applications, 39(7-8).

- B. Sarler and R. Vertnik (2006). Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems. *Computers and Mathematics with Applications*
- E. Divo and A. J. Kassab (2007). An efficient localized radial basis function meshless method for fluid flow and conjugate heat transfer. *Journal of heat transfer*.
- David Stevens, Henry Power, and Herve Morvan (2009). An order-n complexity meshless algorithm for transport-type pdes, based on local hermitian interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*.
- C.Bustamante, W. M. (2009). Solución de Problemas de Conducción Y Convección de Calor Mediante el Método CV-RBF. *Mecánica Computacional*, XXVII, 1097-1118.
- Eckert, E. a. (1987). *Analysis of Heat and Mass Transfer*. Washington, DC.: Hemisphere.
- Faghri, A. Z. (2010). *Advanced Heat and Mass Transfer*. Columbia: Global Digital Press.
- Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular. *Journal of Geophysical Research*, 1905 - 1915.
- Jumarhon B., A. S. (2000). The hermite collocation method using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 24(7–8), 607–611.

- Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics -a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-ii solution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with applications*, 8-9.
  
- P. Orsini, H. P. (2008). Improving Volume Element Methods by Meshless Radial Basis Function. *CMES*, 769(1), 1-21.
  
- Peng, C.-J. L.-C. (2011). A SELF-ADAPTIVE QUANTUM RADIAL BASIS FUNCTION. *International Journal of Innovative*, 6621-6634.
  
- Shuai Wang, G. Y. (2012). A monotone finite volume scheme for advection–diffusion. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1283–1298.
  
- R. Franke (1982) "Scattered data interpolation: Tests of some methods". *Math. Compo* 38(5):181-200.