

Jairo González-Bueno

Optimización multiobjetivo para la selección de carteras a la luz de la teoría de la credibilidad

Una aplicación en el mercado integrado latinoamericano

Escuela de Economía, Administración y Negocios



Universidad
Pontificia
Bolivariana



Jairo Alexander González Bueno

Ph.D. en Administración y Dirección de Empresas de la Universitat Politècnica de València, España; Magister en Gerencia de Negocios de la Universidad Industrial de Santander, Colombia; Master en Dirección Financiera del Instituto Superior de Educación, Administración y Desarrollo, España; Ingeniero Financiero y Contador Público de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia. Docente Investigador del Grupo de Investigación en Administración (GIA) de la Facultad de Administración de Empresas de la Universidad Pontificia Bolivariana. Sus intereses de investigación se centran en la optimización de carteras y la inversión socialmente responsable. Sus investigaciones ha sido publicadas en Journal of Business Economics and Management, Sustainability, y Journal Finance, Markets and Valuation, entre otros.

Contacto:

jairoa.gonzalez@upb.edu.co

Jairo González-Bueno

Optimización multiobjetivo para la selección de carteras a la luz de la teoría de la credibilidad

Una aplicación en el mercado integrado latinoamericano



Universidad
Pontificia
Bolivariana

615.155
G633

González Bueno, Jairo Alexander, autor
Optimización multiobjetivo para la selección de carteras a la luz de la teoría de la credibilidad. Una aplicación en el mercado integrado latinoamericano / Jairo Alexander González Bueno -- Medellín: UPB. Seccional Bucaramanga, 2019.

274 p: 16.5 x 23.5 cm.

ISBN: 978-958-764-725-9 (versión epub) /
978-628-500-043-0 (versión pdf)

1. Modelos de optimización con números difusos – 2. Cartera óptima – 3. Teorías de la credibilidad – 4. Mercados de capitales – América Latina – I. Título

CO-MdUPB / spa / rda
SCDD 21 / Cutter-Sanborn

© Jairo González-Bueno
© Editorial Universidad Pontificia Bolivariana
Vigilada Mineducación

Optimización multiobjetivo para la selección de carteras a la luz de la teoría de la credibilidad. Una aplicación en el mercado integrado latinoamericano

ISBN: 978-958-764-725-9 (versión epub)

ISBN: 978-628-500-043-0 (versión pdf)

Primera edición, 2019

Escuela de Economía, Administración y Negocios

Facultad de Administración de Empresas

Dirección de Investigaciones y Transferencia - DIT

Seccional Bucaramanga

Arzobispo de Medellín y Gran Canciller UPB: Mons. Ricardo Tobón Restrepo

Rector General: Pbro. Julio Jairo Ceballos Sepúlveda

Rector Seccional Bucaramanga: Presbítero Gustavo Méndez Paredes

Vicerrectora Académica Seccional Bucaramanga: Ana Fernanda Uribe Rodríguez

Director Facultad de Administración de Empresas: Héctor Luis Romero Valbuena

Gestora Editorial Seccional Bucaramanga: Ginette Rocío Moreno Cañas

Editor: Juan Carlos Rodas Montoya

Coordinación de Producción: Ana Milena Gómez Correa

Diagramación: Sissi Tamayo Chavarriaga

Corrección de Estilo: Natalia Uribe

Dirección Editorial:

Editorial Universidad Pontificia Bolivariana, 2019

Correo electrónico: editorial@upb.edu.co

www.upb.edu.co

Telefax: (57)(4) 354 4565

A.A. 56006 - Medellín - Colombia

Radicado: 1835-26-03-19

Prohibida la reproducción total o parcial, en cualquier medio o para cualquier propósito sin la autorización escrita de la Editorial Universidad Pontificia Bolivariana.

Índice general

Resumen	15
Capítulo 1. Introducción	17
1.1 Antecedentes	17
1.2 Motivaciones de la investigación.....	20
1.3 Objetivos.....	23
1.3.1 Objetivo general	23
1.3.2 Objetivos específicos.....	23
1.4 Estructura de la tesis	24
Capítulo 2. Optimización de carteras	27
2.1 Introducción al tema	27
2.2 Medidas de riesgo en el problema de selección de carteras.....	29
2.2.1 Medidas de riesgo de dispersión.....	31
2.2.1.1 Media desviación estándar o media varianza	32
2.2.1.2 Desviación media absoluta	45
2.2.2 Medidas de riesgo de downside.....	46
2.2.2.1 Primero la seguridad (Safety-First).....	48
2.2.2.2 Media semivarianza	51
2.2.2.3 Semidesviación media absoluta.....	52
2.2.2.4 Momento parcial más bajo (Lower Partial Moment).....	53
2.2.2.5 Valor en riesgo (VaR)	54
2.2.2.6 Valor en riesgo condicional (CVaR).....	55
2.3 La optimización de cartera en la práctica	57
2.3.1 Costos de transacción	58
2.3.2 Restricciones de cardinalidad	58
2.3.3 Restricción de cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera	60
2.3.4 Restricción de cotas mínima y máxima de participación en un sector en la cartera	61
2.4 Resumen y conclusiones del capítulo.....	61

Capítulo 3. Algoritmos evolutivos multiobjetivo en optimización de carteras.....	65
3.1 Introducción al tema.....	65
3.2 Problemas de optimización multiobjetivo (MOPs).....	66
3.2.1 MOPs totalmente conflictivos, no conflictivos y parcialmente conflictivos	68
3.2.2 Dominancia de Pareto y optimalidad.....	69
3.2.3 Métodos para resolver MOPs.....	72
3.2.4 Optimización de objetivos de MOPs	74
3.3 Algoritmos evolutivos (EAs)	75
3.4 Algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs)	78
3.5 El problema de optimización de cartera con el apoyo de MOEAs.....	80
3.6 Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)	87
3.6.1 Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas	88
3.6.2 Preservación de la diversidad.....	89
3.6.3 Ciclo principal.....	92
3.7 Resumen y conclusiones del capítulo.....	95
Capítulo 4. Teoría de la credibilidad	97
4.1 Introducción al tema.....	97
4.2 Números difusos L-R y aritmética difusa.....	98
4.3 Teoría de la credibilidad	101
4.3.1 Medida de credibilidad y espacio de credibilidad	101
4.3.2 Variable difusa	104
4.3.3 Función de pertenencia y teorema de inversión de credibilidad.....	105
4.3.4 Distribución de credibilidad	108
4.3.4.1 Distribución de credibilidad de un número difuso L-R.....	108
4.3.5 Independencia	110
4.3.6 Aritmética difusa	111
4.3.7 Por qué adoptar la teoría de credibilidad.....	114
4.3.8 Valor esperado de una variable difusa.....	116
4.3.8.1 Valor esperado de un número difuso L-R	117
4.3.8.2 Valor esperado de otras variables difusas	119
4.3.9 Varianza de una variable difusa	120
4.3.9.1 Varianza un número difuso L-R	120

4.3.9.2 Varianza de otras variables difusas.....	123
4.3.10 Semivarianza de una variable difusa	124
4.3.10.1 Semivarianza de un número difuso L-R.....	126
4.3.10.2 Semivarianza de otras variables difusas	128
4.4 Resumen y conclusiones del capítulo.....	128

Capítulo 5. Caracterización de los mercados

de capitales de Latinoamérica	131
5.1 Introducción al tema	131
5.2 Análisis del tamaño, liquidez y concentración.....	133
5.2.1 Tamaño del mercado.....	134
5.2.2 Liquidez de mercado.....	140
5.2.3 Concentración del mercado	143
5.3 Análisis de volatilidad de los precios de las acciones y de los tipos de cambio	145
5.4 Análisis de correlación de los precios de las acciones y de los tipos de cambio	150
5.5 Impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de carteras de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos para un inversionista de Estados Unidos y cinco inversionistas de América Latina	151
5.6 Análisis del riesgo soberano	153
5.6.1 El problema de selección de carteras en Latinoamérica	158
5.7 Conclusiones.....	160

Capítulo 6. Modelo credibilístico multiobjetivo

de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras.....	163
6.1 Introducción al tema	163
6.2 Descripción del problema.....	164
6.2.1 Notación	165
6.2.2 Variables de decisión.....	165
6.3 Funciones objetivo	166
6.3.1 Rentabilidad	166
6.3.2 Riesgo.....	168
6.3.3 Liquidez	168
6.4 Restricciones	170

6.4.1 Presupuesto de capital.....	170
6.4.2 Ventas en corto.....	170
6.4.3 Cota máxima de participación de un activo en la cartera	170
6.4.4 Cota mínima de participación de un activo en la cartera	170
6.4.5 Cardinalidad.....	171
6.5 El problema de decisión.....	171
Capítulo 7. Solución metodológica.....	173
7.1 Introducción al tema	173
7.2 Base de datos	173
7.3 Tamaño de la muestra.....	175
7.4 Retorno esperado crisp credibilístico del i-ésimo activo.....	181
7.5 Liquidez esperada crisp credibilística del i-ésimo activo.....	182
7.6 Tasa libre de riesgo esperada crisp credibilística.....	182
7.7 Rentabilidad esperada de la cartera	184
7.8 Riesgo de la cartera.....	184
7.9 Liquidez esperada de la cartera.....	185
7.10 Restricciones	186
7.11 <i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)</i>	187
7.12 Parámetros NSGAI	189
Capítulo 8. Resultados experimentales	191
8.1 Introducción al tema	191
8.2 Retorno esperado crisp credibilístico del i-ésimo activo.....	191
8.3 Liquidez esperada <i>crisp</i> credibilística del i-ésimo activo	210
8.4 Asignación óptima de activos.....	210
8.4.1 Cartera I.....	228
8.4.2 Cartera II	228
8.4.3 Cartera III	229
8.4.4 Cartera IV	230
8.4.5 Fronteras óptimas de Pareto.....	230
8.4.6 Selección de las carteras óptimas.....	234
8.4.7 Rebalanceo de carteras.....	240

Capítulo 9. Conclusiones y desarrollos futuros.....	245
9.1 Conclusiones de la revisión de la literatura.....	245
9.1.1 Optimización de carteras.....	245
9.1.2 MOEAs en optimización de carteras.....	246
9.1.3 Teoría de la credibilidad.....	246
9.2 Conclusiones de la investigación empírica	246
9.2.1 Caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica.....	246
9.3.2 Modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras	247
9.3 Futuras líneas de investigación.....	248
Referencias.....	251

Índice de tablas

Tabla 3.1	Comparación de los MOEAs más conocidos y utilizados.....	81
Tabla 3.2	Los MOEAs más utilizados para resolver el problema de optimización de cartera.....	87
Tabla 5.1	Medidas de tamaño, liquidez y concentración 2014-2016	136
Tabla 5.2	Concentración mercados accionarios de Latinoamérica 2007-2016	144
Tabla 5.3	Matriz de correlación de los índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016	152
Tabla 5.4	Matriz de correlación de los tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016	152
Tabla 5.5	EMBIG de Latinoamérica 2000-2016.....	156
Tabla 5.6	Matriz de correlación de los EMBIG de Latinoamérica 2000-2016	157
Tabla 5.7	Calificación deuda soberana largo plazo moneda extranjera de Latinoamérica 2000-2016	159
Tabla 7.1	Número de compañías listadas en el mercado MILA a junio 2017	174
Tabla 7.2	Compañías del mercado MILA que durante el periodo de junio 2011 a diciembre 2015 cumplen con los tres criterios de selección.....	176
Tabla 7.3	Compañías del mercado MILA que durante el periodo de enero 2012 a junio 2015 cumplen con los tres criterios de selección	177
Tabla 7.4	Compañías del mercado MILA que durante el periodo de junio 2012 a diciembre 2016 cumplen con los tres criterios de selección	178
Tabla 7.5	Compañías del mercado MILA que durante el periodo de enero 2013 a junio 2017 cumplen con los tres criterios de selección	180

Tabla 7.6	Parámetros principales del algoritmo NSGAI.....	189
Tabla 8.1	Retornos difusos esperados (periodo I)	192
Tabla 8.2	Retornos difusos esperados (periodo II).....	196
Tabla 8.3	Retornos difusos esperados (periodo III)	201
Tabla 8.4	Retornos difusos esperados (periodo IV)	205
Tabla 8.5	Liquidez difusa esperada (periodo I).....	211
Tabla 8.6	Liquidez difusa esperada (periodo II)	215
Tabla 8.7	Liquidez difusa esperada (periodo III)	220
Tabla 8.8	Liquidez difusa esperada (cartera IV).....	224
Tabla 8.9	Rentabilidad objetivo difusa esperada (cartera I-IV)	235
Tabla 8.10	Rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV)	237
Tabla 8.11	Liquidez difusa esperada (carteras I-IV).....	239

Índice de figuras

Figura 1.1	Estructura de la tesis	25
Figura 2.1	Tipos de riesgos financieros.....	30
Figura 2.2	Medidas de riesgo en el problema de selección de carteras.....	31
Figura 2.3	Conjuntos eficientes y factibles	43
Figura 2.4	<i>Downside Risk</i>	47
Figura 2.5	CVaR y VaR para una distribución t de student	57
Figura 3.1	Transformación del vector de decisión al vector de respuestas	67
Figura 3.2	Relación de la dominancia de Pareto entre las soluciones candidatas relativas a la solución B	70
Figura 3.3	Frentes óptimos de Pareto para un mismo espacio de soluciones.....	72
Figura 3.4	Estructura general de un algoritmo evolutivo	76
Figura 3.5	Descomposición de tareas de un EA y un MOEA	79
Figura 3.6	Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas en NSGAI para dos objetivos	89
Figura 3.7	<i>Crowding-distance</i> usados en NSGAI para dos objetivos.	91
Figura 3.8	Esquema del funcionamiento de NSGAI	94
Figura 4.1	Funciones de pertenencia L-R y sus parámetros de forma	101
Figura 4.2	Distribuciones de credibilidad de una variable fuzzy L-R.....	110
Figura 4.3	Función de pertenencia triangular.....	114
Figura 4.4	Función de pertenencia del retorno de un cartera $\mu = (0, 1.5, 3)$	115
Figura 5.1	Tendencia de la tasa de crecimiento anual de la capitalización bursátil de Latinoamérica 2000-2016.....	135
Figura 5.2	Tasa de crecimiento promedio anual de la capitalización bursátil de Latinoamérica 2000-2016.....	137

Figura 5.3	Capitalización relativa promedio de Latinoamérica 2000-2016.....	138
Figura 5.4	Número de firmas registradas en bolsas de Latinoamérica 2000-2016	139
Figura 5.5	Tendencia de la tasa de crecimiento anual del volumen de acciones de Latinoamérica 2000-2016.....	141
Figura 5.6	Razón volumen de negociado en acciones/PIB de Latinoamérica 2010-2016	142
Figura 5.7	Tasa de rotación de Latinoamérica 2010-2016	142
Figura 5.8	Dominancia índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	145
Figura 5.9	Tendencia de la tasa de crecimiento semanal de los índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	147
Figura 5.10	Dominancia tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	148
Figura 5.11	Tendencia de los tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.....	149
Figura 5.12	Comportamiento de la rentabilidad nominal de una cartera que invierte en los índices accionarios de Latinoamérica para un inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015	154
Figura 5.13	Comportamiento de la rentabilidad real de una cartera que invierte en los índices accionarios de Latinoamérica para un inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015	154
Figura 5.14	Tendencia del EMBIG de Latinoamérica 2000-2016	156
Figura 6.1	Estimación núcleo, soporte y parámetros de forma del i -ésimo activo	167
Figura 7.1	Determinación de la población objeto de estudio.....	174
Figura 7.2.	Diagrama de flujo del NSGA-II.	187
Figura 7.3	Flujo de la información del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras	188
Figura 8.1	Tendencia de la tasa de crecimiento semanal de los activos seleccionados junio 2011- junio 2017.....	209

Figura 8.2	Fronteras óptimas de Pareto del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV)	231
Figura 8.3	<i>Downside Risk</i> y rentabilidad esperados correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (Carteras I-IV)	232
Figura 8.4	Liquidez y rentabilidad esperadas correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV)	233
Figura 8.5	<i>Downside Risk</i> y liquidez esperados correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV)	233
Figura 8.6	Asignación óptima de los activos de las carteras I-IV	236
Figura 8.7	Funciones de pertenencia rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV)	237
Figura 8.8	Distribuciones de credibilidad rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV)	238
Figura 8.9	Funciones de pertenencia liquidez difusa esperada (carteras I-IV)	239
Figura 8.10	Distribuciones de credibilidad liquidez difusa esperada (carteras I-IV)	240
Figura 8.11	Tendencia del comportamiento de la cartera rebalanceada frente a la cartera sin rebalancear enero 2016-octubre 2017	241
Figura 8.12	Tendencia del comportamiento de la cartera rebalanceada frente al ETF MILATRC marzo 2016-octubre 2017	242
Figura 8.13	Dominancia carteras óptimas frente al ETF MILATRC, marzo 2016-octubre 2017	242
Figura 8.14	Efecto del tipo de cambio en la rentabilidad de la cartera rebalanceada para un inversionista de Chile, Colombia, México y Perú, enero 2016-octubre 2017	243

Resumen

El presente trabajo de investigación doctoral tiene como finalidad optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad. Con el propósito de cumplir con este objetivo, se propone un novedoso modelo difuso de optimización denominado *Modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras*. La incertidumbre de la liquidez y el rendimiento futuro de cada activo se modela por medio de números difusos L-R con funciones de referencia tipo potencia. Con el objetivo de conseguir un modelo más realista se considera la restricción de cardinalidad que limita el número de activos que participan en las carteras y las restricciones de cotas superiores e inferiores que permiten combinaciones de activos que respetan las preferencias del inversor.

Con miras a la selección de una cartera óptima, esta investigación define, por primera vez, el *ratio* de Sortino, en un entorno credibilístico. El problema de optimización multiobjetivo resultante es lineal y convexo, y la introducción de restricciones realistas convierte el modelo de un problema de optimización cuadrática clásica (*classical quadratic optimization problem*) a uno de programación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que es *NP-hard*. Para superar este inconveniente se aplica el *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI), MOEA –que ha sido utilizado con éxito en la generación de soluciones eficientes en varios modelos multiobjetivos de selección de carteras–. Finalmente, se demuestran la efectividad y eficiencia del modelo en aplicaciones prácticas, pues se asume, por primera vez, la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que aglomera los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

Capítulo 1. Introducción

1.1 Antecedentes

La selección de carteras es uno de los temas más explorados y dinámicos de la teoría financiera moderna. Este hace referencia a la asignación de la riqueza del inversor entre diferentes tipos de activos financieros, con el objetivo no solo de minimizar el riesgo de la riqueza terminal, sino de que el valor esperado de esta también sea igual a un nivel prescrito. La primera formulación matemática del problema de selección de carteras fue el modelo clásico y seminal de media varianza propuesto por Markowitz (1952), quien asumió como una variable aleatoria la tasa de retorno de un activo, tomó la esperanza matemática y la varianza de esa variable aleatoria como el retorno y el riesgo respectivamente, y determinó la cartera óptima al resolver una programación cuadrática. Alternativamente, para mejorar el modelo de media varianza, Konno y Yamazaki (1991) propusieron el primer modelo de selección de carteras de programación lineal, al utilizar la desviación absoluta como medida alternativa para cuantificar el riesgo. Sin embargo, el modelo de desviación media absoluta es equivalente al modelo de media varianza si los rendimientos siguen una distribución normal multivariante (Vercher, Bermúdez, y Segura, 2007). Como puede apreciarse, cuando los rendimientos de la cartera son típicamente asimétricos, la varianza y la desviación absoluta no son apropiadas para medir el riesgo de la cartera, debido a que estas consideran en iguales condiciones tanto los retornos altos que el inversionista desea, como los retornos bajos no deseados (X. Li y Qin, 2014). En otras palabras, estas medidas de riesgo penalizan las desviaciones alcistas (*i.e.* ganancias) y bajistas (*i.e.* pérdidas) del retorno esperado (Gupta, Mittal, y Mehlawat, 2013). Para resolver este problema, varias medidas de riesgo de tipo *downside* (*i.e.* medidas que solo consideran como arriesgados los resultados por debajo de un nivel de referencia) han sido propuestas: semivarianza (Markowitz, 1959), momento parcial más bajo (*lower partial moment*) (Bawa, 1975; Fishburn, 1977), semidesviación absoluta (Speranza, 1993), valor en riesgo (*VaR*)

(J.P. Morgan, 1996) y valor en riesgo condicional (*CVaR*) (Rockafellar y Uryasev, 2000, 2002), entre otras. Una de las medidas de riesgo *downside* más comúnmente aceptadas es la semivarianza, introducida inicialmente por Markowitz (1959) y posteriormente desarrollada y analizada en modelos de selección de carteras de media semivarianza (Choobineh y Branting, 1986; Estrada, 2004; Grootveld y Hallerbach, 1999; Mao y Brewster, 1970; Markowitz, Todd, Xu, y Yamane, 1993; Rom y Ferguson, 1994).

La ventaja principal sobre la varianza es que la semivarianza no considera los valores por encima de un valor crítico (*i.e.* ganancias) como riesgo (Gupta, Mittal *et al.*, 2013), y es una medida de riesgo más apropiada cuando un inversionista está más interesado en la factibilidad de reducir o cubrir sus posibles pérdidas y la variabilidad de estas, que en las de sus posibles ganancias (Markowitz *et al.*, 1993). No obstante, cabe señalar que el modelo de media semivarianza es computacionalmente más complejo que el de media varianza (Grootveld y Hallerbach, 1999; Markowitz *et al.*, 1993).

Tradicionalmente, en la mayoría de los modelos de selección de carteras existentes las decisiones de los inversionistas se rigen por dos criterios fundamentales: el retorno y el riesgo (Konno y Yamazaki, 1991; Markowitz *et al.*, 1993; Speranza, 1993). Sin embargo, en el proceso de selección de carteras se encuentra con frecuencia que no toda la información relevante para la toma de decisiones de inversión puede capturarse solo por el retorno y el riesgo. En este sentido, es importante tener en cuenta otros criterios que podrían tener un nivel de importancia igual o mayor para el inversionista. Cuando estos se consideran en un modelo de selección de carteras, es posible obtener portafolios en los que un rendimiento o riesgo menos favorables se compensan por los beneficios adicionales que le aportan al desempeño de la cartera la inclusión de otros criterios, lo que genera un mayor nivel satisfacción para el inversionista (Gupta, Inuiguchi, Mehlatat y Mittal, 2013). Por estas razones, la aplicación de modelos de toma de decisiones multiobjetivo para resolver el problema de optimización de carteras ha registrado un aumento considerable en los últimos años (Anagnostopoulos y Mamanis, 2010; Babaei, Sepehri, y Babaei, 2015; Branke, Scheckenbach, Stein, Deb y Schmeck, 2009; Chunchachinda, Dandapani, Hamid y Prakash, 1997; Hallerbach y Spronk, 2002; Joro y Na, 2006; Konno y Yamazaki, 1991; Lwin, Qu, y MacCarthy, 2017).

En la mayoría de los estudios antes mencionados, el retorno de los activos se asume como una variable aleatoria, y la teoría de la probabilidad fue la principal herramienta matemática para tratar la incertidumbre en el pasado. No obstante, el mundo es complejo y la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad, especialmente cuando se incluyen factores humanos (Huang, 2010). En los mercados financieros la información disponible es a menudo incompleta, lo que conduce a que las decisiones se tomen bajo incertidumbre. Por otra parte, los mercados se ven afectados por la vaguedad y la ambigüedad asociadas a expresiones lingüísticas como “alto riesgo”, “bajo rendimiento” y “baja liquidez”, que emplean los inversionistas y los expertos en este tema (Gupta, Inuiguchi *et al.*, 2013; Gupta, Mittal *et al.*, 2013). Debido a la información vaga y ambigua, varios investigadores han utilizado la teoría de conjuntos difusos (Zadeh, 1965) en el problema de selección de carteras para integrar la información cualitativa y cuantitativa, las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento experto. Una rica literatura disponible propone diferentes aproximaciones para cuantificar la incertidumbre del rendimiento futuro del activo mediante distribuciones de posibilidad (Carlsson, Fullér y Majlender, 2002; Dubois y Prade, 1985; Saborido, Ruiz, Bermúdez, Vercher y Luque, 2016; Vercher *et al.*, 2007; S. Wang y Zhu, 2002; Yue y Wang, 2017). Aunque la medida de posibilidad ha sido ampliamente utilizada, no es auto-dual. Como alternativa, B. Liu y Liu (2002) propusieron una medida de credibilidad auto-dual para superar las limitaciones de la medida de posibilidad. Desde entonces, algunos investigadores sugieren modelar la incertidumbre del rendimiento futuro del activo mediante distribuciones de credibilidad (Barak, Abessi y Modarres, 2013; Huang, 2006; Jalota, Thakur y Mittal, 2017a; Mehlawat, 2016; Vercher y Bermúdez, 2015; B. Wang, Li, y Watada, 2017).

Un aspecto importante por considerar en los modelos difusos de optimización de cartera está relacionado con la selección apropiada de la función de pertenencia que mejor se ajuste a los datos históricos de los rendimientos de los activos. Existe una gran cantidad de fuentes bibliográficas que utilizan funciones de pertenencia convencionales, como la lineal, la trapezoidal, la triangular y la sigmoide (Gupta, Mittal *et al.*, 2013; X. Li, Zhang, Wong y Qin, 2009; Mashayekhi y Omrani, 2016; Qin, 2017; Qin, Li, y Ji, 2009; Yue y Wang, 2017) para este propósito. En un esfuerzo por buscar

un mejor ajuste de la representación difusa de los datos históricos, algunos investigadores han venido utilizando números difusos de tipo L-R, debido a que la función de pertenencia generada por estos es más flexible, y, además, es una mejor opción para este tipo de proceso de modelado (Jalota *et al.*, 2017a; Jalota, Thakur y Mittal, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015).

1.2 Motivaciones de la investigación

Una vez expuestos los antecedentes de algunas investigaciones previas relacionadas con el objeto de estudio de la presente publicación, esto es, el problema de selección de carteras, a continuación resulta conveniente describir las razones que ayudaron a perfilar el eje central de la presente tesis doctoral y que han servido de motivación para la realización de la misma:

- La mayoría de los modelos de optimización basados en el ajuste de números difusos LR para modelar los parámetros inciertos de una cartera revisados hasta la fecha (Jalota *et al.*, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015) se enfocan en modelar directamente la incertidumbre del rendimiento esperado de la cartera, en lugar de utilizar la combinación de incertidumbres proporcionadas por los rendimientos de los activos individualmente considerados. De acuerdo con la revisión literaria realizada, existen solo tres estudios en los cuales la incertidumbre sobre el rendimiento de cada activo individual se modeliza como un número difuso L-R (Jalota *et al.*, 2017a; Vercher, 2008; Vercher *et al.*, 2007). La principal ventaja de utilizar números difusos L-R para los activos individuales es que esta decisión permite obtener una mejor información sobre el comportamiento de cada activo y, por consiguiente, se contribuye mejor a la formación de la cartera (Jalota *et al.*, 2017a). Por lo anterior, es lógico extender la literatura a un modelo de selección de carteras al asumir que la rentabilidad de cada activo individual se representa mediante un número difuso de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias.
- Una cuestión importante que ha revelado la revisión de los estudios es que una gran parte de los modelos de selección de carteras basados en ajustes de números difusos L-R se han constituido bajo un entorno posibilístico.

Con base en los conocimientos del autor de este trabajo, solo existen tres estudios en los que los investigadores han modelizado la incertidumbre del rendimiento de una cartera mediante distribuciones de credibilidad (Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; Vercher y Bermúdez, 2015). Aunque la medida de posibilidad ha sido extensamente utilizada en la literatura para representar la tasa de rendimiento de los activos en la teoría de selección de carteras, es inconsistente con la ley de medio excluido y con la ley de contradicción. A modo de ejemplo, un evento difuso puede fallar, aunque su valor de posibilidad sea 1, y se puede mantener, aunque su valor de necesidad sea 0. Esto obedece a que la medida de posibilidad no satisface la propiedad de dualidad, plenamente necesaria en la teoría y en la práctica. Asimismo, es importante resaltar que un evento difuso seguramente ocurrirá si su valor de credibilidad es 1, es decir, el evento difuso se mantendrá si su valor de credibilidad es 1, y fallará si este es 0 (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi y Chandra, 2014b). Para este propósito es fundamental comprender el uso de la medida de credibilidad como la medida básica de la ocurrencia de un evento difuso y es vital estudiar su aplicación en los modelos de toma de decisiones multiobjetivo para resolver el problema de optimización de carteras.

- En los estudios disponibles sobre el tema se evidencia que existe una fuerte dependencia de la varianza como una medida de riesgo en los modelos de optimización de carteras (Mehlawat, 2016; Metaxiotis y Liagkouras, 2012). Según se ha citado, para que la varianza difusa sea una medida de riesgo eficiente, la función de pertenencia de los retornos de los activos financieros debe ser simétrica, lo que resulta en una aceptación limitada de la varianza como medida de riesgo. De esta manera, la semivarianza como medida de riesgo *downside* no depende de un determinado tipo de función de pertenencia simétrica y puede calcularse a partir de datos no simétricos. Según las pesquisas del autor, solo existen dos investigaciones en las que se adoptó la semivarianza como medida de riesgo en un modelo credibilístico de optimización basado en el ajuste de números difusos L-R para modelar los parámetros inciertos de la cartera (Jalota *et al.*, 2017a, 2017b). Como puede apreciarse, la consideración de la semivarianza como medida de riesgo en un entorno credibilístico no se ha estudiado mucho, a pesar de que esta es más dinámica y general que la varianza, y no depende de ninguna función de pertenencia específica. Dada esta condición, resulta

oportuno realizarle un aporte a la literatura y considerar la semivarianza como la medida de riesgo en un modelo de optimización de carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad.

- La mayoría de los modelos difusos de optimización de carteras revisados hasta la fecha han sido evaluados en mercados financieros como la Bolsa de Madrid (España), la Bolsa de Valores de Bombay (India), de Shanghai (China) y la de Nueva York (USA), entre otros. Según el leal saber y entender, no existen estudios numéricos y experimentales que se hayan desarrollado en los mercados financieros latinoamericanos. A este respecto, el presente estudio hace una contribución al proponer un modelo difuso multiobjetivo de selección de carteras, donde se asume por primera vez la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.
- Además de la rentabilidad y el riesgo, la liquidez es también una de las principales preocupaciones de los inversionistas al tomar decisiones. Generalmente, los inversores prefieren una mayor liquidez de sus carteras, en especial cuando el mercado presenta una tendencia alcista, debido a que los rendimientos de los activos altamente líquidos tienden a aumentar con el paso del tiempo. Una revisión de las fuentes bibliográficas mostró que la liquidez se ha considerado como una variable difusa en modelos de selección de carteras (Arenas-Parra, Bilbao-Terol, y Rodríguez-Uría, 2001; Gupta, Inuiguchi, y Mehlawat, 2011; Gupta, Mehlawat, y Saxena, 2008; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b). Debido a la importancia de la liquidez de los activos, y debido a la preferencia de los inversionistas de poseer una cartera que sea fácilmente liquidada, es útil incorporar el criterio de liquidez al formular el modelo de selección de carteras y obtener estrategias de inversión multiobjetivo bajo un entorno de decisión difusa.
- El concepto de cartera óptima recae en la teoría moderna de portafolio (Markowitz, 1952), la cual asume –entre otras cosas– que los inversionistas actúan racionalmente y sus decisiones siempre estarán orientadas a maximizar la rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo, o minimizar el riesgo soportado para un determinado nivel de rentabilidad esperada. En este propósito se requiere establecer

medidas o indicadores que relacionen la rentabilidad obtenida por una cartera con el riesgo asociado a esta, lo que permite, de esta forma, una correcta evaluación y comparación de los resultados obtenidos en una cartera dada. Para tal fin, se han desarrollado las llamadas medidas de *performance* de las carteras, basadas en los dos elementos definitorios de estas: la rentabilidad y el riesgo. Entre las medidas de *performance* se encuentra el ratio de Sortino (Sortino y Forsey, 1996; Sortino y Price, 1994; Sortino y Van Der Meer, 1991), que permite medir la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de un activo o cartera. El ratio de Sortino es una modificación del ratio de Sharpe (Sharpe, 1994), y se fundamenta en el supuesto de que el objetivo de los inversionistas es el de minimizar la volatilidad proveniente de los retornos negativos (*i.e.* volatilidad no deseada). De acuerdo con la revisión literaria de esta investigación, no existen estudios en los cuales se haya aplicado el ratio de Sortino en un entorno credibilístico. En este sentido, para seleccionar la cartera óptima de la frontera eficiente, este estudio define por primera vez el ratio credibilístico de Sortino como la relación entre la prima de riesgo y la semivarianza credibilísticas.

1.3 Objetivos

Una vez expuestos los motivos que justifican la realización de la presente tesis doctoral, resulta necesario plantear los objetivos que se persiguen con la misma, con el fin de delimitar los ejes fundamentales de la investigación.

En el marco de este proyecto se ha identificado un objetivo principal, que se desglosa, a su vez, en cuatro objetivos secundarios:

1.3.1 Objetivo general

Optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA).

1.3.2 Objetivos específicos

- Caracterizar la situación actual de los mercados de capitales de Latinoamérica.

- Plantear un modelo credibilístico de tres objetivos para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado.
- Aplicar el modelo credibilístico multiobjetivo de selección de carteras en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA).
- Presentar las conclusiones y aportaciones del estudio a la comunidad académica y científica.

1.4 Estructura de la tesis

La investigación se divide en seis partes, como se apreciará en la figura 1.1. En la primera parte, en el capítulo 1, se exponen los antecedentes, las motivaciones y los objetivos de la investigación. En la segunda parte, los capítulos 2, 3 y 4 examinan el estado del arte de la optimización de carteras, los algoritmos evolutivos multiobjetivo en la optimización de carteras y la teoría de la credibilidad. La tercera parte corresponde al capítulo 5 e introduce una caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica durante el periodo de enero de 2000 a diciembre de 2016. En la cuarta sección, los capítulos 6 y 7 proponen el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras, y explican la solución metodológica para resolver el modelo con la aplicación del algoritmo NSGAI (*Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II*). En la quinta parte, en el capítulo 8, se testea el modelo propuesto al usar los retornos históricos semanales de los mercados accionarios de Chile, Colombia, México y Perú entre junio de 2011 y junio de 2017. Este capítulo también incluye una discusión de los resultados obtenidos. Finalmente, la sexta parte corresponde al capítulo 9, el cual consolida las conclusiones y establece posibles líneas futuras de investigación que se generen a raíz de los resultados expuestos en este texto.

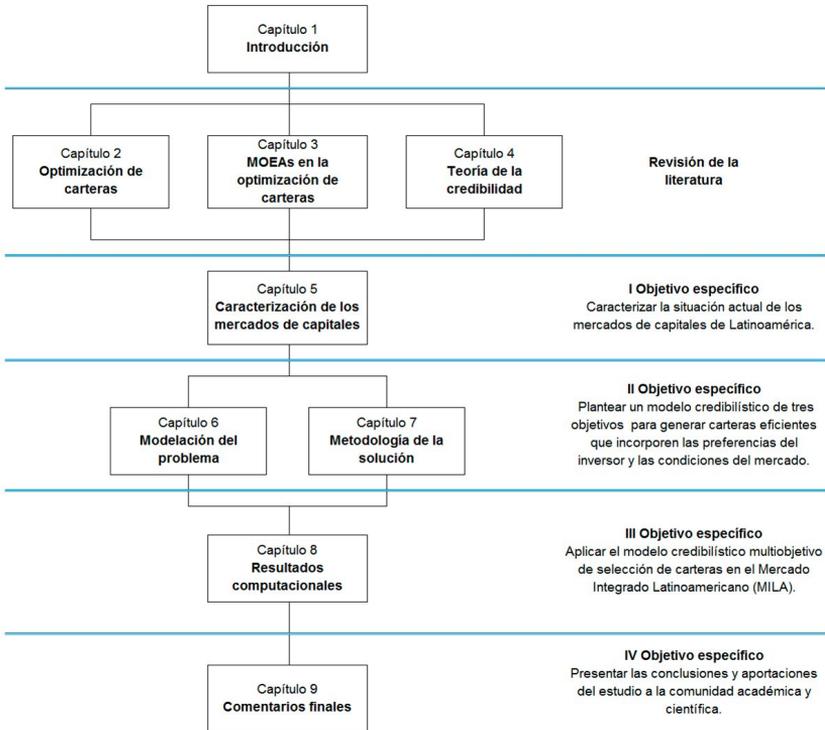


Figura 1.1. Estructura de la tesis.

Capítulo 2. Optimización de carteras

2.1 Introducción al tema

La teoría de optimización de carteras ha sido fundamental para el desarrollo y entendimiento de los mercados financieros y la toma de decisiones en ese contexto. El mayor avance en este campo lo produjo el profesor Harry Markowitz en 1952, con la publicación de su artículo seminal *Portfolio Selection* (Kolm, Tütüncü y Fabozzi, 2014). Esta innovadora teoría proporcionó una respuesta a la pregunta fundamental: ¿cómo un inversionista debe asignar sus fondos entre las diferentes alternativas de inversión? En primer lugar, Markowitz cuantificó el retorno y riesgo de un activo, con el uso de las medidas estadísticas de su media y varianza, respectivamente. En segundo lugar, sugirió que los inversionistas deberían considerar en conjunto la rentabilidad y el riesgo, y determinar la asignación de sus fondos entre las diferentes alternativas de inversión en función del *trade-off* entre el riesgo y la rentabilidad.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la idea propuesta por Markowitz de que un óptimo *trade-off* entre la rentabilidad y el riesgo debería ser la base de la toma de decisiones financieras, constituyó un aporte sin precedentes por dos razones fundamentales: en primer lugar, postuló que una evaluación cuantitativa conjunta del rendimiento y del riesgo de una cartera se podría llevar a cabo considerando los retornos de los activos y sus comovimientos. Un principio importante de esta innovadora propuesta fue el de la diversificación de la cartera, que se basa en la idea de que el riesgo de un portafolio depende de la covarianza de los activos que lo componen y no del riesgo promedio de los mismos (Fabozzi, Kolm, Pachamanova y Focardi, 2007; Mascareñas, 2015). Este concepto fue ajeno al análisis financiero clásico (análisis *ad hoc*) descrito por Graham y Dodd (1934), que giraba en torno a la valoración de los activos individuales, principalmente a través del uso del balance general y el estado de resultados, y diseñados para identificar aquellos activos que se vendían por debajo o por encima de su valor intrínseco o su valor en libros (Bhalla, 2008). En segundo lugar, Markowitz formuló el proceso de decisión financiera como

un problema de optimización, y sugirió que entre un número infinito de carteras que logran un retorno objetivo y específico, el inversionista debe elegir aquella que ofrece la varianza más pequeña. Todas las demás carteras son “ineficientes” debido a que poseen una mayor varianza y, por lo tanto, un mayor riesgo (Fabozzi *et al.*, 2007).

El trabajo de Markowitz ha tenido un alto impacto en la investigación académica y en la industria financiera en su conjunto (Kolm *et al.*, 2014). Al realizar algunas búsquedas en Internet con motivo de esta tesis doctoral se revela que 122 000 artículos en Google Académico citan el artículo original de Markowitz, *Portfolio Selection*. Cuando se busca “Modern Portfolio Theory” se obtienen aproximadamente 1 230 000 aciertos en Google, 3 410 videos en YouTube, 105 libros en Amazon y miles de entradas en Twitter.

No obstante, al realizar una comparación entre los supuestos simplistas del modelo inicial de Markowitz y las condiciones existentes en el mundo real a las que se enfrentan los decisores (p.ej. requisitos adicionales sobre el número o proporción de los activos seleccionados, la distribución de los rendimientos, etc.), se evidencia la necesidad de mejorarlo, y como consecuencia, se ha producido una creciente complejidad en los modelos que estudian el problema de selección de carteras (Ponsich, Jaimes y Coello, 2013). En el orden de las ideas anteriores, el modelo de media varianza (Markowitz, 1952) ha sido extendido mediante la introducción de nuevas medidas del riesgo de la inversión: semivarianza (Markowitz, 1959), desviación absoluta (Konno y Yamazaki, 1991), valor en riesgo (J.P. Morgan, 1996), entre otras, y de factores que permiten modelizar los requisitos del inversionista y de los mercados financieros: costes de transacción, horizonte multiperiodo, cardinalidad restringida, entre otros (Vercher, 2015).

En el marco de las observaciones anteriores, la sección 2.1 de este capítulo pretende revisar de manera sistemática la literatura que analiza no solo el modelo clásico de optimización de media varianza, sino también varias extensiones de este modelo considerando medidas alternativas de riesgo. En la sección 2.2 se ahonda en los aspectos relacionados con la optimización de carteras en la práctica. Finalmente, la sección 2.3 presenta el resumen y las conclusiones correspondientes a este capítulo.

2.2 Medidas de riesgo en el problema de selección de carteras

A pesar del frecuente uso del término “riesgo”, no existe una definición formal del vocablo y, por lo tanto, el entendimiento común del mismo posee una inherente característica de subjetividad. La definición que da *el Diccionario de la Real Academia Española* (2014) sobre riesgo es “contingencia o proximidad de un daño”, es decir, es la posibilidad de que ocurra (o no ocurra) un evento “negativo”. En este contexto, el riesgo solo se “materializará” cuando un evento suceda, aunque este puede estar siempre presente (Alonso y Berggrun, 2015). Desde el punto de vista matemático, el riesgo generalmente no distingue entre desviaciones positivas o negativas, y se modela como una variable aleatoria (Cottin y Döhler, 2009; Danthine y Donaldson, 2005), donde la función de densidad describe la probabilidad de que el riesgo tome un determinado valor.

En finanzas, el concepto de riesgo se relaciona con una pérdida o una ganancia. Dowd (2002) define el riesgo financiero como “la perspectiva de pérdidas o ganancias financieras debido a cambios imprevistos en los factores de riesgo subyacentes” (p. 1). Usualmente, según su naturaleza, los riesgos financieros se dividen en riesgo de mercado, riesgo de crédito, riesgo de operación y riesgo de liquidez (McNeil *et al.*, 2005; Unger y Poddig, 2014), tal y como se muestra en la figura 2.1.

En relación con la clasificación anterior, Dowd (2002) señala que dentro del riesgo de mercado se encuentran otros tipos más específicos de factores, como por ejemplo, el riesgo del subyacente, el riesgo de tasas de interés, el de tipo de cambio, el asociado al precio de los *commodities*, entre otros. En este propósito, esta tesis doctoral cubre el aspecto vinculado con el riesgo de mercado, que es el que se deriva de la variación en los precios de mercado de los activos en una cartera dada.

Es importante tener presentes las actitudes que los inversionistas adoptan hacia al riesgo y cómo estas influyen en el proceso de toma de decisiones financieras. Según se ha citado, el riesgo es generalmente subjetivo y depende de la situación. Las actitudes del inversionista frente al riesgo depen-

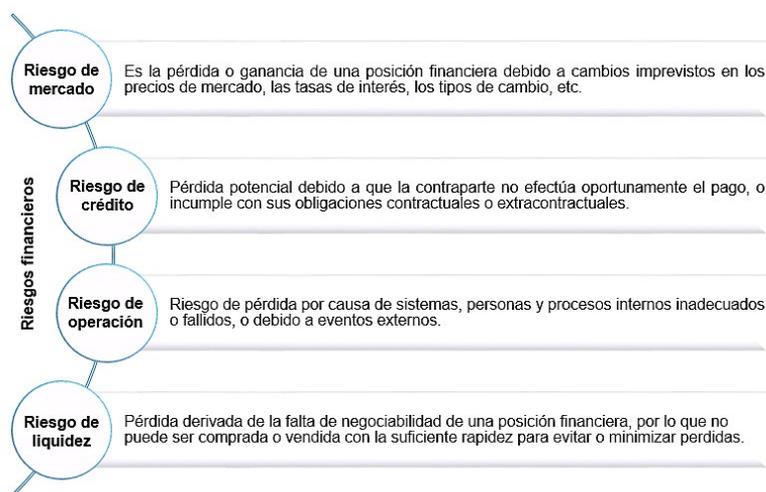


Figura 2.1. Tipos de riesgos financieros. Fuente: elaboración propia a partir de McNeil, Frey y Embrechts (2005), y Unger y Poddig (2014).

den de las preferencias individuales, que pueden ser conceptualizadas a través de la teoría de la utilidad¹ (Dowd, 2005). De acuerdo con los planteamientos presentados por Hanisch (2006), una medida de riesgo representa la cantidad del grado de incertidumbre, o el nivel de consecuencias negativas que el inversionista está dispuesto a tomar en una decisión bajo riesgo. En este sentido, por un lado, las medidas de riesgo capturan la incertidumbre sobre cuáles serán los posibles resultados que ocurrirán y, por otra parte, cómo los resultados negativos influyen en las decisiones del inversor. En este propósito, diferentes medidas de riesgo se han establecido para cuantificar no solo la densidad de una variable

¹ La teoría de la utilidad se ocupa de las preferencias de los individuos en las situaciones que conllevan la toma de decisiones (Fishburn, 1970, p. 1). En este contexto, las decisiones y la teoría de la utilidad están estrechamente relacionadas. Fishburn (1970) señala: “Para una relación entre decisión y preferencia, se asumirá que las preferencias, en mayor o menor medida, rigen las decisiones, y, en términos generales, un tomador de decisiones preferiría implementar una alternativa más preferida que una menos preferida” (p. 1).

aleatoria, sino también para reflejar las preferencias subjetivas del inversionista (Unger y Poddig, 2014).

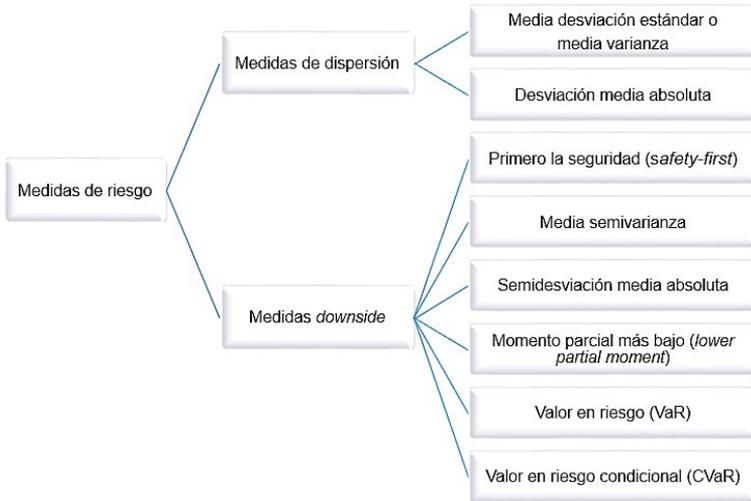


Figura 2.2. Medidas de riesgo en el problema de selección de carteras.
Fuente: elaboración propia a partir de Fabozzi *et al.* (2007).

Como muestra la figura 2.2, en el problema de selección de carteras se distinguen dos tipos de medidas de riesgo: las de dispersión y las *Downside*² (Fabozzi *et al.*, 2007; Ortobelli, Rachev, Stoyanov, Fabozzi y Biglova, 2005). A continuación, se presentará una revisión de estas medidas y su uso en la optimización de carteras.

2.2.1 Medidas de riesgo de dispersión

Se les conoce también como medidas de incertidumbre. Sin embargo, la incertidumbre no cuantifica necesariamente el riesgo. Estas medidas de

² En términos anglosajones, al riesgo de las pérdidas se le llama “*downside risk*”, y al riesgo de las ganancias, “*upside risk*”.

riesgo, denominadas también “simétricas”, penalizan los rendimientos tanto por encima como por debajo del rendimiento esperado. En otras palabras, no hacen distinción entre las desviaciones positivas (*i.e.* ganancias) y las negativas (*i.e.* pérdidas) respecto al valor esperado del rendimiento (Fabozzi, Focardi y Kolm, 2010). A continuación, se analizarán las medidas de riesgo simétricas de varianza y desviación absoluta.

2.2.1.1 Media desviación estándar o media varianza³

El paso más importante en la dirección de la gestión cuantitativa de carteras fue realizado por Markowitz (1952) con la introducción del modelo de optimización de cartera basado en un contexto bicriterio de riesgo-retorno (media-varianza). Inicialmente, este modelo generó relativamente poco interés, pero, con el tiempo, las comunidades científica y financiera adoptaron la tesis. En la actualidad, los principios introducidos a través de este modelo siguen siendo el núcleo de varios enfoques modernos para la asignación de activos, análisis de inversiones, gestión de riesgos, presupuestos de capital y toma de decisiones en condiciones de incertidumbre (Zopounidis, Doumpos y Fabozzi, 2014). En 1990, Harry Markowitz, Merton Miller y William Sharpe recibieron el Premio Nobel por su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera⁴.

La teoría de Markowitz, popularmente referida como teoría moderna de portafolio, proporcionó una respuesta a la siguiente pregunta fundamental: ¿cómo debería un inversionista asignar el capital entre las posibles opciones de inversión? El análisis de cartera se debe fundamentar en algunos criterios que sirvan de guía para lo importante y lo poco importante, lo relevante y lo irrelevante (Azmi, 2013). Algunos de estos criterios incluyen la liquidez, la clase de activos, la región de los activos, la microeconomía,

³ La varianza y la desviación estándar se consideran como una misma medida de riesgo debido a que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

⁴ Markowitz recibió el premio por haber desarrollado la teoría de selección de carteras; Sharpe, por sus contribuciones a la teoría de la formación de precios de activos financieros y el desarrollo del modelo de valoración del precio de los activos financieros o *capital asset pricing model* (conocido como modelo CAPM); y Miller, por su trabajo en la teoría de las finanzas corporativas.

la macroeconomía y la dinámica del mercado (Azmi y Tamiz, 2010). La elección adecuada de estos criterios depende de la situación y la naturaleza del inversionista. Para cada tipo de inversionista, los detalles del análisis de la cartera deben seleccionarse adecuadamente. No obstante, hay dos criterios que son comunes a todos los inversionistas: la media (retorno esperado) y la varianza del retorno (riesgo). Para Markowitz, las “creencias” o proyecciones respecto a los activos siguen las mismas reglas de probabilidad que obedecen a las variables aleatorias. Bajo esta suposición, se deduce que el rendimiento esperado de la cartera es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos individuales, y la varianza del rendimiento de la cartera es una función particular de las varianzas de, y las covarianzas entre los activos y sus pesos en la cartera (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi y Chandra, 2014a). Por lo tanto, los inversionistas deben considerar de forma conjunta el riesgo y el retorno, y determinar la asignación de capital entre las alternativas de inversión sobre la base del principio *trade-off* entre ellos (Kolm *et al.*, 2014). Además, Markowitz sugirió que la selección de carteras debe basarse más en las creencias razonables sobre el desempeño futuro que el desempeño pasado *per se*. Las percepciones con fundamento en los desempeños pasados asumen, en efecto, que el promedio de los retornos en el pasado son buenas estimaciones del retorno “probable” en el futuro, y la varianza del retorno en el pasado es una buena medida de la incertidumbre del retorno en el futuro (Gupta *et al.*, 2014a).

La sabiduría convencional siempre ha dicho: “No ponga todos los huevos en una sola canasta”. En términos más técnicos, este viejo adagio alude a los beneficios de la diversificación (Fabozzi, Gupta y Markowitz, 2002). A tal efecto, es importante señalar que Markowitz, a través de su modelo de media varianza, fue el primero en mostrar los efectos de la diversificación, es decir, la reducción del riesgo a través de la asignación del capital entre varios activos financieros. En esencia, la diversificación se fundamenta en las características de retorno-riesgo (*i.e.* covarianza o correlación) de los diferentes activos. Sin embargo, “más” activos podría no ser necesariamente una “buena” alternativa, si todos los activos exhiben las mismas características de retorno-riesgo. En otras palabras, invertir todo el dinero en activos que están altamente correlacionados no es una estrategia de inversión muy prudente, por más pequeña que sea la probabilidad de que un activo cualquiera tenga un mal desempeño. Esto se debe, en parte, a que si un único activo tiene un mal desempeño, es probable que, debido a su alta

correlación con los otros activos, estos también presenten un mal desempeño, lo que afecta el rendimiento de la cartera. Por lo tanto, una “buena” cartera estaría compuesta por activos cuyas características de retorno-riesgo presentan diversas diferencias (Fabozzi *et al.*, 2007; Gupta *et al.*, 2014a).

Es bien sabido que la distribución de los rendimientos de los activos no es normal y a menudo exhiben colas gordas o pesadas⁵ (Boudt, Lu y Peeters, 2015; Fama, 1965b; Jansen, Koedijk, y De-Vries, 2000; Y.S. Kim, Giacometti, Rachev, Fabozzi y Mignacca, 2012; Mandelbrot, 1963a, 1963b). Así mismo, hay cierta evidencia de que las varianzas de los retornos de algunos activos no son limitadas (*i.e.* son infinitas, y por lo tanto, no existen) (Fabozzi *et al.*, 2007). De igual forma, se ha probado que si los rendimientos de los activos se comportan como una distribución de Paretoestable, la diversificación puede ya no ser una actividad económica significativa (Fama, 1965a). Bajo este contexto, el principio de la diversificación se podría poner en duda. No obstante, la mayoría de los estudios están de acuerdo en que un cierto nivel de diversificación es alcanzable en los mercados (Campbell, Lettau, Malkiel y Xu, 2001; Evans y Archer, 1968; Malkiel, 2002; Vardharaj, Fabozzi y Jones, 2004).

El concepto de diversificación es tan intuitivo y tan influyente que ha sido continuamente aplicado en diferentes áreas de las finanzas. En efecto, una gran parte de las innovaciones que rodean a las finanzas ha estado en la aplicación del concepto de diversificación o en la introducción de nuevos métodos para obtener mejores estimaciones de las varianzas y covarianzas, lo que posibilita una mayor precisión tanto en la diversificación como en la medida de riesgo. Sin embargo, el riesgo general de la cartera va más allá de la desviación estándar de esta. Una cartera con una baja desviación estándar esperada podría tener un mal desempeño, pues existen otras di-

⁵ La presencia de colas gordas o pesadas es debido al exceso de curtosis de una distribución empírica en relación con la supuesta por una normal teórica. Este exceso incrementa la probabilidad de presenciar valores grandes y pequeños a costa de disminuir la probabilidad de ocurrencia de los valores moderados. Como se sabe, la curtosis de una distribución normal es 3 (mesocúrtica). Si la distribución empírica tiene curtosis menor que 3 se dice que esta es platocúrtica y si tiene valores mayores que tres, entonces, se dice que es leptocúrtica o de colas gordas (Ramírez-Sánchez, 2004).

mension de riesgo que se deben considerar al diseñar una política de inversión (Fabozzi, Focardi y Kolm, 2006). A continuación se presentará la formulación matemática del modelo de media varianza propuesto por Markowitz (1952):

- **Definición 2.1: rendimiento de un activo** (Gupta *et al.*, 2014a)

Este se expresa como la tasa de rendimiento, que se define durante un período dado como:

Donde:

$$r_{it} = [(p_{it} - p_{it-1}) + d_{it}] / (p_{it-1}) \quad 2.1$$

r_{it} = Variable aleatoria que representa la tasa de rendimiento (por período⁶) del i -ésimo activo ($i = 1, 2, \dots, n$).

p_{it} = Precio de cierre del periodo actual.

p_{it-1} = Precio de cierre del periodo anterior.

d_{it} = Dividendo(s) en el periodo.

Otra definición del rendimiento de un activo es el retorno continuo o logarítmico en un periodo t , y es dada por:

$$r_{it} = \text{Ln} \left[\frac{(p_{it} - p_{it-1}) + d_{it}}{p_{it-1}} \right] = \text{Ln} [(p_{it} - p_{it-1}) + d_{it}] - \text{Ln} (p_{it-1}) \quad 2.2$$

Donde:

$\text{Ln}(\cdot)$ = Corresponde a la función de logaritmo natural.

Es importante anotar que el retorno continuo (fórmula 2.2) es aproximadamente igual al cálculo del retorno discreto (fórmula 2.1), es decir, que las diferencias son pequeñas, más aun cuando se utilizan períodos cortos (Unger y Poddig, 2014). No obstante, emplear el retorno continuo implica algunas desventajas y beneficios.

⁶ Nótese que el período de retorno puede ser un día, una semana, un mes o un año.

La ventaja de utilizar los retornos continuos radica en la facilidad de conversión de los rendimientos en diferentes períodos, y en las propiedades estadísticas (p.ej. si se conocen los rendimientos diarios, el rendimiento mensual puede calcularse simplemente como la suma de los rendimientos diarios presentados durante el mes). Una desventaja del retorno discreto es que no es simétrico, mientras que el rendimiento continuo muestra una densidad que sí lo es, y que está más en línea con la distribución normal o gaussiana, que es una suposición en varias teorías financieras (Unger y Poddig, 2014).

Para una buena comprensión de la aplicabilidad y las limitaciones de las tasas de rendimiento continua o discreta de un activo en la teoría de carteras, es necesario presentar la siguiente definición:

- **Definición 2.2: cartera** (Gupta *et al.*, 2014a)

Una cartera es un conjunto de dos o más activos representados por una n -tupla⁷ ordenada $\Theta = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, donde ω_i simboliza la proporción o el peso relativo de los fondos invertidos en el i -ésimo activo. Bajo esta definición, el rendimiento esperado (por periodo) de una inversión (cartera) se da por:

$$r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right]. \quad 2.3$$

Donde:

$E[\cdot]$ = Representa el valor esperado de la variable aleatoria en el paréntesis y $r_i = E[r_i]$.

El valor esperado de la variable aleatoria también puede ser aproximado por el promedio derivado de los datos pasados, es decir:

⁷ Una tupla es una lista ordenada de elementos. Una n -tupla es una secuencia (o lista ordenada) de n elementos, siendo n un número natural (entero no-negativo).

$$r_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_{i_t}. \quad 2.4$$

Una vez vista la anterior definición, y para dar por concluido el análisis de la incidencia de las tasas de retorno logarítmicas o discretas de un activo en los modelos de optimización de carteras de media varianza, es importante señalar que la principal desventaja de utilizar el rendimiento continuamente compuesto (r_i^{Log}) es que el rendimiento de una cartera no corresponde al promedio ponderado de los rendimientos de cada uno de los activos (Alonso y Berggrun, 2015). Véase la explicación de este detalle:

$$r_p^{\text{Log}} = \text{Ln} \left[\frac{VP_t}{VP_{t-1}} \right] = \text{Ln}(VP_t) - \text{Ln}(VP_{t-1}) = \text{Ln} \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i_t} \omega_i}{\sum_{i=1}^n p_{i_{t-1}} \omega_i} \right). \quad 2.5$$

Donde:

r_p^{Log} = Rendimiento continuo (por periodo) de la cartera.

VP_t = Valor de la cartera en el periodo actual.

VP_{t-1} = Valor de la cartera en el periodo anterior.

Nótese que esta expresión no es equivalente a la suma ponderada de los rendimientos continuos de cada activo, es decir, la expresión 2.5 no es equivalente a (Alonso y Berggrun, 2015):

$$\text{Ln} \left[\frac{p_{1_t}}{p_{1_{t-1}}} \right] \omega_1 + \text{Ln} \left[\frac{p_{2_t}}{p_{2_{t-1}}} \right] \omega_2 + \dots + \text{Ln} \left[\frac{p_{n_t}}{p_{n_{t-1}}} \right] \omega_n = \sum_{i=1}^n r_i^{\text{Log}} \omega_i. \quad 2.6$$

Sin embargo, en la tasa de rendimiento discreta de un activo (r_i^{Dis}), el rendimiento esperado de una cartera sí corresponde al promedio ponderado de los rendimientos de cada uno de los activos (Alonso y Berggrun, 2015), en otras palabras:

$$r_p^{\text{Dis}} = r_1^{\text{Dis}}\omega_1 + r_2^{\text{Dis}}\omega_2 + \dots + r_n^{\text{Dis}}\omega_n = \sum_{i=1}^n r_i^{\text{Dis}}\omega_i. \quad 2.7$$

Donde:

r_p^{Dis} = Rendimiento discreto (por periodo) de la cartera.

Obsérvese que en las anteriores consideraciones los retornos de los activos son tratados como variables aleatorias que se derivan del análisis estocástico basado en datos históricos. Esto es razonable, ya que el conocimiento de los datos refleja ciertos aspectos de los rendimientos de los activos. No obstante, debido a la complejidad del mercado accionario, los retornos de los activos generalmente están influenciados por múltiples factores, como, por ejemplo, el desempeño de la empresa, las fuerzas del mercado de la oferta y la demanda, las noticias positivas y negativas, las cuestiones políticas etc., los cuales, conjuntamente, forman los *input* de las previsiones del retorno (B. Wang, Wang y Watada, 2011, citado por B. Wang *et al.*, 2017, p. 1). Por una parte, los datos históricos contienen poca información respecto a los *input* previos. Por la otra, estos factores de influencia a menudo se evalúan con cierto nivel de ambigüedad, ya que generalmente no son estadísticos debido a las dificultades prácticas para la adquisición de los datos, la naturaleza de la imprecisión de la medición y la vaguedad de la percepción humana, un factor conjunto en varias aplicaciones del mundo real (B. Wang *et al.*, 2017). En este orden de ideas, algunos investigadores han argumentado que la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad (Gupta, Mittal *et al.*, 2013; Huang, 2010; Mehlawat, 2016) y el conocimiento experto podría aplicarse para mejorar la precisión de estas previsiones (Huang y Qiao, 2012; B. Wang *et al.*, 2017). En los últimos años, la teoría de conjuntos difusos (Zadeh, 1965) se ha aplicado como una herramienta ampliamente aceptada para tratar el conocimiento experto, así como la incertidumbre no estadística involucrada en las previsiones de los retornos de los activos. Teniendo en cuenta esta utilidad, recientemente se han propuesto varios modelos de selección de carteras en los cuales los retornos de los activos se tratan como variables difusas (Calvo, Ivorra

y Liern, 2015, 2016; Gupta, Mittal *et al.*, 2013; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; Saborido *et al.*, 2016; Vercher y Bermúdez, 2013, 2015).

Es importante señalar que, bajo el contexto del modelo de media varianza, un inversionista preferirá tener una cartera que ofrezca el mayor retorno esperado posible $r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ y además, que la rentabilidad de esta tenga la mínima dispersión o variabilidad posibles. Para esto, Markowitz sugirió que la varianza que mide la dispersión del rendimiento esperado podría utilizarse para cuantificar el riesgo de la cartera. La varianza del i -ésimo activo denotada por σ_i^2 es expresada como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$\sigma_i^2 = E[(r_i - E[r_i])^2]. \quad 2.8$$

Markowitz sugirió la desviación estándar como otra medida de dispersión. La desviación estándar del i -ésimo activo se expresa como:

$$\sigma_i = \sqrt{E[(r_i - E[r_i])^2]}. \quad 2.9$$

Nótese que la varianza del rendimiento de una cartera no se determina únicamente por las varianzas de los rendimientos individuales de los activos. También depende de la covarianza entre la rentabilidad de los activos mismos. La covarianza σ_{ij} entre los rendimientos de los activos r_i y r_j se expresa como (Gupta *et al.*, 2014a, p. 4):

$$\sigma_{ij} = E[(r_i - E[r_i])(r_j - E[r_j])]. \quad 2.10$$

Utilizando datos pasados, la covarianza σ_{ij} puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - r_i)(r_{jt} - r_j). \quad 2.11$$

Además, σ_{ij} puede expresarse en términos del coeficiente de correlación (ρ_{ij}) como:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j. \quad 2.12$$

En este orden de ideas, la varianza del rendimiento esperado de una cartera estará dada por (Gupta *et al.*, 2014a, p. 4):

$$v(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}. \quad 2.13$$

• **Definición 2.3: ventas en corto** (Jain, Jain, y McNish, 2012)

Vender en corto se define generalmente como la práctica de vender títulos adquiridos en préstamo; en otras palabras, el inversionista vende un activo financiero que no tiene y lo compra posteriormente. Desde el punto de vista matemático, las ventas en corto se representan como proporciones negativas de la riqueza invertida (Michaud, 1989).

En correspondencia con la definición anterior, en el análisis de selección de carteras se excluyen los valores negativos de ω_i (i.e. no se permite las ventas en corto). Por lo tanto, $\omega_i \geq 0$ para todo i ($i = 1, 2, \dots, n$). Además, dado que ω_i es la proporción del total de los fondos invertidos, la siguiente expresión se debe cumplir:

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

A continuación se presentan dos planteamientos diferentes del modelo de media varianza basados en los siguientes supuestos, los cuales se derivan de lo que acaba de exponerse (Gupta *et al.*, 2014a):

- i. Los precios de todos los activos en cualquier momento son estrictamente positivos.

- ii. La tasa de rendimiento r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es una variable aleatoria que toma valores finitos.
- iii. Cualquier activo es infinitamente divisible, es decir, un inversor puede comprar o poseer una fracción de un activo.
- iv. Todos los activos son líquidos, en otras palabras, un activo puede ser comprado o vendido bajo demanda en cualquier cantidad al precio de mercado.
- v. No existen costos de transacción.
- vi. No se permite la venta en corto de un activo.

Caso 1: cartera de mínima varianza dado un nivel de rentabilidad deseado

$$P (2.1.) \text{ Min } \sum_{i=1}^n \cdot \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n r_i \omega_i = r_0, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1, \tag{2.14}$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \tag{2.15}$$

Donde r_0 es el retorno de la cartera deseado por el inversionista. La función objetivo del problema P (2.1) minimiza el riesgo de la cartera (varianza). La restricción (2.3) asegura que el rendimiento esperado de la cartera al final del período de tenencia sea igual al valor objetivo de r_0 deseado por el inversionista. La expresión (2.14) representa la restricción del presupuesto de capital en los activos y la restricción (2.15) asegura la no venta en corto de los activos. El problema P (2.1) es de programación cuadrática. Al variar el nivel deseado de retorno r_0 y resolver repetidamente el problema de programación cuadrática, se puede obtener la cartera de mínima varianza para cada valor de r_0 . No obstante, el aspirar a un rendimiento más alto de r_0 es poco realista alcanzarlo con los activos en consideración. En otras palabras, el problema P (2.1) puede llegar a ser inviable si el inversionista desea un rendimiento más alto. El valor del retorno alcanzable de la car-

tera, es decir, r_0 , siempre se ubicará entre r_{\min} y r_{\max} . El r_{\min} es el valor de r_0 correspondiente a la cartera de mínima varianza; esto es, es el retorno correspondiente a la cartera obtenida al resolver el problema P (2.1) si se excluye la restricción (2.3). El r_{\max} es el rendimiento máximo posible r_0 , es decir, es la rentabilidad máxima media entre los rendimientos medios de los activos (Gupta *et al.*, 2014a).

Caso 2: cartera de máxima rentabilidad dado un nivel de riesgo deseado

$$\mathbf{P (2.2.)} \quad \text{Max} \quad \sum_{i=1}^n r_i \omega_i$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = v_0, \quad 2.13$$

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1, \quad 2.14$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad 2.15$$

Donde v_0 es el riesgo de cartera (varianza) que el inversionista está dispuesto a tomar. Nótese que, a diferencia de r_0 en el problema P (2.1), en este caso no es una tarea fácil encontrar el rango de v_0 en que este se encuentra. No obstante, es posible encontrar el límite superior del intervalo para v_0 , es decir, v_{\max} , que sería el valor v_0 de la cartera de máximo rendimiento esperado. En otras palabras, es la varianza correspondiente a la cartera obtenida al resolver el problema P (2.2) con la exclusión de la restricción (2.13). Como puede observarse, se pueden generar diferentes carteras considerando los valores $v_0 \leq v_{\max}$. Además, el valor v_0 no debe ser demasiado pequeño; de lo contrario, el problema P (2.2) sería inviable (Gupta *et al.*, 2014a).

- **Definición 2.4: frontera eficiente** (Gordon, Sharpe y Bailey, 2003)

El conjunto factible (también conocido como conjunto de oportunidad) representa todas las carteras que se podrían formar de un

grupo de N valores. Los puntos A, B, C, D, E, F, G y H de la figura 2.3 son ejemplos de dichas carteras.

A las carteras ubicadas sobre la línea gruesa que tienen forma de curva cóncava entre los puntos C y E se les denomina carteras eficientes (o frontera eficiente), debido a que contienen las carteras que ofrecen el máximo rendimiento esperado para niveles variables de riesgo, y un mínimo riesgo para niveles variables de rendimiento esperado (Gordon *et al.*, 2003). El punto C representa la cartera de mínima varianza, esto es, la combinación de títulos en dicha cartera representa el menor riesgo posible. Por el contrario, el punto E refleja la cartera con un 100 % de inversión en un solo activo que ofrece el rendimiento máximo esperado. Así mismo, el punto B representa una cartera ineficiente, una persona no invertiría en una cartera B sencillamente porque la cartera D es mejor (*i.e.* ofrece un mayor retorno esperado al mismo nivel de riesgo). Dentro de la frontera eficiente, el nivel de aversión al riesgo de un inversionista (o sea, la preferencia en cuanto a riesgo y rentabilidad) influirá en la elección de la cartera de mínima varianza C, la cartera de máxima rentabilidad esperada E, o cualquiera que se ubique a lo largo de la frontera eficiente (Markowitz, 1952).

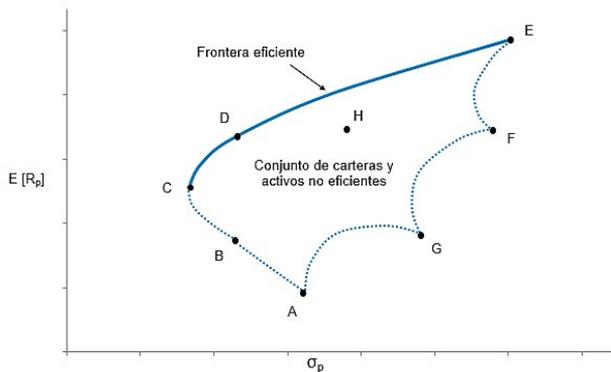


Figura 2.3. Conjuntos eficientes y factibles.
Fuente: elaboración propia.

Después de haber presentado las principales consideraciones del modelo de media varianza se evidencia que la estrategia de “maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo” generalmente no se cuestiona. No obstante, lo atinente al cálculo del riesgo como la varianza de los rendimientos de los activos financieros ha generado varias críticas entre los investigadores y académicos (Artzner, Delbaen, Eber y Heath, 1999; Fabozzi *et al.*, 2007; Metaxiotis y Liagkouras, 2012; Vercher y Bermúdez, 2012), las cuales se relacionan a continuación (Gupta *et al.*, 2014a; Ponsich *et al.*, 2013):

- i. El supuesto de una distribución normal multivariante de la tasa de rendimiento de los activos no se mantiene en la práctica (las distribuciones son típicamente asimétricas).
- ii. Las técnicas tradicionales de optimización de carteras no tienen en cuenta las preferencias del inversionista individual, quien, algunas veces, prefiere las carteras que se encuentran detrás de la frontera no dominada.⁸
- iii. Los problemas de programación cuadrática de gran escala son difíciles de resolver (complejidad computacional).
- iv. Para los mercados reales, el tamaño de la matriz de varianza-covarianza puede ser muy grande y, por lo tanto, difícil de estimar.

Varios autores trataron de aliviar estas dificultades utilizando diversos esquemas de aproximación. El modelo de índice único de Sharpe (1963) es un avance en esta dirección. Este autor señaló que, si el problema de la selección de la cartera pudiera formularse como un problema de programación lineal, las perspectivas de las aplicaciones prácticas se mejorarían. Como resultado de esto, en las últimas décadas se han hecho varios intentos para linealizar el modelo de optimización de cartera con el uso de medidas alternativas de riesgo que serán analizadas en las siguientes secciones.

⁸ En una optimización multiobjetivo las soluciones no-dominadas son las que representan los mejores compromisos entre todos los objetivos (*i.e.* no se puede mejorar un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros). Las técnicas tradicionales de optimización de carteras tienden a seleccionar soluciones que no cumplen esta condición (*i.e.* no son necesariamente mejores en todos los objetivos).

2.2.1.2 Desviación media absoluta

El modelo de optimización de carteras de desviación media absoluta fue introducido por Konno (1988, 1990) y, posteriormente, refinado por Konno y Yamazaki (1991), como una alternativa al modelo de optimización de carteras de media varianza de Markowitz. Para cuantificar el riesgo de una cartera, los autores recurrieron a la función de riesgo L1 (desviación absoluta) en lugar de a la función de riesgo L2 (desviación estándar).

La desviación absoluta de una variable aleatoria es el valor absoluto esperado de la diferencia entre la variable aleatoria y su media. El riesgo de la cartera medido como desviación absoluta se expresa como (Gupta *et al.*, 2014a, p. 21):

$$DA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\left| \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right| \right]. \quad 2.16$$

El siguiente teorema propuesto por Konno y Yamazaki (1991) presenta la relación entre el riesgo de la cartera usando la varianza y la desviación absoluta como medidas de riesgo:

- **Teorema 2.1** (Gupta *et al.*, 2014a): sea (r_1, r_2, \dots, r_n) una distribución normal multivariante. Entonces, la desviación absoluta para una cartera dada se expresaría como:

$$DA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad 2.17$$

Donde

$$\sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sqrt{E \left[\left(\sum_{i=1}^n R_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i \omega_i \right] \right)^2 \right]}. \quad 2.18$$

A partir del teorema anterior, los autores probaron la equivalencia de los modelos de media varianza y de desviación media absoluta en un entorno en el cual la distribución conjunta de los rendimientos de los activos se

asume como normal multivariante. Los resultados obtenidos en el modelo de desviación media absoluta, en el que solo se necesita estimar los retornos esperados de los activos, provee resultados similares a los proporcionados en el modelo de media varianza, aunque en la práctica se obtienen carteras óptimas diferentes (Vercher, 2015). Esto obedece al hecho de que cada uno de los modelos utiliza diferentes estadísticos para estimar los parámetros de entrada del problema de optimización (Simaan, 1997). No obstante, ni el modelo de media varianza ni el de desviación media absoluta son superiores al otro desde el punto de vista de la estabilidad y rendimiento esperados de la inversión (Vercher, 2015, p. 26).

Una de las principales ventajas del modelo de desviación media absoluta obedece a que puede ser tratado como un problema de programación lineal en lugar de un problema de programación cuadrática, lo cual permite aplicarlo a un gran número de activos (Chang, Yang y Chang, 2009). Las ventajas computacionales del modelo de desviación media absoluta sobre el modelo de media varianza se demuestran una vez más en los trabajos desarrollados por Konno (2003), y Konno y Koshizuka (2005).

Prosiguiendo el análisis, es conveniente señalar que diversos estudios muestran que “los inversores o gestores de carteras asocian el riesgo a la variabilidad de los resultados negativos o pérdidas (*downside risk*) y no tanto a la de sus ganancias (*upside potential*)” (Manzana, 2009, p. 161). En otras palabras, los inversionistas o gestores de carteras se preocupan más por evitar las pérdidas que por buscar ganancias. Esta asimetría entre los resultados positivos y negativos respecto del valor esperado del rendimiento pone de manifiesto que tanto la varianza como la desviación absoluta no son medidas adecuada para cuantificar el riesgo, al menos tal y como lo perciben los inversionistas. Como se verá a continuación, varias medidas de tipo *downside risk* han sido propuestas en las últimas décadas para resolver este conflicto.

2.2.2 Medidas de riesgo de downside

El objetivo de las medidas de riesgo *downside* en los modelos de optimización de carteras es maximizar la probabilidad de que el rendimiento esperado de la cartera esté por encima de cierto nivel mínimo aceptable (a menudo denom-

inado nivel de referencia o nivel de desastre) (Fabozzi *et al.*, 2006). La ubicación del riesgo *downside* en una distribución hipotética del retorno de un activo se muestra en la figura 2.4. Como se puede apreciar, estas medidas de riesgo hacen una clara distinción entre las volatilidades de pérdidas (*downside*) y las volatilidades de ganancias (*upside*), y solo la volatilidad que se encuentra por debajo del nivel mínimo aceptado incurre en riesgo. En otras palabras, todas las rentabilidades por encima de este nivel de referencia generan “incertidumbre”, que no es más que una oportunidad sin riesgos para rendimientos inesperadamente altos (Rom y Ferguson, 1994).

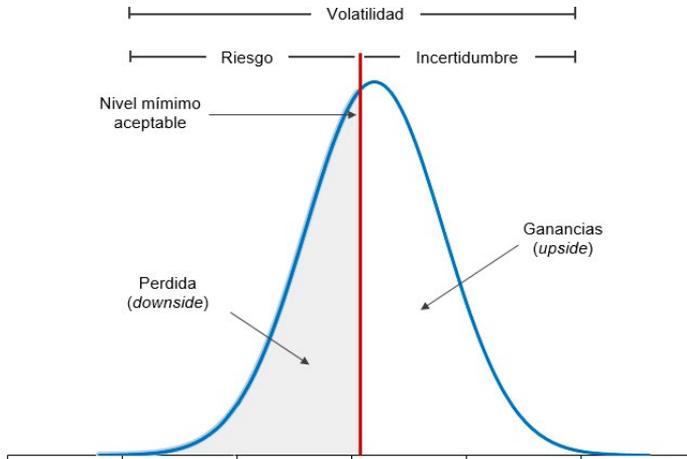


Figura 2.4. *Downside risk.*
Fuente: Rom y Ferguson (1994).

Nótese que frecuentemente las medidas de riesgo *downside* son computacionalmente más complicadas de usar bajo el contexto de la teoría de selección de carteras, debido a que con frecuencia se tiene que recurrir a estimaciones no paramétricas, a simulaciones y a técnicas de optimización computacionalmente intensivas (Fabozzi *et al.*, 2010). Por otro lado, para la estimación de las medidas de riesgo *downside* solo se utiliza una porción de los datos originales, incluso solo la cola de la distribución empírica, lo que ocasiona un aumento en el error de estimación. No obstante, estas

medidas de riesgo son muy útiles para evaluar el riesgo de los activos financieros con distribuciones de retorno asimétricas como, por ejemplo las opciones de compra y venta y otros contratos de derivados (Fabozzi *et al.*, 2007). A continuación, se analizarán las medidas de riesgo *downside* más comunes como “primero la seguridad” (*safety-first*), semivarianza, semidesviación absoluta, “momento parcial más bajo” (*lower partial moment*), valor en riesgo (VaR) y valor en riesgo condicional (CVaR).

2.2.2.1 Primero la seguridad (Safety-First)

Dos importantes artículos referentes a la selección de carteras fueron publicados en 1952: primero, el artículo de Markowitz referente a la teoría clásica de cartera. Segundo, el artículo de Roy⁹ referente a la teoría “primero la seguridad” (*safety-first*), que sentó las bases para el desarrollo de las medidas de riesgo *downside*.

Roy (1952), a través de su principio comportamental de “primero la seguridad”, proporcionó el primer paso hacia el modelo más completo de lo que la literatura financiera contemporánea denominada como teoría conductual de la cartera (Shefrin y Statman, 2000, citado en J.M. Chen, 2016). Este principio afirma que “la riqueza de las personas se encuentra constantemente expuesta a situaciones externas adversas, por lo cual es lógico que ellas, influidas por el miedo y la necesidad de seguridad, traten de reducir la probabilidad de ocurrencia de una catástrofe financiera” (Useche-Arévalo, 2015). En la teoría clásica en esta materia, un inversionista construye una cartera bajo el principio de *trade-off* riesgo-retorno. Este, y la asignación de los activos de la cartera, dependen de la función de utilidad del inversionista. En este contexto puede ser difícil, o incluso imposible, determinar la función de utilidad real de un inversionista (Fabozzi *et al.*, 2006).

⁹ En 1952, Markowitz publicó el artículo “*Portfolio Selection*” en *Journal of Finance*. Aproximadamente tres meses después, Roy publicó “*Safety-First and the Holding of Assets*” en la revista *Econometrica*. Debido a ello, Markowitz recibió mayor reconocimiento, y el artículo de Roy no fue recuperado del olvido hasta que Arzac y Bawa (1977) publicaron el artículo “*Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors*” en el *Journal of Finance Economics*.

Ahora bien, bajo el enfoque de “primero la seguridad” un inversor, en lugar de pensar en términos de la función de utilidad, primero debe asegurarse de conservar una cierta cantidad de capital (Fabozzi *et al.*, 2010). A partir de entonces decide el retorno mínimo aceptable que logre la preservación de este capital. En esencia, el inversor elige su cartera resolviendo el siguiente problema de optimización (Chapados, 2011):

$$\text{Min SF}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = P(r_p - r_o). \quad 2.19$$

Donde:

P = Es la función probabilidad.

r_p = Es el retorno de la cartera.

Así mismo, es probable que el inversionista desconozca la función de probabilidad.

No obstante, utilizando la desigualdad de Tchebycheff¹⁰ se obtiene (Chapados, 2011):

$$P(r_p \leq r_o) \leq \frac{\sigma_p^2}{(\mu_p - r_o)^2}. \quad 2.20$$

Sujeto a

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

¹⁰ Para una variable aleatoria x con valor esperado μ y varianza σ_x^2 , la desigualdad de Tchebycheff indica que para cualquier número real positivo c se mantiene que (Fabozzi *et al.*, 2010):

$$P = (|x - \mu| > c) \leq \frac{\sigma_x^2}{c^2}$$

Aplicando la desigualdad de Tchebycheff se obtiene:

$$\begin{aligned} P(r_p \leq r_o) &= P(\mu_p - r_p \geq \mu_p - r_o) \\ &\leq \frac{\sigma_p^2}{(\mu_p - r_o)^2} \end{aligned}$$

Donde:

μ_p = Es el retorno esperado de la cartera.

σ_p^2 = Es la varianza de la cartera.

Por lo tanto, al no conocer la función de probabilidad, el inversor terminará resolviendo la siguiente aproximación (Chapados, 2011):

$$\text{Min SF}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{\sigma_p}{\mu_p - r_o} \quad 2.21$$

Sujeto a

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1. \quad 2.14$$

Nótese que si r_o es igual a la tasa libre de riesgo, entonces este problema de optimización es equivalente a maximizar el ratio Sharpe (Sharpe, 1966) de una cartera.

Como puede observarse, tanto el modelo de Markowitz como el de Roy pretenden optimizar la relación rentabilidad-riesgo. Así mismo, García, Sánchez y Trinidad (1998) comprobaron que, desde el punto de vista matemático, ambos modelos se reducen al mismo, con la salvedad de que: i) Markowitz le concede más importancia al riesgo como factor determinante de las preferencias del inversor a la hora de conformar la cartera, mientras que Roy se inclina por la determinación de una rentabilidad mínima; ii) Roy no incluye la restricción de no negatividad en los activos que componen la cartera del inversor (*i.e.* $\omega_i \geq 0$, para $i=1, 2, \dots, n$) (Markowitz, 1959, p. 305). Esta condición plantea, desde el punto de vista financiero, la posibilidad de obtener mayores rentabilidades, puesto que la obtención de un valor negativo le permite al inversor recurrir al endeudamiento respecto a este activo (Roy, 1952, p. 438), lo que supone, al mismo tiempo, una mayor flexibilidad a la hora de llevar a cabo el proceso de inversión. Sin embargo, siempre queda el recurso, como también lo señala Roy, de eliminar el mencionado activo y repetir el proceso de selección.

2.2.2.2 Media semivarianza

Markowitz, en su libro *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, propuso el uso de la semivarianza para corregir el hecho de que la varianza penaliza por igual las rentabilidades positivas y negativas (Markowitz, 1959, pp. 188-201). Años más tarde, Markowitz reconoció que la “semivarianza es una medida de riesgo más plausible que la varianza, debido a que solo tiene en cuenta las desviaciones adversas (Markowitz, 1991). Matemáticamente la semivarianza es el valor esperado de las desviaciones negativas de los posibles resultados del rendimiento esperado al cuadrado. El riesgo de la cartera medido a través de la semivarianza se define como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$sv(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = E \left[\left[\left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right]^- \right]^2 \right]. \quad 2.22$$

Donde,

$$\left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \right]^- = \begin{cases} \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right], & \text{Si } \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] < 0, \\ 0, & \text{Si } \sum_{i=1}^n r_i \omega_i - E \left[\sum_{i=1}^n r_i \omega_i \right] \geq 0. \end{cases}$$

Obsérvese que al utilizar el modelo de media semivarianza no es imperativo calcular la matriz de varianza-covarianza, pero la función de distribución conjunta de los activos es necesaria [*i.e.* $F(r_{1t}, \dots, r_{nt})$, $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$]. Así mismo, es importante resaltar que esta medida de riesgo trata de minimizar la dispersión del rendimiento de la cartera con respecto al rendimiento esperado, pero solo cuando la primera es inferior a la última (Gupta *et al.*, 2014a). Además, si la distribución de los rendimientos de los activos es simétrica o tiene equivalente grado de simetría, la semivarianza y la varianza producen el mismo conjunto de carteras eficientes (Markowitz *et al.*, 1993).

Es conveniente señalar que la semivarianza es una de las medidas de riesgo *downside* más conocidas. En efecto, ha recibido gran atención debido a que refleja la percepción de los inversores sobre el riesgo de una forma directa, clara y comparativamente simple (Huang, 2008a). Varios académicos como Choobineh y Branting (1986), Grootveld y Hallerbach (1999), Jin, Markowitz y Yu Zhou (2006), Kaplan y Alldredge (1997), Mao (1970), Mao y Brewster (1970), y Markowitz *et al.* (1993) investigaron sus propiedades y demostraron los méritos que tiene la semivarianza para medir el riesgo de la cartera.

Para finalizar este apartado, es importante anotar que la semivarianza fue introducida como medida de riesgo *downside* en un entorno estocástico. No obstante, recientemente ha sido extendida a un entorno de decisión difusa (Gupta, Mittal, *et al.*, 2013; Huang, 2008a; Jalota *et al.*, 2017a, 2017b; X. Li, Qin, y Kar, 2010; Y.J. Liu, Zhang, y Zhao, 2016; Qin *et al.*, 2009; Yang, Lin, Chang, y Chang, 2011)

2.2.2.3 Semidesviación media absoluta

La semidesviación absoluta fue propuesta por Speranza (1993) como una medida alternativa para cuantificar el riesgo. Esta autora comprobó que al tomar la función de riesgo como una combinación lineal de las semidesviaciones medias absolutas (*i.e.* las desviaciones medias por debajo y por encima del retorno de la cartera), se puede obtener un modelo equivalente al de desviación media absoluta (Konno y Yamazaki, 1991), si la suma de los coeficientes de la combinación lineal es positiva. En efecto, este modelo se compara con el de media varianza (Markowitz, 1952), si los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente. Además, Speranza (1993) propuso que, a través de una adecuada selección de los coeficientes de combinación (1 y 0 para las desviaciones por debajo y por encima de la media, respectivamente) es posible reducir sustancialmente el número de restricciones a la mitad en comparación con el modelo de desviación media absoluta (Gupta *et al.*, 2014a).

La semidesviación absoluta del rendimiento de la cartera por debajo del rendimiento esperado en el periodo pasado t ($t = 1, 2, \dots, T$), puede expresarse como (Gupta *et al.*, 2014a):

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left| \min \left\{ 0, \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right\} \right| = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right| + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i}{2}. \quad 2.23$$

Por lo tanto, la semidesviación absoluta esperada del rendimiento de la cartera por debajo del rendimiento esperado viene dada por (Gupta *et al.*, 2014a):

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad 2.24$$

$$SDA(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^T \frac{\left| \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i \right| + \sum_{i=1}^n (r_{it} - r_i) \omega_i}{2T}.$$

2.2.2.4 Momento parcial más bajo (Lower Partial Moment)

El momento parcial más bajo (*Lower Partial Moment*) fue introducido por Bawa (1975, 1976) y Fishburn (1977), y además fue desarrollado y analizado por Bawa y Lindenberg (1977), Harlow y Rao (1989) y Grootveld y Hallerbach (1999). Esta media de riesgo *downside* provee una generalización natural de la semivarianza descrita previamente y propone medir lo que se conoce como momento parcial más bajo (*Lower Partial Moment*), ya que solo la parte a la izquierda de un valor objetivo de la distribución de una variable se utiliza para su cálculo. En otras palabras, consiste en ajustar la función de distribución por debajo de un umbral u objetivo determinados (Manzana, 2009). El momento parcial más bajo se da por (Fabozzi *et al.*, 2010):

$$LPM(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sigma_{r_p, q, r_0} = \left[E[\min[(r_p - r_0), 0]^q] \right]^{1/q}. \quad 2.25$$

Donde:

q = Índice de potencia

r_0 = Tasa de retorno objetivo (*i.e.* lo que Roy (1952) denominó nivel de desastre).

Nótese que al establecer $q = 2$ y r_0 igual al rendimiento esperado, se obtiene la semivarianza. Además, Fishburn comprobó que $q = 1$ representa un inversor de riesgo neutro, mientras que $0 < q \leq 1$, y, $q > 1$ corresponden a un inversor amante del riesgo (*risk-seeking*) y a un inversor adverso al riesgo (*risk-averse*), respectivamente (Fabozzi *et al.*, 2006).

2.2.2.5 Valor en riesgo (VaR)

El valor en riesgo (VaR) fue desarrollado por primera vez por J.P. Morgan a principios de la década de 1990 y se puso a disposición a través del software Risk-Metrics™ en octubre de 1994 (J.P. Morgan, 1996). El VaR se centra en determinar la máxima pérdida esperada, asociada al riesgo de mercado, que puede sufrir una cartera en un horizonte temporal determinado¹¹, bajo unas circunstancias normales de los mercados y para un nivel de confianza dado¹² (Gordon, 2009; Moscoso, 2014). Desde el punto de vista matemático, el nivel de confianza α de una cartera en cierto horizonte de tiempo t es el retorno de la cartera r_p tales que la fracción α de los retornos será mejor que el r_p en el horizonte de tiempo. Formalmente, el nivel de confianza α de una cartera se define como el $(1 - \alpha)$ -percentil de la distribución de los retornos de la cartera (Chapados, 2011):

$$\text{VaR}_\alpha(r_p) = -\inf_r \{r: P(r_p \geq r) \geq \alpha\}.^{13} \quad 2.26$$

Donde:

P = Función de probabilidad.

¹¹ El horizonte temporal puede expresarse en días, semanas, meses y hasta un año.

¹² Normalmente se emplean intervalos de confianza hasta un 95 %. Para un intervalo de confianza del 95 %, el 5 % de los rendimientos se situarán a 1,65 desviaciones típicas de la media. Ante una cartera valorada en EUR, un intervalo de confianza del 5 % y el dato del VaR de la misma, se podría concluir que existe una probabilidad del 5 % de perder más de (VaR x valor de la cartera) EUR, o que con el 95 % de probabilidad se puede asegurar que se pierde como mucho ese valor (DeLlano-Paz, 2015).

¹³ El signo menos en la expresión es para que la medida de riesgo sea positiva.

El VaR resulta útil para los tomadores de decisiones debido a que proporciona una cifra expresada en unidades monetarias que resume la exposición de un activo financiero al riesgo de mercado, lo cual facilita su comprensión. No obstante, el uso del VaR presenta algunos problemas prácticos y computacionales, que fueron analizados por Gordon y Baptista (2002), Gaivoronski y Pflug (2005), y por Mittnik, Rachev y Schwartz (2002). En efecto, el VaR tiene varias propiedades que no son deseables en una medida de riesgo:

- i. El VaR no posee la propiedad de subaditividad, por lo que la cuantía del VaR de una cartera formada por dos subcarteras puede ser mayor que la suma de los riesgos individuales de ambas. La propiedad de subaditividad es la descripción matemática del efecto de la diversificación y, por lo tanto, no es razonable pensar que una cartera más diversificada tendría un mayor riesgo (Fabozzi *et al.*, 2007; Scutellà y Recchia, 2013).
- ii. Cuando el VaR se calcula a partir de la generación o simulación de escenarios, resulta ser una función no lisa y no convexa de las carteras. En consecuencia, la función VaR tiene múltiples puntos estacionarios, lo que hace más difícil encontrar el valor óptimo en el proceso de optimización de la cartera (Fabozzi *et al.*, 2010);
- iii. El VaR le da poca importancia a las pérdidas más extremas o extraordinarias, debido a que no refleja adecuadamente la asimetría y la curtosis¹⁴ de la distribución (Moscoso, 2014).
- iv. El supuesto de normalidad sobrestima el VaR para valores percentiles muy altos, mientras que subestima los valores de percentiles bajos, los cuales corresponden a los eventos extremos o extraordinarios (Moscoso, 2014).

¹⁴ Desde la perspectiva de un agente de mercado, la asimetría y curtosis también son importantes. Cuando el rendimiento de la cartera está sesgado negativamente (asimétrica negativa) es más probable tener un evento extremo en la cola izquierda que uno en la cola derecha y, por consiguiente, el inversor típico prefiere una distribución de rendimientos asimétricos más positivos. De forma similar, una cartera con curtosis más pequeña tiende a tener menos eventos extremos y, por lo tanto, la mayoría de los inversores la prefieren (W.C. Kim, Fabozzi, Cheridito y Fox, 2014).

2.2.2.6 Valor en riesgo condicional (CVaR)

Las deficiencias en el VaR conducen a Artzner *et al.* (1999) a derivar cuatro propiedades deseables que debería cumplir una medida de riesgo para ser denominada “coherente”¹⁵. En la misma línea, Rockafellar y Uryasev (2000, 2002) proponen el valor en riesgo condicional (CVaR) como una medida “coherente” que describe el tamaño promedio que pueden tener las pérdidas que están por encima del nivel de VaR estimado, de modo que provee información adicional sobre la cola de la distribución de pérdidas y ganancias de una cartera (Moscoso, 2014).

Desde el punto de vista matemático, la expresión del CVaR se define como (Chapados, 2011):

$$\text{CVaR}_\alpha(r_p) = E[r_p | r_p < \text{VaR}_\alpha(r_p)]. \quad 2.27$$

En la literatura al CVaR también se le refiere como déficit esperado (*Expected Shortfall*), pérdida esperada de la cola (*Expected Tail Loss*) y valor medio en riesgo (*Average Value at Risk*) (Jorion, 2003).

Una de las ventajas del CVaR se relaciona con su análisis de los rendimientos inferiores al VaR, al cuantificar la pérdida esperada en ese escenario. A modo de ejemplo, dos carteras pueden tener igual VaR y aparentar poseer el mismo nivel de riesgo, no obstante, al analizar el CVaR se podrá determinar que la cartera de mayor riesgo será la que cuente con el mayor

¹⁵ Una medida de riesgo ρ es coherente si satisface las siguientes propiedades (Artzner *et al.*, 1999):

1. Homogeneidad positiva: si se incrementa el valor de la cartera en λ , el riesgo también debe aumentar en λ

$$\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x), \text{ para cualquier número real } \lambda.$$

2. Monotonicidad: a mayor rentabilidad debe haber un mayor riesgo.

Si $x \leq y$, luego $\rho(x) \leq \rho(y)$.

3. Invariante en traslación: invertir una cantidad adicional de efectivo α debe aumentar el riesgo en la misma cantidad.

$$\rho(x + \alpha) = \rho(x) + \alpha, \text{ para cualquier número real } \alpha.$$

4. Subaditividad o diversificación: la composición de la cartera no debe aumentar el riesgo.

$$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y).$$

CVaR. Como se observa, el examen de esta situación se escapa al análisis del VaR, por lo que se prefiere, en algunas ocasiones, trabajar con el CVaR. Como se aprecia, el VaR nunca será mayor que el CVaR, por ello, las carteras con bajo CVaR tendrán un VaR aún menor.

Otra de las ventajas del CVaR es su utilidad especialmente cuando la distribución de los retornos de los activos no es continua y se sitúa lejos de la hipótesis de normalidad (Moscoso, 2014). Acerbi y Tasche (2002), Gordon (2009) y Rockafellar y Uryasev (2002) analizan en detalle las propiedades del CVaR. La ubicación del VaR en una distribución hipotética del retorno de un activo y su relación con el CVaR se presentan en la figura 2.5.

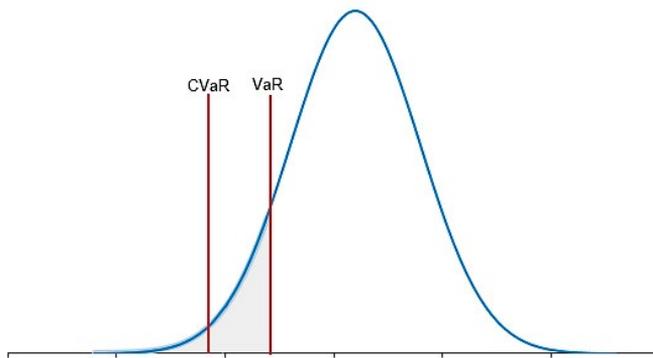


Figura 2.5. CVaR y VaR para una distribución t de Student.
Fuente: Chapados (2011).

2.3 La optimización de cartera en la práctica

El modelo clásico de media varianza se basa en varios supuestos simplistas, los cuales se asumen en un mercado perfecto donde los activos

financieros se negocian en fracciones (no negativas), no hay límite en el número de activos en la cartera, los inversores no tienen preferencia sobre los activos y no les interesan los diferentes tipos de estos en sus carteras (Lwin, 2015). No obstante, para que el conjunto de carteras eficientes sea realista, desde el punto de vista de la planificación y gestión de las mismas, se deben incorporar a la formulación del problema diferentes clases de restricciones, que permitan considerar las preferencias del inversor, las condiciones del mercado, los requerimientos financieros o la responsabilidad social, entre otros (Vercher, 2015). A continuación, se describirán las restricciones que a menudo se utilizan en las aplicaciones prácticas.

2.3.1 Costos de transacción

Cuando un inversionista compra o vende activos financieros incurre en gastos ocasionados por los costos de transacción y los impuestos. En algunos casos, estos costos pueden incluirse como una tasa variable y proporcional a la cantidad negociada (Akian, Menaldi y Sulem, 1996; Davis y Norman, 1990; Dumas y Luciano, 1991; Shreve y Soner, 1994), o como un costo fijo, es decir, una tarifa fija por transacción (Lobo, Fazel y Boyd, 2007; Oksendal y Sulem, 2002). Al incorporar directamente los costos de transacción en el proceso asignación de activos, las carteras resultantes son más rentables y muestran mejoras en términos de los rendimientos realizados ajustados al riesgo (Kolm *et al.*, 2014). No obstante, los costos de transacción dificultan el problema de optimización de la cartera cuando el número de activos es mayor que dos, especialmente en un entorno dinámico (Brown y Smith, 2011).

2.3.2 Restricciones de cardinalidad

En el modelo clásico, las proporciones de los activos no son limitadas y no importa cuán pequeña es la asignación de la inversión. Sin embargo, en la práctica, los inversionistas prefieren tener una cartera con un número limitado de activos debido a que la gestión de una cartera con varios valores a menudo es tediosa y difícil de supervisar (Lwin, 2015). En este propósito, la restricción de cardinalidad busca reducir los costos de transacción y asegurar un cierto grado de diversificación al limitar el número de activos (k) en una cartera (Skolpadungket, Dahal y Harnpornchai, 2007). La re-

restricción de cardinalidad se caracteriza de la siguiente forma (Bermúdez y Vercher, 2012; Lwin, 2015):

$$\sum_{i=1}^n y_i = k$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$
2.28

Donde

k = Número de activos deseados en la cartera

y_i = Variable binaria que indica si el i -ésimo activo está contenido en la cartera. Toma el valor de 1 si el i -ésimo activo está incluido en la cartera, y el valor de 0 en otros casos.

$$k_l \leq C(x) \leq k_u.$$
2.29

Donde

k_l = Número mínimo de activos invertidos en la cartera

k_u = Número máximo de activos invertidos en la cartera

$C(x)$ = Rank [diagonal(x)] = n.º de proporciones estrictamente positivas en la cartera X

En la literatura, hay dos alternativas para la restricción de cardinalidad. En una de ellas (ecuación 2.28) el inversionista puede decidir que la cartera esté compuesta por un determinado número de acciones (k) (Armananzas y Lozano, 2015; Chang *et al.*, 2009; Cura, 2009; Deng, Lin y Lo, 2012; Fernández y Gómez, 2007; Golmakani y Fazel, 2011). La otra alternativa (ecuación 2.29) es la restricción de desigualdad, donde la limitación de cardinalidad se extiende a los límites mínimo y máximo de activos que conformarán la cartera [k_l, k_u] (Anagnostopoulos y Mamanis, 2011b; Cesarone, Scozzari y Tardella, 2013; Chiam, Tan y Al Mamum, 2008; Crama y Schyns, 2003; Gaspero, Tollo, Roli y Schaerf, 2011; Liagkouras y Metaxiotis, 2014). Para Bermúdez y Vercher (2012), la restricción de cardinalidad equivalente a la expresión 2.28 implica la introducción de variables binarias, y la restricción de cardinalidad correspondiente con la expresión 2.29 requiere la introducción de variables enteras. Si se

introduce la restricción de cardinalidad utilizando la desigualdad $k_l \leq C(x) \leq k_u$ siendo $C(X) = \text{Rank}[\text{diag}(X)]$ el número de proporciones estrictamente positivas en la cartera X , el problema se convierte en uno de tipo NP-duro (*NP-hard*), porque la función $C(X)$ es cuasiconvexa, de modo que la utilización de procedimientos metaheurísticos¹⁶ para la resolución del problema estará plenamente justificada.

2.3.3 Restricción de cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera

La cota mínima (*floor constraint* o *lower bound*) representa la mínima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo, lo que evita un gran número de muy pequeñas inversiones. En contraste, la cota máxima (*ceiling constraint* o *upper bound*) especifica la máxima fracción del presupuesto que puede invertirse en un activo, lo cual asegura la diversificación de la inversión o no sobrepasar un umbral dado si ya se tiene previamente un paquete de acciones (Bermúdez, Segura y Vercher, 2012). En concreto, las cotas mínima y máxima de participación en la cartera se definen mediante:

$$\omega_i \geq l_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 2.30$$

$$\omega_i \leq u_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad 2.31$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde:

l_i = Mínima fracción del capital que puede invertirse en el i -ésimo activo.

u_i = Máxima fracción del capital que puede invertirse en el i -ésimo activo.

¹⁶ Un problema de optimización se puede resolver utilizando métodos exactos o heurísticos. Los métodos exactos proporcionan una solución óptima al problema (i.e. la que maximiza o minimiza la función objetivo). Mientras que los métodos heurísticos proporcionan soluciones factibles, aunque no necesariamente óptimas. No obstante, la combinación de métodos exactos y heurísticos arroja resultados exactos al óptimo global (Crossley y Williams, 2000).

2.3.4 Restricción de cotas mínima y máxima de participación en un sector en la cartera

Con el propósito de construir una cartera diversificada, los inversionistas podrían restringir la concentración de esta en un sector en particular. Al igual que la restricción vista en la sección anterior, se requiere determinar que la proporción total invertida en cada sector se encuentre entre los límites inferior y superior especificados por los inversionistas. Este tipo de restricción fue incorporada en la optimización de cartera, por primera vez, por Chang, Meade, Beasley y Sharaiha (2000), y posteriormente considerada por Anagnostopoulos y Mamanis (2011a), y Vijayalakshmi Pai y Michel (2009). Bajo este contexto, la restricción de cotas mínima y máxima de participación en un sector en la cartera estaría dada por la expresión:

$$l_{s_i} \leq \sum_{i \in I} \omega_i \leq u_{s_i}. \quad 2.32$$

Para un subconjunto dado de activos $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$

Donde:

l_{s_i} = Proporción mínima a invertir en un sector “s” en la cartera

u_{s_i} = Proporción máxima a invertir en un sector “s” en la cartera

2.4 Resumen y conclusiones del capítulo

En la optimización de carteras el riesgo de mercado, esto es, el riesgo de la variación de los activos financieros que conforman una cartera dada, se puede medir utilizando medidas de riesgo de dispersión. Los enfoques comunes que emplean este tipo de herramientas son el modelo seminal de media varianza y el modelo de desviación media absoluta.

El modelo de media varianza fue publicado hace 65 años, y es poco probable que su popularidad e impacto tanto en el entorno académico e in-

investigador como en la industria financiera desaparezcan en el futuro. La hipótesis básica de este modelo es que las preferencias de un inversor se pueden representar por la función cuadrática (*i.e.* función de utilidad) del rendimiento esperado y la varianza de la cartera. Así mismo, el principio básico subyacente de este modelo clásico es que los inversionistas actúan racionalmente y sus decisiones siempre estarán orientadas a maximizar la rentabilidad esperada para un determinado nivel de riesgo o minimizar el riesgo soportado para un determinado nivel de rentabilidad esperada.

Con el modelo de media varianza, Markowitz introdujo por primera vez el concepto de diversificación a través de la noción estadística de la covarianza entre los activos individuales, y la desviación estándar global de la cartera. Antes de la publicación de esta teoría, la literatura financiera había tratado la interacción entre el retorno y el riesgo de una manera *ad hoc*.

El modelo de desviación media absoluta es equivalente al de media varianza si los rendimientos siguen una distribución normal multivariante. No obstante, cuando los rendimientos de los activos de una cartera son típicamente asimétricos, la varianza y la desviación absoluta no son apropiadas para medir el riesgo de la cartera debido a que este tipo de medidas de riesgo no hace distinción entre ganancias y pérdidas respecto del valor esperado del rendimiento. Con el propósito de resolver este conflicto, en los últimos años se han propuesto diversas medidas de riesgo denominadas *downside*, es decir, que solo consideran como arriesgados los resultados por debajo de cierto nivel de referencia. Las medidas de riesgo *downside* más comunes son *safety-risk*, semivarianza, semidesviación absoluta, *lower partial moment*, VaR y CVaR.

El modelo de media semivarianza y el de media varianza producen el mismo conjunto de carteras eficientes si la distribución de los rendimientos de los activos es simétrica o si tienen el mismo grado de simetría. Así mismo, el modelo de semidesviación media absoluta es equivalente al de media varianza si los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente.

El planteamiento del enfoque de media varianza y *safety-risk* es dual. Markowitz le concede más importancia al riesgo como factor determinante de las preferencias del inversor a la hora de formar la cartera, mientras que Roy se inclina por la determinación de una rentabili-

dad mínima. Así mismo, quedó patente que, desde el punto de vista matemático, ambos modelos se reducen a lo mismo, salvo algunas excepciones presentadas en el capítulo.

La medida de riesgo *lower partial moment* es una generalización natural de la semivarianza. Por otra parte, respecto a la medida del riesgo del VaR, se puede concluir que es una alternativa útil para medir la exposición de un activo financiero al riesgo de mercado. Sin embargo, el uso del VaR presenta algunos problemas prácticos y computacionales. En este escenario, la medida de riesgo del CVaR se propuso para corregir las deficiencias ocurridas con el VaR.

Los modelos de optimización de cartera, en los últimos años, han optado por incorporar diferentes tipos de restricciones que permitan considerar las preferencias del inversor, las condiciones del mercado, los requerimientos financieros o la responsabilidad social, entre otros. Este tipo de limitaciones permite estructurar carteras más realistas desde el punto de vista de la planificación y gestión de carteras. Entre las restricciones más usadas en la práctica en los modelos de optimización de cartera se encuentran los costos de transacción, la restricción de cardinalidad, la restricción de cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera, y la restricción de cotas mínima y máxima de participación en un sector en la cartera.

Capítulo 3. Algoritmos evolutivos multiobjetivo en optimización de carteras

3.1 Introducción al tema

La optimización puede considerarse como un proceso de toma de decisiones para aprovechar al máximo los recursos disponibles y, de esta forma, obtener los mejores resultados posibles. Gran parte de los problemas del mundo real implican la optimización simultánea de varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí, es decir, la mejora de un objetivo puede conllevar el deterioro de otro/s. Un ejemplo característico de este tipo de problemas es la optimización de carteras. En efecto, el modelo de media varianza ha sido criticado debido a que se basa en supuestos poco realistas. A raíz de esto, en los últimos años los modelos de optimización de cartera han incorporado algunas restricciones del mundo real (p.ej. cardinalidad, cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera), y han propuesto otras medidas de riesgo (tales como VaR y *lower partial moment*). No obstante, la inclusión de estas restricciones y nuevas medidas de riesgo han ocasionado que el problema de selección de carteras sea difícil de resolver con métodos exactos (Metaxiotis y Liagkouras, 2012).

Los algoritmos evolutivos [*evolutionary algorithms* (EAs)] han sido fundamentales para resolver problemas de optimización que son demasiado complejos para ser solucionados mediante técnicas determinísticas (Andriospoulos y Nomikos, 2014; Y. Chen y Wang, 2015; Corazza, Fasano y Gusso, 2013; Fu, Chung y Chung, 2013; Smimou, 2014; F. Wang, Yu y Cheung, 2014). Los EAs se adaptan bien a los problemas de optimización multiobjetivo (MOP) debido a que están inspirados en los principios darwinianos de selección natural y reproducción genética (Darwin, 1859), que son inherentemente multiobjetivo (Metaxiotis y Liagkouras, 2012). Gracias a las técnicas que ofrecen los algoritmos evolutivos multiobjetivo [*Multiobjective Evolutionary Algorithms* (MOEAs)], el modelo clásico de media varianza ha sido extendido para combinar dos o más objetivos en

conflicto sujetos a diversas restricciones realistas (J. Li y Xu, 2013; Liagkouras y Metaxiotis, 2013, 2017; Mousavi, Esfahanipour y Zarandi, 2014; Suksonghong, Boonlong y Goh, 2014; P. Zhang y Zhang, 2014).

El tercer capítulo de esta tesis doctoral está estructurado de la siguiente forma: En la sección 3.2 se introducen los principales aspectos relacionados con los problemas de optimización multiobjetivo (MOPs). Las secciones 3.3 y 3.4 revisan los conceptos teóricos básicos sobre los algoritmos evolutivos EAs y los algoritmos evolutivos multiobjetivo MOEAs. En la sección 3.5 se ofrece una breve revisión de los artículos más relevantes que tratan de la implementación de MOEAs para la solución del problema de selección de carteras. La sección 3.6 examina las características principales del *Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI), algoritmo propuesto para resolver el modelo que se sugerirá en esta investigación. Para finalizar, la sección 3.7 presenta el resumen y las conclusiones del capítulo.

3.2 Problemas de optimización multiobjetivo (MOPs)

La optimización se refiere al hallazgo de la mejor solución posible a un problema, dado un conjunto de limitaciones o restricciones (Coello, 2006). Para García-Rodríguez (2012) una optimización multiobjetivo se define como “el procedimiento para encontrar un vector de variables de decisión que satisfaga las restricciones dadas y optimice un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo, que generalmente se encuentran en conflicto entre sí” (p. 18). Por lo tanto, el término ‘optimizar’ significa “encontrar las soluciones que darían valores aceptables para todas las funciones objetivo” (Osyczka, 1985, p. 194). Un problema de optimización multiobjetivo [*multi-objective optimization problems* (MOPs)] puede ser formalmente definido como (Lwin, 2015; Villazón-Terrazas, 2015):

Maximizar/minimizar $F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$

	$g_i(x) \leq 0,$	$i=1, 2, \dots, p$	Restricción de desigualdad
Sujeto a	$h_j(x)=0,$	$j=1, 2, \dots, q$	Restricción de igualdad
	$x \in D,$	$m \geq 2$	

Donde

x = Es el vector n -dimensional de la variable de decisión $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, definidas en el espacio D de soluciones factibles. El concepto espacio de solución también se conoce como espacio de búsqueda o espacio de decisión.

Una solución a este problema maximiza (o minimiza) los componentes de $F(x)$, a la vez que cumple con las restricciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$. El vector de las variables de decisión puede ser discreto o continuo, y las m funciones objetivo pueden ser lineales o no, y discretas o continuas. La función de evaluación $F:D \rightarrow \mathbb{R}^m$, es una transformación del vector de las variables de decisión $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ en un vector de respuestas (o vector objetivo) $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]$, en el que $f_i(x)$ representa la idoneidad de (x) para el i -ésimo objetivo (ver figura 3.1) (Coello, Lamont y Van, 2007; Deb, 2001; Lwin, 2015; Villazón-Terrazas, 2015).

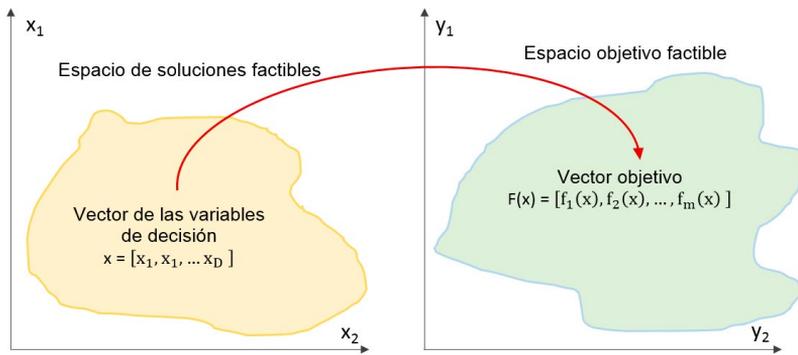


Figura 3.1. Transformación del vector de decisión al vector de respuestas.

Fuente: Goh y Tan (2009, p. 2).

Nótese que en la ecuación 3.1., hay m funciones objetivo consideradas, y cada una de estas puede ser maximizada o minimizada. En el contexto de la optimización, el principio de dualidad (Deb, 2001, 2012) sugiere que un problema de maximización puede ser transformado en uno de minimización, simplemente multiplicando la función objetivo por -1 . Este principio ha permitido que los problemas de optimización con diversos tipos

de objetivos sean fáciles de manejar, puesto que permiten transformar los objetivos en un mismo tipo de problema de optimización (Lwin, 2015).

3.2.1 MOPs totalmente conflictivos, no conflictivos y parcialmente conflictivos

Una de las principales diferencias entre la optimización de un único objetivo y una multiobjetivo es que los problemas de la segunda constituyen un espacio objetivo multidimensional \mathfrak{R}^m . Esto conduce a tres casos posibles de problemas multiobjetivo, dependiendo de si los objetivos son totalmente conflictivos, no conflictivos o parcialmente conflictivos. En los problemas multiobjetivo de la primera categoría, la naturaleza conflictiva de los objetivos es tal que no se puede mejorar sin violar ninguna restricción. Esto resulta en una situación interesante, donde todas las soluciones factibles son también óptimas. Por lo tanto, los problemas multiobjetivo totalmente conflictivos son, quizás, los más simples de los tres, pues allí no se requiere ninguna optimización. En contraste, un problema multiobjetivo es no conflictivo si los diversos objetivos están correlacionados, y la optimización de algún objetivo arbitrario conduce a la mejora posterior de los otros. Esta clase de problemas multiobjetivo puede tratarse como un problema de un único objetivo, optimizando arbitrariamente un objetivo, o agregando los diferentes objetivos dentro de una función escalar. Intuitivamente, solo existe una única solución óptima para este tipo de problemas multiobjetivo (Goh y Tan, 2009).

Generalmente, los problemas del mundo real son instancias del tercer tipo de problemas multiobjetivo, esto es, problemas de optimización multiobjetivo parcialmente conflictivos. Para Goh y Tan (2009), este tipo de problemas implica buscar el conjunto de soluciones que representan los *trade-offs*¹⁷ o los mejores compromisos entre los diferentes objetivos, y no

¹⁷ En los problemas de optimización multiobjetivo, existe una dificultad inherente al trabajar con varios objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí: la imposibilidad de encontrar una solución que sea simultáneamente “buena” para todos los objetivos. Bajo esta perspectiva, el concepto de *Trade-off* se asocia al hecho de que al seleccionar una solución en lugar de otra se obtiene una mejora de unos aspectos y el empeoramiento de otros.

una única solución óptima. Con el propósito de generar soluciones de mejor compromiso, es necesario definir el concepto de optimalidad en los problemas de optimización multiobjetivo.

3.2.2 Dominancia de Pareto y optimalidad

La noción de “óptimo” más comúnmente adoptada es la propuesta originalmente por Edgeworth (1881) y posteriormente generalizada por Pareto (1896). Aunque algunos autores la llaman el óptimo de Edgeworth-Pareto (ver, por ejemplo, Stadler, 1988), el término más comúnmente aceptado es Pareto óptimo. A continuación se presentarán las siguientes definiciones (Deb, 2001; Lwin, 2015; Zitzler, Thiele, y Bader, 2010) que son conceptos fundamentales para resolver MOPs:

- **Definición 3.1: solución factible**

Una solución x es identificada como factible si cumple con las restricciones $g_i(x)$ y $h_j(x)$, y , además $x \in D$.

- **Definición 3.2: dominada y no-dominada**

Una solución factible x domina a otra de las mismas características y (denotada como $x \preceq y$), si y solo si:

$\forall_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, x_i es mejor o igual que $y_i \wedge \exists_i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid x_i$ es mejor que y_i

Es decir, x domina a y , si x es mejor o igual a y en todos los objetivos, y estrictamente mejor en, al menos, un objetivo. Alternativamente, se puede afirmar que x es no-dominada por y , o y está dominada por x . Por otra parte, es importante resaltar que si una solución x no domina a otra solución y , y a la vez, y no domina a x , entonces ambas son no-dominadas y, por consiguiente, forman parte de las soluciones que se desean encontrar (García-Rodríguez, 2012).

- **Definición 3.3: incomparables (o indeterminadas)**

Dos soluciones, x , y , se denotan incomparables (denotadas por $x \parallel y$) si ni x domina a y , ni y domina a x ,

Sí $x \not\preceq y \vee y \not\preceq x$,

3.2

En la figura 3.2 se ilustra la relación de las soluciones dominadas, no-dominadas e incomparables, en un escenario con dos funciones de idoneidad que están siendo minimizadas. Para este ejemplo, se toma la solución B como punto de referencia, y las regiones destacadas en colores verde, gris y blanco ilustran las tres diferentes relaciones de dominancia. Las soluciones ubicadas en la región verde están dominadas por la solución B, debido a que B es mejor en ambos objetivos. Por la misma razón, las soluciones ubicadas en la región blanca están sobre la solución B. Aunque B tiene un valor objetivo menor en comparación con las soluciones ubicadas entre los límites de las regiones gris y verde, solo domina débilmente estas soluciones, en virtud del hecho de que comparten un valor objetivo similar a lo largo de una u otra dimensión. Las soluciones ubicadas en las regiones grises son incomparables a la solución B, debido a que no es posible establecer ninguna superioridad de una solución sobre la otra: las soluciones en la región gris izquierda son mejores solo en el segundo objetivo, mientras que aquellas en la región derecha son mejores solo en el primer objetivo (Goh y Tan, 2009).

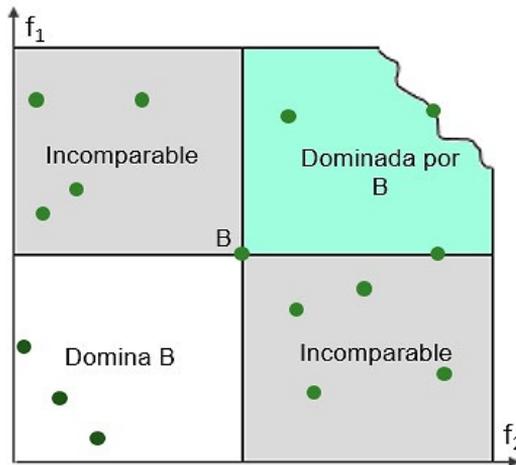


Figura 3.2. Relación de la dominancia de Pareto entre las soluciones candidatas relativas a la solución B.

Fuente: Goh y Tan (2009, p. 4).

Una vez ilustrado el concepto de dominancia de Pareto, a continuación, se definirá el conjunto de soluciones deseables para la optimización multiobjetivo.

- **Definición 3.4: Pareto óptimo (eficiente)**

Una solución $x' \in D$ es identificada (globalmente) como Pareto óptimo, si no existe una solución $x \in D$, tal que $F(x)$ domine $F(x')$. En otras palabras, esta definición indica que x' es Pareto óptimo si no existe un vector dado x que pueda hacer decrecer uno de los criterios sin causar un incremento simultáneo en al menos uno de los otros criterios (asumiendo una minimización) (Clemptner, 2014; Coello *et al.*, 2007).

- **Definición 3.5: conjunto óptimo de Pareto (o conjunto de soluciones eficientes)**

Es el conjunto de todas las soluciones óptimas de Pareto, y se denota por:

$$\mathbb{P}_{\text{true}} = \{x' \in D \mid \nexists x \in D, F(x) \leq F(x')\}, \quad 3.3$$

En esta perspectiva, el conjunto de soluciones de *trade-off* se conoce como el conjunto óptimo de Pareto, y estas soluciones también se denominan soluciones “no-inferiores”, “admisibles” o “eficientes”. Los correspondientes vectores objetivos de estas alternativas se denominan “no-dominados”, y cada componente objetivo de cualquier solución no-dominada en el conjunto óptimo de Pareto solo puede mejorarse degradando al menos uno de sus otros componentes objetivos (Goh y Tan, 2009; Shin, Lee, Kim y Zhang, 2005).

- **Definición 3.6: frente óptimo de Pareto (o frontera eficiente)**

Es la imagen de \mathbb{P}_{true} trazada en el espacio de objetivo factible, y se denota por:

$$\mathbb{EF}_{\text{true}} = \{F(x) \mid x \in \mathbb{P}_{\text{true}}\} \quad 3.4$$

En la figura 3.3 se ilustran los conjuntos óptimos de Pareto para diferentes escenarios con dos funciones de idoneidad y para el mismo espacio de soluciones. El óptimo de Pareto está compuesto por soluciones ubicadas en la frontera de la región factible del espacio de soluciones¹⁸ (Kanthababu, 2013; Villazón-Terrazas, 2015):

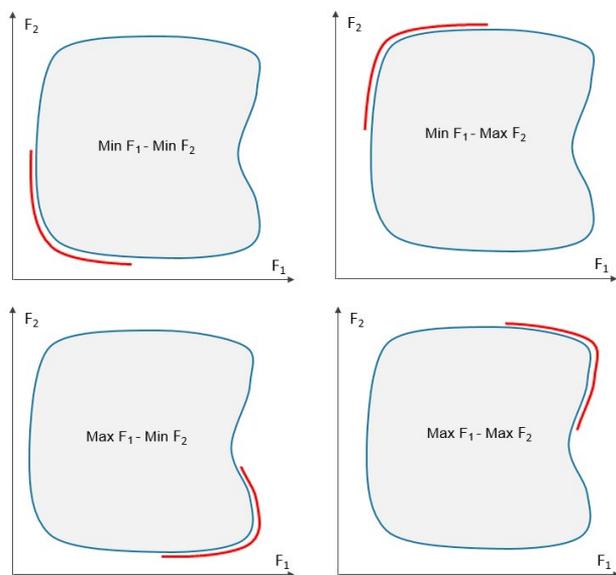


Figura 3.3. Frentes óptimos de Pareto para un mismo espacio de soluciones.

Fuente: elaboración propia a partir de Kanthababu (2013, p. 355),
y Villazón-Terrazas (2015, p. 40).

3.2.3 Métodos para resolver MOPs

Existen dos enfoques para resolver los problemas de optimización multiobjetivo (Lwin, 2015; Swain, Panda y Mahapatra, 2016; Yegireddy y Panda,

¹⁸ En realidad, la figura no representa el espacio de soluciones sino una imagen en \mathbb{R}^2 mapeada por la función de idoneidad (F_1, F_2) , que es donde está definida la dominancia.

2014). Un enfoque es la optimización simultánea de todos los objetivos con base en la relación de dominancia para determinar el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), o el subconjunto representativo del conjunto óptimo de Pareto ($\mathbb{P}_{\text{known}}$), (ver sección 3.2.2). El otro enfoque es el método clásico de suma ponderada, en el cual la función objetivo se formula como una suma ponderada de los objetivos. A continuación, se presentan los principales aspectos de este enfoque.

i. Método de suma ponderada

Este enfoque combina los múltiples objetivos en una función de costo escalar, lo que hace que el problema sea de un único objetivo antes de la optimización. Su denotación es:

$$\text{Maximizar/minimizar } F(x) = \sum_{m=1}^M \lambda_m f_m(x),$$

$$\lambda_m \leq 0, \tag{3.5}$$

Sujeto a

$$\sum_{m=1}^M \lambda_m = 1,$$

Donde

λ_m = Puede reflejar la importancia relativa de los objetivos.

Este enfoque produce una solución única con un vector de peso dado $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$. Por lo tanto, el problema debe resolverse repetidas veces con diferentes combinaciones de pesos (*i.e.* predeterminados) para lograr soluciones múltiples que permitan determinar el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}) o un subconjunto representativo de este ($\mathbb{P}_{\text{known}}$). Una desventaja de este modelo es que, en la práctica, puede ser muy difícil seleccionar con precisión y exactitud los pesos de los objetivos, ya que pequeñas perturbaciones en estos pueden conducir a soluciones muy diferentes.

3.2.4 Optimización de objetivos de MOPs

Para la mayoría de los MOPs, el conocimiento del conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}) y, por ende, del frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$) ayuda al tomador de decisiones a seleccionar aquella solución que representa el mejor compromiso. No obstante, la identificación de todo el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), para muchos problemas multiobjetivo, es prácticamente imposible, debido a su tamaño. Además, para varios problemas, especialmente en los de optimización combinatorial¹⁹, comprobar la optimalidad de la solución es computacionalmente inviable. Por lo tanto, un enfoque práctico en la optimización multiobjetivo es investigar el conjunto de soluciones [*the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$)] que mejor se aproxime al conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}). Teniendo en cuenta estos intereses, un enfoque de optimización multiobjetivo debería alcanzar los siguientes tres objetivos en conflicto (Kanthababu, 2013; Konak, Coit y Smith, 2006; Zitzler, Deb y Thiele, 2000):

- i. *The best-known Pareto front* ($\mathbb{EF}_{\text{known}}$) debe estar lo más cerca posible del verdadero frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$). Idealmente, *the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$) debería ser un subconjunto del conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}).
- ii. Las soluciones en *the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$) deben ser diversas y estar uniformemente distribuidas sobre el frente óptimo de Pareto para proporcionar al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs*.
- iii. *The best-known Pareto front* ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$) debe captar todo el espectro del frente óptimo de Pareto. Esto requiere investigar soluciones en los extremos del espacio de la función objetivo.

Para un límite de tiempo computacional dado, el primer objetivo es el más útil, debido a que enfoca la búsqueda en una región particular del frente óptimo de Pareto. Por otra parte, el segundo objetivo demanda un esfuerzo de búsqueda para ser distribuido uniformemente sobre el frente óptimo de

¹⁹ Un problema de optimización multiobjetivo es combinatorial cuando el vector n -dimensional de la variable de decisión $x = [x_1, x_2, \dots, x_D]$ es discreto y finito.

Pareto. El tercer objetivo tiene como propósito extender al anteriormente enunciado en ambos extremos, con lo cual se exploran, esta forma, nuevas soluciones extremas.

3.3 Algoritmos evolutivos (EAs)

Los algoritmos evolutivos (EAs) son técnicas estocásticas (involucran a las variables aleatorias) que emulan el proceso de evolución natural de las especies²⁰ para resolver problemas de optimización, búsqueda y aprendizaje (Bäck, Fogel, y Michalewics, 1997; Goldberg, 1989), y donde las posibles soluciones a un problema dado son consideradas como individuos de una población que irá evolucionando para hallar las mejores soluciones a dicho problema (García-García *et al.*, 2015). Existen cuatro tipos de EAs que han servido de base a las diversas investigaciones que se han realizado en el área de la computación evolutiva: los algoritmos genéticos [*genetic algorithms* (AGs)] (Holland, 1975), las estrategias de evolución [*evolutionary strategies* (ES)] (Rechenberg, 1973), la programación evolutiva [*evolutionary programming* (EP)] (L. J. Fogel, Owens y Walsh, 1966), y la programación genética [*genetic programming* (GP)] (Koza, 1992)²¹. A continuación, se definirán los elementos que intervienen en los EAs (Duran, Cotta y Fernández, 2009; García-Rodríguez, 2012):

²⁰ La computación evolutiva fue originada en 1930 por W. D. Cannon y sus principios se sustentan en la “teoría neo-darwiniana de la evolución” (García-Rodríguez, 2012). Esta teoría establece que la historia de la vasta mayoría de la vida en el planeta puede ser explicada a través de una serie de procesos estadísticos que actúan sobre y dentro de las poblaciones y especies: la reproducción, la mutación, la competencia y la selección. Bajo este contexto, la evolución es, por lo tanto, el resultado de estos procesos estocásticos (es decir, probabilísticos) fundamentales que interactúan entre sí en las poblaciones, generación tras generación (Quintero y Coello, 2006 p. 5).

²¹ Los AGs se basan en operadores que tratan de modelar los operadores genéticos existentes en la naturaleza, como el cruce y la mutación, los cuales se les aplican a los individuos que codifican las posibles soluciones. Las ES y la EP aplican transformaciones basadas en mutaciones efectuadas sobre los padres para obtener los hijos, lo que permite mantener una línea general de comportamiento del individuo en su descendencia. Finalmente, la GP codifica las soluciones al problema en forma de programas, habitualmente codificados en una estructura de árbol, y adapta dichas estructuras empleando operadores muy específicos (Romero-Zalíz, 2005, p. 40).

- **Definición 3.7: Representación**

Esta es la estructura de datos (denominada cromosomas) que codifica la información o parámetros (también conocida como genes) de una posible solución a un problema. Los cromosomas pueden representarse por cadenas binarias, reales, etc. (ver figura 3.4). Un gen es un elemento de un cromosoma que codifica el valor de un solo parámetro; así, el genotipo corresponde a la codificación del cromosoma; y el fenotipo, a la decodificación de este.

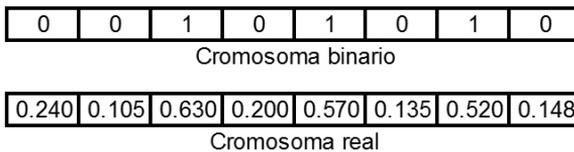


Figura 3.4. Estructura general de un algoritmo evolutivo.
Fuente: (García-Rodríguez, 2012).

- **Definición 3.8: parámetros**

Valores utilizados en la simulación de un proceso evolutivo (p.ej. tamaño de la población, probabilidad de aplicar un operador genético, número de generaciones).

- **Definición 3.9: población**

Conjunto de individuos (soluciones) que codifican las variables de decisión de la función objetivo del problema. Cada uno de estos elementos debe estar configurado en forma de cromosoma.

- **Definición 3.10: función de evaluación**

Se le conoce también como función *fitness*, de aptitud o función objetivo, y representa los requisitos a los cuales la población debe adaptarse.

- **Definición 3.11: operadores genéticos**

Operadores probabilísticos que generan nuevas poblaciones a partir de la población actual. Se pueden clasificar en tres tipos:

- **Selección:** elige los individuos más aptos para generar la siguiente población.
- **Cruce:** combina los cromosomas de dos individuos para obtener los descendientes. Su aplicación selectiva hacia los individuos padre favorece la transmisión de las características de un progenitor a su descendencia, aun cuando estas sean mezcladas con las de otros individuos.
- **Mutación:** ayuda a mantener la diversidad genética a través de la introducción aleatoria de pequeñas alteraciones a la codificación de algunos individuos.

Así mismo, los algoritmos evolutivos incorporan un mecanismo que permite conservar, durante el proceso evolutivo, a los individuos que han presentado el mejor *fitness*, sin aplicarles ninguna operación genética sobre ellos. En este tratamiento denominado “elitismo” se copia el mejor individuo de una generación a la siguiente, lo cual evita, de esta forma, que el mismo se pierda a causa del proceso evolutivo. Así, el mejor individuo de una generación siempre será igual o mejor al de su generación anterior, lo que asegura el comportamiento monótonico del máximo valor de la función de *fitness* por iteración, lo cual es condición necesaria y suficiente para la convergencia del algoritmo (García-Rodríguez, 2012). El pseudocódigo de un EA básico se describe en el algoritmo 3.1. (Bäck y Schwefel, 1993; Lwin, 2015):

Algoritmo 3.1 Estructura genérica de un EA básico

```

1   $g \leftarrow 0$ ;
2  inicializar a población  $P^g$  con individuos aleatorios;
3  evaluar cada individuo en  $P^g$ ;
4  while not criterio de parada do;
5       $g \leftarrow g + 1$ ;
6       $\bar{P}^g \leftarrow$  cruzar ( $P^g$ );
7       $\hat{P}^g \leftarrow$  mutar ( $\bar{P}^g$ );
8      evaluar ( $\hat{P}^g$ );
9       $P^{g+1} \leftarrow$  seleccionar ( $\hat{P}^g \cup P^g$ );

```

En el algoritmo 3.1., un individuo representa una solución potencial al problema que se está resolviendo. Inicialmente, la población se genera apli-

cando un procedimiento aleatorio o utilizando una heurística específica para el problema por resolver. Cada individuo en la población es evaluado por una función *fitness*. En cada iteración (generación), una población de soluciones tentativas se reproduce, sujetas a las variaciones genéticas que se dan en la selección natural (supervivencia del más apto). Nuevas soluciones de descendentes son producidas por el cruce de padres y la mutación de los individuos resultantes para promover diversidad genética. Una selección estratégica adecuada se aplica luego para identificar las soluciones que sobreviven a la siguiente generación. Este proceso se repite para un número predefinido de generaciones (o función de evaluación) o para algún otro criterio de parada específico (Bäck y Schwefel, 1993; Lwin, 2015).

3.4 Algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs)

El potencial de los algoritmos evolutivos para resolver problemas de optimización multiobjetivo fue sugerido por Rosenberg (1960) e Ito, Akagi y Nishikawa (1983). No obstante, la primera implementación real de lo que en la actualidad se denomina un algoritmo evolutivo multiobjetivo [*Multi-Objective Evolutionary Algorithm* (MOEA)] se le acredita a Schaffer (1984), quien propuso el *Vector Evaluation Genetic Algorithm* (VEGA). VEGA tenía principalmente el objetivo de resolver problemas en el aprendizaje de máquinas (*machine learning*) (Schaffer, 1984, 1985; Schaffer y Grefenstette, 1985).

Los algoritmos evolutivos son particularmente adecuados para resolver problemas de optimización multiobjetivo debido a que tratan simultáneamente con un conjunto de posibles soluciones (la llamada ‘población’). Esto permite encontrar varios miembros del conjunto óptimo de Pareto en una sola “ejecución” del algoritmo, en lugar de tener que realizar una serie de ejecuciones separadas, como en el caso de las técnicas de programación matemáticas tradicionales (Coello, 1999). Además, los algoritmos evolutivos son menos susceptibles a la forma o continuidad del frente óptimo de Pareto (por ejemplo, pueden tratar fácilmente con frentes óptimos de Pareto discontinuos o cóncavos), mientras que estas dos cuestiones son una preocupación real para las técnicas de programación matemática. En este

orden de ideas, los MOEAs son unas técnicas muy atractivas de solución de MOPs, puesto que asumen la búsqueda y la toma de decisiones multiobjetivo. Además, tienen la capacidad de buscar espacios parcialmente ordenados para varias alternativas de *trade-offs* (Coello *et al.*, 2007). La figura 3.5 muestra, respectivamente, una descomposición general de las tareas de un EA y un MOEA. Por definición, la tarea 2 del caso MOEA calcula k (donde $k \geq 2$) funciones *fitness*. Además, debido a que los MOEAs esperan un valor *fitness* único con el cual realizar la selección, a veces se requiere un proceso adicional para transformar los vectores *fitness* de las soluciones MOEAs en un escalar (tarea 2a). Aunque las diversas técnicas de transformación varían en su impacto algorítmico, el resto del MOEAs es estructuralmente idéntico a su homólogo de un único objetivo. Sin embargo, esto no implica que las diferencias sean insignificantes (Coello *et al.*, 2007).

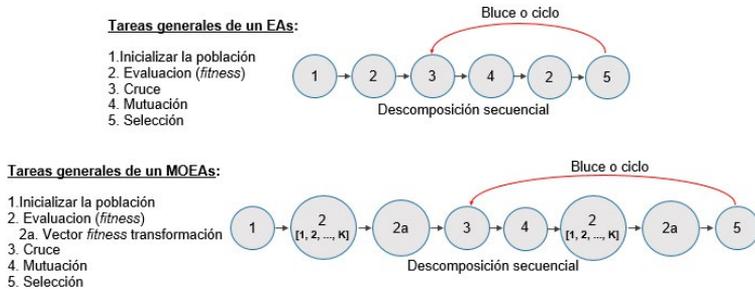


Figura 3.5. Descomposición de tareas de un EA y un MOEA.

Fuente: Coello *et al.* (2007).

Desde el esfuerzo pionero de Schaffer (1984), se han propuesto varias técnicas evolutivas diferentes para la optimización multiobjetivo con el propósito de cumplir los tres objetivos de optimización descritos anteriormente (ver sección 3.2.4). La mayoría de estos MOEAs se basan, en gran medida, en los modelos computacionales de algoritmos genéticos (GAs), la programación evolutiva (EP) y las estrategias de evolución (ES). En este orden de ideas, los diferentes MOEAs propuestos para los MOPs se pueden clasificar en tres categorías (Maulik, Bandyopadhyay y Mukhopadhyay, 2011): i) *Population-Based Non-Pareto Algorithms*, ii) *Pareto-Based*

Non-Elitist Algorithms, y, iii) *Pareto-Based Elitist Algorithms*. La tabla 3.1 presenta algunos de estos algoritmos, junto a un breve resumen de sus ventajas y desventajas (Kanthababu, 2013; Konak *et al.*, 2006):

3.5 El problema de optimización de cartera con el apoyo de MOEAs

La utilidad de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) para la solución del problema de optimización de cartera con restricciones realistas es indiscutible y puede ser testificada por un número considerable de estudios en el campo (Castillo y Coello, 2007; Liagkouras y Metaxiotis, 2015; Metaxiotis y Liagkouras, 2012; Schlottmann y Seese, 2004). A continuación, se ofrece una breve revisión de los artículos más relevantes que tratan de la implementación de MOEAs para la solución del problema de selección de carteras.

Arnone, Loraschi y Tettamanzi (1993) fueron los primeros en utilizar un MOEA para la optimización de carteras. Los autores adoptaron el modelo de Markowitz (1952), y utilizaron el *lower partial moment* como medida de riesgo. No obstante, el uso de este riesgo *downside* hace el problema más difícil, debido a que la forma de la superficie objetivo es generalmente no convexa y, por consiguiente, la programación cuadrática no puede emplearse para encontrar soluciones exactas. Los autores adoptaron un algoritmo genético con una función de agregación lineal ponderada para resolver este problema.

Shoaf y Foster (1996) usan un algoritmo genético con una combinación lineal de pesos para la selección de carteras de media varianza. Los autores destacan un tema importante: la codificación. El problema de selección de carteras es uno de asignación, por lo tanto, una representación directa (*i.e.* utilizando variables de decisión como se hace normalmente con los algoritmos genéticos para representar los pesos de cada acción) no funciona bien. La razón es que este tipo de representación producirá frecuentemente soluciones inviables, en las que los valores asignados no suman 1.0, lo cual es una limitación impuesta al problema. Proponen una representación al-

Tabla 3.1. Comparación de los MOEAs más conocidos y utilizados

<i>Population-Based Non-Pareto Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Vector Evaluated genetic Algorithm</i> (VEGA) (Schaffer, 1985)	Cada subpoblación se evalúa con respecto a un objetivo diferente	No	No	No	Implementación sencilla	Tendencia a converger al extremo de cada objetivo
<i>Pareto-Based Non-Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Multiple Objective GA</i> (MOGA) (Fonseca y Fleming, 1993)	Jerarquización de Pareto	i) <i>Fitness-Sharing</i> ii) <i>Niching</i>	No	No	Extensión sencilla de un algoritmo de objetivo único	i) Convergencia lenta ii) Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho
<i>Niched Pareto GA</i> (NPGA) (Horn, Nafpliotis, y Goldberg, 1993)	i) No asignación de <i>fitness</i> ii) Selección de torneo	El nicho cuenta como desempate en la selección de torneos	No	No	Proceso de elección muy simple con selección de torneos	i) Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho ii) Parámetro extra para la selección de torneos

Continúa

<i>Pareto-Based Non-Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Non-dominated Sorting GA (NSGA)</i> (Srinivas y Deb, 1994)	Jerarquización basada en un ordenamiento no dominado	i) <i>Fitness-Sharing</i> ii) <i>Niching</i>	No	No	Rápida convergencia	Problemas relacionados con el parámetro de tamaño de nicho
<i>Pareto-Based Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA)</i> (Zitzler y Thiele, 1998)	Jerarquización basada en el archivo externo de soluciones no dominadas	Agrupamiento para truncar la población externa	Sí	Sí	i) Muestras adecuadas ii) No parámetros para la agrupación	Algoritmo de agrupamiento complejo
<i>Strength Pareto Evolutionary Algorithm II (SPEA2)</i> (Zitzler, Laumanns y Thiele, 2001)	Fuerza de los dominadores	Densidad basada en el k-ésimo vecino más cercano	Sí	Sí	i) SPEA mejorado ii) Asegura la preservación de los puntos extremos	Cálculo de la densidad y el <i>fitness</i> computacionalmente costosos

Continúa

<i>Pareto-Based Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Pareto Archived Evolutionary Strategy</i> (PAES) (Knowles y Corne, 1999)	La dominación de Pareto se usa para reemplazar a un padre si domina la descendencia	Densidad celular como separador de vínculos entre descendientes y padres	Sí	Sí	i) Estrategia de escalada de mutación al azar ii) Fácil de implementar iii) Computacionalmente eficiente	i) No es un enfoque basado en la población ii) El rendimiento depende del tamaño de las celdas
<i>Pareto-Based Elitist Algorithms</i>						
Algoritmo	Asignación <i>fitness</i>	Mecanismo de diversidad	Elitismo	Población externa	Ventajas	Desventajas
<i>Pareto Envelope-Based Selection Algorithm</i> (PESA) (Corne, Knowles, y Oates, 2000)	No asignación de <i>fitness</i>	Densidad basada en células	Elitismo puro	Sí	i) Fácil de implementar ii) Computacionalmente eficiente	i) El rendimiento depende del tamaño de las celdas ii) Información previa necesaria sobre el espacio objetivo
<i>Elitist non-dominated Sorting GA</i> (NSGAI) (Deb, Agrawal, Pratap y Meyarivan, 2000)	Jerarquización basada en un ordenamiento no dominado	<i>Crowding distance</i>	Sí	No	i) Parámetro único (N) ii) Muestras adecuadas iii) Eficiente	La <i>crowding distance</i> trabaja solo en un espacio objetivo

Fuente: elaboración propia a partir de Kanthababu (2013) y Konak *et al.* (2006).

ternativa que resuelve este asunto, pero con el efecto secundario de una mayor sensibilidad a las tasas de mutación y *crossover*.

Vedarajan, Chan y Goldberg (1997) adoptan los dos objetivos del modelo de Markowitz, esto es, maximizar el rendimiento esperado de la cartera y minimizar el riesgo. Estos autores utilizan un algoritmo genético con una función de agregación lineal que combina los dos objetivos en un único valor escalar y en el que los pesos son variados para generar diferentes soluciones no-dominadas.

Chang *et al.* (2000) utilizan tres algoritmos heurísticos basados en algoritmos genéticos, búsqueda tabú (Glover y Laguna, 1997) y cristalización simulada (Kirkpatrick, Gelatt, y Vecchi, 1983), para resolver el modelo de media varianza con restricciones de cardinalidad y cotas inferior y superior sobre la proporción del presupuesto de capital que se desea invertir en un activo. Los investigadores prueban que, debido a estas limitaciones, la frontera eficiente limitada por este tipo de restricciones es más difícil de aproximar y puede presentar algunas discontinuidades.

Lin, Wang y Yan (2001) consideran una variación del modelo de media varianza con costos de transacción fijos y lotes mínimos de transacción. El problema de selección de carteras se modela como uno de programación lineal en números enteros con funciones de objetivos múltiples. Desarrollan un algoritmo genético basado en NSGAI y GENOCOOP (Michalewicz y Nazhiyath, 1995) para la solución del modelo propuesto y proporcionan un ejemplo numérico para probar la eficiencia del algoritmo.

Schaerf (2002) examina el modelo de media varianza y considera restricciones adicionales, como la cardinalidad de la cartera y la cantidad de acciones individuales. La autora utiliza técnicas de búsqueda local, principalmente la que recibe el nombre de 'tabú', y compara esto con los estudios previos de selección de carteras que utilizan este tipo de enfoque. Así mismo, propone nuevos algoritmos que combinan diferentes relaciones de vecindario y comprueba cómo el uso de la aleatorización y de una forma simple de adaptación simplifica el establecimiento de un gran número de parámetros críticos.

Maringer y Kellerer (2003) sugieren un algoritmo híbrido de búsqueda local que combina principios de cristalización simulada y estrategias evolutivas. Aplicaron el algoritmo al problema de selección de carteras cuando hay restricciones, como el número de activos en la cartera y la no negatividad de los pesos de los activos, y encontraron que el algoritmo era altamente eficiente y confiable.

Ehrgott, Klamroth y Schwehm (2004) plantean un modelo para la optimización de cartera que amplía el modelo media-varianza. Con el apoyo de *Standard and Poor's* utilizan cinco objetivos específicos relacionados con el retorno y el riesgo, cinco funciones de utilidad para cada objetivo, y una función de utilidad global aditiva. Los resultados numéricos presentados y soportados en la búsqueda local personalizada, la cristalización simulada, la búsqueda tabú y la heurística, demuestran que los problemas de tamaño pueden resolverse rápidamente.

Subbu, Bonissone, Eklund, Bollapragada y Chalermkraivuth (2005) presentan un enfoque de optimización multiobjetivo híbrido que combina algoritmos evolutivos con una programación lineal para maximizar simultáneamente el retorno esperado, minimizar el riesgo e identificar la frontera eficiente que cumpla con todas las restricciones consideradas. Los autores demostraron que su *Pareto Sorting Evolutionary Algorithm* (PSEA) es capaz de identificar, de manera robusta, el frente de Pareto de las carteras óptimas definidas en el espacio retorno-riesgo.

Chiam, Al Mamun y Low (2007) proponen una representación basada en órdenes (*order-based representation*) para la optimización de la cartera multiobjetiva evolutiva, que puede extenderse fácilmente para tratar varias restricciones realistas, como la cardinalidad y las cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera. Los autores proporcionan un amplio estudio experimental, que incluye la evaluación del rendimiento algorítmico basado en un conjunto de problemas de referencia con métricas de rendimiento y pruebas estadísticas.

Chang *et al.* (2009) utilizan un algoritmo evolutivo para resolver el enfoque heurístico de los problemas de optimización de cartera con diferentes medidas de riesgo. Los autores comparan los desempeños obtenidos con

el modelo de media varianza en la frontera eficiente limitada por cardinalidad, y demuestran que los problemas complejos de optimización de la cartera pueden resolverse con un algoritmo genético si se utilizan medidas de riesgo, como la varianza, la semivarianza, la desviación absoluta y varianza con asimetría. Finalmente, proporcionan resultados empíricos para demostrar la robustez de su método heurístico.

Anagnostopoulos y Mamanis (2011a) investigan la capacidad de algunos MOEAs, como NSGAI, PESA y SPEA2 para solucionar los complejos problemas de optimización de la cartera. Los autores evaluaron las técnicas de los mencionados MOEAs con resultados proporcionados por los métodos exactos, y concluyen que el desempeño de PESA es mejor en términos de la cercanía al frente óptimo de Pareto, mientras que NSGAI y SPEA2 tienen el mejor desempeño promedio en términos del indicador de hipervolumen. Los resultados muestran que los MOEAs, en general, son estrategias eficientes y confiables para este tipo de problemas y, además, son flexibles para adaptarse a una adición de una nueva restricción, o a un remplazo de una nueva función de riesgo.

En un contexto de optimización difusa, Gupta, Inuiguchi *et al.* (2013) proponen un modelo credibilístico multiobjetivo para la selección de carteras con restricciones de probabilidad difusa. Los criterios financieros utilizados son el rendimiento a corto plazo y largo plazo, el riesgo y la liquidez. El problema se resuelve con un algoritmo inteligente híbrido, que integra la simulación difusa con un algoritmo genético de código real. Los autores comprobaron que el modelo genera carteras que son óptimas hasta el punto de alcanzar los valores de credibilidad más altos para las funciones objetivo, y mostraron que la principal ventaja de este modelo multicriterio es que trata la incertidumbre de los mercados financieros de manera más realista, debido a que los cuatro criterios considerados pueden tener formas funcionales generales.

Vercher y Bermúdez (2015) examinaron el problema de optimización multiobjetivo con restricciones de cardinalidad para generar carteras eficientes dentro de un marco difuso de semidesviación media absoluta. Los autores asumieron que el rendimiento de una cartera dada se modela mediante variables difusas de tipo L-R, cuyas distribuciones de credibilidad recogen las relaciones contemporáneas entre los rendimientos de los activos individuales. Por último, aplicaron una estrategia de

clasificación basada en el VaR Fuzzy, para seleccionar la mejor cartera entre las soluciones óptimas de Pareto, lo cual permitió encontrar una composición explícita de la cartera para los diferentes perfiles de riesgo de los inversores.

Jalota *et al.* (2017b) señalan que, en los modelos desarrollados hasta el momento, los números fuzzy L-R necesarios para modelar los parámetros inciertos en un problema de selección de carteras multiobjetivo se someten a la opinión del decisor o al experto en el mercado. Esta toma de decisiones se vuelve muy subjetiva, por lo que proponen un sistema para extraer, a partir de datos históricos, la información requerida para ajustar los números fuzzy L-R y no necesitar la intervención humana. Desarrollaron cuatro modelos y diseñaron un algoritmo multiobjetivo denominado *Entropy-Cross Entropy* (ECE) y, a través de varios ejemplos numéricos, demuestran la validez de los modelos planteados.

3.6 Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAI)

Liagkouras y Metaxiotis (2015) examinaron 220 artículos de revistas y congresos internacionales de reconocido prestigio, y encontraron que el NSGAI y SPEA2, con un 29.17 % y un 25 % respectivamente, son los dos MOEAs más populares para resolver el problema de optimización de cartera (ver tabla 3.2).

Tabla 3.2. Los MOEAs más utilizados para resolver el problema de optimización de cartera

Tipo MOEA	NSGAI	SPEA2	PESA	SPEA	PAES	MOGA	NPGA2	IBEA
%	29.17 %	25.00 %	16.67 %	8.33 %	8.33 %	4.17 %	4.17 %	4.70 %

Fuente: elaboración propia a partir de Liagkouras y Metaxiotis (2015).

Sobre la base de la consideración anterior, el modelo que se propondrá en esta tesis doctoral se resolverá aplicando el MOEA-NSGAI. A continuación, se presentarán las principales características de este EA.

NSGAI fue presentado por Deb *et al.*, (2000) y es una versión mejorada de NSGA (Srinivas y Deb, 1994). Este MOEA, comparado con su predecesor, consta de tres características significativas (Lwin, 2015):

- i. Reduce la complejidad computacional de $O(JI^3)$ a $O(JI^2)$, donde J es el número de objetivos y I es el tamaño de la población²².
- ii. Agrega un procedimiento de elitismo que previene la pérdida de soluciones prometedoras ya encontradas.
- iii. Integra un operador de selección denominado *crowding distance*, que ayuda a preservar la diversidad de las soluciones en el frente óptimo de Pareto.

3.6.1 Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas

NSGAI se basa en el marco básico que utiliza una técnica de clasificación por capas. La idea básica es clasificar las soluciones de la población en frentes no dominados F_i . En primer lugar, se identifican todas las soluciones no-dominadas en la población P . El conjunto de estas soluciones se clasifica en una categoría con el primer frente o nivel F_1 . Este conjunto de soluciones se suprime de la población acto seguido, y al conjunto siguiente de soluciones no-dominadas se le atribuye el segundo frente o nivel F_2 (Lwin, 2015). El proceso se repite con los individuos restantes hasta que toda la población se clasifica (ver figura 3.6).

El procedimiento de ordenamiento rápido de soluciones no nominadas (*Fast Non-dominated Sorting*) se describe en el algoritmo 3.2. (página 90). Cada solución tiene dos entidades: i) un contador de dominancia n_p , que es el número de soluciones que dominan a p , y, ii) un conjunto s_p , el cual contiene soluciones que p domina. Todas las soluciones del primer frente no-dominado tendrán n_p en cero. A continuación, para cada solución p con $n_p = 0$, se visita cada miembro q de su conjunto s_p y se reduce el contador de dominancia en una unidad. De este modo, si para algún miembro de la población q su contador de dominancia toma el valor 0, q se sitúa en una lista separada Q . Estos miembros pertenecen

²² El NSGA original tiene una complejidad de $O(JI^3)$, lo cual hace que este MOEA sea muy costoso con tamaños grandes de población.

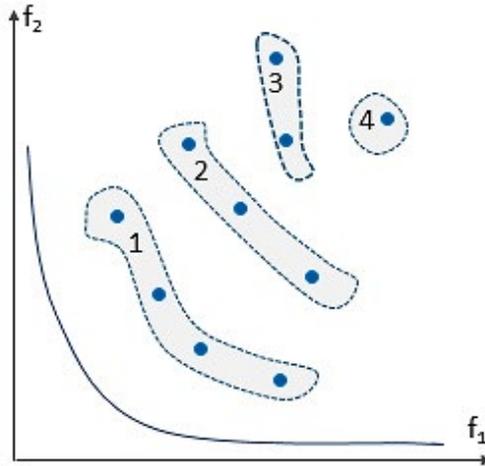


Figura 3.6. Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas en NSGAI para dos objetivos. Fuente: Lwin (2015).

al segundo frente no dominado. Después, el procedimiento anterior se repite con cada miembro de Q y se identifica el tercer frente. Este proceso continúa hasta que todos los frentes son identificados (Deb, Agrawal, Pratap, y Meiyarivan, 2002).

3.6.2 Preservación de la diversidad

En primer lugar, se necesita definir el estimador de densidad. Para obtener una estimación de la densidad de soluciones que rodean una solución en particular de la población en el espacio de decisión, se calcula la distancia media entre los puntos a cada lado de este punto en cada uno de los objetivos. Esta cantidad de distancias, i_{distance} , sirve como una aproximación al perímetro del cubo formado usando los vecinos más cercanos como vértices, y se denomina *crowding-distance* (Deb et al., 2002). En la figura 3.7 (página 91) la *crowding-distance* de la i -ésima solución en su frente (marcado con círculos azules), es la longitud media de los lados del cubo (mostrado con líneas discontinuas).

Algoritmo 3.2 Ordenamiento rápido de soluciones no-dominadas

```

1  for each  $p \in P$ 
2  |  $s_p = \emptyset$ 
3  |  $n_p = 0$ 
4  | for each  $q \in P$ 
5  | | if  $(p \leq q)$  then // Si p domina a q
6  | | |  $s_p = s_p \cup \{q\}$ ; // Agrega q a soluciones dominadas por p
7  | | else if  $(q \leq p)$  then
8  | | |  $n_p = n_p + 1$ ; // Incrementa el contador de dominación de p
9  | | end if
10 | end for
11 | if  $n_p = 0$  then // p pertenece al primer frente
12 | |  $p_{rank} = 1$ 
13 | |  $F_1 = F_1 \cup \{p\}$ 
14 | else if
15 | end for
16 |  $i = 1$ ; // Inicializa el contador de frente
17 | while  $F_i \neq \emptyset$  do
18 | |  $Q = \emptyset$ ; // Usado para guardar los miembros del
19 | | siguiente frente
20 | | for each  $p \in F_i$ 
21 | | | for each  $q \in s_p$ 
22 | | | |  $n_p = n_p - 1$ 
23 | | | | if  $n_p = 0$  then // q pertenece al siguiente frente
24 | | | | |  $q_{rank} = i + 1$ 
25 | | | | |  $Q = Q \cup \{q\}$ 
26 | | | | end if
27 | | | end for
28 | | | end for
29 | | |  $i = i + 1$ 
30 | | |  $F_i = Q$ 
31 | end while

```

El algoritmo 3.3., describe el procedimiento del cálculo de la *crowding-distance* de todas las soluciones en un conjunto I de puntos no dominados. Este cálculo requiere la ordenación de los puntos de dicho conjunto de acuerdo con cada valor de la función objetivo de forma ascendente en orden de magnitud. Después, para cada función objetivo, a las soluciones límite (aquellas con menor y mayor valor objetivo) se les asigna un valor distancia infinito. A todas las demás de carácter intermedio se les asigna un valor distancia igual a la diferencia absoluta normalizada de los valores de la función en las dos soluciones adyacentes, y este cálculo se realiza con todas las funciones objetivo. El valor general de la *crowding-distance* se calcula como la suma de los valores de las distancias individuales correspondientes a cada uno de los objetivos donde cada función objetivo se normaliza antes de calcular esta distancia (Deb *et al.*, 2002).

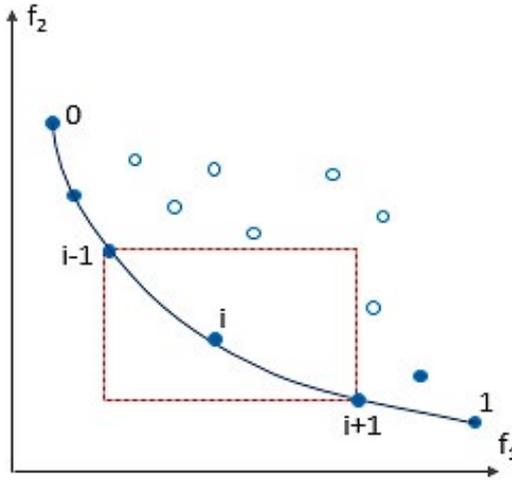


Figura 3.7. *Crowding-distance* usados en NGSAAI para dos objetivos. Los puntos azules son las soluciones del mismo frente no-dominado
Fuente: Deb et al. (2002).

Algoritmo 3.3 Asignación de *crowding-distance*

```

1  L = |I| // Número de soluciones en I
2  for each i
3  | I[i].distance = 0; // Se inicializan las distancias
4  end for
5  for each objetivo m
6  | I = ordenar (I, m); // Ordena con base al valor de cada
   | objetivo
7  | I[1].distance = I[L].distance = ∞; // Puntos en el límite
8  | for i = 2 to (L - 1); // Para todos los demás puntos en I
9  | | I[i].distance = I[i].distance +  $\frac{[I(i+1)_m - I(i-1)_m]}{[f_m^{\max} - f_m^{\min}]}$ 
10 | end for
11 end for
    
```

$I[i].m$ se refiere al valor de la m -ésima función objetivo en el individuo i -ésimo del conjunto I y los parámetros f_m^{\max} y f_m^{\min} son los valores máximo y mínimo de la m -ésima función objetivo.

Después de asignarles a todos los miembros de la población en el conjunto I una distancia, se pueden comparar dos soluciones por su grado de

proximidad con otras. Una solución con un valor menor de esta medida de distancia estará, en cierto sentido, más apiñada por otras tantas. Esto es exactamente lo que se compara en el operador propuesto en NSGAI, el operador *crowded-comparison* (Deb et al., 2002). Aunque la Fig. 3.8 ilustra el cálculo del *crowding-distance* para dos objetivos, el procedimiento también es aplicable a más de dos objetivos.

El operador *crowded-comparison* (\prec_n), comentado en el párrafo anterior, guía el proceso de selección en las diversas etapas del algoritmo hacia un frente óptimo de Pareto distribuido de manera uniforme. NSGAI asume que cada individuo de la población i tiene dos atributos: i) rango no dominado (i_{rank}), y, i) *crowding-distance* (i_{distance}). El EA define un orden especial parcial \prec_n como sigue:

$$i \prec_n j \text{ si } (i_{\text{rank}} < j_{\text{rank}}) \text{ o } [(i_{\text{rank}} = j_{\text{rank}}) \text{ y } (i_{\text{distance}} > j_{\text{distance}})]$$

Es decir, entre dos soluciones con diferentes rangos es preferible aquella con el menor (mejor) rango. En otro caso, si ambas soluciones pertenecen al mismo frente, entonces se le da prioridad a la solución que se encuentra en una región menos densa (Deb et al., 2002).

3.6.3 Ciclo principal

Una vez conocidos los procedimientos de ordenamiento rápido de soluciones no dominadas, la *crowding-distance* y el operador *crowded-comparison*, se puede pasar a describir el algoritmo NSGAI.

Inicialmente, se crea una población P_0 al azar y se ordena según los frentes no-dominados (*i.e.* a cada solución se le asigna como *fitness* su rango de no-dominado: 1 es el mejor rango, 2 es el siguiente mejor rango y así sucesivamente). En un primer momento, se utilizan los operadores de selección por torneo binario, cruce y mutación para crear una población descendiente Q_0 de tamaño N . Ya que se introduce el elitismo comparando la población actual con las mejores soluciones no-dominadas previamente encontradas, el procedimiento es diferente después de la generación de la población inicial (Deb et al., 2002). El algoritmo 3.4 describe la construcción de la t -ésima generación.

El procedimiento detallado que presenta NSGAIII es simple y directo. En primer lugar, se crea una población combinada R_t de tamaño $2N$ formada por la combinación de la población de la iteración anterior, P_t , y su conjunto de descendientes recién creados, Q_t ambos de tamaño N . A continuación, la población R_t se ordena con base en sus rangos no-dominados [donde $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ son todos los frentes no-dominados de R_t]. El elitismo está garantizado debido a que todos los miembros de la población anterior y actual están incluidos en R_t . Las soluciones pertenecientes a F_1 son las mejores en la población combinada R_t , por lo que hay que darles mayor importancia que a otras soluciones de dicho conjunto. Si el tamaño de F_1 es menor que N , se eligen todos los miembros de ese conjunto para la nueva población P_{t+1} . Los miembros restantes de la población son elegidos de los siguientes frentes no dominados en el orden de su clasificación (*i.e.* las soluciones del conjunto F_2 se eligen a continuación, seguidas por las soluciones de F_3 y así sucesivamente). Este procedimiento continúa hasta que no puedan añadirse más frentes no-dominados completos (Deb et al., 2002).

Algoritmo 3.4 Construcción de la t-ésima generación

```

1   $R_t = P_t \cup Q_t$ ; // Combina padres y descendencia
2   $F =$  ordenamiento-rápido-soluciones-no-dominadas ( $R_t$ ); //  $F =$  Frentes en  $R_t$ 
3   $P_{t+1} = \emptyset$ 
4   $i = 1$ 
5  while  $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$  do // Hasta que la población de padres se llene
6  |   asignación-crowding-distance ( $F_i$ )
7  |    $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$ 
8  |    $i = i + 1$ 
9  end while
10 ordenar ( $F_i, <_n$ ); // Ordena en descenso usando  $<_n$ 
11  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1:(N - |P_{t+1}|)]$ ; // Solo elementos necesarios para llenar la
    población
12  $Q_{t+1} =$  crear-nueva-población ( $P_{t+1}$ ); // Selección, cruce y mutación
13  $t = t + 1$ 

```

Sea F_1 el último conjunto no-dominado añadido a la nueva población P_{t+1} . En general, el número de soluciones en todos los conjuntos desde F_1 hasta F_n sería mayor que el tamaño de la población. Para elegir exactamente N miembros de la población, se ordenan las soluciones del último frente F_1 usando el operador *crowded-comparison* $<_n$ en orden descendente y se eligen las mejores soluciones necesarias para completar la población. El

procedimiento de NSGAI también se presenta en la figura 3.8. A la nueva población P_{t+1} de tamaño N se le aplican los operadores de selección, *crossover* y mutación, para crear una nueva población Q_{t+1} de tamaño N . Es importante tener presente que se utiliza el operador de selección por torneo binario, pero el criterio de selección ahora se basa en el operador *crowded-comparison* \prec_n . Dado que este operador requiere tanto el rango como la *crowding-distance* de cada solución de la población, se calculan estas cantidades mientras se forma la población P_{t+1} , como se muestra en el algoritmo 3.4 (Deb et al., 2002).

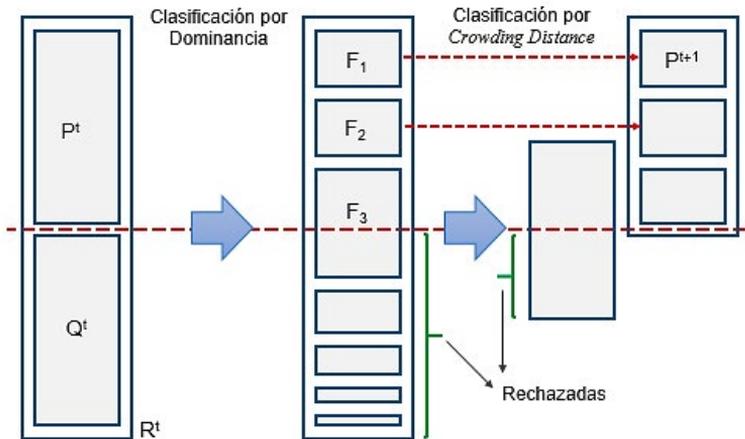


Figura 3.8. Esquema del funcionamiento de NSGAI.
Fuente: Deb et al. (2002).

Nótese que la población de tamaño $2N$ no necesita ser ordenada por completo con base en los criterios de no-dominación. Tan pronto como el proceso de ordenación ha encontrado un número suficiente de frentes para obtener N miembros en P_{t+1} , no hay razón para continuar con esta actividad. La diversidad entre las soluciones no-nominadas se introduce mediante el uso del operador *crowded-comparison*, que se utiliza en la selección de torneo y durante la fase de reducción de la población.

3.7 Resumen y conclusiones del capítulo

La mayoría de los problemas del mundo real requieren la búsqueda de soluciones que optimicen en forma simultánea múltiples objetivos que generalmente presentan conflictos entre sí. En este tipo de problemas no existe una solución única que pueda ser considerada como la mejor, sino un conjunto de soluciones que representan los mejores compromisos entre los diferentes objetivos. Dicho conjunto se denomina conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}), y su imagen en el espacio objetivo recibe el nombre de frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$).

Los algoritmos evolutivos (EAs) se han convertido en una herramienta útil para resolver problemas multiobjetivo (MOPs). El propósito final de un algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEAs) es dar a conocer el conjunto óptimo de Pareto (\mathbb{P}_{true}) y, por ende, el frente óptimo de Pareto ($\mathbb{EF}_{\text{true}}$) que le permita al tomador de decisiones seleccionar la solución que represente el mejor compromiso. No obstante, la identificación de \mathbb{P}_{true} en muchos MOPs es prácticamente imposible debido a su tamaño o inviabilidad computacional. En tales casos, una alternativa práctica es investigar el conjunto de soluciones [*the best-known Pareto set* ($\mathbb{P}_{\text{known}}$)] que mejor se aproxime a \mathbb{P}_{true} .

La revisión de los artículos más relevantes de la aplicación de MOEAs en el problema de optimización de carteras evidencia que las principales líneas de investigación en este campo de las finanzas se han destinado a: i) el desarrollo de modelos que incluyen características más realistas, proponiendo, en especial, nuevas medidas de riesgo, restricciones y funciones objetivos; ii) la adaptación del modo de trabajo de los MOEAs a estos nuevos modelos, al aprovechar su capacidad para producir un conjunto de soluciones no-dominadas en una sola ejecución, y tratar las formulaciones complejas de los problemas que aparecen en este ámbito de aplicación.

Finalmente, la revisión de la literatura mostró que el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI) es uno de los MOEAs más utilizados para resolver el problema de optimización de cartera. Este algoritmo incluye 3 modificaciones fundamentales que superan los problemas presentados

con su predecesor, el NSGA: i) reduce la complejidad computacional reescribiendo el código original de la ordenación de una manera más eficiente, guardando los datos temporales en cada paso para su posterior reutilización; ii) agrega un procedimiento de elitismo que combina la población actual con la población anterior para formar un conjunto mixto con el doble de individuos que la población original; y iii) emplea una técnica que ayuda a mantener la diversidad de las soluciones en el frente óptimo de Pareto (*crowding-distance*).

La aplicación de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) seguirá desempeñando en el futuro un papel fundamental en la modelización y resolución, no solo de los problemas de selección de carteras, sino también los problemas de la planificación y la gestión financieras.

Capítulo 4. Teoría de la credibilidad

4.1 Introducción al tema

En el marco teórico de Markowitz, una suposición implícita es que el rendimiento futuro de los activos puede ser reflejado correctamente por el rendimiento pasado. En otras palabras, los retornos de los activos están representados por variables aleatorias, cuyas características como el valor esperado y la varianza se calculan a partir de una muestra de los datos históricos disponibles (Qin, 2016). Bajo esta perspectiva, la teoría de la probabilidad es la herramienta matemática para manejar la incertidumbre en el pasado. No obstante, el mundo es complejo y la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad, especialmente cuando se incluyen factores humanos. El mercado de capitales es uno de los más complejos del mundo y contiene casi todo tipo de incertidumbres. Los activos financieros son sensibles a diversos factores, incluyendo económicos, sociales, políticos y, en especial, los factores psicológicos de las personas (Huang, 2010). Debido a que los retornos de los activos están rodeados de ambigüedad y vaguedad, varios investigadores sugieren estimar los retornos de los activos a través de la teoría de conjuntos difusos²³.

El concepto de conjunto difuso fue incorporado por Zadeh (1965) vía función de pertenencia. Para medir un evento difuso, Zadeh (1978) propuso el concepto de la medida de posibilidad. A partir de ese momento, la teoría de la posibilidad ha sido estudiada por varios autores (De Cooman, 1997; Dubois y Prade, 1988; Kaufmann y Gupta, 1985; Klir y Yuan, 1995; B. Liu, 2002b; Nahmias, 1978; Zimmermann, 1985), e investigada en el problema de selección de carteras a partir de los años noventa (Bermúdez y Vercher, 2012; Gupta *et al.*, 2008; Lacagnina y Pecorella, 2006; León, Liern y Vercher, 2002; Saborido *et al.*, 2016; Tanaka y Guo, 1999; Watada, 1997; W.G. Zhang y Nie, 2005).

²³ El término *fuzzy* se suele traducir indistintamente como borroso o difuso.

Aunque la medida de posibilidad ha sido ampliamente utilizada en el problema de selección de carteras, tiene la gran limitación de que no es auto-dual. Cuando esta se emplea, y no cuenta con la propiedad de dualidad, se puede encontrar que dos eventos difusos con diferentes probabilidades de ocurrir puedan tener el mismo valor de posibilidad. Además, siempre que el valor de posibilidad del rendimiento de una cartera mayor que un valor objetivo sea inferior a 1, el valor de posibilidad del evento opuesto (*i.e.* el rendimiento de la cartera menor o igual al valor objetivo) tendrá el valor máximo de 1; o, cuando el valor de posibilidad del rendimiento de una cartera menor o igual que un valor objetivo sea inferior a 1, el valor de posibilidad del evento opuesto (*i.e.* el rendimiento de la cartera mayor que el valor objetivo) tendrá el valor máximo de 1. Estos resultados son bastante complicados y confundirán al tomador de decisiones (Huang, 2009). Para solventar esta dificultad, B. Liu y Liu (2002) presentaron una medida auto-dual, denominada medida de credibilidad, la cual se definió como el valor promedio de la medida de posibilidad y la medida de necesidad. La teoría de la credibilidad, fundada por B. Liu (2004) y refinada por B. Liu (2007), es una rama de las matemáticas que ha sido extensamente utilizada en los campos de la decisión difusa, proceso difuso, cálculo difuso, ecuación diferencial difusa, lógica difusa, e inferencia difusa, entre otros. Desde entonces, la medida de credibilidad ha sido aplicada en el problema de selección de carteras (Huang, 2006, 2007, 2008b, 2009, 2010; Jalota *et al.*, 2017b; Vercher y Bermúdez, 2015; Wen y Peng, 2009).

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera: la sección 4.2 examina las definiciones básicas referentes a los números difusos L-R y la aritmética difusa. En la sección 4.3 se ahonda los aspectos fundamentales de la teoría de credibilidad y su aplicación en el problema de optimización de cartera. Finalmente, la sección 4.4 presenta el resumen y las conclusiones correspondientes a este cuarto capítulo.

4.2 Números difusos L-R y aritmética difusa

A continuación, se presentan algunas definiciones básicas que se utilizarán a lo largo de esta investigación:

- **Definición 4.1: Conjunto difuso** (Vercher y Bermúdez, 2012)
Sea X el conjunto universal. Un conjunto difuso \tilde{A} en X se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que asocia un número real en el intervalo $[0,1]$ con cada punto de X , donde el valor de $\mu_{\tilde{A}}(x)$ en x , representa el grado de pertenencia de x en \tilde{A} .
- **Definición 4.2: número difuso** (Vercher y Bermúdez, 2012)
Un número difuso \tilde{A} es un conjunto difuso definido en el conjunto de números reales \mathfrak{R} , caracterizado por medio de una función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que es semicontinua superior y cumple la condición $\sup_{x \in \mathfrak{R}} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, y cuyos cortes (α – cuts), para $0 \leq \alpha \leq 1$: $[\tilde{A}]^\alpha = \{x \in \mathfrak{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, son conjuntos convexos.
- **Definición 4.3: funciones L, R** (Dubois y Prade, 1987a):
Las funciones $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1]$ son funciones de referencia de un número difuso $\tilde{A} = (x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, si satisface las siguientes condiciones:
i) $L(1) = R(1) = 0, L(0) = R(0) = 1$
ii) $L(x)$ y $R(x)$ son funciones de referencia no-crecientes y semicontinuas superiormente.
- **Definición 4.4: número difuso L-R** (Dubois, 1980)
Se dice que un número difuso \tilde{A} [i.e. $\tilde{A} = (a, b, c, d)_{L_\pi R_\rho}$] es un número difuso L-R si su función de pertenencia es expresada como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L_\pi \left(\frac{b-x}{b-a} \right), & \text{Sí } a \leq x < b, \\ 1, & \text{Sí } b \leq x \leq c, \\ R_\rho \left(\frac{x-c}{d-c} \right), & \text{Sí } c < x \leq d, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Donde $(b - a)$ y $(d - c)$ miden la amplitud izquierda y derecha de \tilde{A} , respectivamente; b y c son las cotas inferior y superior del núcleo de \tilde{A} , (i.e. $[b,c] = \{x/\mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$); y L_π y R_ρ son las funciones de referencia que definen la forma izquierda y derecha de \tilde{A} , respectivamente.

En esta tesis doctoral se utilizarán los números difusos de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias, donde $L_\pi(k) = 1 - k^\pi$, y,

$R_\rho(k)=1-k^\rho$, siendo $\pi>0$ y $\rho>0$. Nótese que π y ρ definen la forma de la función de referencia, de tal manera que, para un valor dado de k , los valores mayores de estos parámetros de forma implicarán valores mayores de la función de pertenencia (Vercher y Bermúdez, 2013). A lo largo de esta investigación, el número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias será denotado por $\tilde{A}=(a, b, c, d)_{\pi\rho}$.

La agregación de números difusos L-R proporciona números difusos de la misma forma cuando sus funciones de referencia son lineales o todas tienen la misma forma para L y R (Vercher *et al.*, 2007). No obstante, esto no aplica cuando estos poseen diferentes formas (Inuiguchi, Ichihashi y Tanaka, 1990; León y Vercher, 2004). Asumiendo que todas las funciones de referencia tienen la misma forma, siendo $L=R$ para cada $t = 1, 2, \dots, T$, y usando el principio de extensión de Zadeh, la siguiente regla aritmética se cumple:

- Teorema 4.1** (Dubois y Prade, 1987a).

Sea $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1)_{LR}$ y $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2)_{LR}$, dos números difusos L-R, y λ un número real (*i.e.* $\lambda \in \mathbb{R}$). Entonces,

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)_{LR}. \quad 4.2$$

$$\lambda \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1)_{LR} & \text{Sí } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_1, \lambda b_1, |\lambda| c_1, |\lambda| d_1)_{LR} & \text{Sí } \lambda < 0. \end{cases} \quad 4.3$$

Donde la adición y multiplicación por un escalar es definida por medio del principio de extensión sup-min.

Nótese que cualquier número difuso trapezoidal es un caso particular de un número difuso L-R, con π y $\rho = 1$. Adicionalmente, si $b = c$, el número difuso sería triangular (ver figura 4.1).

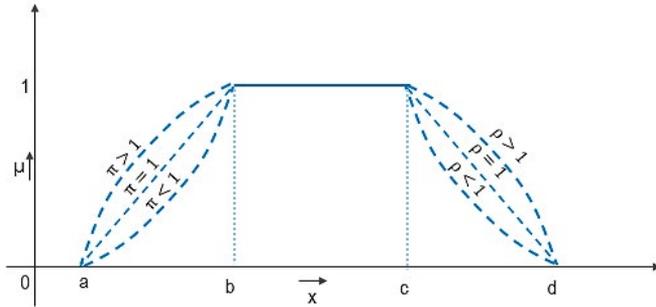


Figura 4.1. Funciones de pertenencia L-R y sus parámetros de forma.
Fuente: Jalota *et al.* (2017b).

4.3 Teoría de la credibilidad

4.3.1 Medida de credibilidad y espacio de credibilidad

Sea Θ un conjunto no vacío (que representa el espacio muestral) y $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ (i.e. todos los subconjuntos posibles de Θ). Cada elemento en $\mathcal{P}(\Theta)$ se conoce como un evento. Para presentar una definición axiomática de la credibilidad, es necesario asignarle a cada evento A , un número $\text{Cr}\{A\}$, que representa la credibilidad de que A ocurrirá. Además, para asegurar que el número $\text{Cr}\{A\}$ tenga ciertas propiedades matemáticas que intuitivamente se espera que tenga una medida de credibilidad, los siguientes cuatro axiomas deben cumplirse:

Axioma 1. Normalidad: $\text{Cr}\{\Theta\}=1$

Axioma 2. Monotonicidad: $\text{Cr}\{A\}\leq\text{Cr}\{B\}$ siempre que $A\subset B$;

Axioma 3. Auto-dualidad: $\text{Cr}\{A\}+\text{Cr}\{A^c\}=1$ para cualquier evento A ;

Axioma 4. Maximalidad: $\text{Cr}\{\cup_i A_i\}\leq\sup_i \text{Cr}\{A_i\}$ para cualquier evento $\{A_i\}$ con $\sup_i \text{Cr}\{A_i\}<0.5$.

Según Gupta *et al.*, (2014b) los tres primeros axiomas son autoexplicativos. El axioma de maximalidad puede entenderse así: no hay incertidumbre en el resultado de un evento si su medida de credibilidad es 1 (o 0), debido a que esto indicará que el evento ocurrirá (o no). Por otra parte, un evento es el más incierto si su medida de credibilidad es 0.5, ya que, en tal caso, tanto el evento como su complemento pueden ser considerados como “igualmente probables”. Además, si no hay información sobre la medida de credibilidad de un evento, entonces se debe considerar esta como 0.5. Bajo este argumento, B. Liu (2002a) propuso el principio de máxima incertidumbre que establece que “para cualquier evento, si hay varios valores razonables que una medida de credibilidad puede tomar, entonces se le asigna un valor lo más cercano como sea posible a 0.5”.

- **Definición 4.5: medida de credibilidad** (B. Liu, 2007)

La función conjunto Cr se llama medida de credibilidad si satisface los axiomas de normalidad, monotonicidad, autodualidad y maximalidad.

- **Ejemplo 4.1** (Gupta *et al.*, 2014b). Sea $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. En este caso solo hay cuatro eventos posibles: $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{\theta_1\}$, $A_3 = \{\theta_2\}$, $A_4 = \Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Así mismo, se ha definido que $\text{Cr}\{A_1\} = 0$, $\text{Cr}\{A_2\} = 0.7$, $\text{Cr}\{A_3\} = 0.3$ y $\text{Cr}\{A_4\} = 1$. Para verificar si la función conjunto Cr es una medida de credibilidad o no, se verificarán los 4 axiomas:

- * Axioma 1. La función conjunto Cr satisface la normalidad, $\text{Cr}\{\Theta\} = 1$.
- * Axioma 2. La función conjunto Cr satisface la monotonicidad, por ejemplo,
 - $A_1 \subset A_2$ y $\text{Cr}\{A_1\} < \text{Cr}\{A_2\}$
 - $A_1 \subset A_3$ y $\text{Cr}\{A_1\} < \text{Cr}\{A_3\}$
 - $A_1 \subset A_4$ y $\text{Cr}\{A_1\} < \text{Cr}\{A_4\}$
 - $A_2 \subset A_4$ y $\text{Cr}\{A_2\} < \text{Cr}\{A_4\}$
 - $A_3 \subset A_4$ y $\text{Cr}\{A_3\} < \text{Cr}\{A_4\}$
- * Axioma 3. La función conjunto Cr satisface la autodualidad, por ejemplo, $\text{Cr}\{A_1\} + \text{Cr}\{A_1^c\} (= \text{Cr}\{A_4\}) = 1$
- * Axioma 4. La función de conjunto Cr satisface la maximalidad, por ejemplo,

$$\text{Cr}\{A_1 \cup A_3\} (= \text{Cr}\{A_3\}) \wedge 0.5 = \sup \{\text{Cr}\{A_1\}, \text{Cr}\{A_3\}\}$$

Por lo tanto, la función de conjunto Cr es una medida de credibilidad.

Los siguientes teoremas presentan dos propiedades adicionales de la medida de credibilidad (B. Liu, 2007; B. Liu y Liu, 2002):

- **Teorema 4.2.** Sea Θ un conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ y Cr la medida de credibilidad. Entonces, $\text{Cr}\{\Theta\} = 0$, y, $0 \leq \text{Cr}\{A\} \leq 1$ para cualquier evento $A \in \mathcal{P}$.

Demostración (Gupta *et al.*, 2014b). De los axiomas 1 y 3, se tiene $\text{Cr}\{\emptyset\} = 1 - \text{Cr}\{\Theta\} = 1 - 1 = 0$. Además, $\emptyset \subset A \subset \Theta$, se tiene $\text{Cr}\{\emptyset\} \leq \text{Cr}\{A\} \leq \text{Cr}\{\Theta\}$ del axioma 2, es decir, $0 \leq \text{Cr}\{A\} \leq 1$.

Teorema 4.3. La medida de credibilidad es subaditiva, es decir, $\text{Cr}\{A \cup B\} \leq \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\}$. Además, para cualquier $A, B \in \mathcal{P}(\Theta)$, la medida de credibilidad es no-aditiva, esto es, $\text{Cr}\{A \cup B\} = \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\}$, si $\text{Cr}\{A\} = 0$ o $\text{Cr}\{B\} = 0$.

Demostración (Gupta *et al.*, 2014b). Con el propósito de demostrar el teorema 4.3., se consideran los siguientes tres casos:

- $\text{Cr}\{A\} < 0.5$ y $\text{Cr}\{B\} < 0.5$. Usando el axioma 4, se tiene $\text{Cr}\{A \cup B\} = \text{Cr}\{A\} \vee \text{Cr}\{B\} \leq \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\}$.
- $\text{Cr}\{A\} \geq 0.5$. Usando los axiomas 2 y 3, se tiene que $\text{Cr}\{A^c\} \leq 0.5$ y $\text{Cr}\{A \cup B\} \geq \text{Cr}\{A\} \geq 0.5$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A^c\} &= \text{Cr}\{A^c \cap B\} \vee \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{A^c \cap B\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{B\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\} &= 1 - \text{Cr}\{A^c\} + \text{Cr}\{B\} \\ &\geq 1 - \text{Cr}\{B\} - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} + \text{Cr}\{B\} \\ &= 1 - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &= \text{Cr}\{A \cup B\}. \end{aligned}$$

- $\text{Cr}\{B\} \geq 0.5$. Usando los axiomas 2 y 3, se tiene que $\text{Cr}\{B^c\} \leq 0.5$ y $\text{Cr}\{A \cup B\} \geq \text{Cr}\{B\} \geq 0.5$, entonces $\text{Cr}\{B^c\} = \text{Cr}\{A \cap B^c\} \vee \text{Cr}\{A^c \cap B^c\}$

$$\begin{aligned} &\leq \text{Cr}\{A \cap B^c\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &\leq \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{A^c \cap B^c\}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\} &= \text{Cr}\{A\} + 1 - \text{Cr}\{B^c\} \\ &\geq 1 - \text{Cr}\{A\} - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} + \text{Cr}\{A\} \\ &= 1 - \text{Cr}\{A^c \cap B^c\} \\ &= \text{Cr}\{A \cup B\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se establece la propiedad de subaditividad. Además, se deduce de esta que $\text{Cr}\{A \cup B\} = \text{Cr}\{A\} + \text{Cr}\{B\}$ si $\text{Cr}\{A\} = 0$ o $\text{Cr}\{B\} = 0$.

- **Definición 4.6: espacio de credibilidad** (B. Liu y Liu, 2002)
Sea Θ un conjunto no vacío, $\mathcal{P}(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ y Cr la medida de credibilidad. Entonces, el triplete $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \text{Cr})$ se denomina espacio de credibilidad.

4.3.2 Variable difusa

Tradicionalmente, una variable difusa se define por una función de pertenencia (Zadeh, 1965). Bajo el contexto de la teoría de credibilidad, una variable difusa se explica como una función en un espacio de credibilidad, así como una variable aleatoria se concreta como una función medible en un espacio de probabilidad.

- **Definición 4.7: variable difusa** (B. Liu, 2007)
Una variable difusa se define como una función medible de un espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \text{Cr})$ al conjunto de números reales.
 - **Ejemplo 4.2** (Gupta *et al.*, 2014b). Sea $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ con $\text{Cr}\{\theta_1\}$ y $\text{Cr}\{\theta_2\}$. Luego la función

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \theta = \theta_1, \\ 1, & \text{Si } \theta = \theta_2. \end{cases}$$
 - define una variable difusa en $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \text{Cr})$.
- **Observación 4.1** (Huang, 2010). Dado que $\mathcal{P}(\Theta)$ es el conjunto de potencia de Θ , y una variable difusa ξ es una función en un espacio

de credibilidad, entonces para cualquier conjunto B de los números reales, el conjunto

$$\{\xi \in B\} = \{\theta \in \Theta \mid \xi(\theta) \in B\}.$$

siempre es un elemento en \mathcal{P} , es decir, la variable difusa siempre es una función medible y $\{\xi \in B\}$ siempre es un evento.

- **Definición 4.8.** (Huang, 2010): Sean ξ_1 y ξ_2 dos variables difusas definidas en el espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$, entonces $\xi_1 = \xi_2$ implica que $\xi_1(\theta) = \xi_2(\theta)$ para casi todo $\theta \in \Theta$.

4.3.3 Función de pertenencia y teorema de inversión de credibilidad

Una variable difusa ha sido definida como una función de un espacio de credibilidad al conjunto de números reales y no como una función de pertenencia. A continuación, se presenta la función de pertenencia para una variable difusa.

- **Definición 4.9.** (B. Liu, 2007): **Función de pertenencia**
Sea ξ una variable difusa definida en el espacio de credibilidad $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), Cr)$. Luego su función de pertenencia se deriva de la medida de credibilidad usando la siguiente relación:

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad 4.4$$

Si se tiene la función de pertenencia de una variable difusa ξ , ¿cómo se puede conocer el valor de credibilidad (o grado de credibilidad) de un evento difuso? El siguiente teorema de inversión de credibilidad da la respuesta (B. Liu y Liu, 2002):

- **Teorema 4.4.** Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ . Entonces, para cualquier conjunto A de los números reales, se tiene

$$Cr\{\xi \in A\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A^c} \mu(x) \right).$$

Demostración (Huang, 2010). Con el fin de probar el teorema 4.4., se consideran los siguientes dos casos:

i) Si $\text{Cr}\{\xi \in A\} \leq 0.5$, entonces, usando el axioma 2, se sabe que $\text{Cr}\{\xi = x\} \leq 0.5$ para cada $x \in A$. Según el axioma 4, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \in A\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A} (2\text{Cr}\{\xi = x\} \wedge 1) \right) = \frac{1}{2} \sup_{x \in A} \mu(x). \quad 4.6$$

Además, usando el axioma 3, se sabe que $\text{Cr}\{\xi \in A^c\} \geq 0.5$ y $\sup_{x \in A^c} \text{Cr}\{\xi = x\} \geq 0.5$. Por lo tanto, se tiene

$$\sup_{x \in A^c} \mu(x) = \sup_{x \in A^c} (2\text{Cr}\{\xi = x\} \wedge 1) = 1. \quad 4.7$$

Se deduce a partir de las expresiones 4.6 y 4.7 que la ecuación 4.5 se cumple.

ii) Si $\text{Cr}\{\xi \in A\} \geq 0.5$, entonces $\text{Cr}\{\xi \in A^c\} \leq 0.5$. A partir del caso anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \in A\} &= 1 - \text{Cr}\{\xi \in A^c\} = 1 - \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A^c} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A} \mu(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in A^c} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in A} \mu(x) \right). \end{aligned}$$

- **Observación 4.2** (Gupta *et al.*, 2014b). Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ , entonces las siguientes ecuaciones pueden deducirse del teorema 4.4.

$$\text{Cr}\{\xi = x\} = \frac{1}{2} \left(\mu(x) + 1 - \sup_{y \neq x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R};$$

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R};$$

$$\text{Cr}\{\xi \geq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \geq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y < x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Además, si μ es una función continua, entonces,

$$\text{Cr}\{\xi = x\} = \frac{\mu(x)}{2}, \quad \forall x \in \mathfrak{R}.$$

- **Observación 4.3** (Huang, 2010). Una variable difusa tiene una función de pertenencia única, pero una función de pertenencia puede producir múltiples variables difusas. Por ejemplo, sea $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ con $\text{Cr}\{\theta_1\}$ y $\text{Cr}\{\theta_2\}$. Se puede demostrar fácilmente que $(\Theta, \mathcal{P}(\Theta), \text{Cr})$ es un espacio de credibilidad. Definida las funciones

$$\xi_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Sí } \theta = \theta_1, \\ 1, & \text{Sí } \theta = \theta_2, \end{cases} \quad \xi_2(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{Sí } \theta = \theta_1 \\ 1, & \text{Sí } \theta = \theta_2. \end{cases}$$

Es claro que, aunque las variables difusas ξ_1 y ξ_2 tienen la misma función de pertenencia (*i.e.* $\mu(t) \equiv 1$ en $t = 0$ o 1), son dos variables difusas diferentes en el sentido de la definición 4.8. Dado que una función de pertenencia puede producir múltiples variables difusas, no se puede definir una variable difusa a través de la función de pertenencia. Se requiere de un sistema axiomático para definir una variable difusa y discutir las propiedades de esta para asegurar la precisión y la consistencia de las investigaciones. Esto explica por qué la función de pertenencia se define a través de la medida de credibilidad. Sin embargo, con fines de aplicación, solo se necesita construir la función de pertenencia de una variable difusa, luego usar el teorema de inversión para obtener la medida de credibilidad y, de esta forma, utilizar la teoría de la credibilidad para resolver los problemas de aplicación. El requisito matemático para la función de pertenencia es sencillo, es decir, B. Liu (2004) demostró que una función $\mu: \rightarrow [0, 1]$ es una función de pertenencia si y solo si $\sup \mu(t) = 1$. J. E. Chen y Otto (1995), Hong y Chen (1999), Kumar y Ganesh (1996), Medaglia, Fang, Nuttle y Wilson (2002), y Triantaphyllou y Mann, (1990) presentan algunos métodos para construir las funciones de pertenencia.

- **Observación 4.4** (Huang, 2010). La función de pertenencia indica el grado en que la variable difusa ξ toma ciertos valores determinados. Si t es un punto imposible, el grado de pertenencia de ξ es $\mu(t) = 0$; y si t es el punto más posible, el grado de pertenencia de ξ es $\mu(t) = 1$. Sin embargo, esta última afirmación no es verdadera. El grado de posibilidad de que ocurra un evento difuso lo da el grado de credibilidad, y no el grado de pertenencia. A partir del teorema de inversión de credibilidad se sabe que el grado de

credibilidad de un valor determinado depende no solo de su grado de pertenencia sino también del grado de pertenencia de su conjunto complementario.

4.3.4 Distribución de credibilidad

- **Definición 4.10: distribución de credibilidad** (B. Liu, 2002a)

La distribución de credibilidad $\Phi: \mathfrak{R} \rightarrow [0, 1]$ de una variable difusa ξ es definida por

$$\Phi(x) = \text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu(y) \right), \quad \forall x \in \mathfrak{R}. \quad 4.8$$

Es decir, $\Phi(x)$ es la credibilidad de que la variable difusa ξ tome un valor menor o igual que x . En términos generales, la distribución de credibilidad Φ no es continua ni a la derecha ni a la izquierda.

4.3.4.1 Distribución de credibilidad de un número difuso L-R

La variable difusa ξ es de tipo L-R si su distribución de credibilidad tiene una función de pertenencia asociada μ_{ξ} que le corresponde a un número difuso de tipo L-R [$\xi = (a, b, c, d)_{\pi, \rho}$]:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} L_{\pi} \left(\frac{b-x}{b-a} \right), & \text{Si } a \leq x < b, \\ 1, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ R_{\rho} \left(\frac{x-c}{d-c} \right), & \text{Si } c < x \leq d, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.1$$

Para encontrar la medida de credibilidad $\text{Cr}\{\xi \leq x\}$, se utiliza el teorema de la inversión de credibilidad (ecuación 4.5) (Jalota *et al.*, 2017b):

- Si $d \leq x$, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2}(1 + 1 - 0) = 1.$$

- Si $c \leq x < d$, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^{\rho} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right).$$

iii. Si $b \leq x < c$, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} (1 + 1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

iv. Si $a \leq x < b$, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cr}\{\xi \leq x\} &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) \right). \end{aligned}$$

v. Si $x < a$, se tiene

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} (1 + 1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Es decir,

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9$$

Como $\text{Cr}\{\xi > x\} = 1 - \text{Cr}\{\xi \leq x\}$, por lo tanto

$$\text{Cr}\{\xi > x\} = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 0, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.10$$

La figura 4.2 muestra la representación gráfica del grado de credibilidad de un evento $\xi \leq x$ (ver figura 4.2.a), y de un evento $\xi > x$ (ver figura 4.2.b) de un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia.

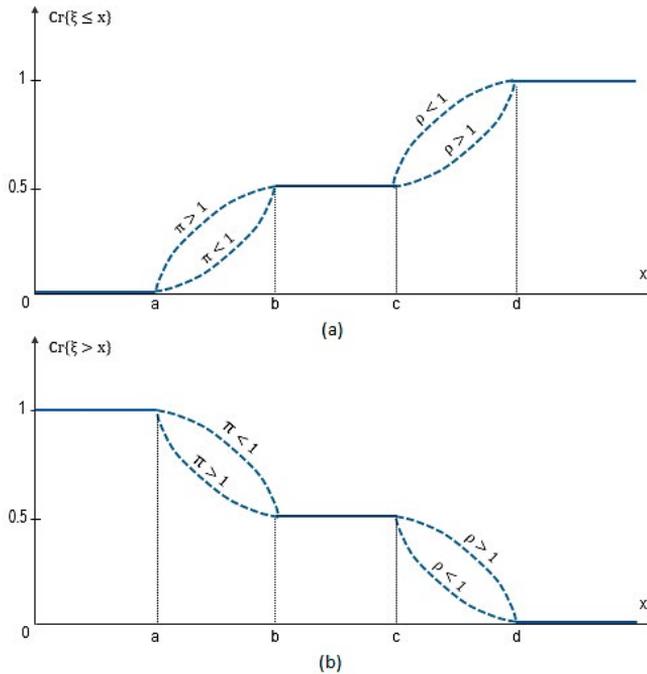


Figura 4.2. Distribuciones de credibilidad de una variable Fuzzy L-R
Fuente: Elaboración propia.

4.3.5 Independencia

La independencia de variables difusas es un concepto importante que ha sido discutido por varios investigadores desde diferentes ángulos (X. Li y Liu, 2006; B. Liu, 2004; Y.K. Liu y Gao, 2007; Nahmias, 1978; Yager, 1992; Zadeh, 1978). En esta tesis doctoral, se adopta la definición propuesta por Y.K. Liu y Gao (2007).

• **Definición 4.11: independencia**

Se dice que las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son independientes, si para cualquier conjunto B_1, B_2, \dots, B_n de \mathfrak{A} se tiene

$$\text{Cr} \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \text{Cr}\{\xi_i \in B_i\}.$$

- **Teorema 4.5.** (B. Liu, 2007). Las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ son independientes si y solo si

$$\text{Cr} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \text{Cr}\{\xi_i \in B_i\}. \quad 4.12$$

Demostración (Huang, 2010). Usando el axioma 3, las variables difusas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, son independientes si y solo si

$$\begin{aligned} \text{Cr} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} &= 1 - \text{Cr} \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i^c\} \right\} \\ &= 1 - \min_{1 \leq i \leq n} \text{Cr}\{\xi_i \in B_i^c\} \\ &= 1 - \max_{1 \leq i \leq n} \text{Cr}\{\xi_i \in B_i\}. \end{aligned}$$

4.3.6 Aritmética difusa

Definición 4.12. (B. Liu, 2007): sea $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una función, y $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ variables difusas definidas en el espacio de credibilidad $(\Theta_i, \mathcal{P}(\Theta_i), \text{Cr}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente. Entonces, $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es una variables difusa definida como

$$\xi(\theta) = f[\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \dots, \xi_n(\theta)],$$

para cualquier $\theta \in \Theta$.

- **Teorema 4.6. Principio de extensión de Zadeh** (Huang, 2010). Sean $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ variables difusas independientes con funciones de

pertenencia $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, respectivamente, y $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una función continua. Entonces la función de pertenencia de μ de $\xi=f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ es derivada de la función de membresía $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ para cualquier $x \in \mathfrak{R}$ por

$$\mu(x) = \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i)$$

que es consistente con la expresión

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) \mid t = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}.$$

Aquí se establece $\mu(x) = 0$ si no hay números reales x_1, x_2, \dots, x_n tales que $x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

A continuación se presenta algunos ejemplos para mostrar las operaciones sobre variables difusas (Huang, 2010):

- **Ejemplo 4.3.** Sean ξ_1 una variable difusa con función de pertenencia μ_1 , y ξ_2 otra variable difusa con función de pertenencia μ_2 , entonces, la función de pertenencia μ de $\xi_1 \cdot \xi_2$ es

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 \cdot x_2 \}.$$

- **Ejemplo 4.4.** Sean ξ_1 una variable difusa con función de pertenencia μ_1 , y ξ_2 otra variable difusa con función de pertenencia μ_2 , entonces, la función de pertenencia μ de $\xi_1 + \xi_2$ es

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \} \\ &= \sup_{x_1 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x - x_2) \}. \end{aligned}$$

- **Ejemplo 4.5.** Sean $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ dos variables difusas trapezoidales con funciones de pertenencia μ_1 y μ_2 , respectivamente. La función de pertenencia μ de $\xi_1 + \xi_2$ es

$$\mu(x) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathfrak{R}} \{ \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \},$$

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x - (a_1 + b_1)}{(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)}, & \text{Si } a_1 + b_1 \leq x \leq a_2 + b_2, \\ 1, & \text{Si } a_2 + b_2 \leq x \leq a_3 + b_3, \\ \frac{x - (a_4 + b_4)}{(a_3 + b_3) - (a_4 + b_4)}, & \text{Si } a_3 + b_3 \leq x \leq a_4 + b_4, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Lo cual demuestra que la suma de dos variables difusas trapezoidales $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ también da como resultado una variable difusa trapezoidal. En otras palabras $\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$.

De manera similar, según el teorema 4.6., la función de pertenencia μ resultante del producto de una variable difusa trapezoidal $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y un número escalar λ es

$$\mu_{\lambda\xi}(x) = \sup \{ \mu_{\xi}(x_1) \mid x = \lambda x_1 \}.$$

lo cual equivale a

$$\lambda \cdot \xi = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4), & \text{Si } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_4, \lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), & \text{Si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Es decir, el producto de un número escalar λ y una variable difusa trapezoidal $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, también da como resultado una variable difusa trapezoidal. Nótese que una variable difusa triangular $\xi = (r_1, r_2, r_3)$ es en realidad una variable difusa trapezoidal especial $\xi = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ cuando $r_2=r_3$. Por lo tanto, se puede obtener fácilmente que la suma de dos variables difusas triangulares $\xi_1 = (a_1, a_2, a_3)$ y $\xi_2 = (b_1, b_2, b_3)$ también da como resultado una variable difusa triangular, $\xi_1 + \xi_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. El producto de un número escalar λ y una variable difusa triangular $\xi = (a_1, a_2, a_3)$, también deriva en una variable difusa triangular, es decir,

$$\lambda \cdot \xi = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4), & \text{Si } \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_4, \lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), & \text{Si } \lambda < 0. \end{cases}$$

4.3.7 Por qué adoptar la teoría de credibilidad

La medida de posibilidad se emplea para medir un evento difuso. Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia μ , entonces, $\text{Pos}\{A\} = \sup\{\mu(\xi(\theta)) \mid \theta \in A\}$ para cualquier evento difuso $A \in \mathcal{P}$. Aunque la medida de posibilidad es importante y se utiliza ampliamente en la teoría de conjuntos difusos, no es autodual. Según lo citado en apartados anteriores, la propiedad de autodualidad es necesaria no solo en la teoría sino también en las investigaciones aplicadas. Sin ella, la confusión aparecerá. Ante esta situación, la medida de credibilidad es más adecuada para el problema de selección de carteras en un entorno difuso. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación:

- **Ejemplo 4.6** (Huang, 2010). Una variable difusa ξ se denomina variable difusa triangular si tiene una función de pertenencia triangular, denotada por $\xi(r_1, r_2, r_3)$, con $r_1 < r_2 < r_3$ (ver figura 4.3).

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{t - r_1}{r_2 - r_1}, & \text{Si } r_1 \leq t \leq r_2, \\ \frac{t - r_3}{r_2 - r_3}, & \text{Si } r_2 \leq t \leq r_3, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.13$$

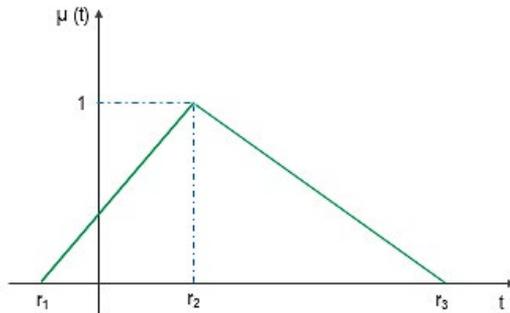


Figura 4.3. Función de pertenencia triangular.
Fuente: Huang (2010).

Suponga que el rendimiento de una cartera puede describirse mediante una variable difusa triangular $\xi = (0, 1.5, 3)$ (ver figura 4.4). En este contexto, ¿qué evento será más probable que suceda: aquel en que el rendimiento de la cartera no será menor que 1.5, u otro en que el rendimiento de la cartera será menor de 1.5?

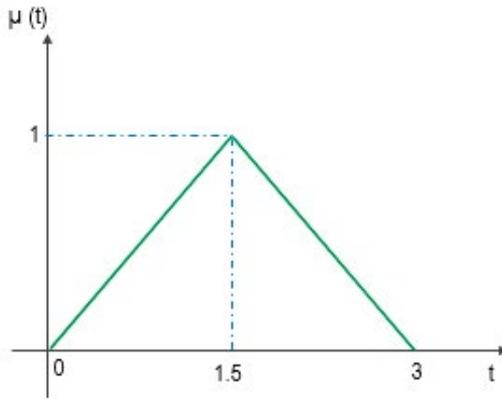


Figura 4.4. Función de pertenencia del retorno de una cartera $\xi = (0, 1.5, 3)$.
Fuente: Huang (2010).

Si se recurre a la medida de posibilidad, se puede obtener que $\text{Pos}\{\xi \geq 1.5\} = 1$, lo que parece implicar que el rendimiento de la cartera no será menor que 1.5. Sin embargo, si se implementa de nuevo la medida de posibilidad, se puede obtener también que $\text{Pos}\{\xi < 1.5\} = 1$, lo que parece implicar que el rendimiento de la cartera menor que 1.5 también ocurrirá con seguridad. La ley de la contradicción indica que una proposición no puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa, y la ley del medio excluido dice que una proposición debe ser verdadera o falsa. Ante esta situación, el juicio basado en la medida de posibilidad no es coherente con estos dos presupuestos.

Ahora, se hará uso de la medida de credibilidad para calcular el nivel de ocurrencia de un evento difuso. A partir del teorema de inversión de cred-

ibilidad, la medida de credibilidad de una variable difusa triangular ξ (r_1 , r_2 , r_3) es:

$$\text{Cr}(\xi \leq t) = \begin{cases} 1, & \text{Si } r_3 \leq t, \\ \frac{r_3 - 2r_2 + t}{2(r_3 - r_2)}, & \text{Si } r_2 \leq t \leq r_3, \\ \frac{t - r_1}{2(r_2 - r_1)}, & \text{Si } r_1 \leq t \leq r_2, \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Para un retorno de cartera triangular $\xi = (0, 1.5, 3)$, de acuerdo con la ecuación 4.14., se tiene que $\text{Cr}\{\xi \geq 1.5\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50 % de posibilidad de que el rendimiento de la cartera no sea menor que 1.5. Con base en la ecuación 4.14., se sabe que $\text{Cr}\{\xi < 1.5\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50 % de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea inferior que 1.5. Como se puede apreciar, el resultado es consistente a cualquier juicio y no produce confusión.

4.3.8 Valor esperado de una variable difusa

En la literatura existen varias formas de definir un operador de valor esperado para una variable difusa (Campos y Verdegay, 1989; Dubois y Prade, 1987b; Heilpern, 1992; Yager, 1981). No obstante, la definición más general de operador de valor esperado fue provista por B. Liu y Liu (2002), cuya expresión tiene una ventaja en términos de aplicabilidad, es decir, es aplicable no solo a variables difusas continuas sino también a variables difusas discretas.

- **Definición 4.13: valor esperado**

Sea ξ una variable difusa con distribución de credibilidad $\Phi(x) = \text{Cr}\{\xi \leq x\}$. El valor esperado de ξ se define por:

$$E(\xi) = \int_0^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx.$$

cuando al menos una de estas dos integrales es finita.

4.3.8.1 Valor esperado de un número difuso L-R

Sea ξ una variable difusa L-R $(a, b, c, d)_{\pi\rho}$. A partir del teorema de la inversión de credibilidad se tiene que:

$$\text{Cr}\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9$$

y,

$$\text{Cr}\{\xi > x\} = \begin{cases} 1, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 0, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.10$$

La expresión *crisp* para determinar el valor esperado credibilístico de un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

i. Si $0 \leq a < b < c < d$, $\text{Cr}\{\xi \leq x\} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_0^a \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx + \int_a^b \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx \\ &+ \int_b^c \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx + \int_c^d \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx \\ &+ \int_d^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx + \int_{-\infty}^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a + \frac{1}{2}(b - c) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(c - b) + \frac{1}{2}(d - c) - \frac{d - c}{2(\rho + 1)} \\
 &= \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} - \frac{d - c}{2(\rho + 1)}.
 \end{aligned}$$

ii. Si $a < 0 \leq b < c < d$, entonces

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= \int_0^b \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx + \int_b^c \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx \\
 &\quad + \int_c^d \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx + \int_d^{+\infty} \text{Cr}\{\xi \geq x\} dx \\
 &\quad - \int_{-\infty}^a \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx - \int_a^0 \text{Cr}\{\xi \leq x\} dx \\
 &= \int_0^b \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) dx + \int_b^c \frac{1}{2} dx \\
 &\quad + \int_c^d \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right) dx \\
 &\quad - \int_a^0 \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right) dx \\
 &= \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b - a}{2(\pi + 1)} - \frac{d - c}{2(\rho + 1)}.
 \end{aligned}$$

En una evaluación de los casos restantes, es decir, cuando $a < b < 0 \leq c < d$, $a < b < c < 0 \leq d$, y, $a < b < c < d < 0$, se obtiene una expresión similar para el valor esperado de un número difuso L-R en un entorno credibilístico. De este modo:

$$E(\xi) = \frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(d) + \frac{b-a}{2(\pi+1)} - \frac{d-c}{2(\rho+1)}. \quad 4.16$$

La fórmula 4.16 puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \frac{1}{2} \left[a + d + \frac{(b-a)}{(\pi+1)} - \frac{(d-c)}{(\rho+1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi(a)}{\pi+1} + \frac{b}{\pi+1} + \frac{\rho(d)}{\rho+1} + \frac{c}{\rho+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi(a-b)}{\pi+1} + \frac{b(\pi+1)}{\pi+1} + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} + \frac{c(\rho+1)}{\rho+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[b + c + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} - \frac{\pi(b-a)}{\pi+1} \right]. \end{aligned}$$

La anterior expresión es la misma dada por León y Vercher (2004). Sobre la base de las anteriores consideraciones, el valor esperado credibilístico de una variable difusa L-R ‘ $\xi = (a, b, c, d)_{\pi\rho}$ ’ con funciones de referencia tipo potencia se puede obtener por cualquiera de las expresiones *crisp* señaladas en las fórmulas 4.16 o 4.17.

$$E(\xi) = \frac{1}{2} \left[b + c + \frac{\rho(d-c)}{\rho+1} - \frac{\pi(b-a)}{\pi+1} \right]. \quad 4.17$$

- **Teorema 4.7** (Y.K. Liu y Liu, 2003). Sea ξ_1 y ξ_2 variables independientes con valores esperados finitos, entonces para cualquier número a_1 y a_2 , se tiene

$$E[a_1\xi_1 + a_2\xi_2] = a_1E[\xi_1] + a_2E[\xi_2]$$

4.3.8.2 Valor esperado de otras variables difusas

- **Definición 4.14** (B. Liu, 2007): sea $\xi (a, b, c)$ una variable difusa triangular, entonces, el valor esperado de ξ es determinado por

$$E[\xi] = \frac{a + 2b + c}{4}. \quad 4.18$$

- **Definición 4.15** (B. Liu, 2007): sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapecoidal, entonces, el valor esperado de ξ es definido por

$$E[\xi] = \frac{a + b + c + d}{4}. \quad 4.19$$

4.3.9 Varianza de una variable difusa

La varianza de una variable difusa proporciona una medida de la variación o dispersión de una distribución alrededor de su valor esperado. Un valor pequeño de la varianza indica que la variable difusa está muy concentrada alrededor de su valor esperado, mientras que uno grande indica que la variable difusa tiene una dispersión amplia alrededor de su valor esperado.

- **Definición 4.16: varianza** (B. Liu y Liu, 2002)
Sea ξ una variable difusa con valor esperado finito $e = E[\xi]$. Entonces, la varianza de ξ se establece a partir de la siguiente expresión matemática

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]. \quad 4.20$$

4.3.9.1 Varianza un número difuso L-R

La expresión *crisp* para determinar la varianza credibilística de un número difuso L-R $[\xi = (a, b, c, d)]_{\pi_0}$, con funciones de referencia de la familia de potencias se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \text{Cr}\{(\xi \leq e - \sqrt{x}) \cup (\xi \geq e + \sqrt{x})\} dx. \end{aligned}$$

$$V[\xi] = \begin{cases} \int_{-\infty}^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx, & \text{Si } \text{Cr}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} \geq \text{Cr}\{\xi \geq e + \sqrt{x}\}, \\ \int_e^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx, & \text{Si } \text{Cr}\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} < \text{Cr}\{\xi \geq e + \sqrt{x}\}. \end{cases}$$

i. Si $a < e \leq b$

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_e^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &= \int_e^b 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_b^c 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_c^d 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &\quad + \int_d^{\infty} 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\ &= \frac{(b-e)^{\pi+2}}{(b-a)^{\pi}(\pi+1)(\pi+2)} - \frac{(d-e)(d-c)}{\rho+1} \\ &\quad + \frac{(d-c)^2}{(\rho+1)(\rho+2)} - \frac{(d-e)^2}{2}. \end{aligned}$$

ii. Si $b < e \leq c$

. Si $|b-e| \geq |c-e|$

$$\begin{aligned} V[\xi] &= \int_{-\infty}^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\ &= \int_{-\infty}^a 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^b 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & + \int_b^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & = \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}.
 \end{aligned}$$

. Si $|b-e| < |c-e|$

$$\begin{aligned}
 V[\xi] & = \int_e^\infty 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 & = \int_e^c 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 & \quad + \int_c^d 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 & \quad + \int_d^\infty 2(x-e)\text{Cr}\{\xi \geq x\}dx \\
 & = \frac{(d-e)^2}{2} - \frac{(d-e)(d-c)}{\rho+1} + \frac{(d-c)^2}{(\rho+1)(\rho+2)}.
 \end{aligned}$$

iii. Si $c < e \leq d$

$$\begin{aligned}
 V[\xi] & = \int_{-\infty}^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & = \int_{-\infty}^a 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & \quad + \int_a^b 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^b 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & + \int_c^e 2(e-x)\text{Cr}\{\xi \leq x\}dx \\
 & = \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)} \\
 & \quad + \frac{(e-c)^{\rho+2}}{(d-c)^\rho(\rho+1)(\rho+2)}
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(e-c)^{\rho+2}}{(d-c)^\rho(\rho+1)(\rho+2)}, & \text{Si } c < e \leq d, \\ \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}, & \text{Si } b < e \leq c; \text{ y Si } \\ |b-e| \geq |c-e|, \\ \frac{(d-e)^2}{2} - \frac{(d-e)(d-c)}{\rho+1} + \frac{(d-c)^2}{(\rho+1)(\rho+2)}, & \text{Si } b < e \leq c; \text{ y Si } \\ |b-e| < |c-e|, \\ \frac{(b-e)^{\pi+2}}{(b-a)^\pi(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(d-e)(d-c)}{\rho+1} + \frac{(d-c)^2}{(\rho+1)(\rho+2)} + \frac{(d-e)^2}{2}, & \text{Si } a < e \leq b. \end{cases} \quad 4.21$$

4.3.9.2 Varianza de otras variables difusas

- **Definición 4.17** (Y. Chen, Liu, y Chen, 2006): sea ξ (a, b, c) una variable difusa triangular, entonces, la varianza de ξ es

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{33\alpha^3 + 11\alpha\beta^2 + 21\alpha^2\beta - \beta^3}{384\alpha}, & \text{Si } \alpha > \beta, \\ \frac{\alpha^2}{6}, & \text{Si } \alpha = \beta, \\ \frac{33\beta^3 + 11\alpha^2\beta + 21\alpha\beta^2 - \alpha^3}{384\beta}, & \text{Si } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Donde $\alpha=(b-a)$, $\beta=(c-b)$, y $e=E[\xi]$. Además, nótese que cuando $\alpha=\beta$, la variable difusa triangular es simétrica y su valor esperado está dado por

$$E[\xi]=b. \tag{4.23}$$

- **Definición 4.18** (Y. Chen *et al.*, 2006): sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapezoidal, entonces, la varianza de ξ es

$$V[\xi] = \begin{cases} \frac{3(c-b+\beta)^2 + \beta^2}{24}, & \text{Si } \alpha = \beta, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(c-e)^3}{\beta} - \frac{(b-\alpha-e)^3}{\alpha} + \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha > \beta; \text{ Si } b - e < 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b-e)^3}{\alpha} - \frac{(c-e)^3}{\beta} - \frac{(b-\alpha-e)^3}{\alpha} + \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha > \beta; \text{ Si } b - e \geq 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b-e)^3}{\alpha} + \frac{(c+\beta-e)^3}{\beta} - \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha < \beta; \text{ Si } c - e > 0, \\ \frac{1}{6} \left[\frac{(b-e)^3}{\alpha} - \frac{(c-\beta-e)^3}{\beta} - \frac{(c-e)^3}{\beta} - \frac{(\alpha c + \beta b - e(\alpha + \beta))^3}{\alpha\beta(\alpha - \beta)^2} \right], & \text{Si } \alpha < \beta; \text{ Si } c - e \leq 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

- Donde $\alpha=(b-a)$, $\beta=(-c)$, y, $e=E[\xi]$. Además, obsérvese que cuando $\alpha=\beta$, la variable difusa trapezoidal es simétrica y su valor esperado está dado por

$$E[\xi] = \frac{(a + d)}{2}. \tag{4.25}$$

4.3.10 Semivarianza de una variable difusa

- **Definición 4.19** (B. Liu y Liu, 2002): sea ξ una variable difusa con valor esperado finito $e=E[\xi]$. Entonces, la semivarianza de ξ es definida por

$$SV[\xi] = E[(\xi - e)^-]^2. \tag{4.26}$$

Donde,

$$[\xi - e]^- = \begin{cases} \xi - e, & \text{Si } \xi \leq e, \\ 0, & \text{Si } \xi > e. \end{cases}$$

- **Teorema 4.8** (Huang, 2008a). Sea ξ una variable difusa, $SV[\xi]$ y $V[\xi]$ la semivarianza y varianza de ξ , respectivamente. Entonces, $0 \leq SV[\xi] \leq V[\xi]$.

Demostración. Sea e el valor esperado de una variable difusa ξ . La no-negatividad de la varianza y la semivarianza es clara. Para cualquier número real, se tiene

$$\{\theta \mid |[\xi(\theta) - e]^2 \geq r\} \supset \{\theta \mid [(\xi(\theta) - e)^-]^2 \geq r\},$$

lo cual implica que

$$\text{Cr}\{[\xi - e]^2 \geq r\} \geq \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\}, \quad \forall r.$$

debido a que la medida de credibilidad satisface el axioma de monotonía. De la definición de varianza y semivarianza se deduce que

$$V[\xi] = \int_0^\infty \text{Cr}\{[\xi - e]^2 \geq r\} dr \geq \int_0^\infty \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\} dr = SV[\xi].$$

- **Teorema 4.9** (Huang, 2008a). Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia simétrica, entonces $SV[\xi] = V[\xi]$.

Demostración. Sea ξ una variable difusa con función de pertenencia simétrica respecto a su valor esperado e . De la definición de varianza, se tiene

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2] = \int_0^\infty \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr.$$

dado que la función de pertenencia de ξ es simétrica respecto a e , se tiene

$$\text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} = \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\}, \quad \forall r.$$

por lo tanto,

$$V[\xi] = \int_0^\infty \text{Cr}\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr = \int_0^\infty \text{Cr}\{[(\xi - e)^-]^2 \geq r\} dr = SV[\xi].$$

- **Observación 4.5** (Huang, 2010). El teorema 4.9 indica que, cuando la función de pertenencia del retorno de la cartera es simétrica, los valores de la varianza y de la semivarianza del rendimiento de la cartera difusa serán los mismos. No obstante, cuando la función de pertenencia del retorno de la cartera difusa es asimétrica, el teorema 4.8 indica que los valores de la varianza y la semivarianza del rendimiento de la cartera difusa serán diferentes.

4.3.10.1 Semivarianza de un número difuso L-R

La expresión *crisp* para determinar la semivarianza credibilística de un número difuso L-R $[\xi=(a, b, c, d)_{\pi_0}]$ con funciones de referencia de la familia de potencias se deriva usando la ecuación 4.15 (Jalota *et al.*, 2017b):

$$\begin{aligned} SV[\xi] &= E[(\xi - e)^-]^2 \\ SV(\xi) &= \int_0^{\infty} Cr\{([\xi - e]^-)^2 \geq x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} Cr\{\xi \leq e - \sqrt{x}\} dx \\ &= \int_{-\infty}^e 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\} dx. \end{aligned}$$

i. Si $a < e \leq b$

$$\begin{aligned} SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &\quad + \int_a^e 2(e - x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &= \frac{(e - a)^2}{2} - \frac{(e - a)(b - a)}{\pi + 1} \\ &\quad - \frac{(b - e)^{\pi+2}}{(b - a)^{\pi}(\pi + 1)(\pi + 2)} + \frac{(b - a)^2}{(\pi + 1)(\pi + 2)}. \end{aligned}$$

ii. Si $b < e \leq c$

$$\begin{aligned} SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &\quad + \int_a^b 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &\quad + \int_b^e 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &= \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} \\ &\quad + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}. \end{aligned}$$

iii. Si $c < e \leq d$

$$\begin{aligned} SV[\xi] &= \int_{-\infty}^a 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &\quad + \int_a^b 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &\quad + \int_c^e 2(e-x)Cr\{\xi \leq x\} dx \\ &= \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} \\ &\quad + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(e-c)^{\rho+2}}{(d-c)^\rho(\rho+1)(\rho+2)}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$SV[\xi] = \begin{cases} \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(e-c)^{\rho+2}}{(d-c)^\rho(\rho+1)(\rho+2)}, & \text{Si } c < e \leq d, \\ \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}, & \text{Si } b < e \leq c, \\ \frac{(e-a)^2}{2} - \frac{(e-a)(b-a)}{\pi+1} - \frac{(b-e)^{\pi+2}}{(b-a)^\pi(\pi+1)(\pi+2)} + \frac{(b-a)^2}{(\pi+1)(\pi+2)}, & \text{Si } a < e \leq b, \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases} \quad 4.27$$

4.3.10.2 Semivarianza de otras variables difusas

- **Definición 4.20** (Huang, 2010): sea ξ (a, b, c) una variable difusa triangular, entonces, la semivarianza de ξ es

$$sv[\xi] = \begin{cases} \frac{(e+a)(e^2-a^2)}{2(b-a)} - \frac{e^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{ae(e-a)}{b-a}, & \text{Si } b-a > c-b \\ \frac{3eb+ab-3ae+a^2+2b^2}{6} + \frac{e^3-4b^3+3ce^2-6be^2+9b^2e+3cb^2-6cbe}{6(c-b)}, & \text{Si } b-a < c-b, \end{cases} \quad 4.28$$

Donde $e = E[\xi]$.

- **Definición 4.21** (Qian y Yin, 2014): sea ξ (a, b, c, d) una variable difusa trapezoidal, entonces, la semivarianza de ξ es

$$sv[\xi] = \begin{cases} \frac{(e-a)^3}{6(b-a)}, & \text{Si } e < b, \\ \frac{(b-a)(3e-2b-a)+3(e-b)^2}{6}, & \text{Si } b \leq e \leq c, \\ \frac{(b-a)(3e-2b-a)+3(c-b)(2e-b-c)}{6} + \frac{(c-e)^2(3d-4c+e)}{6(d-d)}, & \text{Si } e > c. \end{cases} \quad 4.29$$

Donde $e = E[\xi]$.

4.4 Resumen y conclusiones del capítulo

Las expectativas de los inversionistas con respecto a los parámetros financieros sobre los cuales se realiza el proceso de selección de carteras están rodeadas de vaguedad y ambigüedad. Construir carteras satisfactorias sobre la base de estas expresiones imprecisas plantea un desafío metodológico en la investigación actual que no puede enfrentarse usando números *crisp*. Ante esta situación, a partir de la década de los noventa, varios investigadores han estimado los retornos de los activos por medio de la teoría de conjuntos difusos. Esta teoría ha permitido no solo captura la vaguedad y la incertidumbre existentes en los mercados financieros, sino que también ha proporcionado una flexibilidad en la toma de decisiones integrando las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento de los expertos.

Como se ha visto, en los modelos difusos de selección de carteras, la medida de posibilidad, extensamente utilizada para representar la tasa de rendimiento de los activos, es inconsistente con la ley del medio excluido y con la ley de contradicción. Para solventar esta dificultad, la medida de credibilidad, definida por el promedio de las medidas de posibilidad y de necesidad, ha sido utilizada en años recientes para modelar la incertidumbre del rendimiento futuro de los activos.

La aplicación de la lógica difusa va a continuar desempeñando, en el futuro, un papel fundamental en la modelización y resolución no solo de los problemas de selección de carteras, sino también de los atinentes a la planificación y la gestión financieras.

Capítulo 5. Caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica

5.1 Introducción al tema

El proceso de apertura y globalización financieras que se dio a partir de la década de los noventa implicó un dinamismo sin precedentes en los mercados de capitales en el contexto global y, en especial, en las economías emergentes. Las reformas estructurales y los programas de estabilización económica emprendidos por la mayoría de los países en desarrollo crearon un ambiente favorable para la entrada de capitales foráneos, a lo cual también contribuyó la caída de las tasas de interés de los países desarrollados entre 1989 y 1993, y las menores perspectivas de crecimiento de estas naciones (Arbeláez, Zuluaga y Guerra, 2002).

La globalización financiera asociada a la movilidad internacional de capital se ha acelerado en las últimas décadas. El desarrollo de los sistemas financieros y los avances que se han presentado en las tecnologías de la información y la comunicación han conducido a una oferta y demanda mundiales de capital, y la existencia de un mercado global de capitales es un rasgo característico de la economía contemporánea (Olivera, 2004). Esto ha ocasionado una mayor interconexión y un creciente grado de interdependencia entre los mercados, lo cual ha contribuido a la generación de crisis financieras. El colapso global desatado en los años 2007-2008 es un ejemplo claro de las crisis financiera y económica globales más severas desde los años de la posguerra, solo comparable a la de la Gran Depresión (Nudelsman, 2013).

En los últimos 20 años una serie de estudios han analizado el efecto de los mercados de capitales sobre el crecimiento económico. Las investigaciones han derivado en resultados variados y, a partir de ellos, se podrían dividir estas pesquisas en dos grupos: i) *los estudios que revelan una rel-*

acción positiva entre el crecimiento económico y el desarrollo de los mercados de capitales. Bencivenga y Smith (1991), Holmström y Tirole (1998) y Levine (1997) subrayan que los mercados de capitales más líquidos contribuyen al crecimiento económico y mejoran la eficiencia del mercado a través de un flujo de información oportuna y precisa hacia el inversionista. Devereux y Smith (1994), Obstfeld (1992, 1993) y Saint-Paul (1992) encontraron que la reducción del riesgo a través de la diversificación global podría proporcionar más oportunidades para hacer inversiones con dichas características en el contexto internacional, aumentando de este modo el crecimiento de largo plazo. Caporale, Howells y Soliman (2004), y Mishkin (2001) señalan que un mercado de capitales bien organizado y administrado genera oportunidades de inversión a partir del financiamiento de proyectos productivos que alientan la actividad económica, movilizan el ahorro doméstico, asignan de manera más eficiente el capital, ayudan a diversificar el riesgo, y a facilitar el intercambio de bienes y servicios. Adjasi y Biekpe (2006) evidenciaron un impacto positivo considerable del desarrollo del mercado de capitales sobre el crecimiento económico en los países de las economías de ingresos medios altos. Sus conclusiones fueron fortalecidas por Bahadur y Neupane (2006), quienes concluyeron que las fluctuaciones de los mercados de capitales ayudan a predecir el crecimiento futuro de una economía. *ii) Estudios que revelan una relación negativa entre el crecimiento económico y el desarrollo de los mercados de capitales.* Devereux y Smith (1994); Mayer (1988), Morck, Shleifer y Vishny (1990); Morck, Shleifer, Vishny, Shapiro y Poterba, (1990) y Stiglitz (1993) afirman que los mercados de capitales tienen un efecto negativo sobre el crecimiento económico debido a que estos promueven la información asimétrica sobre las empresas y contribuyen a la reducción del ahorro. Rancière, Tornell y Westermann (2008) señalan que existe una correlación positiva entre el desarrollo de los mercados financieros y de capitales y la probabilidad de una crisis; es decir, mientras más desarrollado estén estos mercados, mayor será la probabilidad de una situación fuera de control.

Nótese que existen estudios a favor y en contra respecto al avance del mercado de capitales y su efecto en el crecimiento económico de un país. En cualquier caso, no hay discusión en cuanto a que los mercados de capitales tienen gran relevancia sobre el binomio rentabilidad-riesgo y, por ende, en la capacidad de la diversificación de una cartera.

El problema de selección de carteras pretende determinar una cartera satisfactoria que cumpla el deseo del inversionista en cuanto a la utilidad que desea asegurar y al riesgo que está dispuesto a aceptar para conseguirla. En este sentido, este problema pretende encontrar las proporciones óptimas del capital que ha de invertirse en cada uno de los activos para buscar un cierto equilibrio entre la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo de la inversión. En el marco de esta apreciación, un aspecto importante para lograr la utilidad que se pretende alcanzar es el de conocer las características del mercado en el cual se realizará el proceso de inversión, ya que algunos aspectos como la liquidez, la concentración, la volatilidad de los tipos de cambios, entre otros, podrían afectar la utilidad que se pretende alcanzar. Por lo anterior, este capítulo tiene como meta analizar la evolución de los mercados de capitales de Latinoamérica a lo largo de los últimos 16 años, lo cual permitirá efectuar un inventario del estado actual de los mismos y su efecto en la toma de decisiones de cartera.

El resto del capítulo está organizado como sigue: la sección 5.2 analiza los indicadores de tamaño, liquidez y concentración de los mercados accionarios latinoamericanos, al compararlos con los mercados internacionales de algunas economías desarrolladas y emergentes. En las secciones 5.3 y 5.4 se examina la volatilidad y la correlación de los precios de las acciones y de los tipos de cambio de los mercados accionarios de América Latina, Estados Unidos y Europa durante el periodo 2002-2016. La sección 5.5 se enfoca al análisis del impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos, desde el punto de vista de seis inversionistas ubicados en diferentes regiones de América. La sección 5.6 examina el riesgo país de los seis mercados de capitales seleccionados de Latinoamérica en los años 2000-2016. Finalmente, la sección 5.7 presenta las conclusiones del capítulo.

5.2 Análisis del tamaño, liquidez y concentración

En la literatura económica las medidas más utilizadas para medir el desarrollo de un mercado accionario son los indicadores de tamaño, liquidez y concentración. Un mayor tamaño de mercado se correlaciona positivamente con la

habilidad de este para movilizar y diversificar el riesgo, un mercado más líquido les permite a los agentes que se desenvuelven en él efectuar más transacciones y deshacer sus posiciones con menores costos (en tiempo y dinero) y, por lo tanto, asiente realizar operaciones de una forma más eficiente; por último, un mercado menos concentrado es mejor por cuanto se hacen menos probables los conflictos de intereses entre grandes y pequeños poseedores de acciones, y se imponen fuerzas competitivas que permiten alcanzar puntos óptimos en su interior (Demirgüç-Kunt y Levine, 1996 citado en Gil, 2007). Los principales hallazgos respecto al desarrollo de los mercados accionarios de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú y su comparación con algunos otros mercados internacionales de economías desarrolladas y emergentes han sido resumidos en la tabla 5.1.

5.2.1 Tamaño del mercado

El tamaño del mercado accionario se puede medir con la ayuda de dos indicadores: la capitalización relativa del mercado²⁴ y el número de firmas registradas en bolsa. Estas medidas de tamaño son complementarias, es decir, la primera, al ser una medida relativa, es útil para hacer comparaciones internacionales, y la segunda, al ser una medida absoluta, permite seguir de cerca la evolución del mercado en el tiempo (Gil, 2007). Así mismo, debido a que la primera medida puede reflejar fenómenos especulativos al involucrar en su construcción el precio de mercado, el análisis conjunto resulta fundamental (Uribe, 2007).

En la tabla 5.1 se evidencia que, en términos relativos, los mercados accionarios de Chile, México, Argentina y Perú son los más grandes de Latinoamérica, con una capitalización relativa de mercado promedio de 85.44 %, 74.44 %, 61.04 % y 57.59 %, respectivamente, durante el periodo 2014-2016²⁵.

²⁴ La capitalización relativa del mercado es igual al número total de acciones en circulación multiplicado por su valor en bolsa, dividido entre el Producto Interno Bruto (PIB) del periodo.

²⁵ El análisis del tamaño, liquidez y concentración se realizará en una primera instancia para el periodo 2014-2016 para los seis mercados accionarios de América Latina seleccionados, y se comparará con la indicadores de algunos otros mercados internacionales de economías desarrolladas y emergentes. Posteriormente, la revisión de los mercados de capitales durante el periodo 2010-2016 solo se le realizará a los mercados accionarios de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú.

No obstante, ninguno de los seis países latinoamericanos supera el promedio presentado por determinadas economías desarrolladas como Canadá (117.6 %), Japón (101.9 %), Estados Unidos (NYSE) (105.1 %) y Australia (93.6 %), y algunas economías emergentes como Hong Kong (China) (1044.4 %) y Sudáfrica (283.15 %), en las cuales la capitalización bursátil de sus mercados accionarios representa en promedio más del 100 % del PIB. Es de especial interés el caso del mercado accionario de Hong Kong (China), que, en promedio, durante los años 2014-2016 ha superado 10 veces el valor de su PIB.

Con el propósito de observar y analizar la tendencia del comportamiento histórico de la capitalización bursátil de los seis mercados accionarios de Latinoamérica, se toma como base 100 para el primer año (2000) y luego se determinan los cambios en el valor de la capitalización periodo a periodo. En la figura 5.1 se puede apreciar la notable evolución de la capitalización bursátil total en Colombia y Perú, mercados que han registrado, durante el período 2000-2016, variaciones aproximadas del 1500 % y 1150 %, respectivamente

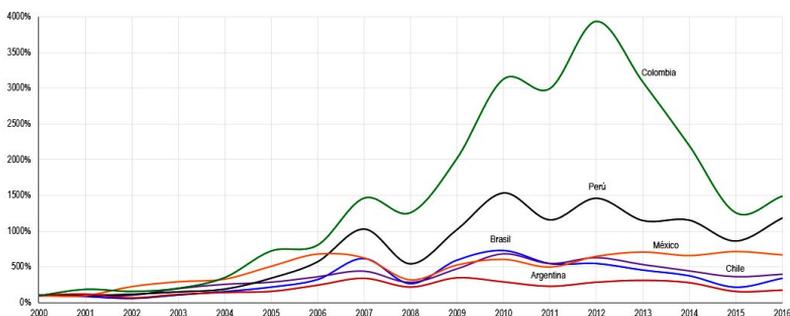


Figura 5.1. Tendencia de la tasa de crecimiento anual de la capitalización bursátil de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: Elaboración propia a partir de la Información Estadística de la FIAB

Al analizar la tasa promedio de crecimiento anual de la capitalización bursátil durante los periodos 2000-2005, 2006-2010 y 2011-2016 (ver figura 5.2), se observa que, en los primeros cinco años de la década de

Tabla 5.1. Medidas de tamaño, liquidez y concentración 2014-2016

País	Tamaño						Liquidez						Concentración					
	Capitalización del mercado/ PIB			Firmas registradas en bolsa			Volumen transado/ PIB			Volumen transado/ Capitalización del mercado			10 sociedades de mayor Capitalización/ Volumen transado			10 sociedades domesticas más Capitalización/ Volumen transado		
	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016	2014	2015	2016
Latinoamérica																		
Argentina	87.4 %	43.5 %	52.2 %	101	99	99	0.9 %	0.9 %	0.9 %	1.1 %	2.0 %	1.6 %	72.4 %	63.3 %	57.4 %	58.4 %	82.0 %	63.2 %
Brasil	34.4 %	26.6 %	42.4 %	369	359	349	23.9 %	27.0 %	29.9 %	69.5 %	101.8 %	69.2 %	50.8 %	51.5 %	54.9 %	53.6 %	45.6 %	40.2 %
Chile	90.6 %	79.9 %	85.9 %	307	310	298	12.9 %	9.0 %	10.1 %	14.2 %	11.3 %	11.7 %	45.1 %	45.9 %	44.3 %	49.7 %	55.3 %	48.4 %
Colombia	40.5 %	30.1 %	36.7 %	74	73	70	6.6 %	5.0 %	4.9 %	16.2 %	16.6 %	13.4 %	73.9 %	71.0 %	71.5 %	92.5 %	86.1 %	68.8 %
México	64.1 %	78.5 %	80.7 %	145	143	144	12.0 %	9.6 %	10.6 %	18.8 %	12.2 %	13.1 %	52.1 %	55.5 %	54.1 %	59.5 %	61.9 %	58.7 %
Perú	60.3 %	47.9 %	64.6 %	235	278	264	2.3 %	1.3 %	1.6 %	3.9 %	2.7 %	2.5 %	57.3 %	56.4 %	58.5 %	58.2 %	53.7 %	65.5 %
Latinoamérica	68.3 %	67.2 %	105.3 %	2,073	2,108	2,095	55.3 %	59.4 %	68.1 %	62.6 %	68.1 %	64.6 %	47.7 %	44.3 %	40.8 %	37.6 %	35.0 %	31.1 %
Australia	76.6 %	70.1 %	69.2 %	5,542	5,836	5,821	6.0 %	5.8 %	5.0 %	7.9 %	8.3 %	7.2 %	28.0 %	N.D.	N.D.	18.2 %	N.D.	N.D.
Bombay (India)	116.8 %	105.8 %	130.3 %	3,761	3,559	3,419	78.7 %	76.1 %	78.5 %	67.4 %	71.9 %	58.7 %	27.4 %	28.1 %	31.5 %	17.2 %	21.1 %	25.5 %
Canada	85.9 %	86.6 %	88.9 %	1,864	1,861	2,059	95.7 %	139.4 %	118.0 %	111.4 %	160.6 %	132.7 %	32.6 %	28.8 %	32.8 %	17.4 %	13.2 %	13.0 %
Corea	72.2 %	63.6 %	57.2 %	3,452	3,651	3,506	80.0 %	83.6 %	55.6 %	110.8 %	131.5 %	97.2 %	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.	N.D.
España	92.0 %	77.2 %	78.6 %	263	265	265	14.9 %	13.5 %	12.3 %	16.2 %	17.5 %	15.6 %	39.7 %	42.4 %	40.8 %	45.8 %	45.3 %	44.7 %
Filipinas	1109.3 %	1028.8 %	995.0 %	1,752	1,973	1,866	521.8 %	687.1 %	420.9 %	47.0 %	66.8 %	42.3 %	33.5 %	33.1 %	34.4 %	26.8 %	26.5 %	25.4 %
Hong Kong (China)	47.4 %	41.9 %	45.7 %	506	521	537	10.6 %	9.0 %	9.9 %	22.4 %	21.4 %	21.6 %	45.2 %	48.7 %	47.5 %	39.6 %	52.1 %	40.9 %
Indonesia	90.3 %	115.0 %	100.3 %	3,470	3,513	3,541	112.4 %	126.5 %	113.9 %	124.5 %	109.9 %	113.5 %	16.4 %	16.2 %	15.8 %	15.4 %	15.0 %	12.8 %
Japón	74.7 %	68.7 %	68.0 %	1,708	1,794	1,840	31.0 %	32.0 %	30.6 %	41.5 %	46.6 %	45.0 %	28.0 %	43.4 %	45.9 %	18.2 %	52.8 %	56.0 %
Mumbai (India)	40.1 %	40.4 %	41.9 %	2,762	2,859	2,897	70.4 %	69.4 %	59.6 %	175.3 %	171.9 %	142.3 %	35.5 %	39.1 %	32.0 %	43.1 %	44.3 %	11.6 %
Nasdaq (EE.UU.)	111.3 %	98.6 %	105.4 %	2,468	2,424	2,307	91.2 %	96.9 %	93.3 %	82.0 %	96.3 %	88.5 %	14.3 %	14.6 %	14.8 %	15.2 %	14.1 %	N.D.
NYSE Group (EE.UU.)	18.7 %	34.6 %	48.5 %	257	254	245	11.7 %	10.2 %	9.9 %	62.8 %	29.4 %	20.4 %	61.1 %	60.5 %	59.7 %	84.3 %	83.4 %	71.3 %
Rusia	37.5 %	38.4 %	36.6 %	995	1,081	1,162	56.1 %	191.7 %	67.1 %	154.8 %	498.9 %	193.2 %	31.2 %	23.3 %	23.4 %	0.2 %	0.0 %	6.1 %
Shanghai (China)	266.2 %	260.6 %	322.7 %	380	382	376	98.4 %	114.1 %	127.3 %	37.0 %	43.8 %	39.4 %	24.7 %	24.0 %	20.5 %	41.6 %	40.6 %	38.0 %
Sudáfrica	23.5 %	18.2 %	20.0 %	227	393	381	42.2 %	43.1 %	38.2 %	179.6 %	236.5 %	190.7 %	52.8 %	39.2 %	39.5 %	48.1 %	56.4 %	58.6 %
Mercados Internacionales de Comparación																		

Fuente: Elaboración propia a partir de la información estadística de la Federación Iberoamericana de Bolsas (FIAB), la Federación Mundial de Bolsas (WFE) y el Banco Mundial

los 2000, Colombia estaba entre los países que tuvieron las mayores tasas de crecimiento promedio de capitalización del mercado, representada en un 55.96 % anual, cuando el promedio de la región era del 33,32 %. En contraste, entre 2006 y 2010 la tasa promedio anual de crecimiento de la capitalización bursátil latinoamericana cayó hasta un 13,03 %. Argentina presentó el peor desempeño de la muestra y cerró con una tasa promedio de crecimiento de 1.81 %. Durante los primeros seis años de la década del 2010, los mercados bursátiles han caído, en promedio, un 4.37 %, y Colombia presentó el peor desempeño entre ese grupo de países analizados, con una tasa de crecimiento promedio anual de la capitalización bursátil de -7.93 %.

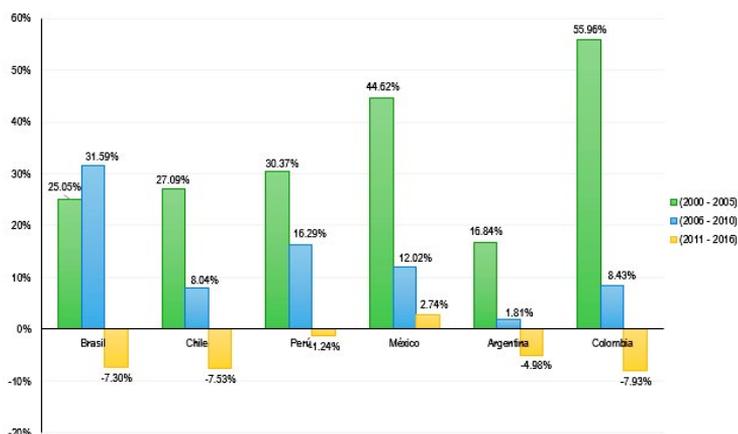


Figura 5.2. Tasa de crecimiento promedio anual de la capitalización bursátil de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

Es conveniente señalar que, durante el periodo 2000-2016, los mercados financieros internacionales estuvieron sujetos a un entorno económico complejo e inestable. La crisis de las puntocom (2000), los atentados del 11-S en Nueva York (2001), la crisis de deuda en Argentina (2001), la gran recesión (2007), la crisis de deuda en Europa (2009), la desaceleración en las principales economías asiáticas (2012), los choques macroeconómicos provenientes del cambio en el paradigma de la política monetaria de la

Reserva Federal de Estados Unidos (2013) y la caída de los precios del barril del petróleo (2014), entre otros, han sido las principales fuerzas que han caracterizado el contexto de los mercados financieros internacionales y han afectado, por ende, los mercados de los países analizados.

Un indicador usualmente mencionado a la hora de considerar la relevancia económica de los mercados accionarios es el índice de capitalización relativa del mercado. La figura 5.3 muestra que el mercado latinoamericano de mayor tamaño durante el periodo 2000-2016 ha sido el chileno, donde la velocidad en el incremento de la capitalización bursátil ha superado en promedio la evolución positiva del PIB (111.16 %). En contraste, el mercado accionario de Colombia ha sido en promedio el de menor tamaño (38.70 %), lo cual corrobora lo señalado previamente. Por otra parte, la figura 5.3 evidencia que los mercados accionarios más afectados por la gran recesión del 2007 y, por ende, los más integrados en el contexto global, fueron Argentina, Chile, Brasil y Perú, los cuales tuvieron un mayor aumento en el indicador antes del 2007 y, como consecuencia, una mayor caída posterior. Por su parte, el tamaño del mercado accionario colombiano prácticamente no fue reducido por la crisis. Uno de los puntos que llama la atención es que, durante el periodo 2000-2016, los seis mercados accionarios más grandes de América Latina crecieron de manera notable, no obstante, al finalizar el 2016, el tamaño de estos mercados es muy similar a lo sucedido en los primeros años de la década de los 2000.

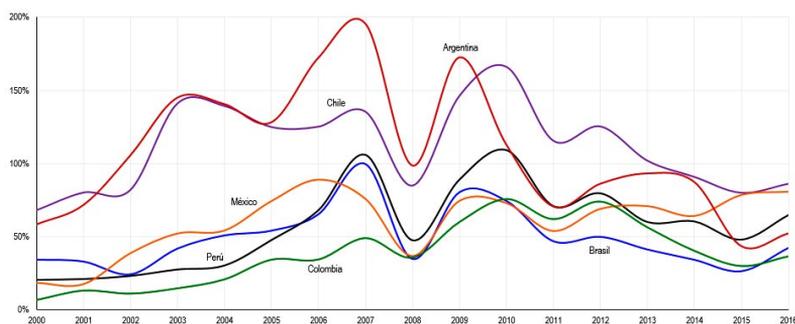


Figura 5.3. Capitalización relativa promedio de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB y el Banco Mundial.

Un indicador complementario de la capitalización relativa del mercado es el número de firmas inscritas en bolsa. En este propósito, al retomar la tabla 5.1 se evidencia que los mercados accionarios más grandes de Latinoamérica son Brasil y Chile, países que en el periodo 2014-2016 tuvieron en promedio 359 y 305 firmas listadas en bolsa, respectivamente. Por el contrario, las plazas accionarias más pequeñas de esta región son Argentina y Colombia, con un promedio de 100 y 72 firmas registradas en bolsa, de forma respectiva, durante el periodo indicado. Adicionalmente, al realizar una comparativa con los mercados internacionales de la muestra seleccionada, se observa que las plazas bursátiles de Bombay y Mumbai, de la India, suman en promedio 7514 empresas, lo cual lo ubica como el país con más compañías registradas en bolsa, seguido por Estados Unidos, Canadá, España y Japón con 5245, 3580, 3536 y 3508, respectivamente, en el periodo de tiempo estudiado.

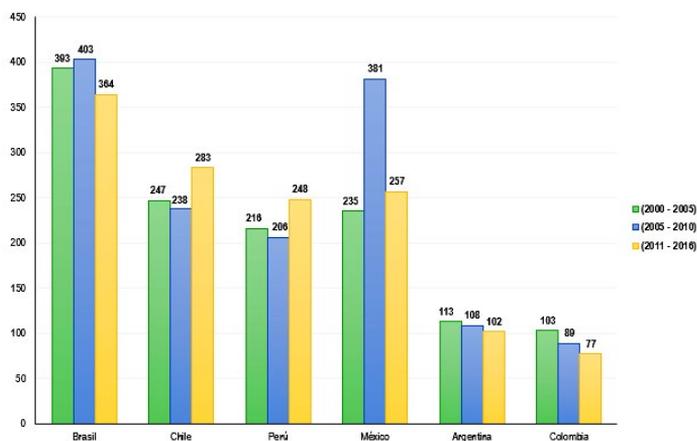


Figura 5.4. Número de firmas registradas en Bolsa de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

La figura 5.4 permite contextualizar que, durante el periodo 2000-2016, el número de firmas registradas en bolsa de cada país se ha mantenido relativamente constante, a excepción de México, que durante el periodo 2000-2006 y 2007-2014 vio crecer el número de empresas cotizadas, pasando de un promedio de 235 a 381 empresas listadas. No obstante, durante los

años 2011-2016 el número de compañías se ubicó en un promedio de 257. Además, el número de firmas cotizadas no se vio afectado en absoluto por la pasada crisis financiera en ninguno de los mercados bursátiles de América Latina analizados.

5.2.2 Liquidez de mercado

En términos generales, la liquidez mide la facilidad para comprar y vender títulos en el mercado. En este orden de ideas, la baja liquidez está asociada con altos costos de transacción y, en consecuencia, con ausencia de mecanismos eficientes de movilidad de capital y la dificultad para deshacer las inversiones realizadas. Los costos de transacción son cruciales para la determinación de la eficiencia, la liquidez y la rentabilidad del mercado accionario. Un mercado de acciones líquido es aquel que es capaz de movilizar grandes volúmenes y absorber adecuadamente el flujo de transacciones que esto implica, asegurando que no se produzcan cambios bruscos en los precios cuando se presentan variaciones leves en la oferta y demanda de las acciones que en él se negocian (Arbeláez *et al.*, 2002).

Para este estudio se han construido dos medidas de liquidez, la razón volumen transado sobre el PIB y la tasa de rotación, que corresponde al volumen transado sobre la capitalización del mercado. De nuevo, se trata de dos medidas complementarios, esto es, la primera es un indicador amplio de liquidez, y la segunda se relaciona tradicionalmente con bajos costos de transacción en el mercado bursátil (Demirgüç-Kunt y Levine, 1996).

Retomando de nuevo la tabla 5.1 se muestra que el mercado más líquido de Latinoamérica al cierre del 2016, medido por la razón volumen transado sobre el PIB, es el mercado de Brasil (26.74 %). No obstante, si tenemos en cuenta los mercados internacionales de comparación, se evidencia que los mercados accionarios de esta región de América son, en su mayoría, ilíquidos. Llama la atención la liquidez de los mercados accionarios de economías como Hong Kong (China) (420.6 %), Sudáfrica (127.3 %) y Corea (118.0 %) que superan a los mercados de economías desarrolladas como Canadá (76.5 %), Australia (68.1 %) y Estados Unidos (Nasdaq) (59.6 %). Así mismo, la tasa de rotación (*i.e.* volumen transado sobre capitalización del mercado), reafirma no solo que el mercado accionario de Brasil es el más líquido de América Latina, sino también lo expuesto

anteriormente, respecto a la iliquidez de los demás mercados bursátiles de Latinoamérica, y la excelente liquidez que presentan algunos mercados emergentes y las economías desarrolladas.

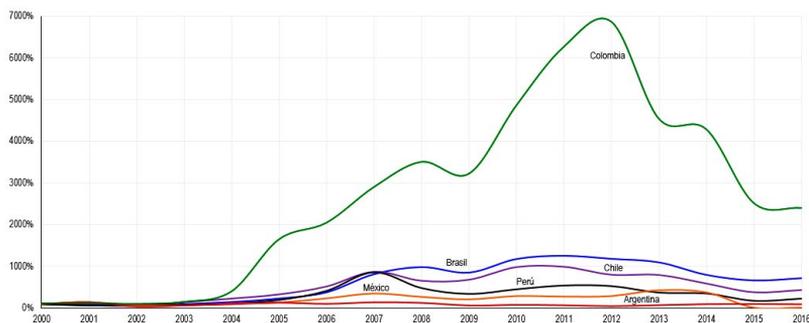


Figura 5.5. Tendencia de la tasa de crecimiento anual del volumen de acciones de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

Respecto a la dinámica de los mercados accionarios, la figura 5.5 permite contextualizar la notable evolución de la Bolsa de Valores de Colombia, cuyos montos anuales negociados en acciones, expresados en dólares, crecieron un 6774 % entre 2000 y 2012, y un 2299 % entre 2000 y 2016. Así mismo, las plazas bursátiles de Brasil, Chile, México y Perú crecieron el 614 %, 335 %, 170 % y 133 %, respectivamente, a lo largo del periodo 2000-2016. En contraste, el volumen anual operado en acciones de Argentina decreció un 13 % en el periodo de estudio indicado. Por otra parte, en la figura 5.5 se observa que el impacto de la crisis financiera de 2008 fue rápidamente superado, con niveles de crecimiento en la operatoria anual durante casi todo el tiempo de estudio considerado.

En el marco de la liquidez, al evaluar la razón volumen transado sobre el PIB de Latinoamérica entre 2000 y 2016, se observa claramente que el mercado accionario más líquido es el brasileño, a lo largo de los 16 años de estudio, seguido por el chileno y el mexicano (ver figura 5.6). A finales del 2007 las plazas accionarias de Brasil y Chile lograron el índice más alto de liquidez, esto es,

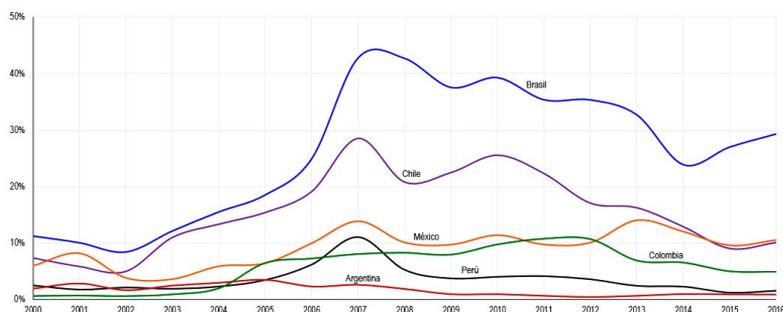


Figura 5.6. Razón volumen de negociado en acciones/PIB de Latinoamérica 2010-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB y del Banco Mundial.

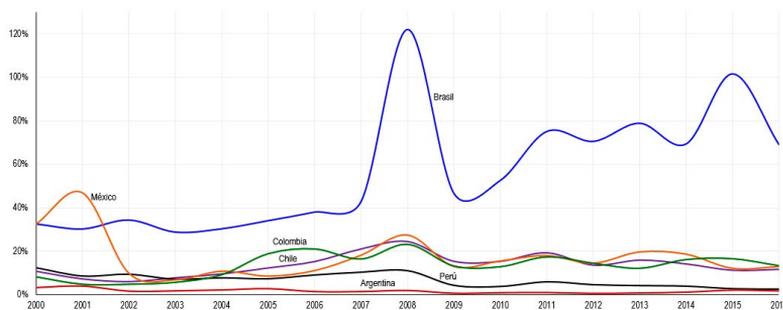


Figura 5.7. Tasa de rotación de Latinoamérica 2010-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

42.80 % y 28.59 %, respectivamente. No obstante, a partir de entonces la liquidez ha registrado una tendencia a disminuir. Adicionalmente, la tasa de rotación (figura 5.7) permite poner en contexto que, hasta mediados del año 2001, el mercado más líquido fue el mexicano, seguido en orden descendente por los mercados brasilero y chileno. A partir de ese año, Brasil supera en liquidez a México y esta aumenta progresivamente durante los últimos años de la muestra, logrando el pico más alto de liquidez en el 2008 (122.19 %). Como se puede apreciar, tanto la razón volumen transado sobre el PIB, como la tasa de rotación señalan que el mercado

accionario más líquido en América Latina es el brasileño, posición que ha mantenido en gran parte del periodo de tiempo analizado.

5.2.3 Concentración del mercado

Para este estudio la concentración del mercado accionario se mide a través de dos indicadores: la proporción que representa el monto total de las diez sociedades domésticas de mayor capitalización contra la capitalización total del mercado, y la proporción que representa el volumen transado por las diez sociedades domésticas más transadas contra el volumen total transado del mercado. Estos dos indicadores se sitúan entre cero y uno, y entre más se acerque a uno, reflejará mayor grado de concentración.

Retomando la tabla 5.1 se muestra que el mercado más concentrado de Latinoamérica al cierre del 2016, medido por la razón de las diez sociedades domésticas de mayor capitalización sobre la capitalización del mercado, es la plaza accionaria de Colombia (72.1 %), seguida de Argentina (64.4 %) y México (53.9 %). Así mismo, si tenemos en cuenta los mercados internacionales de comparación, se evidencia que los mercados accionarios de Latinoamérica son los más concentrados entre la muestra de las 21 economías emergentes y desarrolladas seleccionadas. En esta línea, los mercados accionarios menos concentrados son los ubicados en la Bolsa de Nueva York (EE.UU.) (14.5 %) y en la Bolsa de Tokio (Japón) (16.1 %). Así mismo, la razón de las diez sociedades domésticas más negociadas sobre el volumen transado ratifica no solo que la Bolsa de Valores de Colombia es la más concentrada, sino también lo manifestado anteriormente respecto a la alta concentración de los demás mercados bursátiles de Latinoamérica, en comparación con los mercados internacionales.

Finalmente, la tabla 5.2 resume los dos indicadores utilizados en este estudio para medir la concentración de los mercados accionarios de América Latina durante el periodo 2007-2016. En ella se muestra que, en promedio, la distribución más inequitativa de la oferta de las acciones ha sido en el mercado accionario de Colombia, a lo largo de los diez años analizados. No obstante, el problema parece no ser inherente únicamente a la Bolsa de Valores de Colombia, sino, en general, a las bolsas de esta región de América Latina.

Tabla 5.2. Concentración de mercados accionarios de Latinoamérica 2007-2016

10 sociedades domesticas de mayor capitalización/capitalización del mercado												
País	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016		
Argentina	68.16 %	74.81 %	71.91 %	69.91 %	70.14 %	68.53 %	74.11 %	72.38 %	63.34 %	57.41 %		
Brasil	55.61 %	52.46 %	54.76 %	55.38 %	53.13 %	52.06 %	51.32 %	50.81 %	51.45 %	54.92 %		
Chile	47.60 %	44.16 %	48.12 %	46.65 %	45.03 %	43.85 %	45.73 %	45.11 %	45.89 %	44.32 %		
Colombia	73.46 %	74.08 %	74.48 %	79.31 %	79.10 %	81.82 %	77.80 %	73.92 %	70.97 %	71.54 %		
México	68.31 %	69.45 %	63.11 %	66.06 %	65.87 %	58.87 %	55.65 %	52.14 %	55.55 %	54.07 %		
Perú	62.89 %	62.95 %	65.79 %	64.30 %	61.60 %	58.93 %	55.82 %	57.34 %	55.43 %	58.45 %		
10 sociedades domesticas más negociadas/volumen transado												
País	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016		
Argentina	68.09 %	70.25 %	69.83 %	70.24 %	71.05 %	83.42 %	80.05 %	83.39 %	82.02 %	63.25 %		
Brasil	40.56 %	49.61 %	55.51 %	50.34 %	47.71 %	38.78 %	42.85 %	58.59 %	45.58 %	40.19 %		
Chile	46.37 %	59.22 %	58.65 %	51.55 %	50.80 %	56.30 %	51.08 %	49.69 %	55.25 %	48.38 %		
Colombia	74.63 %	81.23 %	77.55 %	86.17 %	95.57 %	88.27 %	76.57 %	92.50 %	86.08 %	68.81 %		
México	59.26 %	72.63 %	72.45 %	66.38 %	71.90 %	66.91 %	58.70 %	59.51 %	61.89 %	58.74 %		
Perú	52.76 %	47.90 %	47.96 %	56.69 %	55.69 %	59.74 %	58.49 %	58.24 %	53.74 %	65.52 %		

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

5.3 Análisis de volatilidad de los precios de las acciones y de los tipos de cambio

La volatilidad del mercado accionario se relaciona con el comportamiento de los precios de los activos, específicamente con la frecuencia y la magnitud del movimiento de los mismos. Su efecto sobre el mercado es negativo, en la medida en que las variaciones en el corto plazo no reflejan de forma correcta los valores de equilibrio del activo financiero. En este sentido, la volatilidad del mercado se relaciona con el nivel de riesgo y depende de los sistemas de transacción utilizados, por cuanto estos tienen como una de sus funciones principales la de acercar los precios de las acciones a los niveles de equilibrio. De esta manera, la volatilidad de los precios y de los rendimientos de los activos transados se asocia con la ineficiencia del mercado, pues es un signo de que este toma mucho tiempo para incorporar en los precios la nueva información disponible (Arbeláez *et al.*, 2002). Por otro lado, en los mercados globalizados la volatilidad depende tanto de factores relacionados con la situación doméstica como con la internacional.

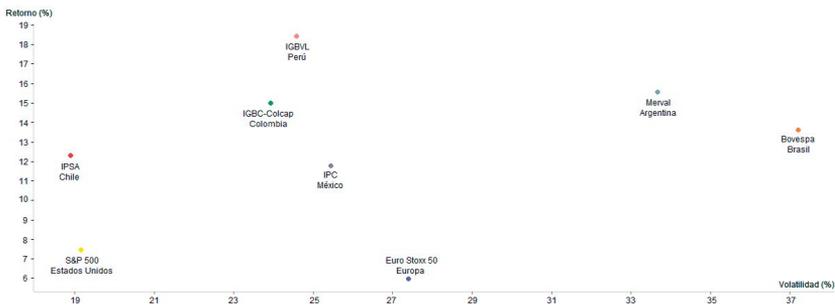


Figura 5.8. Dominancia índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.
Fuente: Economatica®.

Una manera simplificada de medir la volatilidad y, por tanto, de percibir el riesgo del mercado accionario, es evaluar la varianza de los rendimientos de los índices bursátiles (*i.e.* su desviación estándar). Este indicador refleja

cuán estable es el rendimiento en el tiempo y con qué nivel de frecuencia varía. Otro análisis interesante, y que será el que se desarrollará en este trabajo, consiste en comparar el binomio rentabilidad-riesgo de diferentes índices bursátiles internacionales. Este estudio es más completo que el simple cálculo de la volatilidad, pues incorpora al análisis información relativa a la rentabilidad obtenida.

La figura 5.8 presenta el gráfico de dominancia, en el cual se hace una comparativa del riesgo y la rentabilidad de los índices bursátiles de los mercados accionarios de México (IPC), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), Colombia (IGBC-COLCAP), Perú (IGBVL), Argentina (MERVAL), Estados Unidos (S&P500) y Europa (EURO STOXX 50) para el periodo de julio de 2002 a diciembre de 2016. Se encuentra que el mercado accionario que ofrece la mayor rentabilidad promedio anual esperada es el peruano (18.44 %), con un nivel de riesgo medio en comparación con los demás mercados analizados. El mercado accionario que ofrece menor riesgo es el chileno (18.89 %), que además supera en rentabilidad a los mercados mexicano, americano y europeo, lo cual lo hace un índice dominante y atractivo para un inversionista que desee minimizar el riesgo frente a un nivel dado de rentabilidad. Por otro lado, resulta conveniente resaltar las elevadas rentabilidades obtenidas en todos los mercados analizados, siempre positivas y cercanas a un promedio anual del 12.52 %.

La figura 5.9 contextualiza el comportamiento de la volatilidad de cada uno de los índices seleccionados. Como se puede apreciar, en el caso de América Latina, la coyuntura marcadamente favorable del período 2003-2007, basada en una combinación inusual de bonanza financiera, alza de precios de los productos básicos y un alto nivel elevado de remesas de los trabajadores migrantes (Ocampo, 2009), permitieron que, durante este periodo, los mercados accionarios de estas economías reflejaran un mejor comportamiento con respecto a los mercados europeo y americano. Así mismo, se evidencia que, en general, la mayoría de los índices presentaron una tendencia bajista durante el 2008, periodo caracterizado por una alta volatilidad e incertidumbre mundiales generadas por la crisis financiera internacional que afectó particularmente a los Estados Unidos y a Europa. Sin embargo, durante los años 2009 y 2010 los índices presentaron una tendencia alcista influidos por el optimismo y las expectativas de los inversores con respecto a las altas tasas de intereses de las economías de

los países emergentes. A lo largo del 2011, los índices nuevamente exhibieron una tendencia bajista, marcada principalmente por la crisis de deuda que afectó a varios países de la Unión Europea, particularmente a Grecia, Portugal, Italia y España, los temores de una recesión en la zona Euro y la desaceleración del crecimiento de las economías asiáticas, puntualmente, la de China. Para finales del 2016, el mercado accionario de Perú presentó el mejor comportamiento a lo largo de los catorce años seleccionados, seguido por los mercados de Argentina y Colombia.



Figura 5.9. Tendencia de la tasa de crecimiento semanal de los índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.
Fuente: Economatica®.

En la actualidad, la selección de carteras enfrenta un ambiente de inversión dinámico en el que predomina no solo la oferta de productos financieros más sofisticados, sino también la posibilidad de invertir más allá del mercado doméstico. Los mercados accionarios de las economías emergentes se han vuelto cada vez más atractivos para los inversionistas de los países desarrollados, especialmente durante las últimas tres décadas. Incluir los mercados emergentes reduce el riesgo de la cartera debido a las correlaciones aparentemente bajas entre las económicas emergentes y desarrolladas (Durai y Bhaduri, 2011; Grubel, 1968; Lessard, 1974; Levy y Sarnat, 1970). No obstante, la inversión internacional de cartera trae consigo una fuente adicional de riesgo a causa de las fluctuaciones propias de la moneda. La interacción entre el riesgo de tipo de cambio y los precios de las acciones es fundamental cuando se evalúa lo riesgoso de invertir en los

mercados emergentes. Los beneficios de la diversificación internacional se reducen considerablemente durante periodos de volatilidad de los tipos de cambio. Por lo tanto, los inversionistas internacionales requieren una compensación adecuada para soportar el riesgo de tipo de cambio que se espera en los mercados.

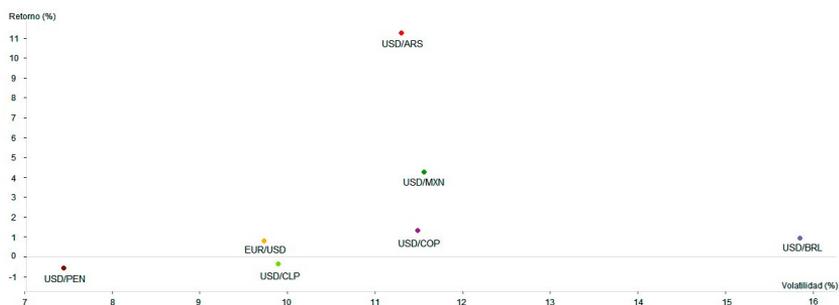


Figura 5.10. Dominancia tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.
Fuente: Economatica®.

Después de las consideraciones anteriores, la figura 5.10 presenta el gráfico de dominancia de los tipos de cambio del peso mexicano (USD/MXN), real brasileño (USD/BRL), peso chileno (USD/CLP), peso colombiano (USD/COP), nuevo sol peruano (USD/PEN), peso argentino (USD/ARS) y euro (EUR/USD) durante el periodo de enero de 2002 a diciembre de 2016 frente al dólar estadounidense. Se encuentra que el peso argentino es la moneda que ha presentado el nivel más alto de depreciación, con un 11.27 % promedio anual, por consiguiente, es la moneda menos rentable de la muestra seleccionada, con un nivel de volatilidad bajo en comparación con los demás tipos de cambio. Este mismo comportamiento lo presentó el peso mexicano, el cual durante los 14 años considerados, se depreció en promedio un 4.26 % anual. En contraste, el nuevo sol peruano y el peso chileno son las moneda más apreciadas, esto es, con un promedio semanal de 0.56 % y 0.33 %, respectivamente, lo que las convierte en las divisas más rentables de las siete monedas analizadas.



Figura 5.11. Tendencia de los tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.

Fuente: Economática®.

La figura 5.11 presenta el gráfico de crecimiento (base 100) del euro y las principales monedas de América Latina respecto al dólar estadounidense. Se observa que el peso mexicano y el euro se depreciaron con respecto al dólar estadounidense a lo largo de los 14 años analizados. Además, es interesante ver el comportamiento reflejado por el peso argentino, el cual, a partir del año 2008, se ha depreciado de manera exponencial, como consecuencia de las políticas financieras que desarrolló el gobierno de la presidenta Cristina Kirchner para mitigar los efectos de la crisis internacional del periodo 2007-2011. Por otra parte, al analizar el comportamiento de los demás tipos de cambio se observa que el peso colombiano, el peso chileno, el nuevo sol peruano y el real brasileño se apreciaron durante una gran parte del periodo 2002-2016 a causa del incremento de las exportaciones de materias primas, del creciente flujo de recursos de inversión extranjera directa (IED), del aumento de las remesas del extranjero, entre otros. No obstante, durante los dos últimos años, esto es 2015-2016, el peso colombiano y el real brasileño han presentado una tendencia a depreciarse con respecto al dólar americano.

Nótese que las figuras 5.9 y 5.11 ponen de manifiesto que, en algunos momentos, como durante el año 2008, los mercados de los diferentes países se mueven en la misma dirección. Por otro lado, la fuerza de las tendencias y la volatilidad, tal y como se ha descrito anteriormente, es mucho más acusada en los mercados latinoamericanos que en el de Estados Unidos

o el de Europa, y esto es así a lo largo de todo el periodo analizado. Para comprobar hasta qué punto los mercados se mueven de forma acompañada y así examinar el grado de integración de los mismos, es necesario realizar un análisis de correlación.

5.4 Análisis de correlación de los precios de las acciones y de los tipos de cambio

La creciente integración financiera internacional requiere ser analizada, ya que en la medida en que exista en el campo de los mercados accionarios, hay mayor correlación entre los retornos de los países, es decir, estos tienden a reaccionar en conjunto a unos mismos factores micro y macroeconómicos, lo que va a disminuir los beneficios de la diversificación de carteras conformadas por activos ubicados en dichos mercados. La tabla 5.3 muestra la matriz de correlaciones de los ocho índices bursátiles seleccionados durante el periodo 2002-2016. Como se puede ver, no hay correlaciones negativas, pero tampoco hay relaciones perfectamente positivas entre los diferentes índices. La más alta es 0.8501 entre Estados Unidos y Europa, y la menos positiva está entre Colombia y Argentina, con 0.4245. Lo anterior lleva a concluir que, durante el periodo indicado, los mercados bursátiles con un grado de correlación alta (mayor integración financiera) fueron el americano y europeo (0.8501), seguidos por el mexicano y el americano (0.7470) y, por último, el europeo y el mexicano (0.7314). Adicionalmente, las economías con un grado de covariación moderado fueron la chilena y la europea (0.4712), la americana y la colombiana (0.4459) y la argentina y la colombiana (0.4245), lo cual sustenta el hecho de que, a pesar de que estos mercados muestran covariaciones positivas, la correlación moderada entre ellos, respecto a los demás mercados seleccionados, permite hacer una diversificación del riesgo, aunque esta no sea la más eficiente.

Prosiguiendo con el análisis, la tabla 5.4 presenta la matriz de correlaciones de las principales monedas latinoamericanas y el euro en función del dólar estadounidense durante el periodo de 2002-2016. En comparación con el análisis de correlación de los índices bursátiles, se evidencia que algunos

pares de monedas sí presentan correlaciones negativas. Los tipos de cambio que registran el mayor grado de correlación son el USD/BRL y el USD/COP (0.5745), USD/CLP y USD/MXN (0.5675); y los de menor grado de covariación son USD/COP y USD/ARS (0.1253), USD/CLP y USD/ARS (0.1049), lo que indica que durante los 14 años analizados estos dos últimos pares de tipos de cambio presentaron un comportamiento dispar. En contraste, los tipos de cambio que experimentaron una correlación negativa son USD/CLP y EUR/USD (-0.4678), USD/MXN y EUR/USD (-0.4515), y, USD/COP y EUR/USD (-0.3520). Llama la atención que todos los tipos de cambio de América Latina registraron una correlación negativa con el tipo de cambio EUR/USD, lo cual evidencia que estos tipos de cambio tienden a moverse en sentidos opuestos en el largo plazo.

5.5 Impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de carteras de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos para un inversionista de Estados Unidos y cinco inversionistas de América Latina

Invertir en el ámbito internacional ofrece una mayor diversificación en comparación con el escenario nacional. Sin embargo, es importante analizar si la inversión en activos internacionales y las fluctuaciones de sus propias monedas permitirá la posibilidad de estructurar carteras diversificadas que permitan no solo maximizar el retorno esperado sino también minimizar el riesgo. Por lo anterior, para analizar el impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de una cartera que invierte en los índices bursátiles latinoamericanos, se trabaja bajo el supuesto de que inversores de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, el 1 de enero 2002 disponían de 100.000 dólares, los cuales los convierten en moneda local y los invierten de forma equiponderada en los índices accionarios de México (IPC), Brasil (BOVESPA), Chile (IPSA), Colombia (IGBC-COLCAP), Perú (IGBVL) y Argentina (MERVAL) durante un periodo de 14 años.

Tabla 5.3. Matriz de correlación de los índices bursátiles de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.

	País	Euro Stoxx 50	IGBC-COLCAP	Bovespa	IGBVL	IPC	IPSA	Merval	S&P 500
Euro Stoxx 50	EUR	1.0000							
IGBC-COLCAP	CO	0.5047	1.0000						
Bovespa	BR	0.6133	0.6028	1.0000					
IGBVL	PE	0.4712	0.4804	0.5772	1.0000				
IPC	MX	0.7314	0.6046	0.6802	0.5887	1.0000			
IPSA	CL	0.5557	0.5395	0.6905	0.5360	0.6376	1.0000		
Merval	AR	0.5575	0.4245	0.5536	0.4873	0.5875	0.5115	1.0000	
S&P 500	US	0.8501	0.4459	0.6384	0.4875	0.7470	0.5486	0.4838	1.0000

Fuente: elaboración propia a partir de la información de Economatica®

Tabla 5.4. Matriz de correlación de los tipos de cambio de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa 2002-2016.

	USD/ARS	USD/MXN	USD/COP	USD/BRL	EUR/USD	USD/CLP	USD/PEN
USD/ARS	1.0000						
USD/MXN	0.2129	1.0000					
USD/COP	0.1253	0.5278	1.0000				
USD/BRL	0.1734	0.5337	0.5745	1.0000			
EUR/USD	-0.0225	-0.4515	-0.3520	-0.3363	1.0000		
USD/CLP	0.1049	0.5675	0.4805	0.4837	-0.4678	1.0000	
USD/PEN	0.1652	0.4410	0.5215	0.3438	-0.3113	0.3955	1.0000

Fuente: elaboración propia a partir de la información de Economatica®

La figura 5.12 contextualiza el comportamiento de la rentabilidad nominal de las carteras enunciados en el párrafo anterior. En ella se observaba que hasta el año 2012 el inversionista mexicano presentó el mejor desempeño en cuanto a la rentabilidad nominal de la inversión, seguido en orden descendente por el argentino, americano y peruano. A partir de ese momento, el inversionista argentino supera en rentabilidad al mexicano y logra finalizar el 2015 con una rentabilidad cercana a 1800 % durante los 14 años de la inversión. En contraste, se percibe que el inversionista brasileño presenta el menor desempeño de los rendimientos nominales en la gran mayoría de los años analizados.

Por su parte, la figura 5.13 permite analizar la evolución de la rentabilidad real de las carteras indicadas. En comparación con el análisis previamente realizado, se evidencia que la rentabilidad real del inversionista argentino pasa a ser una de las más bajas de la muestra. Esto se debe a que durante el periodo 2002-2015 la inflación de país austral se ubicó en un promedio anual del 20.80 %, causando un aumento de incertidumbre, lo cual afecta negativamente la rentabilidad esperada de la inversión y, por lo tanto, el crecimiento en el largo plazo. Adicionalmente, la figura 5.13 permite inferir que el inversionista que presentó el mejor desempeño en cuanto a la rentabilidad en términos de la cantidad de bienes y servicios que se pueden adquirir (poder adquisitivo), fue el mexicano, seguido del americano y del peruano. Igualmente, se evidencia que, desde el punto de vista de la evolución de la rentabilidad nominal y real, el inversionista brasileño presenta el más bajo desempeño a lo largo de los 14 años considerados.

5.6 Análisis del riesgo soberano

El riesgo país se refiere a aquellos económicos, políticos y sociales que los inversionistas extranjeros afrontan al realizar una inversión en un determinado estado (Gullu y Kilic, 2017). Una de las medidas más importantes del riesgo de inversión en las economías emergentes es el *spread* de riesgo soberano, denominado EMBI (*Emerging Market Bond Index*). El EMBI mide el diferencial de los retornos de la deuda pública denominada en dólares estadounidenses de un país emergente con respecto a la rentabil-



Figura 5.12. Comportamiento de la rentabilidad nominal de una cartera que invierte en los índices accionarios de Latinoamérica para un inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, 2002-2015.
Fuente: Economática®.



Figura 5.13. Comportamiento de la rentabilidad real de una cartera que invierte en los índices accionarios de Latinoamérica para un inversor de Estados Unidos, Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú 2002-2015.
Fuente: Economática®.

idad de la deuda pública de Estados Unidos²⁶. Dado que el precio de los activos locales está estrechamente relacionado con el precio de los bonos soberanos, el EMBI es la medida que los inversionistas extranjeros analizan al determinar el desempeño de las economías emergentes y, por ende, las oportunidades de inversión en estos países.

La figura 5.14 presenta la tendencia del EMBIG (*Emerging Markets Bond Index Global*) de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, durante el periodo 2000-2016. Como se puede apreciar, Argentina es el país que ha exhibido la mayor volatilidad de la prima de riesgo, con un máximo de 6487 puntos básicos en julio de 2002 (ver tabla 5.5) como consecuencia de la crisis que se produjo en este país durante los años 2001-2002, la cual ocasionó que, al finalizar el 2002, el país tuviera una inflación de 30.55 %, una caída del PIB de -10.89 % y una depreciación del peso argentino de 137.6 %. En segundo lugar se encuentra Brasil, con un máximo de 2057 puntos básicos en octubre de 2002, por causa del riesgo de *default* por la elevada exposición financiera en dólares estadounidenses a mediados de 2002. Colombia aparece en tercer lugar con una prima de riesgo máxima de 986 puntos básicos en septiembre de 2002, producto del déficit fiscal estructural y de la situación de inseguridad que enfrentaba el país en este periodo.

De manera semejante, la figura 5.14 y la tabla 5.5 permiten contextualizar que el país que ha presentado la menor prima de riesgo durante los 16 años de estudio ha sido Chile, el cual ha exhibido un promedio del EMBIG de 150 puntos básicos, seguido por México y Perú, con un promedio de 233 y 294 puntos básicos, respectivamente. No obstante, en los dos últimos años de estudio, esto es, 2015-2016, el EMBIG de los países de América Latina seleccionados ha mostrado una tendencia al alza.

²⁶ El diferencial del EMBI fue introducido por J.P Morgan en 1992 e incluye los bonos Brady, denominados en dólares, y otros bonos soberanos reestructurados similares. No obstante, el EMBI fue transformado en EMBI+ (*Emerging Markets Bond Index Plus*) y EMBIG (*Emerging Markets Bond Index Global*) para incluir préstamos, eurobonos, préstamos negociables, e instrumentos denominados en moneda local emitidos por soberanos o entidades cuasi soberanas (J.P. Morgan, 1995, 1999). Este estudio se enfoca hacia el análisis del EMBIG de los mercados emergentes de Latinoamérica.

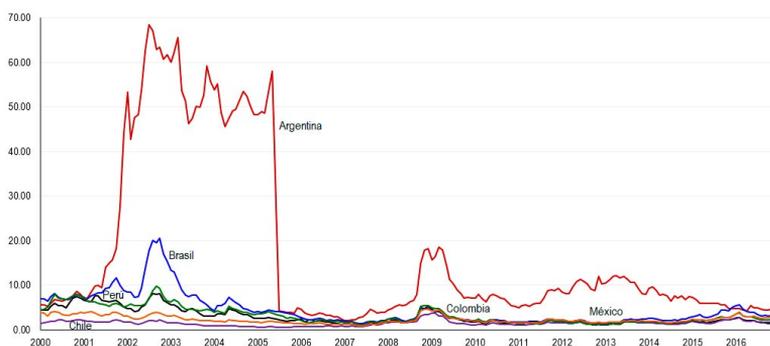


Figura 5.14. Tendencia del EMBIG de Latinoamérica 2000-2016.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística del Banco Central de Reserva del Perú.

Tabla 5.5. EMBIG de Latinoamérica 2000-2016

País	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Argentina	668	1,560	5,774	5,456	5,047	2,587	343	320	860
Brasil	727	888	1,376	839	538	394	233	180	301
Chile	197	192	177	126	83	65	80	101	213
Colombia	668	595	685	508	417	323	194	161	305
México	367	364	317	246	193	167	136	126	255
Perú	568	651	611	429	364	239	186	138	273

País	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	1,198	689	686	988	1,067	787	590	476
Brasil	306	202	195	183	209	235	361	395
Chile	218	129	139	151	154	143	186	201
Colombia	329	189	168	148	158	167	250	279
México	301	187	186	188	189	183	251	304
Perú	292	172	191	157	159	162	201	200

País	Min	Max	Promedio	Volatilidad*
Argentina	203	6,847	1,711	1,922
Brasil	143	2,057	445	356
Chile	55	383	150	59
Colombia	108	986	326	193
México	98	463	233	85
Perú	104	816	294	179

* Medida como la desviación estándar mensual.

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística del Banco Central de Reserva del Perú.

Por otra parte, los comovimientos en las primas de riesgo de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú se confirman cuando se analizan las correlaciones entre estas variables²⁷. La tabla 5.6 permite analizar la matriz de correlación para el periodo 2000-2016. Como se ilustra, los países que cuentan con un grado de correlación fuerte son Colombia y Perú (0.9625), Brasil y Colombia (0.8877), Brasil y Perú (0.8828), lo cual sustenta el hecho de que las primas de riesgo de estos países de América Latina tienden a moverse de manera similar, lo que podría conllevar comovimientos fuertes en periodos de crisis (Cadena, 2004). Por su parte, los países con un grado de correlación débil son Argentina y México (0.1884), Brasil y Chile (0.2910), y Chile y Colombia (0.3991). Es de especial interés el caso del EMBIG de Argentina y Chile, cuyas correlaciones han sido negativas (-0.1128) en el tiempo que se ha tomado para realizar el análisis.

Tabla 5.6. Matriz de correlación de los EMBIG de Latinoamérica 2000-2016

	Argentina	Brasil	Chile	Colombia	México	Perú
Argentina	1.0000					
Brasil	0.6756	1.0000				
Chile	-0.1128	0.2910	1.0000			
Colombia	0.5709	0.8877	0.3991	1.0000		
México	0.1884	0.6421	0.8144	0.7783	1.0000	
Perú	0.5162	0.8828	0.4142	0.9625	0.7759	1.0000

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística del Banco Central de Reserva del Perú.

Prosiguiendo el estudio del riesgo soberano, un importante aspecto que complementa el análisis del EMBIG es la calificación crediticia emitida por las principales agencias internacionales de calificación de riesgo:

²⁷ Los términos ‘comovimiento’ y ‘correlación’ están enlazados. El primero, en este caso, se refiere a que las primas de riesgo de los países latinoamericanos tienen tendencia a moverse en la misma dirección, mientras que el segundo cuantifica el grado de interrelación (positiva, negativa o nula) entre el EMBIG de los países. De esta manera, una correlación positiva es consistente con un comovimiento de las variables macroeconómicas que impactan la prima de riesgo de los bonos de un país emergente (Cadena, 2004).

Fitch Rating, Moody's Corporation y Standard & Poor's. La calificación crediticia soberana proporciona una evaluación de la probabilidad de incumplimiento de la deuda de un país y le asigna a este un grado de inversión o un grado especulativo. Por lo tanto, es un indicador importante en el proceso de decisión de inversión activa en la formación de carteras internacionales debido a que los cambios en las calificaciones de rebaja (mejoramiento) de la deuda soberana por debajo (por encima) del grado de inversión, aceleran el *rally* o la recesión de los mercados de capital (Sensoy, Eraslan, y Erturk, 2016).

La tabla 5.7 presenta, en resumen, la calificación de la deuda soberana de largo plazo denominada en moneda extranjera de Latinoamérica para el periodo 2000-2016 y emitida por *Standard & Poor's*. En ella se muestra que, en el caso de Argentina y Brasil, se ha reducido la calificación en 5 y 4 ocasiones, respectivamente, a lo largo de los 16 años analizados. En contraste, Perú es el único país que no ha visto reducir su calificación crediticia soberana durante el periodo de tiempo seleccionado. Las únicas economías emergentes latinoamericanas, que a diciembre de 2016 poseían el grado de inversión, eran Chile, único país que ha ostentado el *rating* en grado de inversión durante 2000-2016; y México, Perú y Colombia, economías que volvieron al club de países con grado de inversión en los años 2002, 2008 y 2011, respectivamente. Por su parte, las naciones que a diciembre de 2016 no estaban en esta categoría de clasificación eran Brasil, país que la obtuvo de nuevo en 2008, pero la perdió en 2015, y Argentina, único estado que no ha sido parte de los países con grado de inversión en los 16 años de estudio, pues siempre ha estado en el grupo de economías de grado especulativo.

5.6.1 El problema de selección de carteras en Latinoamérica

Una vez realizada la caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica se evidencia que, en su gran mayoría, estos mercados son muy pequeños, concentrados e ilíquidos. Frente a la situación descrita, F. García, González-Bueno y Oliver (2015) estos autores analizaron la aplicación del modelo de media varianza en el mercado accionario colombiano

Tabla 5.7. Calificación deuda soberana largo plazo moneda extranjera de Latinoamérica 2000-2016

País	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Argentina	BB-	SD↓	SD	SD	SD	B-↑	B+↑	B+	B-↓
Brasil	B+	BB↑	B+↓	B+	BB↑	BB-	BB↑	BB+↑	BBB↑
Chile	A-	A-	A-	A-	A	A	A	A+↑	A+
Colombia	BB	BB+↑	BB+						
México	BB+	BB+	BBB↑	BBB-	BBB-	BBB↑	BBB	BBB+↑	BBB+
Perú	BB-	BB-	BB-	BB-	BB↑	BB	BB+↑	BB+	BBB↑

País	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Argentina	B-	B↑	B	B-↓	CCC+↓	SD↓	SD	B-↑
Brasil	BBB-	BBB-	BBB↑	BBB	BBB-↓	BBB-	BB+↓	BB↓
Chile	A+	A+	A+	AA↑	AA-	AA-	AA-	A+↓
Colombia	BB+	BB+	BBB↑	BBB-	BBB↑	BBB	BBB	BBB
México	BBB↓	BBB	BBB	BBB	BBB+↑	BBB+	BBB+	BBB+
Perú	BBB-	BBB-	BBB↑	BBB	BBB+↑	BBB+	BBB+	BBB+

Fuente: cálculos propios con base en información estadística de Standard & Poor's.

y subrayaron las dificultades que enfrenta un inversionista al implementar la teoría de selección de carteras. Los autores concluyeron que, para resolver los problemas de baja liquidez y la falta de alternativas de inversión en la bolsa de valores colombiana, los inversionistas del país deben tener en cuenta otros mercados en el exterior y ampliar, de esta forma, la gama de compañías para incluirlas en sus carteras.

El Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) es el resultado del acuerdo firmado entre la Bolsa de Comercio de Santiago, la Bolsa de Valores de Colombia y la Bolsa de Valores de Lima, las cuales, en el año 2009, iniciaron el proceso de creación de un mercado regional para la negociación de títulos de renta variable de los tres países. El 30 de mayo de 2011 el mercado MILA entró en operación y en junio de 2014 la Bolsa Mexicana de Valores se incorporó, realizando la primera transacción con este mercado el 2 de diciembre de 2014.

A diciembre de 2016, el mercado MILA se ubicó como el primero por número de compañías listadas en bolsa y como el segundo en tamaño de capitalización bursátil y volumen de negociación en América Latina. Entre los beneficios que esta integración ofrece a los inversionistas de la región se

encuentran el acceso a mayores alternativas de instrumentos de inversión y, por ende, mayores posibilidades de diversificación al poder invertir en nuevas compañías, sectores y países. Dadas las condiciones que anteceden, esta tesis doctoral asumirá la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), aplicando un modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez que pretenda maximizar el rendimiento y la liquidez esperados, al tiempo que se minimiza el riesgo de la inversión.

5.7 Conclusiones

A partir de la década de los noventa, América Latina se vio embarcada en un proceso de globalización y liberalización financieras que implicó un mayor dinamismo en sus mercados de capitales. No obstante, el análisis de la evolución de los mercados accionarios de Latinoamérica durante el periodo 2000-2016 muestra que las expectativas generadas por las reformas emprendidas por los gobiernos de estos países para incentivar el desarrollo doméstico de sus mercados de capitales no se han cumplido como se esperaba.

Un análisis del tamaño del mercado evidencia que, desde el punto de vista del índice de capitalización relativa, los mercados accionarios de Chile y México son los más grandes de Latinoamérica para el periodo 2014-2016. No obstante, ninguno de los países de la región supera el promedio presentado por determinadas economías desarrolladas y algunas economías emergentes. Así mismo, el análisis del número de firmas registradas en bolsa señala que, para el periodo 2014-2016, los mercados accionarios de Latinoamérica más grandes eran Brasil y Chile, y los más pequeños, Argentina y Colombia. Empero, a pesar de que este indicador se ha mantenido constante en el periodo comprendido entre los años 2000 y 2016, es eclipsado el por tamaño de mercado de algunas economías emergentes de Asia cuando se realiza una comparativa con el promedio presentado en estos países entre 2014 y 2016.

El examen de la liquidez reveló que el mercado más líquido de Latinoamérica es el brasileño, posición que ha mantenido a lo largo de los 16 años considerados. Sin embargo, los mercados accionarios de esta región de América son ilíquidos si se comparan con la razón volumen transado

sobre el PIB y la tasa de rotación presentada en los demás de la muestra seleccionada. Por su parte, el estudio de la concentración del mercado mostró que, en promedio, la distribución más inequitativa de la oferta de las acciones ha sido en la plaza accionaria de Colombia a lo largo del periodo 2007-2016.

En el orden de las ideas anteriores, el análisis de la volatilidad para el periodo 2002-2016 medido por el binomio rentabilidad-riesgo reveló que el mercado accionario de Perú ofrece la mayor rentabilidad esperada. Por su parte, el mercado accionario que ofrece menor riesgo es el chileno, país que supera en rentabilidad a los mercados mexicano, americano y europeo. En cuanto a la volatilidad de los tipos de cambio, el estudio mostró que, durante el periodo considerado, el peso argentino y el mexicano fueron las monedas más depreciadas, y el nuevo sol peruano y el peso chileno, las monedas más apreciadas.

El coeficiente de correlación reveló que, entre los años 2002 y 2016, los mercados bursátiles que presentaron el mayor grado de integración financiera fueron, en su orden, el americano y europeo, el mexicano y americano y, por último, el europeo y mexicano. El estudio evidenció también que los tipos de cambio que registran el mayor grado de correlación fueron el USD/BRL y el USD/COP, el USD/CLP y USD/MXN. No obstante, llama la atención que todos los tipos de cambio de América Latina experimentaron una correlación negativa con el tipo de cambio EUR/USD, lo cual deja entrever que estos tipos de cambio tienden a moverse en sentidos opuestos en el largo plazo.

Al analizar el impacto del riesgo cambiario sobre la rentabilidad de carteras globales de inversión en los índices bursátiles latinoamericanos, se evidencia que, a lo largo del periodo analizado, esto es, del 2 de enero de 2002 al 31 de diciembre de 2015, el inversionista mexicano presenta el mejor desempeño en cuanto a los rendimientos nominales de las carteras hasta el año 2012, periodo a partir del cual es superado por el inversionista argentino. No obstante, al examinar la evolución de las carteras desde el punto de vista de la rentabilidad real, se evidencia que el inversionista argentino pasó a ser uno de los de más bajo desempeño debido a los altos niveles de inflación que se dieron en dicho país en el tiempo considerado. Con base a los razonamientos que se han plantea-

do, queda claro que el inversionista que desee aprovechar los beneficios de la diversificación internacional debe examinar si la inversión en activos globales y las fluctuaciones de sus propias monedas le proporcionarán la posibilidad de estructurar carteras con activos que cumplan el rol de refugios de valor y de instrumentos de cobertura.

Finalmente, el estudio del riesgo soberano durante los años 2000-2016 permitió apreciar que Argentina es el país que ha presentado el mayor promedio y volatilidad en la prima de riesgo, medida a través del *Emerging Markets Bond Index Global* (EMBIG). En contraste, el promedio más bajo del riesgo soberano lo exhibió Chile, el cual es ratificado con el análisis de la calificación crediticia emitido por la Agencia Calificadora de Riesgo *Standard & Poor's*, entidad que le ha mantenido el *rating* de grado de inversión a Chile durante el periodo en consideración. A diciembre de 2016, México, Perú y Colombia también estaban incluidos en este selectivo grupo. No obstante, para el mismo periodo, Brasil y Argentina hacían parte del grupo de grado especulativo.

Capítulo 6. Modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras

6.1 Introducción al tema

Desde el punto de vista financiero, una cartera es la combinación de más de una acción, bono, *commodity*, inversión en propiedad raíz, equivalentes de efectivo u otro activo tenido por un inversionista individual o institucional, con el propósito de reducir el riesgo vía diversificación (Downes, 2014). A partir de la anterior definición, es claro que en los mercados financieros existe una gran variedad de clases de activos e instrumentos financieros en los cuales un inversionista puede invertir su riqueza. No obstante, estos activos e instrumentos financieros tienen diferentes niveles de riesgo e, igualmente, los inversionistas tienen su propia actitud frente al riesgo. Dada una amplia gama de activos financieros con diferentes características, la esencia del problema de selección de carteras es encontrar una combinación de activos que cumplan las expectativas de rentabilidad y riesgo de un inversionista.

En concordancia con la revisión de la literatura que se encuentra en los capítulos 2, 3 y 4, a continuación, se plantea un modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado. La meta de este capítulo es formular el modelo matemático de selección de carteras que permita aplicar y resolver, por primera vez la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoameri-

cano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú²⁸.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera: la sección 6.2 describe el problema e introduce la notación y las variables que se utilizaran para formular el modelo matemático. La sección 6.3 y 6.4 presentan las funciones objetivo y las restricciones del problema de optimización multiobjetivo. Por último, la sección 6.5 define el problema de decisión del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras.

6.2 Descripción del problema

El modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez pretende resolver el siguiente problema: el 2 de enero de 2016, un inversionista desea seleccionar una cartera en el mercado MILA, en la cual va invertir toda su riqueza en n acciones que ofrecen retornos difusos, de modo que se maximicen el rendimiento y la liquidez esperados, al tiempo que se minimice el riesgo de dicha inversión. Así mismo, con el ánimo de mejorar el desempeño de la cartera y generar mejores resultados en un periodo de 22 meses, se asume que el inversionista realizará tres rebalances o recomposiciones de la cartera, en función del comportamiento del precio y la liquidez de las acciones que se transan en este mercado, en cada una de las siguientes fechas: 1 de julio de 2016, 2 de enero de 2017 y 3 de julio de 2017.

²⁸ El Mercado Integrado Latinoamericano MILA es el resultado del acuerdo firmado entre la Bolsa de Comercio de Santiago, la Bolsa de Valores de Colombia y la Bolsa de Valores de Lima, las cuales, en el año 2009, iniciaron el proceso de creación de un mercado regional para la negociación de títulos de renta variable de los tres países. El 30 de mayo de 2011 el mercado MILA entró en operación, y en junio de 2014, la Bolsa Mexicana de Valores se incorporó, realizando la primera transacción con este mercado el 2 de diciembre de 2014.

6.2.1 Notación

Una vez realizada descripción del problema que pretende resolver el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez, se procede a describir la notación que se utilizará para formular el modelo matemático:

ξ_{r_i} = Tasa de retorno difusa del i -ésimo activo representada por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias, $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i, \rho_{r_i}}$

ξ_{l_i} = Liquidez difusa del i -ésimo activo representada por un número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia, $\xi_{l_i} = (a_{l_i}, b_{l_i}, c_{l_i}, d_{l_i}) \pi_{l_i, \rho_{l_i}}$

ξ_{r_p} = Tasa de retorno difusa de la cartera representada por un número difuso L-R de la familia de potencias, $\xi_{r_p} = (a_{r_p}, b_{r_p}, c_{r_p}, d_{r_p}) \pi_{r_p, \rho_{r_p}}$

e = Retorno esperado de la cartera

u_i = Máxima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo,

l_i = Mínima fracción del capital que puede ser invertida en el i -ésimo activo,

k = Número de activos deseados en la cartera.

6.2.2 Variables de decisión

Las variables de decisión, esto es, las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo credibilístico multiobjetivo se definen a continuación:

ω_i = Proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo,

y_i = Variable binaria que indica si el i -ésimo activo está contenido en la cartera. Toma el valor de 1 si el i -ésimo activo está incluido en la cartera, y el valor de 0 en otros casos.

6.3 Funciones objetivo

6.3.1 Rentabilidad

Considerando que en los mercados financieros existen varios factores no probabilísticos que afectan los retornos de los activos, esta investigación asume que un inversionista asigna su capital entre n activos riesgosos que ofrecen retornos difusos. Sobre la base de la consideración anterior, el retorno del i -ésimo activo se representa por un número difuso de tipo L-R, con funciones de referencia de la familia de potencias [i.e. $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$], cuyos α -cortes de nivel son $[\xi_{r_i}]^\alpha = [\{b_{r_i} - (b_{r_i} - a_{r_i})(1 - \alpha)\}, \{c_{r_i} - (d_{r_i} - c_{r_i})(1 - \alpha)\}]$, para $\alpha \in [0, 1]$.

En la literatura existen varios métodos para construir las funciones de pertenencia de una variable difusa basados en heurística, métodos híbridos, algoritmos de agrupación difusa, redes neuronales, algoritmos genéticos (AGs), entropía e índices Kappa difusos (Cintra, Camargo, y Monard, 2008). No obstante, no existen reglas simples, directrices o incluso un consenso entre la comunidad científica sobre cuál es el mejor método a utilizar, ya que la definición del enfoque para determinar la función de pertenencia difusa está estrechamente relacionada con el dominio de aplicación (Cintra *et al.*, 2008).

En el marco de las observaciones anteriores, la estimación de los parámetros que definen la función de pertenencia del número difuso de tipo L-R se obtiene a partir de los percentiles muestrales. En otras palabras, la estimación del núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo se obtienen a partir de los percentiles muestrales de sus rendimientos históricos. Varios autores han recurrido ampliamente a este método de estimación para cuantificar la incertidumbre asociada al rendimiento futuro de los activos financieros o de una cartera dada, y ha contribuido a la generación de carteras eficientes en un entorno de optimización bi-objetivo y tri-objetivo (Bermúdez *et al.*, 2012; Bermúdez, Segura y Vercher, 2007; Bermúdez y Vercher, 2012; Saborido *et al.*, 2016; Vercher, 2008, 2015; Vercher y Bermúdez, 2012, 2013, 2015; Vercher *et al.*, 2007; Yue y Wang, 2017). A continuación se presenta

el procedimiento para determinar los parámetros que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo:

- i. El soporte de ξ_{r_i} , esto es, el intervalo $[a_{r_i}, d_{r_i}]$, es dado por el percentil 3th y 97th, de forma respectiva.
- ii. El núcleo de ξ_{r_i} , es decir, el intervalo $[b_{r_i}, c_{r_i}]$, es dado por el percentil 45th y 55th, respectivamente.
- iii. Los parámetros de forma π_{r_i} y ρ_{r_i} , son obtenidos de tal forma que los cuartiles difusos y empíricos coincidan (Vercher y Bermúdez, 2015), en otras palabras,

$$\pi_{r_i} = \frac{\text{Ln } 0.5}{\text{ln } s}, \text{ donde } s = \frac{b_{r_i} - \text{Percentil } 25\text{th}}{b_{r_i} - a_{r_i}}; \text{ y, } \rho_{r_i} = \frac{\text{Ln } 0.5}{\text{ln } h},$$

$$\text{donde } h = \frac{\text{Percentil } 75\text{th} - c_{r_i}}{d_{r_i} - c_{r_i}}.$$

El valor de estos parámetros también podrían ser proporcionado por la experiencia y el juicio de los expertos en el mercado.

La figura 6.1 resume el procedimiento para estimar el núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo, tal y como se presentó en el párrafo anterior.

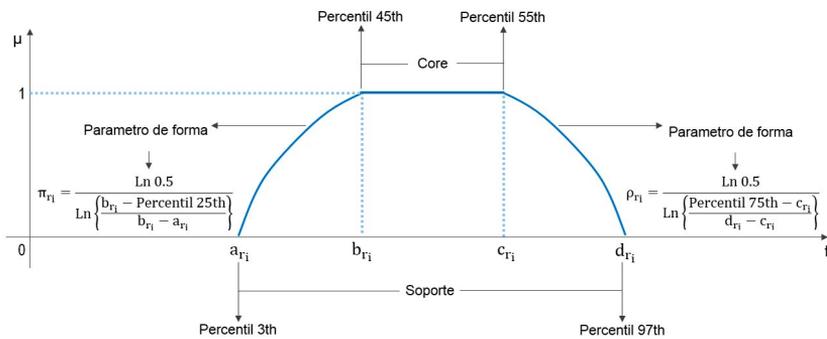


Figura 6.1. Estimación núcleo, soporte y parámetros de forma del i -ésimo Activo.
Fuente: Elaboración propia.

Para poder aplicar las reglas de composición de los números difusos de tipo L-R, se asume que todas las funciones de referencia que modelizan los rendimientos de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo $L=R$ para $t = 1, 2, \dots, T$. (Dubois y Prade, 1987a). Una vez manifestada la anterior asunción, la siguiente combinación lineal expresa el rendimiento difuso esperado de la cartera (Bermúdez, Segura y Vercher, 2007; Vercher *et al.*, 2007):

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n b_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n c_{r_i} \omega_i, \sum_{i=1}^n d_{r_i} \omega_i, \right)_{LR} \right].$$

Nótese que el retorno esperado de la cartera es una combinación lineal convexa de los rendimientos difusos de los activos individuales. Además, para este modelo no es necesario determinar la distribución de credibilidad conjunta de los rendimientos (Bermúdez y Vercher, 2012; Vercher y Bermúdez, 2012).

6.3.2 Riesgo

El riesgo de cartera se calcula utilizando la medida de semivarianza, en la cual las desviaciones *downside* del retorno simulado del rendimiento esperado contribuyen al riesgo. La semivarianza de la cartera se expresa como:

$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = E \left[\left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} - E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] \right]^- \right]^2.$$

6.3.3 Liquidez

La liquidez es uno de los aspectos más importantes que preocupan a los decisores en el problema de selección de carteras. Esta ha sido medida como el grado de probabilidad de convertir una inversión en dinero efectivo sin pérdida significativa de su valor (Arenas-Parra *et al.*, 2001; Fang, Lai y Wang, 2006; Gupta *et al.*, 2011; Gupta, Mehlawat y Mittal, 2012; Gupta *et al.*, 2008; Gupta, Mehlawat y Saxena, 2010; Gupta, Mittal *et al.*, 2013;

Y.J. Liu, Zhang y Zhang, 2013). Generalmente, los inversores prefieren carteras que no solo puedan ser liquidadas a valores esperados más altos, sino también carteras con valores de liquidación más seguros. En este estudio, la liquidez del i -ésimo activo se identifica por su indicador de liquidez de bolsa, definido de la siguiente manera:

$$\text{Liquidez} = \frac{\text{Número de días en que hubo por lo menos una compraventa con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Número total de días del periodo escogido}} \left(\left(\frac{\text{Número de compraventas con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Número de compraventas con todas las acciones dentro del periodo escogido}} \right) \left(\frac{\text{Volumen de dinero con la acción dentro del periodo escogido}}{\text{Volumen de dinero con todas las acciones dentro del periodo escogido}} \right) \right). \quad 6.1$$

Debido a la información incompleta, los índices de liquidez en bolsa son solo estimaciones vagas. En este estudio se asume que el índice de liquidez en bolsa es un número difuso. Bajo esta consideración, el índice de liquidez en bolsa del i -ésimo activo se representa por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias [i.e. $\xi_{i_t} = (a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t}, d_{i_t}) \pi_{i_t, t}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $t = 1, 2, \dots, T$], cuyos α -cortes de nivel son $[\xi_{i_t}]^\alpha = [\{b_{i_t} - (b_{i_t} - a_{i_t})\}(1 - \alpha), \{c_{i_t} - (d_{i_t} - c_{i_t})\}(1 - \alpha)]$, para $\alpha \in [0, 1]$. La estimación del núcleo, el soporte y los parámetros de forma que caracterizan la liquidez difusa esperada del i -ésimo activo se obtienen a partir de los percentiles muestrales de su liquidez histórica, tal y como fue presentado en la sección 6.3.1.

Asumiendo que todas las funciones de referencia que modelizan la liquidez de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo L=R para $t = 1, 2, \dots, T$, la siguiente combinación lineal expresa la liquidez difusa esperada de la cartera:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{i_t} \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \omega_i, \sum_{i=1}^n b_i \omega_i, \sum_{i=1}^n c_i \omega_i, \sum_{i=1}^n d_i \omega_i \right)_{LR} \right].$$

6.4 Restricciones

6.4.1 Presupuesto de capital

Asegura que el presupuesto disponible sea utilizado completamente.

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.2 Ventas en corto

Garantiza que no se aceptan posiciones cortas de activos.

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.3 Cota máxima de participación de un activo en la cartera

Máxima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo.

$$\omega_i \leq u_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6.4.4 Cota mínima de participación de un activo en la cartera

Mínima fracción del presupuesto que puede ser invertida en un activo.

$$\omega_i \geq l_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Las restricciones de cota mínima y máxima de participación de un activo en la cartera (donde $0 \leq l_i$, $u_i \leq 1$, $l_i \leq u_i$, $\forall i$) se incluyen para evitar un gran número de inversiones muy pequeñas (*i.e.* garantizado por la cota

mínima de participación) y asegurar una diversificación suficiente de las inversiones (*i.e.* garantizado por la cota máxima de participación) (Gupta, Inuiguchi, *et al.*, 2013; Gupta, Mittal, *et al.*, 2013).

6.4.5 Cardinalidad

Buscar reducir los costos de transacción y asegurar un cierto grado de diversificación al limitar el número de activos (k) en una cartera.

$$\sum_{i=1}^n y_i = k,$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Donde k , es el número de activos deseados en la cartera.

6.5 El problema de decisión

A partir de los supuestos expresados en las secciones anteriores, la formulación matemática del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez que esta investigación se propone resolver es la siguiente:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{l_i} \right]$$

$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = E \left[\left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} - E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{r_i} \right] \right]^2 \right]$$

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = E \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \xi_{l_i} \right]$$

$$\text{Sujeto a } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \leq u_i y_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \omega_i \geq l_i y_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n y_i = k & \\ y_i \in \{0,1\}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Obsérvese que la proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo (i.e. ω_i) son las variables de decisión. En un sentido general, se dice que una cartera P es una cartera factible para el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez si cumple con las restricciones antes mencionadas. Se dice que una cartera factible P es una solución eficiente o Pareto óptima si no existe otra cartera factible P' tales que $P_{\mathcal{F}_1}(\omega_i) \geq P'_{\mathcal{F}_1}(\omega_i)$, $P_{\mathcal{F}_2}(\omega_i) \leq P'_{\mathcal{F}_2}(\omega_i)$ y $P_{\mathcal{F}_3}(\omega_i) \geq P'_{\mathcal{F}_3}(\omega_i)$ con al menos una desigualdad estricta. El conjunto de soluciones eficientes es el conjunto óptimo de Pareto (en el espacio de decisión) y sus valores de función objetivo correspondientes constituyen la frontera eficiente o frente óptimo de Pareto (en el espacio de objetivo factible), cuyas soluciones se dice que son no-dominadas.

Capítulo 7. Solución metodológica

7.1 Introducción al tema

Los modelos multiobjetivo para la selección de carteras permiten evaluar una situación más realista en la que concurren varios objetivos en conflicto en la decisión de asignación o reparto de activos, proporcionando flexibilidad y un amplio conjunto de opciones para el decisor: el conjunto óptimo de Pareto (cuyos elementos son llamados soluciones eficientes) (Vercher y Bermúdez, 2012). En el capítulo anterior se formuló un modelo multiobjetivo credibilístico para la selección de carteras, donde se consideran tres funciones objetivo que maximizan el rendimiento y la liquidez esperados, al tiempo que minimizan el riesgo de la inversión. En el marco de la consideración anterior, el presente capítulo está organizado de la siguiente manera. Las secciones 7.2 y 7.3 describen la población y los criterios usados para la selección de las muestras por estudiar. En las secciones 7.4, 7.5 y 7.6 se exponen las metodologías para definir la tasa de rendimiento y la liquidez esperada de los activos seleccionados, así como la rentabilidad esperada de la tasa libre de riesgo. Las secciones 7.7., 7.8 y 7.9 despliegan el método para determinar tanto el rendimiento y la liquidez esperados como el riesgo de la cartera. En la sección 7.10 se presentan las condiciones de diversificación que se asumirán en el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras. Finalmente, la sección 7.11 describe el proceso para resolver el problema de optimización multiobjetivo (MOPs) vía NSGAI e ilustra el flujo de la información del modelo propuesto en esta tesis doctoral.

7.2 Base de datos

Las variables dependientes en el modelo credibilístico multiobjetivo propuesto en esta investigación son los precios de cierre semanal ajustado y la liquidez en bolsa²⁹. La población elegida como objeto de análisis son las

²⁹ La información estadística semanal de los precios de cierre ajustados del índice de liquidez en bolsa de las acciones listadas en el Mercado MILA, se obtuvieron del Software Economatica®.

compañías que se encuentran listadas en el Mercado Integrado Latinoamericano MILA, tal y como se exhibe en la figura 7.1.

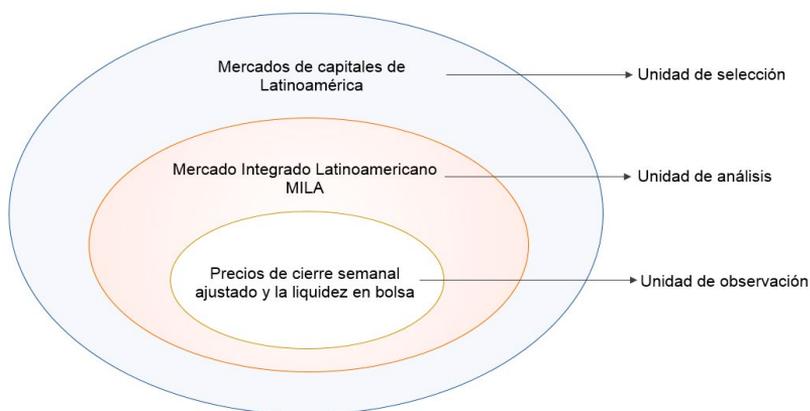


Figura 7.1. Determinación de la población objeto de estudio.
Fuente: Elaboración propia.

En correspondencia con lo anterior, el informe estadístico mensual de la Federación Iberoamericana de Bolsas (FIAB) señala que el número de empresas registradas en bolsa en el mercado MILA a junio de 2017 sumaba un total de 768 (ver tabla 7.1).

Tabla 7.1. Número de compañías listadas en el Mercado MILA a junio 2017

Mercado accionario	Compañías
Bolsa de Comercio de Santiago	297
Bolsa de Valores de Colombia	69
Bolsa Mexicana de Valores	146
Bolsa de Valores de Lima	256
	768

Fuente: elaboración propia a partir de la información estadística de la FIAB.

7.3 Tamaño de la muestra

La selección de los elementos muestrales por estudiarse y sobre los cuales se pretende aplicar el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez se realiza teniendo presente las siguientes consideraciones:

- i. Se seleccionan exclusivamente las compañías que, a lo largo de los periodos de estudio, esto es, periodo I (03/06/2011 a 25/12/2015), periodo II (13/01/2012 a 24/06/2016), periodo III (13/07/2012 a 30/12/2016) y periodo IV (11/01/2013 a 30/06/2017), tuvieron una presencia en bolsa equivalente al 100 %. En otras palabras, las compañías que no hayan cotizado a lo largo de cada uno de los periodos considerados se excluirán y no serán tenidas en cuenta.
- ii. Según se ha citado, los inversores prefieren carteras que no solo puedan ser liquidadas a valores esperados más altos, sino también aquellas con valores de liquidación más seguros, es decir, carteras más liquidas. En el marco de esta apreciación, se incluirán las compañías que durante el periodo de estudio presentaron un volumen promedio mensual de negociación superior al volumen promedio mensual operado en cada uno de los mercados accionarios a los que pertenecen.
- iii. En la exposición del problema de la selección de carteras hay dos suposiciones implícitas: la insaciabilidad y la aversión al riesgo. La primera implica que, cuando un inversionista tiene que elegir entre dos carteras similares, siempre escogerá la que tenga el rendimiento esperado más alto. En otras palabras, “los inversionistas siempre prefieren los niveles más altos de riqueza terminal y no los niveles más bajos. Después de todo, los niveles más altos de riqueza terminal le permiten dedicar más dinero a gastos en el futuro más distante” (Gordon *et al.*, 2003, p.120). Sobre la base de estos razonamientos, esta investigación solo incluirá las empresas que durante el período de estudio presentaron una rentabilidad promedio positiva.

Una vez aplicados los tres criterios de selección indicados, los elementos muestrales de esta tesis doctoral se presentan en la tablas 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5.

Tabla 7.2. Compañías del Mercado MILA que durante el periodo de junio 2011 a diciembre 2015 cumplen con los tres criterios de selección

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Bancolombia S.A.	C_Bco	
3	Corporación Financiera Colombiana S.A.	C_Cfc	
4	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	México
5	Alsea, S.A.B. de C.V.	M_Als	
6	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
7	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
8	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
9	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
10	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
11	Coca-Cola Femsa, S.A.B. de C.V.	M_C-C	
12	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
13	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
14	Genera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
15	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
16	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
17	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
18	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Mas	
19	Kimberly Clark de México, S.A.B. de C.V.	M_Kim	
20	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv	
21	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
22	AES Gener S.A.	C_Gen	Chile
23	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
24	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
25	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
26	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
27	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
28	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
29	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: Elaboración propia.

La tabla 7.2 muestra que el modelo credibilístico para la selección de la cartera I será aplicado en una muestra de 29 acciones (3 colombianas, 18 mexicanas y 8 chilenas).

Tabla 7.3. Compañías del Mercado MILA, que durante el periodo de enero 2012 a junio 2015, cumplen con los tres criterios de selección.

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Corporación Financiera Colombiana S.A.	C_Cfc	
3	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	
4	Alsea, S.A.B. de C.V.	M_Als	México
5	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
6	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
7	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
8	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
9	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
10	Grupo Comercial Chedraui, S.A.B. de C.V.	M_Che	
11	Coca-Cola Femsa, S.A.B. de C.V.	M_C-C	
12	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
13	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
14	Gentera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
15	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
16	Grupo Financiero Inbursa, S.A.B de C.V.	M_Inb	
17	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
18	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
19	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru	
20	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim	
21	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv	
22	OHL México, S.A.B. de C.V.	M_Ohl	
23	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
24	Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V.	M_Wal	

Continúa

No.	Compañía	Inicial	País
25	AES Gener S.A.	C_Gen	Chile
26	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
27	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
28	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
29	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
30	Colbún S.A.	C_Col	
31	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
32	Embotelladora Andina S.A.	C_Emb	
33	Enel Américas S.A.	C_Ena	
34	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
35	S.A.C.I. Falabella S.A.	C_Fal	

Fuente: Elaboración propia.

Por su parte, la tabla 7.3 presenta los elementos muestrales para la selección de la cartera II, esto es, 35 acciones (2 compañías listadas en la Bolsa de Valores de Colombia, 22 en la Bolsa de Valores de México y 11 en la Bolsa de Valores de Chile).

Tabla 7.4. Compañías del mercado MILA que durante el periodo de junio de 2012 a diciembre de 2016 cumplen con los tres criterios de selección.

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Alfa, S.A.B. de C.V.	M_Alf	México
3	Asea, S.A.B. de C.V.	M_Als	
4	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
5	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
6	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
7	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
8	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	

Continúa

No.	Compañía	Inicial	País
9	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	México
10	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
11	Gentera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
12	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
13	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
14	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
15	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru	
16	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim	
17	El Puerto de Liverpool, S.A.B. de C.V.	M_Liv	
18	OHL México, S.A.B. de C.V.	M_Ohl	
19	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
20	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	Chile
21	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
22	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
23	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
24	Banco Santander Chile S.A.	C_San	
25	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
26	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
27	S.A.C.I. Falabella S.A.	C_Fal	
28	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: elaboración propia.

Durante el periodo de junio de 2012 a diciembre de 2016, solo 28 compañías del mercado MILA cumplieron los criterios de selección previamente indicados. En este orden de ideas, la muestra para la selección de la cartera III está conformada por una compañía del mercado accionario colombiano, 18 del mexicano y 9 del chileno (ver tabla 7.4).

Finalmente, la tabla 7.5 ilustra las compañías que conforman la muestra para la selección de la cartera IV, esto es, 27 acciones, una de Colombia, 16 de México y 10 de Chile.

Tabla 7.5. Compañías del mercado MILA que durante el periodo de enero 2013 a junio 2017 cumplen con los tres criterios de selección

No.	Compañía	Inicial	País
1	Banco Davivienda S.A.	C_Dav	Colombia
2	Alea, S.A.B. de C.V.	M_Als	México
3	Arca Continental, S.A.B. de C.V.	M_Arc	
4	Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.	M_Sur	
5	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	M_Bim	
6	Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V.	M_Bmv	
7	Cemex, S.A.B. de C.V.	M_Cem	
8	Grupo Elektra, S.A.B. de C.V.	M_Ele	
9	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	M_Fem	
10	Grupo Carso, S.A.B de C.V.	M_Car	
11	Genera, S.A.B de C.V.	M_Gen	
12	Grupo Financiero Banorte, S.A.B de C.V.	M_Ban	
13	Grupo México, S.A.B. de C.V.	M_Mex	
14	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A.B. de C.V.	M_Aer	
15	Grupo Industrial Maseca, S.A.B. de C.V.	M_Gru	
16	Kimberly Clark de México S.A.B de C.V.	M_Kim	
17	Grupo Televisa, S.A.B. de C.V.	M_Tel	
18	Aguas Andinas S.A.	C_Agu	
19	Banco de Chile S.A.	C_Bch	
20	Banco de Crédito e Inversiones S.A.	C_Bci	
21	Banco Itau Chile S.A.	C_Ita	
22	Banco Santander Chile S.A.	C_San	
23	Compañía Cervecerías Unidas S.A.	C_Cer	
24	Enel Américas S.A.	C_Ena	
25	Enel Generación Chile S.A.	C_Enl	
26	Ripley Corp S.A.	C_Rip	
27	SM-Chile S.A.	C_Smc	

Fuente: elaboración propia.

Uno de los puntos que llaman la atención al observar los diferentes elementos de la muestra desplegados es la poca participación del mercado accionario colombiano y la nula presencia del mercado de acciones de Perú. Esto se debe a que no cumplieron el segundo criterio de selección por causa de los bajos niveles de liquidez evidenciados durante el periodo de tiempo bajo consideración, el cual es ratificado en la caracterización de la liquidez que se les realizó a estas plazas bursátiles en el capítulo 5.

7.4 Retorno esperado crisp credibilístico del i-ésimo activo

Bajo el supuesto de que el inversionista ha seleccionado n activos diferentes, la tasa de retorno difusa esperada del i -ésimo activo se determina como sigue:

- **Paso 1.** Establecer la muestra de los rendimientos del i -ésimo activo r_{it} a través de la expresión matemática $r_{it} = (p_{it} - p_{i,t-1}) / (p_{i,t-1}; i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, T$, donde p_{it} es el precio de cierre ajustado³⁰ del i -ésimo activo el viernes de la semana t .
- **Paso 2.** Modelar la imprecisión e incertidumbre del rendimiento futuro del i -ésimo activo, vía definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias ξ_{r_i} , usando los percentiles muestrales de los datos en la columna de los retornos $\{r_{it}\}_{t=1}^T$, tal y como fue señalado en el capítulo anterior (ver sección 6.3.1).
- **Paso 3.** Determinar el intervalo esperado, esto es, el retorno *crisp* credibilístico del i -ésimo activo, $\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, \rho_{r_i}}$, utilizando la expresión matemática

$$E(\xi_{r_i}) = \frac{1}{2} \left[b_{r_i} + c_{r_i} + \frac{\rho_{r_i}(d_{r_i} - c_{r_i})}{\rho_{r_i} + 1} - \frac{\pi_{r_i}(b_{r_i} - a_{r_i})}{\pi_{r_i} + 1} \right]$$

donde $a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}, \pi_{r_i}$ y ρ_{r_i} son los parámetros de ξ_{r_i}

³⁰ Precio ajustado por dividendos en efectivo, dividendo en acciones, desdoblamiento (*split*), reducción de capital, agrupamiento (*implicit*), suscripción y escisión.

7.5 Liquidez esperada crisp credibilística del i -ésimo activo

La liquidez difusa esperada del i -ésimo activo se determina a partir del siguiente procedimiento:

- **Paso 1.** Definir la muestra del índice de liquidez en bolsa semanal del i -ésimo activo l_{it}
- **Paso 2.** Cuantificar la incertidumbre de la liquidez futura del i -ésimo activo, a través de la definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia tipo potencia ξ_{li} , utilizando los percentiles muestrales de los datos en la columna de la liquidez $\{l_{ti}\}_{t=1}^T$, según lo señalado en el capítulo sexto (ver sección 6.3.3).
- **Paso 3.** Determinar el valor medio esperado, en otras palabras, la liquidez *crisp* credibilística del i -ésimo activo, $\xi_{li} = (a_i, b_i, c_i, d_i)_{\pi_i, \rho_i}$

$$\text{vía } E(\xi_{li}) = \frac{1}{2} \left[b_i + c_i + \frac{\rho_i(d_i - c_i)}{\rho_i + 1} - \frac{\pi_i(b_i - a_i)}{\pi_i + 1} \right]$$

donde $a_i, b_i, c_i, d_i, \pi_i$ y ρ_i , son los parámetros de ξ_{li}

7.6 Tasa libre de riesgo esperada crisp credibilística

Entre las medias de *performance* de las carteras se encuentra el ratio de Sortino, que permite medir la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de una cartera. Este es una modificación del ratio de Sharpe y se fundamenta en el supuesto de que el objetivo de los inversionistas es el de minimizar la volatilidad proveniente de los retornos negativos (*i.e.* volatilidad no deseada). Bajo este contexto, el ratio de Sortino en un entorno credibilístico se determina a partir de la siguiente fórmula:

$$\text{Ratio de Sortino} = \frac{E(\xi_p) - E(\xi_{RF})}{SV(\xi_p)}$$

Donde:

$E(\xi_p)$ = Retorno difuso esperado de la cartera

$E(\xi_{Rf})$ = Rentabilidad objetivo o tasa de rentabilidad requerida

$SV(\xi_p)$ = Semivarianza esperada de la cartera

En atención a lo anteriormente expuesto, la tasa de retorno objetivo por utilizar en la aplicación del ratio credibilístico de Sortino, para determinar la cartera óptima en el frente óptimo de Pareto (*i.e.* frontera eficiente), es la rentabilidad de los bonos del gobierno de Estados Unidos, que es definida por la tasa de madurez constante de seis meses (*6-Month Treasury Constant Maturity Rate*³¹). A continuación, se presenta el procedimiento para determinar esta tasa de rentabilidad bajo un entorno de decisión difuso:

- **Paso 1.** Determinar la muestra de la tasa semanal de madurez constante de seis meses de los bonos del gobierno americano.
- **Paso 2.** Modelizar la incertidumbre de la tasa semanal de madurez constante de seis meses, vía definición de la función de pertenencia del número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias ξ_{1j} , utilizando los percentiles muestrales de los datos en la columna de la rentabilidad $\{R_{f,t}\}_{t=1}^T$, tal y como se ha realizado en el caso de las variables difusas de la rentabilidad y la liquidez del *i*-ésimo activo.
- **Paso 3.** Definir el intervalo esperado de la tasa semanal de madurez constante de un año, $\xi_{Rf} = (a_{Rf}, b_{Rf}, c_{Rf}, d_{Rf})_{\pi_{Rf}, \rho_{Rf}}$,

$$\text{vía } E(\xi_{Rf}) = \frac{1}{2} \left[b_{Rf} + c_{Rf} + \frac{\rho_{Rf}(d_{Rf} - c_{Rf})}{\rho_{Rf} + 1} - \frac{\pi_{Rf}(b_{Rf} - a_{Rf})}{\pi_{Rf} + 1} \right]$$

donde a_{Rf} , b_{Rf} , c_{Rf} , d_{Rf} , π_{Rf} y ρ_{Rf} son los parámetros de ξ_{Rf} .

³¹ La información de la tasa de madurez constante de seis meses de los bonos americanos se obtuvo del repositorio de datos históricos del Banco de la Reserva Federal de San Luis (Estados Unidos) (*Federal Reserve Bank of St. Louis*).

7.7 Rentabilidad esperada de la cartera

Una vez definido el retorno esperado *crisp* credibilístico del i -ésimo activo, la rentabilidad esperada de la cartera, es decir, la función objetivo $\mathcal{F}_1(\omega_i)$ presentada en el capítulo anterior, se convierte en la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left[b_{r_i} + c_{r_i} + \frac{(d_{r_i} - c_{r_i})\rho_{r_i}}{\rho_{r_i} + 1} - \frac{(b_{r_i} - a_{r_i})\pi_{r_i}}{\pi_{r_i} + 1} \right] \omega_i \right]$$

$$\text{Max } \mathcal{F}_1(\omega_i) = \sum_{i=1}^n [E(\xi_{r_i})] \omega_i$$

7.8 Riesgo de la cartera

La función objetivo $\mathcal{F}_2(\omega_i)$ señalada en el capítulo 6 para determinar el riesgo de la cartera es sustituida por la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Min } \mathcal{F}_2(\omega_i) = \begin{cases} \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)} + \frac{(e - c_{r_p})^{\rho_{r_p} + 2}}{(d_{r_p} - c_{r_p})^{\rho_{r_p}} (\rho_{r_p} + 1) (\rho_{r_p} + 2)}, & \text{If } c_{r_p} < e \leq d_{r_p} \\ \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)}, & \text{If } b_{r_p} < e \leq c_{r_p} \\ \frac{(e - a_{r_p})^2}{2} - \frac{(e - a_{r_p})(b_{r_p} - a_{r_p})}{\pi_{r_p} + 1} - \frac{(b_{r_p} - e)^{\pi_{r_p} + 2}}{(b_{r_p} - a_{r_p})^{\pi_{r_p}} (\pi_{r_p} + 1) (\pi_{r_p} + 2)} + \frac{(b_{r_p} - a_{r_p})^2}{(\pi_{r_p} + 1)(\pi_{r_p} + 2)}, & \text{If } a_{r_p} < e \leq b_{r_p} \\ 0 & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que la anterior función objetivo depende de las variables a_{r_p} , b_{r_p} , c_{r_p} , d_{r_p} , π_{r_p} y ρ_{r_p} , que corresponden a los parámetros de la tasa de retorno difusa de la cartera, representada por un número difuso L-R con funciones de referencia de la familia de potencias, $\xi_{r_p} = (a_{r_p}, b_{r_p}, c_{r_p}, d_{r_p})_{\pi_{r_p}, \rho_{r_p}}$

Si asumimos que todas las funciones de referencia de cada uno de los activos tienen la misma forma, siendo $L=R$ para cada $t = 1, 2, \dots, T$, los parámetros que modelizan la imprecisión e incertidumbre del rendimiento esperado de la cartera se determinan a partir del siguiente procedimiento, el cual se fundamentan en el principio de extensión de Zadeh (ver teorema 4.1), expuesto en el capítulo 4:

- **Paso 1.** Utilizar la expresión 4.3, esto es, $\lambda\tilde{A}=(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1)_{LR}$, asignando a λ la proporción del total del capital invertido en el i -ésimo activo, es decir, ω_i

$$\xi_{r_1} = (\omega_1 a_{r_1}, \omega_1 b_{r_1}, \omega_1 c_{r_1}, \omega_1 d_{r_1})_{\omega_1 \pi_{r_1}, \omega_1 \rho_{r_1}},$$

$$\xi_{r_2} = (\omega_2 a_{r_2}, \omega_2 b_{r_2}, \omega_2 c_{r_2}, \omega_2 d_{r_2})_{\omega_2 \pi_{r_2}, \omega_2 \rho_{r_2}},$$

....

$$\xi_{r_n} = (\omega_n a_{r_n}, \omega_n b_{r_n}, \omega_n c_{r_n}, \omega_n d_{r_n})_{\omega_n \pi_{r_n}, \omega_n \rho_{r_n}}.$$

- **Paso 2.** Utilizar la expresión 4.2, es decir, $\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)_{LR}$ para determinar los parámetros a_{rp} , b_{rp} , c_{rp} , d_{rp} , π_{rp} y ρ_{rp} de la tasa de retorno difusa de la cartera.

$$\xi_{rp} = ([\omega_1 a_{r_1} + \omega_2 a_{r_2}, \dots, + \omega_n a_{r_n}], [\omega_1 b_{r_1} + \omega_2 b_{r_2}, \dots, + \omega_n b_{r_n}], [\omega_1 c_{r_1} + \omega_2 c_{r_2}, \dots, + \omega_n c_{r_n}],$$

$$[\omega_1 d_{r_1} + \omega_2 d_{r_2}, \dots, + \omega_n d_{r_n}])_{[\omega_1 \pi_{r_1} + \omega_2 \pi_{r_2}, \dots, + \omega_n \pi_{r_n}], [\omega_1 \rho_{r_1} + \omega_2 \rho_{r_2}, \dots, + \omega_n \rho_{r_n}]}$$

7.9 Liquidez esperada de la cartera

Una vez determinada la liquidez esperada *crisp* credibilística del i -ésimo activo, la liquidez esperada de la cartera, en otras palabras, la función objetivo $\mathcal{F}_3(\omega_i)$ presentada en el capítulo anterior, se convierte en la siguiente función objetivo *crisp*:

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \left[b_{i_1} + c_{i_1} + \frac{(d_{i_1} - c_{i_1})\rho_{i_1}}{\rho_{i_1} + 1} - \frac{(b_{i_1} - a_{i_1})\pi_{i_1}}{\pi_{i_1} + 1} \right] \right] \omega_i$$

$$\text{Max } \mathcal{F}_3(\omega_i) = \sum_{i=1}^n [E(\xi_{i_1})] \omega_i$$

7.10 Restricciones

En el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras se asumen las siguientes condiciones de diversificación:

- i. Cota máxima de participación de un activo en la cartera: $u_i=0,3$ para cada $i = 1,2, \dots, n$
- ii. Cota mínima de participación de un activo en la cartera: $l_i=0.0$, para cada $i = 1,2, \dots, n$
- iii. Cardinalidad: en lo que concierne a esta restricción, es importante señalar que no es recomendable tener un número pequeño o una gran cantidad de activos en la cartera para lograr la diversificación. Generalmente, la diversificación de cartera para un inversionista dado se encuentra en un rango estrecho de tres a diez activos (Gupta, Mehlawat, Inuiguchi y Chandra, 2014c). Por lo anterior, siguiendo esta recomendación, se considera hasta diez activos para una cartera admisible, es decir, $k = 10$.

7.11 Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGAII)

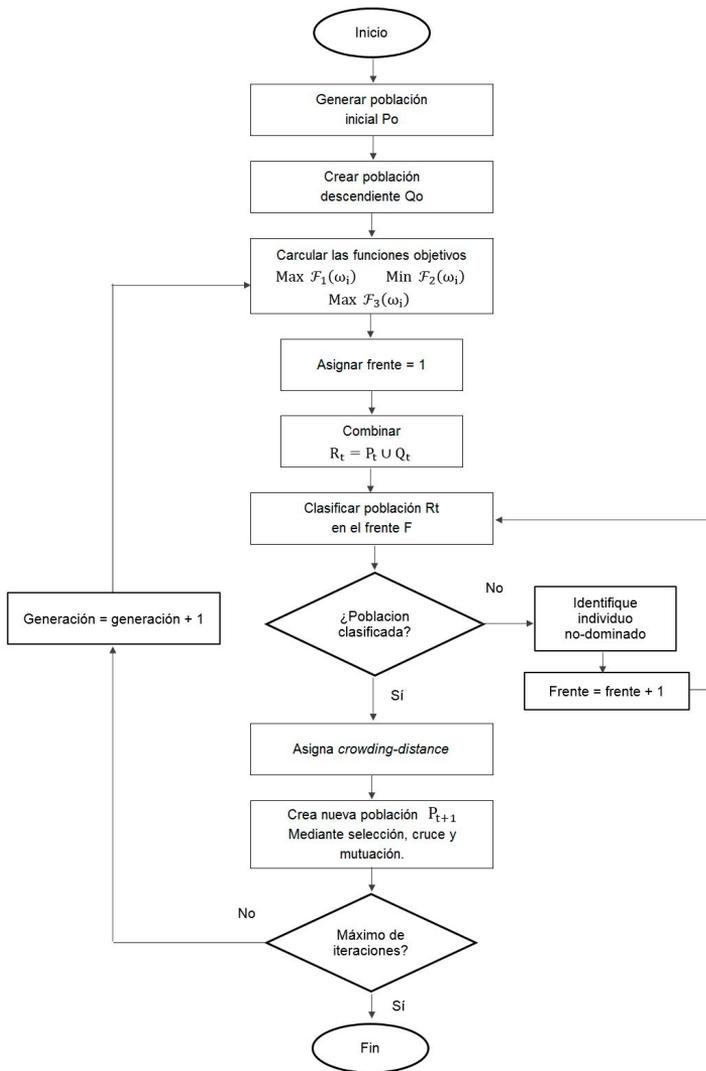


Figura 7.2. Diagrama de flujo del NSGA-II.
Fuente: elaboración propia.

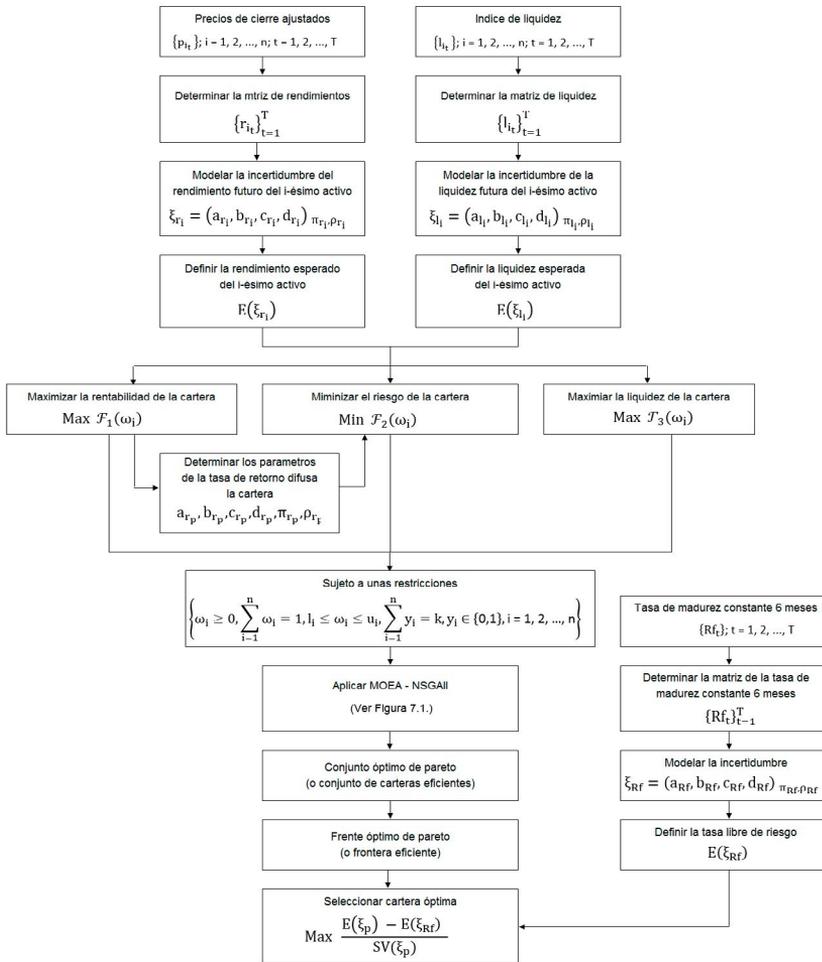


Figura 7.3. Flujo de la información del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras.

Fuente: elaboración propia.

En el modelo propuesto las funciones objetivo *crisp* dependen tanto de las características como de la media de los números difusos L-R que representan los retornos y la liquidez de cada activo. Así mismo, la introducción de restricciones realistas convierte el modelo de un problema de optimización cuadrática clásica (*classical quadratic optimization problem*) en uno de pro-

gramación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que es *NP-hard* (Moral-Escudero, Ruiz-Torrubiano y Suárez, 2006). Para superar este inconveniente, el modelo propuesto en esta tesis doctoral se resolverá aplicando el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI), MOEA que ha sido utilizado con éxito en la generación de soluciones eficientes en varios modelos multiobjetivo de selección de carteras (Liagkouras y Metaxiotis, 2015). Teniendo en cuenta la anterior consideración, el proceso para resolver el problema de optimización multiobjetivo (MOPs) vía NSGAI se ilustra en la figura 7.1.

La figura 7.2 ilustra el flujo que sigue la información para establecer una política de inversión bajo el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras, ligado a un perfil de inversionista determinado, es decir, las preferencias del inversionista (la cardinalidad y las cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera) y donde las condiciones del mercado se utilizan para definir las funciones objetivo y las restricciones del problema.

Tabla 7.6. Parámetros principales del algoritmo NSGAI

Parámetro		Valor
Tamaño de la población	N_{POP}	400
Índice de distribución de cruce	η_C	10
Probabilidad de cruce	P_C	0.9
Índice de distribución de mutación	η_M	50
Probabilidad de mutación	P_M	0.01
Número máximo de generaciones	N_{ITER}	500

Fuente: Elaboración propia.

7.12 Parámetros NSGAI

La tabla 7.6 muestra los valores de los principales parámetros utilizados en la configuración del MOEA NSGAI para resolver el modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras utilizando lenguaje R (<http://www.r-project.org/>).

Capítulo 8.

Resultados experimentales

8.1 Introducción al tema

En los capítulos previos se expusieron los antecedentes, las motivaciones y los objetivos de la presente investigación, que condujeron a realizar una revisión sistemática de la literatura de la optimización de carteras, los algoritmos evolutivos multiobjetivo y la teoría de la credibilidad, la cual contribuyó a plantear un modelo credibilístico de tres objetivos para generar carteras eficientes que incorporen las preferencias del inversor y las condiciones del mercado. A este respecto, el presente capítulo tiene como meta explicar los resultados experimentales del modelo propuesto, asumiendo la toma de decisiones de inversión en el mercado MILA. Para llevar a cabo este propósito, el capítulo se organiza en tres secciones, a saber: las secciones 8.2 y 8.3 presentan los retornos y la liquidez difusa de los activos seleccionados, y la sección 8.4 se centra en demostrar la efectividad y eficiencia del modelo en las aplicaciones prácticas.

8.2 Retorno esperado crisp credibilístico del i -ésimo activo

Las tablas 8.1 a 8.4 presentan los parámetros que definen la función de pertenencia de los retornos difusos de tipo L-R y sus respectivos valores esperados.

En concordancia con lo indicado en el capítulo anterior, estas compañías representan los elementos de la muestra que, durante los periodos I (03/06/2011 a 25/12/2015), II (13/01/2012 a 24/06/2016), III (13/07/2012 a 30/12/2016) y IV (11/01/2013 a 30/06/2017) cumplieron con los tres criterios de selección indicados; esto es, presencia en bolsa, volumen de negociación y rentabilidad promedio positiva.

Tabla 8.1. Retornos difusos esperados (Periodo I)

Activo	Retorno		
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i} \rho_{r_i}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
Colombia	C_Dav	$(-0.06563, -0.00409, 0.00547, 0.06565) L_{-0.52243} R_{0.44550}$	-0.000597
	C_Bco	$(-0.08206, -0.00327, 0.00455, 0.06183) L_{-0.44442} R_{0.48893}$	-0.002076
	C_Cfc	$(-0.05837, -0.00013, 0.00472, 0.05250) L_{0.56591} R_{0.045974}$ $(-0.05837, -0.00013, 0.00472, 0.05250) L_{0.56591} R_{0.045974}$	-0.000703
México	M_Alf	$(-0.07862, -0.00397, 0.00434, 0.09799) L_{-0.62926} R_{0.46993}$ $(-0.07862, -0.00397, 0.00434, 0.09799) L_{-0.62926} R_{0.46993}$	0.000740
	M_Als	$(-0.07891, 0.00167, 0.01302, 0.09301) L_{-0.48751} R_{0.50776}$ $(-0.07891, 0.00167, 0.01302, 0.09301) L_{-0.48751} R_{0.50776}$	0.007611
México	M_Arc	$(-0.06550, -0.00409, 0.00241, 0.07315) L_{-0.49951} R_{0.57142}$ $(-0.06550, -0.00409, 0.00241, 0.07315) L_{-0.49951} R_{0.57142}$	0.001791
	M_Sur	$(-0.06155, 0.00249, 0.00907, 0.07653) L_{-0.66725} R_{0.51298}$ $(-0.06155, 0.00249, 0.00907, 0.07653) L_{-0.66725} R_{0.51298}$	0.004403
	M_Bim	$(-0.07114, -0.00197, 0.00579, 0.08474) L_{-0.54195} R_{0.52523}$ $(-0.07114, -0.00197, 0.00579, 0.08474) L_{-0.54195} R_{0.52523}$	0.003348

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}) \pi_{r_1} p_{r_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Bmv	(-0.08642, -0.00355, 0.00646, 0.08604) L _{0.53955} R _{0.43970} (-0.08642, -0.00355, 0.00646, 0.08604) L _{0.53955} R _{0.43970}	-0.000917
M_Cem	(-0.11207, -0.00194, 0.00629, 0.10866) L _{0.52320} R _{0.52155} (-0.11207, -0.00194, 0.00629, 0.10866) L _{0.52320} R _{0.52155}	0.000806
M_C-C	(-0.07077, -0.00355, 0.00648, 0.06321) L _{0.47566} R _{0.63197} (-0.07077, -0.00355, 0.00648, 0.06321) L _{0.47566} R _{0.63197}	0.001613
M_Fem	(-0.06426, 0.00018, 0.00717, 0.06823) L _{0.63239} R _{0.50229} (-0.06426, 0.00018, 0.00717, 0.06823) L _{0.63239} R _{0.50229}	0.001401
M_Car	(-0.08142, -0.00105, 0.00605, 0.08889) L _{0.50132} R _{0.49297} (-0.08142, -0.00105, 0.00605, 0.08889) L _{0.50132} R _{0.49297}	0.002760
M_Gen	(-0.09610, -0.00336, 0.00596, 0.08619) L _{0.45964} R _{0.63966} (-0.09610, -0.00336, 0.00596, 0.08619) L _{0.45964} R _{0.63966}	0.002348
M_Ban	(-0.08624, -0.00779, 0.00423, 0.09266) L _{0.46855} R _{0.58885} (-0.08624, -0.00779, 0.00423, 0.09266) L _{0.46855} R _{0.58885}	0.002094
M_Mex	(-0.08441, -0.00368, 0.00737, 0.08382) L _{0.64722} R _{0.49659} (-0.08441, -0.00368, 0.00737, 0.08382) L _{0.64722} R _{0.49659}	-0.001333

México

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{\pi_1} = (a_{\pi_1}, b_{\pi_1}, c_{\pi_1}, d_{\pi_1}) / \pi_{\pi_1} \rho_{\pi_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Aer	(-0.05605, -0.00181, 0.00663, 0.08016) L _{-0.61356} R _{-0.59535} (-0.05605, -0.00181, 0.00663, 0.08016) L _{-0.61356} R _{-0.59535}	0.004919
M_Mas	(-0.06769, 0.00158, 0.01217, 0.08745) L _{-0.53070} R _{-0.57264} (-0.06769, 0.00158, 0.01217, 0.08745) L _{-0.53070} R _{-0.57264}	0.008572
M_Kim	(-0.07189, -0.00102, 0.00697, 0.07995) L _{-0.65163} R _{-0.55270} (-0.07189, -0.00102, 0.00697, 0.07995) L _{-0.65163} R _{-0.55270}	0.001981
M_Liv	(-0.05932, -0.00004, 0.00711, 0.07472) L _{-0.59170} R _{-0.43567} (-0.05932, -0.00004, 0.00711, 0.07472) L _{-0.59170} R _{-0.43567}	0.002775
M_Tel	(-0.07145, -0.00108, 0.00768, 0.06401) L _{-0.52438} R _{-0.57310} (-0.07145, -0.00108, 0.00768, 0.06401) L _{-0.52438} R _{-0.57310}	0.001456
C_Gen	(-0.05726, -0.00447, 0.00306, 0.06548) L _{-0.55931} R _{-0.54310} (-0.05726, -0.00447, 0.00306, 0.06548) L _{-0.55931} R _{-0.54310}	0.000812
C_Agu	(-0.04633, -0.00194, 0.00276, 0.05853) L _{-0.53680} R _{-0.49413} (-0.04633, -0.00194, 0.00276, 0.05853) L _{-0.53680} R _{-0.49413}	0.001879

Continúa

Activo	Retorno		
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}) \pi_{r_1} p_{r_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
Chile	C_Bch	$(-0.04980, -0.00233, 0.00206, 0.04733) L_{-0.50957} R_{0.57071}$ $(-0.04980, -0.00233, 0.00206, 0.04733) L_{-0.50957} R_{0.57071}$	0.000077
	C_Bci	$(-0.06457, -0.00668, 0.00129, 0.08281) L_{-0.59895} R_{0.49487}$ $(-0.06457, -0.00668, 0.00129, 0.08281) L_{-0.59895} R_{0.49487}$	-0.000042
	C_Ita	$(-0.07181, -0.00689, 0.00091, 0.08026) L_{-0.44879} R_{0.46717}$ $(-0.07181, -0.00689, 0.00091, 0.08026) L_{-0.44879} R_{0.46717}$	-0.000413
	C_Cer	$(-0.06371, -0.00334, 0.00265, 0.07772) L_{-0.59105} R_{0.46957}$ $(-0.06371, -0.00334, 0.00265, 0.07772) L_{-0.59105} R_{0.46957}$	0.000436
	C_Enl	$(-0.06730, -0.00372, 0.00396, 0.06537) L_{-0.49137} R_{0.47871}$ $(-0.06730, -0.00372, 0.00396, 0.06537) L_{-0.49137} R_{0.47871}$	-0.000411
	C_Smc	$(-0.05243, -0.00304, 0.00226, 0.05724) L_{-0.56215} R_{0.48733}$ $(-0.05243, -0.00304, 0.00226, 0.05724) L_{-0.56215} R_{0.48733}$	-0.000270

Fuente: elaboración propia a partir de información de Economatica®.

Tabla 8.2. Retornos difusos esperados (periodo II).

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i} p_{r_i}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Colombia	C_Dav (-0.06604, -0.00022, 0.00689, 0.06645) L _{0.53583} R _{0.43561} (-0.06604, -0.00022, 0.00689, 0.06645) L _{0.53583} R _{0.43561}	0.000890
	C_Cfc (-0.05884, -0.00231, 0.00445, 0.05578) L _{0.52436} R _{0.46175} (-0.05884, -0.00231, 0.00445, 0.05578) L _{0.52436} R _{0.46175}	-0.000546
México	M_Alf (-0.07547, -0.00643, 0.00346, 0.09873) L _{0.57131} R _{0.44623} (-0.07547, -0.00643, 0.00346, 0.09873) L _{0.57131} R _{0.44623}	0.000662
	M_Als (-0.07223, 0.00171, 0.01101, 0.07840) L _{0.46923} R _{0.60486} (-0.07223, 0.00171, 0.01101, 0.07840) L _{0.46923} R _{0.60486}	0.007249
México	M_Arc (-0.06029, -0.00282, 0.00442, 0.06960) L _{0.51854} R _{0.56402} (-0.06029, -0.00282, 0.00442, 0.06960) L _{0.51854} R _{0.56402}	0.002741
	M_Sur (-0.05955, 0.00302, 0.00904, 0.07273) L _{0.67013} R _{0.54842} (-0.05955, 0.00302, 0.00904, 0.07273) L _{0.67013} R _{0.54842}	0.004755

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}) \pi_{r_1} \rho_{r_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Bim	(-0.06502, -0.002225, 0.00401, 0.08151) $I_{-0.54853} R_{0.56482}$ (-0.06502, -0.002225, 0.00401, 0.08151) $I_{-0.54853} R_{0.56482}$	0.003751
M_Bmv	(-0.08591, -0.002336, 0.00789, 0.09114) $I_{-0.52893} R_{0.41207}$ (-0.08591, -0.002336, 0.00789, 0.09114) $I_{-0.52893} R_{0.41207}$	0.000461
M_Cem	(-0.10237, 0.00172, 0.00853, 0.10923) $I_{0.52058} R_{0.50981}$ (-0.10237, 0.00172, 0.00853, 0.10923) $I_{0.52058} R_{0.50981}$	0.004309
M_Che	(-0.06902, -0.00264, 0.00411, 0.09050) $I_{-0.61644} R_{0.45618}$ (-0.06902, -0.00264, 0.00411, 0.09050) $I_{-0.61644} R_{0.45618}$	0.001611
M_C-C	(-0.06818, -0.00414, 0.00624, 0.06249) $I_{-0.48252} R_{0.60772}$ (-0.06818, -0.00414, 0.00624, 0.06249) $I_{-0.48252} R_{0.60772}$	0.001258
M_Fem	(-0.06138, 0.00044, 0.00699, 0.06632) $I_{0.66500} R_{0.49015}$ (-0.06138, 0.00044, 0.00699, 0.06632) $I_{0.66500} R_{0.49015}$	0.001126
M_Car	(-0.07147, -0.00174, 0.00609, 0.08780) $I_{-0.50605} R_{0.47824}$ (-0.07147, -0.00174, 0.00609, 0.08780) $I_{-0.50605} R_{0.47824}$	0.003678

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}, \pi_{r_1}, \rho_{r_1})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Gen	(-0.07835, -0.00333, 0.00588, 0.08220) $L_{0.53013} R_{0.66755}$ (-0.07835, -0.00333, 0.00588, 0.08220) $L_{0.53013} R_{0.66755}$	0.003555
M_Ban	(-0.07679, -0.00575, 0.00474, 0.08986) $L_{0.51356} R_{0.56049}$ (-0.07679, -0.00575, 0.00474, 0.08986) $L_{0.51356} R_{0.56049}$	0.002729
M_Inb	(-0.06776, -0.00706, 0.00183, 0.07818) $L_{0.54514} R_{0.64801}$ (-0.06776, -0.00706, 0.00183, 0.07818) $L_{0.54514} R_{0.64801}$	0.001687
M_Mex	(-0.08084, -0.00400, 0.00658, 0.08467) $L_{0.61905} R_{0.48968}$ (-0.08084, -0.00400, 0.00658, 0.08467) $L_{0.61905} R_{0.48968}$	-0.000563
M_Aer	(-0.05639, -0.00149, 0.00921, 0.08145) $L_{0.58200} R_{0.54002}$ (-0.05639, -0.00149, 0.00921, 0.08145) $L_{0.58200} R_{0.54002}$	0.006428
M_Gru	(-0.05718, 0.00100, 0.01093, 0.08217) $L_{0.61028} R_{0.60006}$ (-0.05718, 0.00100, 0.01093, 0.08217) $L_{0.61028} R_{0.60006}$	0.008296
M_Kim	(-0.06767, -0.00176, 0.00696, 0.07483) $L_{0.70901} R_{0.59507}$ (-0.06767, -0.00176, 0.00696, 0.07483) $L_{0.70901} R_{0.59507}$	0.001588
M_Liv	(-0.06792, -0.00021, 0.00713, 0.07582) $L_{0.53536} R_{0.42992}$ (-0.06792, -0.00021, 0.00713, 0.07582) $L_{0.53536} R_{0.42992}$	0.001981

México

Continúa

Activo		Retorno	
		$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}) \pi_{r_1} \rho_{r_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
México	M_Ohl	$(-0.10675, -0.00802, 0.00260, 0.11827) I_{-0.48858} R_{0.54453}$ $(-0.10675, -0.00802, 0.00260, 0.11827) I_{-0.48858} R_{0.54453}$	0.001478
	M_Tel	$(-0.06590, -0.00195, 0.00578, 0.06425) I_{-0.52092} R_{0.59652}$ $(-0.06590, -0.00195, 0.00578, 0.06425) I_{-0.52092} R_{0.59652}$	0.001770
	M_Wal	$(-0.06689, -0.00698, 0.00280, 0.07020) I_{-0.47633} R_{0.63778}$ $(-0.06689, -0.00698, 0.00280, 0.07020) I_{-0.47633} R_{0.63778}$	0.001367
Chile	C_Gen	$(-0.05532, -0.00261, 0.00340, 0.06039) I_{-0.57040} R_{0.54477}$ $(-0.05532, -0.00261, 0.00340, 0.06039) I_{-0.57040} R_{0.54477}$	0.000873
	C_Agu	$(-0.04317, -0.00175, 0.00306, 0.05078) I_{-0.56358} R_{0.54611}$ $(-0.04317, -0.00175, 0.00306, 0.05078) I_{-0.56358} R_{0.54611}$	0.001617
	C_Bch	$(-0.04274, -0.00193, 0.00205, 0.03971) I_{-0.58103} R_{0.65132}$ $(-0.04274, -0.00193, 0.00205, 0.03971) I_{-0.58103} R_{0.65132}$	-0.000014
Chile	C_Bci	$(-0.05918, -0.00525, 0.00170, 0.07124) I_{-0.61875} R_{0.49264}$ $(-0.05918, -0.00525, 0.00170, 0.07124) I_{-0.61875} R_{0.49264}$	-0.000608
	C_Ira	$(-0.05658, -0.00649, 0.00098, 0.07578) I_{-0.54199} R_{0.50157}$ $(-0.05658, -0.00649, 0.00098, 0.07578) I_{-0.54199} R_{0.50157}$	0.000933

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{\pi_1} = (a_{\pi_1}, b_{\pi_1}, c_{\pi_1}, d_{\pi_1}, \pi_{\pi_1} \rho_{\pi_1})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
C_Col	$(-0.04413, -0.00445, 0.00332, 0.06020) I_{0.67515} P_{0.45621}$	0.000351
	$(-0.04413, -0.00445, 0.00332, 0.06020) I_{0.67515} P_{0.45621}$	
C_Cer	$(-0.06416, -0.00366, 0.00274, 0.07764) I_{0.56077} P_{0.47132}$	0.000666
	$(-0.06416, -0.00366, 0.00274, 0.07764) I_{0.56077} P_{0.47132}$	
C_Emb	$(-0.08584, -0.00451, 0.00437, 0.08531) I_{0.47949} P_{0.45030}$	-0.000682
	$(-0.08584, -0.00451, 0.00437, 0.08531) I_{0.47949} P_{0.45030}$	
C_Ena	$(-0.06361, -0.00355, 0.00262, 0.06456) I_{0.54274} P_{0.54846}$	-0.000058
	$(-0.06361, -0.00355, 0.00262, 0.06456) I_{0.54274} P_{0.54846}$	
C_Enl	$(-0.05525, -0.00322, 0.00512, 0.06582) I_{0.57824} P_{0.44555}$	0.000774
	$(-0.05525, -0.00322, 0.00512, 0.06582) I_{0.57824} P_{0.44555}$	
C_Fal	$(-0.05775, -0.00321, 0.00486, 0.06101) I_{0.64791} P_{0.64866}$	0.001149
	$(-0.05775, -0.00321, 0.00486, 0.06101) I_{0.64791} P_{0.64866}$	

Fuente: elaboración propia a partir de Información de Economatica®.

Tabla 8.3. Retornos difusos esperados (periodo III).

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})_{\pi_{r_i}, p_{r_i}}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Colombia	C_Dav	0.000494
	M_Alf	-0.001228
México	M_Als	0.005775
	M_Arc	0.001027
	M_Sur	0.004030
	M_Bim	0.001424
	M_Bmv	0.000229

Continúa

Activo	Retorno		
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i} p_{r_i}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
México	M_Cem	(-0.10083,0.00202,0.00905,0.10918) L _{0.51386} R _{0.48134} (-0.10083,0.00202,0.00905,0.10918) L _{0.51386} R _{0.48134}	0.004348
	M_Fem	(-0.06533,-0.00288,0.00679,0.06625) L _{0.62957} R _{0.50801} (-0.06533,-0.00288,0.00679,0.06625) L _{0.62957} R _{0.50801}	-0.000093
	M_Car	(-0.07057,-0.00209,0.00598,0.08143) L _{0.53244} R _{0.49154} (-0.07057,-0.00209,0.00598,0.08143) L _{0.53244} R _{0.49154}	0.002481
	M_Gen	(-0.07502,-0.00295,0.00790,0.08201) L _{0.55454} R _{0.63240} (-0.07502,-0.00295,0.00790,0.08201) L _{0.55454} R _{0.63240}	0.003979
	M_Ban	(-0.07976,-0.00618,0.00150,0.08977) L _{0.54991} R _{0.55208} (-0.07976,-0.00618,0.00150,0.08977) L _{0.54991} R _{0.55208}	0.000305
	M_Mex	(-0.08081,-0.00377,0.00652,0.08585) L _{0.62216} R _{0.51464} (-0.08081,-0.00377,0.00652,0.08585) L _{0.62216} R _{0.51464}	0.000077
	M_Aer	(-0.07431,-0.00161,0.00705,0.08786) L _{0.49759} R _{0.55407} (-0.07431,-0.00161,0.00705,0.08786) L _{0.49759} R _{0.55407}	0.005046
	M_Gru	(-0.05695,0.00124,0.00994,0.07793) L _{0.61593} R _{0.54082} (-0.05695,0.00124,0.00994,0.07793) L _{0.61593} R _{0.54082}	0.006430

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}) \pi_{r_1} \rho_{r_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Kim	$(-0.07150, -0.00059, 0.00701, 0.07464) I_{-0.69637} R_{0.57706}$ $(-0.07150, -0.00059, 0.00701, 0.07464) I_{-0.69637} R_{0.57706}$	0.001029
M_Liv	$(-0.07871, 0.00021, 0.00676, 0.07567) I_{0.49891} R_{0.43794}$ $(-0.07871, 0.00021, 0.00676, 0.07567) I_{0.49891} R_{0.43794}$	0.000844
M_Ohl	$(-0.10659, -0.00825, 0.00268, 0.12421) I_{-0.54028} R_{0.49531}$ $(-0.10659, -0.00825, 0.00268, 0.12421) I_{-0.54028} R_{0.49531}$	0.000097
M_Tel	$(-0.06721, -0.00265, 0.00578, 0.06136) I_{-0.56210} R_{0.61318}$ $(-0.06721, -0.00265, 0.00578, 0.06136) I_{-0.56210} R_{0.61318}$	0.000511
C_Agu	$(-0.04457, -0.00071, 0.00335, 0.05082) I_{-0.60711} R_{0.56262}$ $(-0.04457, -0.00071, 0.00335, 0.05082) I_{-0.60711} R_{0.56262}$	0.001581
C_Bch	$(-0.04234, -0.00192, 0.00288, 0.04237) I_{-0.63631} R_{0.64826}$ $(-0.04234, -0.00192, 0.00288, 0.04237) I_{-0.63631} R_{0.64826}$	0.000388
C_Bci	$(-0.05589, -0.00497, 0.00282, 0.07122) I_{-0.66614} R_{0.47447}$ $(-0.05589, -0.00497, 0.00282, 0.07122) I_{-0.66614} R_{0.47447}$	-0.000248

Chile

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i}) \pi_{r_i} p_{r_i}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Chile	C_Ira	0.000374
	C_San	-0.000598
	C_Cer	0.000037
	C_Enl	-0.001175
	C_Fal	0.000824
	C_Smc	0.000970

Fuente: elaboración propia a partir de información de Economatica®.

Tabla 8.4. Retornos difusos esperados (periodo IV).

Activo	Retorno		
	$\xi_{r_i} = (a_{r_i}, b_{r_i}, c_{r_i}, d_{r_i})$	$\pi_{r_i} \rho_{r_i}$	
Colombia	C_Dav	$(-0.06588, -0.00327, 0.00651, 0.07119) L_{-0.55498} R_{0.46990}$ $(-0.06588, -0.00327, 0.00651, 0.07119) L_{-0.55498} R_{0.46990}$	0.000784
	M_Als	$(-0.07660, -0.00057, 0.00708, 0.08338) L_{-0.46772} R_{0.54086}$ $(-0.07660, -0.00057, 0.00708, 0.08338) L_{-0.46772} R_{0.54086}$	0.004533
México	M_Arc	$(-0.06160, -0.00352, 0.00305, 0.06798) L_{-0.58882} R_{0.60015}$ $(-0.06160, -0.00352, 0.00305, 0.06798) L_{-0.58882} R_{0.60015}$	0.001233
	M_Sur	$(-0.06192, 0.00243, 0.00912, 0.06635) L_{-0.65674} R_{0.59703}$ $(-0.06192, 0.00243, 0.00912, 0.06635) L_{-0.65674} R_{0.59703}$	0.003605
México	M_Bim	$(-0.06441, -0.00623, 0.00308, 0.07995) L_{-0.62169} R_{0.58953}$ $(-0.06441, -0.00623, 0.00308, 0.07995) L_{-0.62169} R_{0.58953}$	0.001527
	M_Bmv	$(-0.08656, -0.00285, 0.00798, 0.07427) L_{-0.59057} R_{0.58825}$ $(-0.08656, -0.00285, 0.00798, 0.07427) L_{-0.59057} R_{0.58825}$	-0.000347
M_Cem	$(-0.10083, -0.00174, 0.00557, 0.10918) L_{-0.47543} R_{0.48282}$ $(-0.10083, -0.00174, 0.00557, 0.10918) L_{-0.47543} R_{0.48282}$	0.002818	

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}, \pi_{r_1}, \rho_{r_1})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Ele	(-0.11285, -0.00707, -0.00022, 0.14115) L _{0.44946} R _{0.41098} (-0.11285, -0.00707, -0.00022, 0.14115) L _{0.44946} R _{0.41098}	0.000542
M_Fem	(-0.06533, -0.00246, 0.00705, 0.06625) L _{0.58631} R _{0.52955} (-0.06533, -0.00246, 0.00705, 0.06625) L _{0.58631} R _{0.52955}	0.000925
M_Car	(-0.07131, -0.00244, 0.00533, 0.07551) L _{0.52998} R _{0.50239} (-0.07131, -0.00244, 0.00533, 0.07551) L _{0.52998} R _{0.50239}	0.001251
M_Gen	(-0.07492, -0.00335, 0.00603, 0.08810) L _{0.55193} R _{0.51449} (-0.07492, -0.00335, 0.00603, 0.08810) L _{0.55193} R _{0.51449}	0.002554
M_Ban	(-0.07976, -0.00528, 0.00150, 0.08977) L _{0.51450} R _{0.52759} (-0.07976, -0.00528, 0.00150, 0.08977) L _{0.51450} R _{0.52759}	0.000889
M_Mex	(-0.08081, -0.00393, 0.00607, 0.08565) L _{0.61978} R _{0.51008} (-0.08081, -0.00393, 0.00607, 0.08565) L _{0.61978} R _{0.51008}	-0.000198
M_Aer	(-0.07431, -0.00161, 0.00952, 0.08139) L _{0.51219} R _{0.58878} (-0.07431, -0.00161, 0.00952, 0.08139) L _{0.51219} R _{0.58878}	0.004961
M_Gru	(-0.05695, 0.00084, 0.00906, 0.07863) L _{0.60812} R _{0.47361} (-0.05695, 0.00084, 0.00906, 0.07863) L _{0.60812} R _{0.47361}	0.005200

México

Continúa

Activo	Retorno		
	$\xi_{\pi_1} = (a_{\pi_1}, b_{\pi_1}, c_{\pi_1}, d_{\pi_1}) / \pi_{\pi_1} \rho_{\pi_1}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
México	M_Kim	(-0.07200, -0.00277, 0.00633, 0.07198) L _{-0.65503} R _{0.59183} (-0.07200, -0.00277, 0.00633, 0.07198) L _{-0.65503} R _{0.59183}	0.000155
	M_Tel	(-0.06721, -0.00318, 0.00425, 0.06694) L _{-0.69964} R _{0.57973} (-0.06721, -0.00318, 0.00425, 0.06694) L _{-0.69964} R _{0.57973}	-0.000452
Chile	C_Agu	(-0.04457, -0.00071, 0.00310, 0.05284) L _{-0.67864} R _{0.54853} (-0.04457, -0.00071, 0.00310, 0.05284) L _{-0.67864} R _{0.54853}	0.001138
	C_Bch	(-0.04234, -0.00180, 0.00277, 0.04292) L _{-0.64869} R _{0.65124} (-0.04234, -0.00180, 0.00277, 0.04292) L _{-0.64869} R _{0.65124}	0.000429
Chile	C_Bci	(-0.05914, -0.00489, 0.00205, 0.07198) L _{-0.59242} R _{0.47556} (-0.05914, -0.00489, 0.00205, 0.07198) L _{-0.59242} R _{0.47556}	-0.000241
	C_Ita	(-0.05442, -0.00905, 0.00126, 0.07564) L _{-0.55322} R _{0.59637} (-0.05442, -0.00905, 0.00126, 0.07564) L _{-0.55322} R _{0.59637}	0.000188
Chile	C_San	(-0.05236, -0.00485, 0.00098, 0.06340) L _{-0.61817} R _{0.52562} (-0.05236, -0.00485, 0.00098, 0.06340) L _{-0.61817} R _{0.52562}	-0.000255
	C_Cer	(-0.06413, -0.00359, 0.00359, 0.06890) L _{-0.55960} R _{0.51080} (-0.06413, -0.00359, 0.00359, 0.06890) L _{-0.55960} R _{0.51080}	0.000178

Continúa

Activo	Retorno	
	$\xi_{r_1} = (a_{r_1}, b_{r_1}, c_{r_1}, d_{r_1}, \pi_{r_1}, p_{r_1})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
C_Ena	$(-0.06352, -0.00453, 0.00479, 0.06369) [L_{-0.52400}, R_{0.51672}]$	0.000021
	$(-0.06352, -0.00453, 0.00479, 0.06369) [L_{-0.52400}, R_{0.51672}]$	
C_Enl	$(-0.05952, -0.00364, 0.00476, 0.06560) [L_{-0.63221}, R_{0.45726}]$	-0.000718
	$(-0.05952, -0.00364, 0.00476, 0.06560) [L_{-0.63221}, R_{0.45726}]$	
C_Rip	$(-0.07441, -0.00682, 0.00353, 0.08177) [L_{-0.46371}, R_{0.42147}]$	-0.000751
	$(-0.07441, -0.00682, 0.00353, 0.08177) [L_{-0.46371}, R_{0.42147}]$	
C_Smc	$(-0.03663, -0.00149, 0.00325, 0.04698) [L_{-0.54692}, R_{0.44737}]$	0.001426
	$(-0.03663, -0.00149, 0.00325, 0.04698) [L_{-0.54692}, R_{0.44737}]$	

Fuente: elaboración propia a partir de Información de Economatica®.

Al analizar la modelización de la incertidumbre e imprecisión del rendimiento futuro de cada uno de los activos, llama la atención que en las diferentes muestras señaladas algunas compañías presentan un retorno difuso semanal esperado negativo, a pesar de que cumplieron el criterio de selección de poseer un rendimiento promedio histórico positivo en cada uno de los periodos de tiempo considerados. Esta es una clara evidencia de que los retornos de los activos financieros vía teoría de la probabilidad siempre diferirán de los modelados a partir de la teoría de conjuntos difusos. Por otra parte, en cada una de las tablas presentadas se observa que las acciones de las compañías del Grupo Industrial Maseca (M-Gru), de Alsea (M-Als), del Grupo Aeroportuario del Pacífico (M-Aer) y del Grupo Aeroportuario del Sureste (M-Sur), lideran los mayores rendimientos difusos semanales esperados. Estos resultados se deben al comportamiento que han tenido estas compañías mexicanas a lo largo del periodo estipulado (ver figura 8.1).

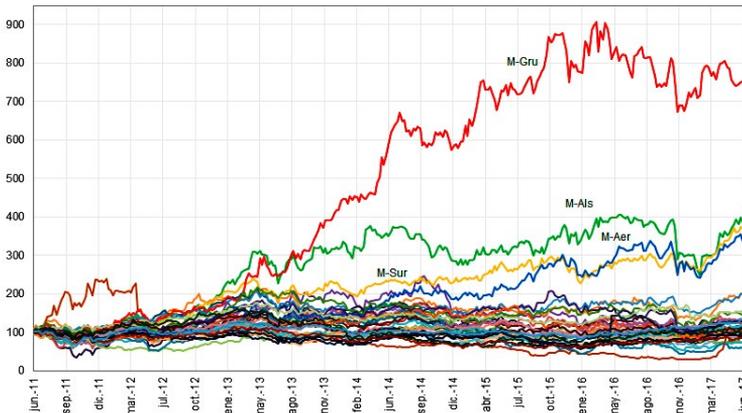


Figura 8.1. Tendencia de la tasa de crecimiento semanal de los activos seleccionados, junio 2011/junio de 2017.
Fuente: elaboración propia a partir de Información de Economática®.

8.3 Liquidez esperada *crisp* credibilística del *i*-ésimo activo

Los parámetros que definen la función de pertenencia de la liquidez difusa de tipo L-R y su respectivo valor esperado correspondiente a cada una de las acciones seleccionadas se ilustran en las tablas 8.5 a 8.8.

Al examinar el valor medio *crisp* credibilístico, a saber, la liquidez semianual esperada de las cuatro muestras seleccionadas, se percibe que dos compañías mexicanas, Grupo Carso (M-Car) y Bolsa Mexicana de Valores (M-Bmv), y una compañía chilena, SM-Chile (C-Smc), representan las acciones que exhiben el criterio de liquidez esperado más alto. En oposición a lo anterior, las compañías con los menores valores medios *crisp* credibilístico de liquidez son las mexicanas Grupo Financiero Banorte (M-Ban) y Cemex (M-Cem).

8.4 Asignación óptima de activos

El modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez pretende resolver el problema en el cual un inversionista imaginario, el 2 de enero de 2016, deseaba seleccionar una cartera en el mercado MILA en la cual va a invertir toda su riqueza en n acciones que ofrecen retornos difusos, de modo que se maximicen el rendimiento y la liquidez esperados, al tiempo que se minimice el riesgo de dicha inversión. Así mismo, con el ánimo de mejorar el desempeño de la cartera y generar mejores resultados en un periodo de 22 meses, se asume que se realizan tres rebalances de la cartera en función del comportamiento del precio y la liquidez de las acciones que se transan en este mercado, en cada una de las siguientes fechas: 1 de julio de 2016, 2 de enero de 2017 y 3 de julio de 2017. En atención a lo anteriormente expuesto, la asignación óptima de activos (*i.e.* la solución eficiente) de las cuatro carteras óptimas que se utilizaran para adelantar la estrategia de rebalanceo, se construirá utilizando los datos previamente obtenidos de la rentabilidad y liquidez esperadas, y la información suministrada en el capítulo de la solución metodológica, esto es, $u_i = 0.3$, $l_i = 0.0$, $K = 10$.

Tabla 8.5. Liquidez difusa esperada (periodo I)

Activo	Liquidez		
	$\xi_{it} = (a_{it}, b_{it}, c_{it}, d_{it}, \pi_{it}, \rho_{it})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
Colombia	C_Dav	(0.01291,0.02715,0.02912,0.06874) L _{0.62085} R _{0.36660} (0.01291,0.02715,0.02912,0.06874) L _{0.62085} R _{0.36660}	0.030722
	C_Bco	(0.04013,0.08476,0.09240,0.19457) L _{0.91198} R _{0.41446} (0.04013,0.08476,0.09240,0.19457) L _{0.91198} R _{0.41446}	0.092907
	C_Cfc	(0.00751,0.01740,0.01861,0.03363) L _{0.77898} R _{0.54319} (0.00751,0.01740,0.01861,0.03363) L _{0.77898} R _{0.54319}	0.018482
México	M_Alf	(0.01364,0.03709,0.04012,0.06481) L _{0.78597} R _{0.48410} (0.01364,0.03709,0.04012,0.06481) L _{0.78597} R _{0.48410}	0.037472
	M_Als	(0.00168,0.01045,0.01238,0.02947) L _{1.35871} R _{0.48594} (0.00168,0.01045,0.01238,0.02947) L _{1.35871} R _{0.48594}	0.011686
	M_Arc	(0.00710,0.01581,0.01708,0.02538) L _{0.73019} R _{0.75733} (0.00710,0.01581,0.01708,0.02538) L _{0.73019} R _{0.75733}	0.016395
M_Sur	(0.00323,0.01000,0.01119,0.02628) L _{0.87060} R _{0.46760} (0.00323,0.01000,0.01119,0.02628) L _{0.87060} R _{0.46760}	0.011421	
M_Bim	(0.00944,0.01572,0.01665,0.02559) L _{0.71114} R _{0.47475} (0.00944,0.01572,0.01665,0.02559) L _{0.71114} R _{0.47475}	0.016319	

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_{li} = (a_{li}, b_{li}, c_{li}, d_{li})$	π_{li}, ρ_{li}
M_Bmv	$(0.00465, 0.00879, 0.00976, 0.01652)$	$L_{0.84905} R_{0.52747}$ $(0.00465, 0.00879, 0.00976, 0.01652)$
M_Cem	$(0.03596, 0.05853, 0.06173, 0.09610)$	$L_{0.88493} R_{0.49827}$ $(0.03596, 0.05853, 0.06173, 0.09610)$
M_C-C	$(0.00363, 0.01463, 0.01568, 0.02662)$	$L_{0.62527} R_{0.40619}$ $(0.00363, 0.01463, 0.01568, 0.02662)$
M_Fem	$(0.02007, 0.03671, 0.03954, 0.05317)$	$L_{0.56785} R_{0.50087}$ $(0.02007, 0.03671, 0.03954, 0.05317)$
M_Car	$(0.00224, 0.00619, 0.00671, 0.01224)$	$L_{0.64051} R_{0.48743}$ $(0.00224, 0.00619, 0.00671, 0.01224)$
M_Gen	$(0.00652, 0.01603, 0.01780, 0.02964)$	$L_{0.63279} R_{0.57994}$ $(0.00652, 0.01603, 0.01780, 0.02964)$
M_Ban	$(0.02632, 0.05827, 0.06189, 0.09972)$	$L_{0.75892} R_{0.52887}$ $(0.02632, 0.05827, 0.06189, 0.09972)$
M_Mex	$(0.03861, 0.05606, 0.05886, 0.08984)$	$L_{0.59576} R_{0.45777}$ $(0.03861, 0.05606, 0.05886, 0.08984)$

México

Continúa

Activo	Liquidez		
	$\xi_{i,t} = (a_{i,t}, b_{i,t}, c_{i,t}, d_{i,t}) \pi_{i,t} p_{i,t}$	Valor medio <i>crisp</i> creditibilístico	
México	M_Aer	(0.00445,0.01091,0.01264,0.02696)L _{0.69265} R _{0.51466} (0.00445,0.01091,0.01264,0.02696)L _{0.69265} R _{0.51466}	0.012885
	M_Mas	(0.00340,0.01333,0.01706,0.03893)L _{1.58962} R _{0.69049} (0.00340,0.01333,0.01706,0.03893)L _{1.58962} R _{0.69049}	0.016613
	M_Kim	(0.00824,0.02193,0.02388,0.03615)L _{1.20490} R _{0.65911} (0.00824,0.02193,0.02388,0.03615)L _{1.20490} R _{0.65911}	0.021585
	M_Liv	(0.00300,0.00812,0.00882,0.01954)L _{1.01010} R _{0.37608} (0.00300,0.00812,0.00882,0.01954)L _{1.01010} R _{0.37608}	0.008648
	M_Tel	(0.02128,0.03348,0.03586,0.05167)L _{0.65427} R _{0.60188} (0.02128,0.03348,0.03586,0.05167)L _{0.65427} R _{0.60188}	0.035228
Chile	C_Gen	(0.00966,0.01667,0.01828,0.03466)L _{0.79394} R _{0.41392} (0.00966,0.01667,0.01828,0.03466)L _{0.79394} R _{0.41392}	0.018320
	C_Agu	(0.01073,0.02375,0.02689,0.04934)L _{0.72299} R _{0.54948} (0.01073,0.02375,0.02689,0.04934)L _{0.72299} R _{0.54948}	0.026568
	C_Bch	(0.02168,0.03806,0.04311,0.09364)L _{0.85247} R _{0.42108} (0.02168,0.03806,0.04311,0.09364)L _{0.85247} R _{0.42108}	0.044302

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), \pi_i, \rho_i$	Valor medio <i>crisp</i> creditibilístico
C_Bci	(0,00920,0,01720,0,01900,0,03361)L _{0,71870} R _{0,52764} (0,00920,0,01720,0,01900,0,03361)L _{0,71870} R _{0,52764}	0,018951
C_Ita	(0,00914,0,02256,0,02687,0,06516)L _{0,91444} R _{0,53595} (0,00914,0,02256,0,02687,0,06516)L _{0,91444} R _{0,53595}	0,028187
C_Cer	(0,00875,0,01817,0,02043,0,04436)L _{0,53979} R _{0,40792} (0,00875,0,01817,0,02043,0,04436)L _{0,53979} R _{0,40792}	0,021116
C_Enl	(0,02641,0,05480,0,06132,0,10541)L _{0,66403} R _{0,51610} (0,02641,0,05480,0,06132,0,10541)L _{0,66403} R _{0,51610}	0,059899
C_Smc	(0,00408,0,00770,0,00881,0,02005)L _{0,96621} R _{0,44606} (0,00408,0,00770,0,00881,0,02005)L _{0,96621} R _{0,44606}	0,009100

Fuente: elaboración propia a partir de información de Economatica*.

Tabla 8.6. Liquidez difusa esperada (periodo II)

Activo	Liquidez		
	$\xi_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}), \pi_{ij}, p_{ij}$	Valor medio crisp credibilístico	
Colombia	C_Dav	(0.01676,0.02733,0.02915,0.06643)L _{0.75475} R _{0.99719} (0.01676,0.02733,0.02915,0.06643)L _{0.75475} R _{0.99719}	0.031266
	C_Cfc	(0.00927,0.01779,0.01959,0.03447)L _{0.86215} R _{0.47835} (0.00927,0.01779,0.01959,0.03447)L _{0.86215} R _{0.47835}	0.019122
	M_Alf	(0.01555,0.03864,0.04115,0.06489)L _{0.45775} R _{0.44413} (0.01555,0.03864,0.04115,0.06489)L _{0.45775} R _{0.44413}	0.039917
	M_Als	(0.00307,0.01285,0.01461,0.03078)L _{0.70361} R _{0.41616} (0.00307,0.01285,0.01461,0.03078)L _{0.70361} R _{0.41616}	0.014088
México	M_Arc	(0.00714,0.01697,0.01837,0.02547)L _{0.51429} R _{0.74403} (0.00714,0.01697,0.01837,0.02547)L _{0.51429} R _{0.74403}	0.017517
	M_Sur	(0.00447,0.01159,0.01319,0.02689)L _{0.63779} R _{0.85407} (0.00447,0.01159,0.01319,0.02689)L _{0.63779} R _{0.85407}	0.014160
M_Bim	(0.01020,0.01654,0.01738,0.02683)L _{0.90294} R _{0.51043} (0.01020,0.01654,0.01738,0.02683)L _{0.90294} R _{0.51043}	0.017146	

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_{li} = (a_{li}, b_{li}, c_{li}, d_{li})$	π_{li}, p_{li}
M_Bmv	(0.00493,0.00924,0.01002,0.01654) (0.00493,0.00924,0.01002,0.01654)	$L_{0.84795}R_{0.53646}$ $L_{0.84795}R_{0.53646}$
M_Cem	(0.04095,0.06103,0.06490,0.09622) (0.04095,0.06103,0.06490,0.09622)	$L_{0.66459}R_{0.51391}$ $L_{0.66459}R_{0.51391}$
M_Che	(0.00255,0.00510,0.00578,0.01076) (0.00255,0.00510,0.00578,0.01076)	$L_{0.79233}R_{0.60969}$ $L_{0.79233}R_{0.60969}$
M_C-C	(0.00489,0.01550,0.01618,0.02665) (0.00489,0.01550,0.01618,0.02665)	$L_{0.43573}R_{0.40665}$ $L_{0.43573}R_{0.40665}$
M_Fem	(0.02425,0.03867,0.04104,0.05361) (0.02425,0.03867,0.04104,0.05361)	$L_{0.59848}R_{0.66503}$ $L_{0.59848}R_{0.66503}$
M_Car	(0.00227,0.00638,0.00687,0.01218) (0.00227,0.00638,0.00687,0.01218)	$L_{0.45999}R_{0.47381}$ $L_{0.45999}R_{0.47381}$
M_Gen	(0.00679,0.01751,0.01865,0.02966) (0.00679,0.01751,0.01865,0.02966)	$L_{0.49270}R_{0.55915}$ $L_{0.49270}R_{0.55915}$
M_Ban	(0.03254,0.06007,0.06320,0.09999) (0.03254,0.06007,0.06320,0.09999)	$L_{0.54734}R_{0.52591}$ $L_{0.54734}R_{0.52591}$

México

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_{i_t} = (a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t}, d_{i_t}) \pi_{i_t} p_{i_t}$	Valor medio crisp creditibilístico
M_Inb	(0.00502,0.02010,0.02157,0.03826)L _{0.59719} R _{0.43258} (0.00502,0.02010,0.02157,0.03826)L _{0.59719} R _{0.43258}	0.020718
M_Mex	(0.03855,0.05448,0.05771,0.08625)L _{0.62368} R _{0.47916} (0.03855,0.05448,0.05771,0.08625)L _{0.62368} R _{0.47916}	0.057659
M_Aer	(0.00468,0.01319,0.01458,0.02822)L _{0.72741} R _{0.56526} (0.00468,0.01319,0.01458,0.02822)L _{0.72741} R _{0.56526}	0.014556
M_Gru	(0.00431,0.01781,0.02225,0.04902)L _{1.10525} R _{0.48857} (0.00431,0.01781,0.02225,0.04902)L _{1.10525} R _{0.48857}	0.020879
M_Kim	(0.00991,0.02338,0.02566,0.03844)L _{0.51557} R _{0.50756} (0.00991,0.02338,0.02566,0.03844)L _{0.51557} R _{0.50756}	0.024381
M_Liv	(0.00398,0.00883,0.00943,0.02105)L _{0.57001} R _{0.39901} (0.00398,0.00883,0.00943,0.02105)L _{0.57001} R _{0.39901}	0.009908
M_Ohl	(0.00458,0.01477,0.01678,0.04047)L _{0.65965} R _{0.39008} (0.00458,0.01477,0.01678,0.04047)L _{0.65965} R _{0.39008}	0.016941
M_Tel	(0.02243,0.03449,0.03623,0.05173)L _{0.65952} R _{0.58574} (0.02243,0.03449,0.03623,0.05173)L _{0.65952} R _{0.58574}	0.035825

México

Continúa

Activo		Liquidez	
		$\xi_{li} = (a_{li}, b_{li}, c_{li}, d_{li}, \pi_{li}, p_{li})$	Valor medio crisp creditibilístico
México	M_Wal	(0.05156,0.07539,0.08147,0.12196)L _{0.56354} R _{0.46976} (0.05156,0.07539,0.08147,0.12196)L _{0.56354} R _{0.46976}	0.080603
	C_Gen	(0.01046,0.01772,0.01877,0.03500)L _{0.81017} R _{0.41645} (0.01046,0.01772,0.01877,0.03500)L _{0.81017} R _{0.41645}	0.019007
	C_Agu	(0.01294,0.02655,0.02951,0.05365)L _{0.74697} R _{0.48403} (0.01294,0.02655,0.02951,0.05365)L _{0.74697} R _{0.48403}	0.029058
Chile	C_Bch	(0.02249,0.04127,0.04635,0.08209)L _{0.77833} R _{0.46945} (0.02249,0.04127,0.04635,0.08209)L _{0.77833} R _{0.46945}	0.045408
	C_Bci	(0.01035,0.01806,0.02030,0.03974)L _{0.87036} R _{0.45403} (0.01035,0.01806,0.02030,0.03974)L _{0.87036} R _{0.45403}	0.020419
	C_Ita	(0.00975,0.02602,0.03061,0.06670)L _{0.70501} R _{0.53525} (0.00975,0.02602,0.03061,0.06670)L _{0.70501} R _{0.53525}	0.031240
	C_Col	(0.00896,0.01941,0.02176,0.04000)L _{0.75252} R _{0.62990} (0.00896,0.01941,0.02176,0.04000)L _{0.75252} R _{0.62990}	0.021865
	C_Cer	(0.01037,0.02015,0.02174,0.04465)L _{0.72369} R _{0.52850} (0.01037,0.02015,0.02174,0.04465)L _{0.72369} R _{0.52850}	0.022852

Continúa

Activo	Liquidez		
	$\xi_{i_t} = (a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t}, d_{i_t}) \pi_{i_t} p_{i_t}$	Valor medio crisp creditibilístico	
Chile	C_Emb	(0,00616,0,01341,0,01503,0,03519)L _{0,66294} R _{0,49792} (0,00616,0,01341,0,01503,0,03519)L _{0,66294} R _{0,49792}	0.016127
	C_Ena	(0,02985,0,06152,0,06677,0,10544)L _{0,67812} R _{0,46247} (0,02985,0,06152,0,06677,0,10544)L _{0,67812} R _{0,46247}	0.063858
	C_Enl	(0,03178,0,05100,0,05501,0,08903)L _{0,77053} R _{0,46766} (0,03178,0,05100,0,05501,0,08903)L _{0,77053} R _{0,46766}	0.054244
	C_Fal	(0,03699,0,06187,0,06616,0,12382)L _{0,61600} R _{0,40776} (0,03699,0,06187,0,06616,0,12382)L _{0,61600} R _{0,40776}	0.067624

Fuente: elaboración propia a partir de información de Ecomatematica® .

Tabla 8.7. Liquidez difusa esperada (período III)

Activo	Liquidez		
	$\xi_{li} = (a_{li}, b_{li}, c_{li}, d_{li}, \pi_{li}, \rho_{li})$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
Colombia	C_Dav	(0.01718, 0.02842, 0.03097, 0.06911) $L_{0.65830} R_{0.42059}$ (0.01718, 0.02842, 0.03097, 0.06911) $L_{0.65830} R_{0.42059}$	0.033112
	M_Alf	(0.02843, 0.03967, 0.04163, 0.06486) $L_{0.63198} R_{0.42589}$ (0.02843, 0.03967, 0.04163, 0.06486) $L_{0.63198} R_{0.42589}$	0.041944
México	M_Als	(0.00444, 0.01450, 0.01582, 0.03207) $L_{0.62593} R_{0.38400}$ (0.00444, 0.01450, 0.01582, 0.03207) $L_{0.62593} R_{0.38400}$	0.015477
	M_Arc	(0.01065, 0.01797, 0.01921, 0.02648) $L_{0.58674} R_{0.69850}$ (0.01065, 0.01797, 0.01921, 0.02648) $L_{0.58674} R_{0.69850}$	0.018735
	M_Sur	(0.00690, 0.01330, 0.01619, 0.02694) $L_{0.89778} R_{0.74756}$ (0.00690, 0.01330, 0.01619, 0.02694) $L_{0.89778} R_{0.74756}$	0.015531
	M_Bim	(0.01208, 0.01730, 0.01853, 0.02817) $L_{0.58796} R_{0.50187}$ (0.01208, 0.01730, 0.01853, 0.02817) $L_{0.58796} R_{0.50187}$	0.018559
	M_Bmv	(0.00493, 0.00939, 0.01004, 0.01749) $L_{0.77516} R_{0.56510}$ (0.00493, 0.00939, 0.01004, 0.01749) $L_{0.77516} R_{0.56510}$	0.010085

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_{h_i} = (a_{1i}, b_{1i}, c_{1i}, d_{1i})_{\pi_{1i}, \rho_{1i}}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Cem	(0.04549,0.06461,0.06697,0.09701) _{L₀,61518} R ₀ ,53372	0.067374
M_Fem	(0.02753,0.04033,0.04190,0.05506) _{L₀,68041} R ₀ ,60141	0.040994
M_Car	(0.00380,0.00675,0.00717,0.01218) _{L₀,52196} R ₀ ,48177	0.007269
M_Gen	(0.00835,0.01799,0.01896,0.02965) _{L₀,48613} R ₀ ,54731	0.018790
M_Ban	(0.04234,0.06100,0.06456,0.09996) _{L₀,65305} R ₀ ,52956	0.065222
M_Mex	(0.04033,0.05604,0.05912,0.08711) _{L₀,64124} R ₀ ,45159	0.058865
M_Aer	(0.00698,0.01459,0.01610,0.02819) _{L₀,76884} R ₀ ,70414	0.016188
M_Gru	(0.00617,0.02262,0.02601,0.04936) _{L₀,96333} R ₀ ,46047	0.023958

México

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ π_i, ρ_i	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Kim	(0.01477,0.02486,0.02618,0.03883) $L_{0.59113} R_{0.49153}$ (0.01477,0.02486,0.02618,0.03883) $L_{0.59113} R_{0.49153}$	0.025731
M_Liv	(0.00485,0.00944,0.01034,0.02220) $L_{0.47980} R_{0.43124}$ (0.00485,0.00944,0.01034,0.02220) $L_{0.47980} R_{0.43124}$	0.010932
M_Ohl	(0.00606,0.01566,0.01717,0.04045) $L_{0.55511} R_{0.36738}$ (0.00606,0.01566,0.01717,0.04045) $L_{0.55511} R_{0.36738}$	0.017829
M_Tel	(0.02407,0.03452,0.03637,0.05142) $L_{0.69296} R_{0.57594}$ (0.02407,0.03452,0.03637,0.05142) $L_{0.69296} R_{0.57594}$	0.036057
C_Agu	(0.01374,0.02816,0.03170,0.05405) $L_{0.68360} R_{0.46910}$ (0.01374,0.02816,0.03170,0.05405) $L_{0.68360} R_{0.46910}$	0.030571
C_Bch	(0.02292,0.04234,0.04665,0.08188) $L_{0.68663} R_{0.45949}$ (0.02292,0.04234,0.04665,0.08188) $L_{0.68663} R_{0.45949}$	0.046086
C_Bci	(0.01067,0.01953,0.02114,0.03973) $L_{0.73435} R_{0.43927}$ (0.01067,0.01953,0.02114,0.03973) $L_{0.73435} R_{0.43927}$	0.021297
C_Ita	(0.01067,0.02720,0.03084,0.06782) $L_{0.67528} R_{0.52241}$ (0.01067,0.02720,0.03084,0.06782) $L_{0.67528} R_{0.52241}$	0.032035

Continúa

Activo	Liquidez		
	$\xi_{i,1} = (a_{i,1}, b_{i,1}, c_{i,1}, d_{i,1})_{\pi_{i,1}, \rho_{i,1}}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico	
Chile	C_San	(0,02150,0,04075,0,04451,0,07230) L _{0,65872} R _{0,56269} (0,02150,0,04075,0,04451,0,07230) L _{0,65872} R _{0,56269}	0,043809
	C_Cer	(0,01161,0,02167,0,02424,0,05419) L _{0,70742} R _{0,45560} (0,01161,0,02167,0,02424,0,05419) L _{0,70742} R _{0,45560}	0,025558
	C_Enl	(0,02578,0,04943,0,05322,0,08894) L _{0,70011} R _{0,50172} (0,02578,0,04943,0,05322,0,08894) L _{0,70011} R _{0,50172}	0,052424
	C_Fal	(0,03706,0,06218,0,06728,0,13703) L _{0,57127} R _{0,38929} (0,03706,0,06218,0,06728,0,13703) L _{0,57127} R _{0,38929}	0,069937
	C_Smc	(0,00381,0,00381,0,00844,0,01996) L _{0,92162} R _{0,40015} (0,00381,0,00381,0,00844,0,01996) L _{0,92162} R _{0,40015}	0,008753

Fuente: elaboración propia a partir de información de Economatica®.

Tabla 8.8. Liquidez difusa esperada (cartera IV)

Activo	Liquidez			
	$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$	π_i, ρ_i		
Colombia	C_Dav	$(0.01710, 0.02908, 0.03125, 0.06911) L_{0.66463} R_{0.40590}$ $(0.01710, 0.02908, 0.03125, 0.06911) L_{0.66463} R_{0.40590}$	0.033237	
	M_Als	$(0.00859, 0.01509, 0.01648, 0.03231) L_{0.81464} R_{0.40763}$ $(0.00859, 0.01509, 0.01648, 0.03231) L_{0.81464} R_{0.40763}$	0.016619	
México	M_Arc	$(0.01159, 0.01882, 0.02034, 0.03212) L_{0.58552} R_{0.41527}$ $(0.01159, 0.01882, 0.02034, 0.03212) L_{0.58552} R_{0.41527}$	0.019975	
	M_Sur	$(0.00732, 0.01555, 0.01833, 0.01833) L_{1.12772} R_{0.67913}$ $(0.00732, 0.01555, 0.01833, 0.01833) L_{1.12772} R_{0.67913}$	0.016606	
	M_Bim	$(0.01223, 0.01730, 0.01850, 0.03057) L_{0.61864} R_{0.47140}$ $(0.01223, 0.01730, 0.01850, 0.03057) L_{0.61864} R_{0.47140}$	0.018864	
	M_Bmv	$(0.00493, 0.00912, 0.00982, 0.01749) L_{0.01749} R_{0.53982}$ $(0.00493, 0.00912, 0.00982, 0.01749) L_{0.01749} R_{0.53982}$	0.009798	
	M_Cem		$(0.04710, 0.06529, 0.06874, 0.09701) L_{0.66144} R_{0.47919}$ $(0.04710, 0.06529, 0.06874, 0.09701) L_{0.66144} R_{0.47919}$	0.067966

Continúa

Activo	Liquidez	
	$\xi_{li} = (a_{li}, b_{li}, c_{li}, d_{li}) \pi_{li}, \rho_{li}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
M_Ele	(0.00475,0.01090,0.01185,0.02066)L _{0.71767} R _{0.48942} (0.00475,0.01090,0.01185,0.02066)L _{0.71767} R _{0.48942}	0.011535
M_Fem	(0.03044,0.04115,0.04216,0.06049)L _{0.90206} R _{0.47753} (0.03044,0.04115,0.04216,0.06049)L _{0.90206} R _{0.47753}	0.042076
M_Car	(0.00458,0.00695,0.00741,0.01643)L _{0.59427} R _{0.35113} (0.00458,0.00695,0.00741,0.01643)L _{0.59427} R _{0.35113}	0.007909
M_Gen	(0.01166,0.01800,0.01898,0.02960)L _{0.62752} R _{0.54685} (0.01166,0.01800,0.01898,0.02960)L _{0.62752} R _{0.54685}	0.019148
M_Ban	(0.04579,0.06181,0.06560,0.09827)L _{0.74706} R _{0.52030} (0.04579,0.06181,0.06560,0.09827)L _{0.74706} R _{0.52030}	0.065870
M_Mex	(0.04052,0.05699,0.05980,0.08622)L _{0.56339} R _{0.46017} (0.04052,0.05699,0.05980,0.08622)L _{0.56339} R _{0.46017}	0.059590
M_Aer	(0.00859,0.01596,0.01753,0.03040)L _{0.73022} R _{0.58701} (0.00859,0.01596,0.01753,0.03040)L _{0.73022} R _{0.58701}	0.017571
M_Gru	(0.00956,0.02635,0.02881,0.04936)L _{0.95289} R _{0.55906} (0.00956,0.02635,0.02881,0.04936)L _{0.95289} R _{0.55906}	0.027165

México

Continúa

Activo		Liquidez	
		$\xi_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$	π_i, ρ_i
México	M_Kim	(0.01676,0.02529,0.02644,0.03883) (0.01676,0.02529,0.02644,0.03883)	$L_{0.62081}R_{0.51898}$ $L_{0.62081}R_{0.51898}$
	M_Tel	(0.02187,0.03401,0.03578,0.05142) (0.02187,0.03401,0.03578,0.05142)	$L_{0.66943}R_{0.56224}$ $L_{0.66943}R_{0.56224}$
	C_Agu	(0.01548,0.03034,0.03275,0.05442) (0.01548,0.03034,0.03275,0.05442)	$L_{0.70776}R_{0.50281}$ $L_{0.70776}R_{0.50281}$
	C_Bch	(0.02633,0.04343,0.04674,0.08188) (0.02633,0.04343,0.04674,0.08188)	$L_{0.72701}R_{0.45651}$ $L_{0.72701}R_{0.45651}$
	C_Bci	(0.01173,0.02082,0.02201,0.03983) (0.01173,0.02082,0.02201,0.03983)	$L_{0.69715}R_{0.48924}$ $L_{0.69715}R_{0.48924}$
	C_Ira	(0.01245,0.03003,0.03408,0.06782) (0.01245,0.03003,0.03408,0.06782)	$L_{0.68234}R_{0.43185}$ $L_{0.68234}R_{0.43185}$
	C_San	(0.02363,0.03998,0.04328,0.07230) (0.02363,0.03998,0.04328,0.07230)	$L_{0.70519}R_{0.51107}$ $L_{0.70519}R_{0.51107}$
	C_Cer	(0.01161,0.02256,0.02478,0.05419) (0.01161,0.02256,0.02478,0.05419)	$L_{0.60781}R_{0.45019}$ $L_{0.60781}R_{0.45019}$

Continúa

Activo		Liquidez	
		$\xi_{i_t} = (a_{i_t}, b_{i_t}, c_{i_t}, d_{i_t}) \pi_{i_t} \rho_{i_t}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Chile	C_Ena	(0.034443,0.06402,0.06777,0.09949)L _{0.66878} R _{0.50353} (0.034443,0.06402,0.06777,0.09949)L _{0.66878} R _{0.50353}	0.065276
	C_Enl	(0.02258,0.04696,0.05235,0.08714)L _{0.71484} R _{0.50060} (0.02258,0.04696,0.05235,0.08714)L _{0.71484} R _{0.50060}	0.050379
	C_Rip	(0.00278,0.00819,0.00930,0.02740)L _{0.82926} R _{0.40100} (0.00278,0.00819,0.00930,0.02740)L _{0.82926} R _{0.40100}	0.010112
	C_Smc	(0.00375,0.00727,0.00803,0.01822)L _{1.00673} R _{0.35557} (0.00375,0.00727,0.00803,0.01822)L _{1.00673} R _{0.35557}	0.008106

Fuente: elaboración propia a partir de información de Economatica®.

8.4.1 Cartera I

Número de activos: 29, es decir, $i = 1, 2, \dots, 29$.

$$\begin{aligned} \text{Max } F_1(\omega_i) = & -0.000597\omega_1 - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 \\ & + 0.007611\omega_5 + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 \\ & - 0.000917\omega_9 + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } F_2(\omega_i) = & E[-0.000597\omega_1 - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 \\ & + 0.007611\omega_5 + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 \\ & - 0.000917\omega_9 + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29}]^2, \\ & -E[-0.000597\omega_1 - 0.002076\omega_2 - 0.000703\omega_3 + 0.000740\omega_4 \\ & + 0.007611\omega_5 + 0.001791\omega_6 + 0.004403\omega_7 + 0.003348\omega_8 \\ & - 0.000917\omega_9 + 0.000806\omega_{10}, \dots, -0.000270\omega_{29}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } F_3(\omega_i) = & 0.030722\omega_1 + 0.092907\omega_2 + 0.018482\omega_3 + 0.037472\omega_4 \\ & + 0.011686\omega_5 + 0.016395\omega_6 + 0.011421\omega_7 + 0.016319\omega_8 \\ & + 0.009491\omega_9 + 0.060546\omega_{10}, \dots, +0.009100\omega_{29} \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{29} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$\omega_i - 0.3 \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$\omega_i - 0.0 \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{29} = 10$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 29,$$

8.4.2 Cartera II

Número de activos: 35, esto es, $i = 1, 2, \dots, 35$.

$$\begin{aligned} \text{Max } F_1(\omega_i) = & 0.000890\omega_1 - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 \\ & + 0.002741\omega_5 + 0.004755\omega_6 + 0.003751\omega_7 + 0.000461\omega_8 \\ & + 0.004309\omega_9 + 0.001611\omega_{10}, \dots, +0.001149\omega_{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } F_2(\omega_i) = & E[0.000890\omega_1 - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 \\ & + 0.002741\omega_5 + 0.004755\omega_6 + 0.003751\omega_7 + 0.000461\omega_8 \\ & + 0.004309\omega_9 + 0.001611\omega_{10}, \dots, +0.001149\omega_{35}] \\ & - E[0.000890\omega_1 - 0.000546\omega_2 + 0.000662\omega_3 + 0.007249\omega_4 \end{aligned}$$

$$+0.002741\omega_5+0.004755\omega_6+0.003751\omega_7+0.000461\omega_8 \\ +0.004309\omega_9+0.001611\omega_{10'} \dots +0.001149\omega_{35}]^2,$$

Sujeto a

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_9+\omega_{10'} \dots, \omega_{35}=1, \\ \omega_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,35, \\ \omega_i-0.3 \quad y_i \leq 0, \quad i=1,2,\dots,35, \\ \omega_i-0.0 \quad y_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,35, \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10'} \dots, y_{35}=10, \\ y_i \in \{0,1\}, \quad i=1,2,\dots,35,$$

8.4.3 Cartera III

Número de activos: 28, es decir, $i = 1, 2, \dots, 28$.

$$\text{Max } F_1(\omega_i)=0.000494\omega_1-0.001228\omega_2+0.005775\omega_3+0.001027\omega_4 \\ +0.004030\omega_5+0.001424\omega_6+0.000229\omega_7+0.004348\omega_8 \\ -0.000093\omega_9+0.002481\omega_{10'} \dots,+0.000970\omega_{28'}$$

$$\text{Min } F_2(\omega_i)=E[[0.000494\omega_1-0.001228\omega_2+0.005775\omega_3+0.001027\omega_4 \\ +0.004030\omega_5+0.001424\omega_6+0.000229\omega_7+0.004348\omega_8 \\ -0.000093\omega_9+0.002481\omega_{10'} \dots,+0.001149\omega_{35} \\ -E[0.000494\omega_1-0.001228\omega_2+0.005775\omega_3+0.001027\omega_4 \\ +0.004030\omega_5+0.001424\omega_6+0.000229\omega_7 \\ +0.004348\omega_8-0.000093\omega_9+0.002481\omega_{10'} \\ \dots,+0.000970\omega_{28'}]^2]$$

$$\text{Max } F_3(\omega_i)=0.033112\omega_1+0.041944\omega_2+0.015477\omega_3+0.018735\omega_4 \\ +0.015531\omega_5+0.018559\omega_6+0.010085\omega_7+0.067374\omega_8 \\ +0.040994\omega_9+0.007269\omega_{10'} \dots,+0.008753\omega_{28'}$$

Sujeto a

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5+\omega_6+\omega_7+\omega_8+\omega_9+\omega_{10'} \dots, \omega_{28}=1, \\ \omega_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, 28, \\ \omega_i-0.3 \quad y_i \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, 28, \\ \omega_i-0.0 \quad y_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, 28, \\ y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10'} \dots, y_{28}=10, \\ y_i \in \{0,1\}, \quad i=1, 2, \dots, 28,$$

8.4.4 Cartera IV

Número de activos: 27, esto es, $i = 1, 2, \dots, 27$.

$$\begin{aligned} \text{Max } F_1(\omega_i) = & 0.000784\omega_1 + 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 + 0.003605\omega_4 \\ & + 0.001527\omega_5 - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 + 0.000542\omega_8 \\ & + 0.000925\omega_9 + 0.001251\omega_{10}, \dots, + 0.001426\omega_{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Min } F_2(\omega_i) = & E[[0.000784\omega_1 - 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 + 0.003605\omega_4 \\ & + 0.001527\omega_5 - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 + 0.000542\omega_8 \\ & + 0.000925\omega_9 + 0.001251\omega_{10}, \dots, + 0.001426\omega_{35} \\ & - E[0.000784\omega_1 + 0.004533\omega_2 + 0.001233\omega_3 \\ & + 0.003605\omega_4 + 0.001527\omega_5 - 0.000347\omega_6 + 0.002818\omega_7 \\ & + 0.000542\omega_8 + 0.000925\omega_9 + 0.001251\omega_{10} \\ & \dots, + 0.001426\omega_{27}]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } F_3(\omega_i) = & 0.033237\omega_1 + 0.016619\omega_2 + 0.019975\omega_3 + 0.016606\omega_4 \\ & + 0.018864\omega_5 + 0.009798\omega_6 + 0.067966\omega_7 + 0.011535\omega_8 \\ & + 0.042076\omega_9 + 0.007909\omega_{10}, \dots, + 0.008106\omega_{27} \end{aligned}$$

Sujeto a

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 + \omega_9 + \omega_{10}, \dots, \omega_{27} = 1,$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

$$\omega_i - 0.3 \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27$$

$$\omega_i - 0.0 \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10}, \dots, y_{27} = 10,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 27,$$

Los cuatro anteriores modelos credibilísticos multiobjetivo para la selección de las carteras óptimas se resuelven aplicando el algoritmo NSGAII vía uso de lenguaje R (<http://www.r-project.org/>).

8.4.5 Fronteras óptimas de Pareto

La figura 8.2 muestra una representación tridimensional de los cuatro frentes óptimos de Pareto (o fronteras eficientes) generados en una única ejecución del algoritmo NSGAII para los cuatro modelos previamente formulados. El grupo de puntos representa el conjunto de soluciones

no-dominadas (o carteras eficientes) para las cuales las funciones objetivo de rentabilidad-riesgo-liquidez no pueden ser mejoradas simultáneamente por ninguna otra solución. Nótese que estas carteras eficientes están ampliamente distribuidas en el espacio de soluciones, lo cual le proporciona al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs* (o mejores compromisos) entre los tres criterios seleccionados.

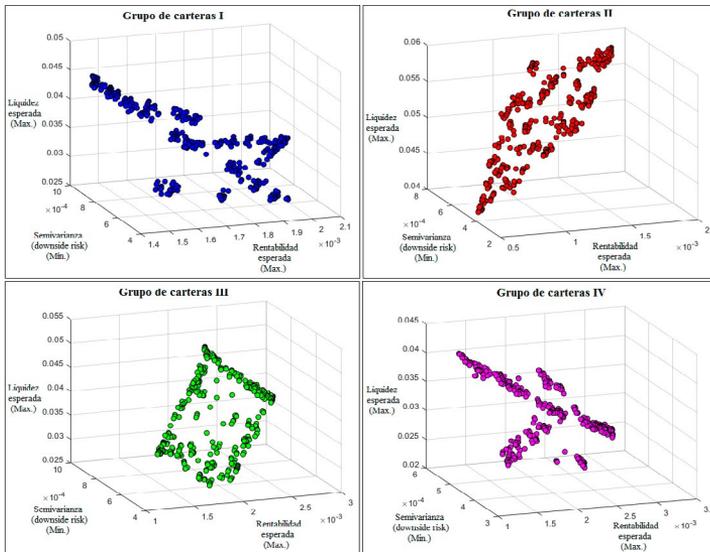


Figura 8.2. Fronteras óptimas de Pareto del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV).

Fuente: elaboración propia.

Análogamente, para esta misma ejecución del algoritmo NSGAI, cada par de funciones han sido representadas en gráficos bidimensionales en las figuras 8.3 a 8.5, las cuales muestran los valores de las funciones objetivo correspondientes a todas las soluciones generadas por el algoritmo propuesto. Cabe señalar que, al visualizar la cobertura biobjetivo del frente óptimo de Pareto, se percibe que todas las carteras reportan buenos resultados, es decir, la población se distribuye de manera razonablemente uniforme sobre el frente.

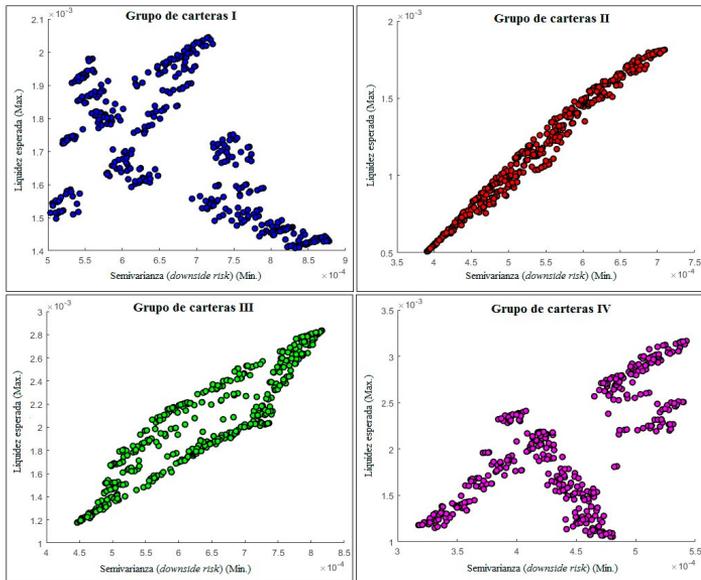


Figura 8.3. *Downside risk* y rentabilidad esperados correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV).

Fuente: elaboración propia.

Es conveniente estudiar qué tipo de soluciones se han obtenido por causa de la introducción de la liquidez como criterio de decisión. En ese orden de ideas, el grupo de soluciones de las carteras I y IV de la figura 8.3 permite contextualizar y distinguir claramente dos subconjuntos diferentes de carteras de soluciones no-dominadas. Nótese que en el grupo I, los inversores con menor aversión al riesgo obtienen carteras no-dominadas con mayor rendimiento esperado, pero el comportamiento de este subconjunto del frente óptimo de Pareto es claramente un poco más disperso que los asociados con carteras para inversores conservadores o agresivos. Por su parte, las soluciones de las carteras II y III se ubican en un solo grupo de soluciones no-dominadas y muestran un comportamiento más acorde a la relación positiva que se presenta entre el riesgo y la rentabilidad (*i.e.* a mayor riesgo, mayor rentabilidad).

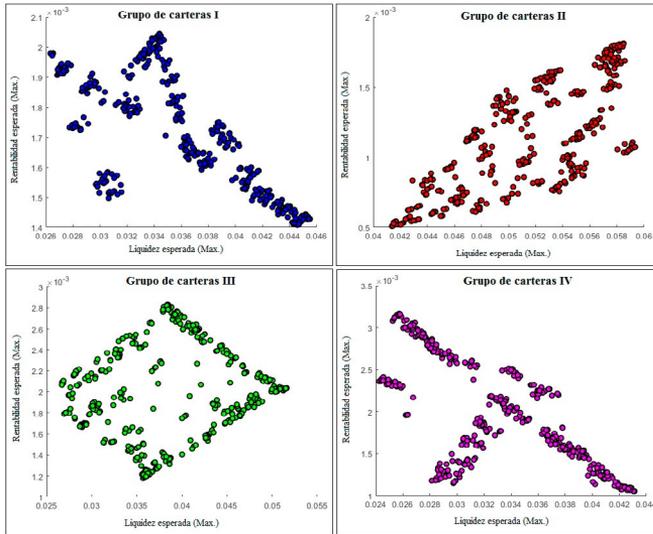


Figura 8.4. Liquidez y rentabilidad esperadas correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV).
Fuente: elaboración propia.

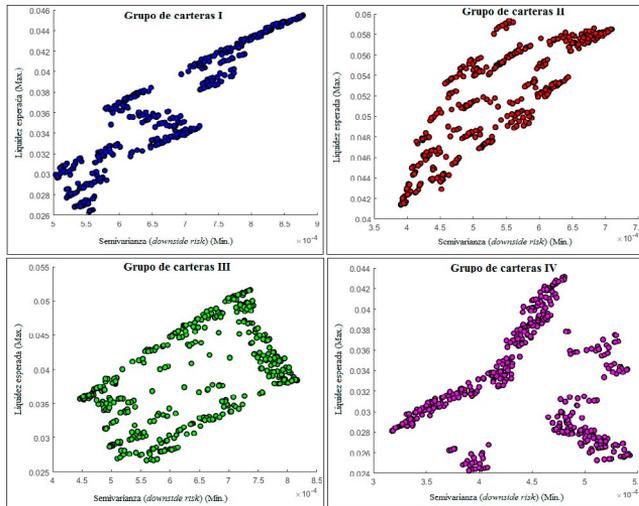


Figura 8.5. Downside risk y liquidez esperados correspondientes al modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez (carteras I-IV).
Fuente: elaboración propia.

El grupo de soluciones de las carteras I y IV de la figura 8.4 muestra que las carteras no-dominadas que tienen valores de liquidez más bajos logran valores de rentabilidad más altos, lo cual es coherente con las estrategias de liquidez que se adoptan en las decisiones de cartera, ya que cuanto más difícil resulte para un inversionista convertir la cartera que posee en efectivo, mayor será la rentabilidad que le exija a esta. No obstante, este mismo comportamiento no se presenta con el grupo de soluciones de las carteras eficientes II y III, las cuales muestran resultados totalmente diferentes a los anteriormente mencionados. Para finalizar este apartado, el grupo de soluciones no-dominadas de las carteras I a IV de la figura 8.5 muestra que algunas carteras de este tipo que tienen valores de riesgo *downside* más bajos y que logran, de igual modo, valores más bajos de liquidez. Sin embargo, este resultado difiere de la relación negativa que se presenta entre el riesgo y la liquidez; es decir, a menor riesgo, mayor liquidez. La causa de los resultados anteriores y de los presentados con algunas carteras eficientes en el binomio liquidez-rentabilidad obedece a que el modelo es un problema de toma de decisiones que implica la optimización simultánea de tres objetivos en conflicto y, por lo tanto, la mejora de un objetivo conllevará al deterioro de otro/s.

8.4.6 Selección de las carteras óptimas

En cualquier situación de inversión práctica, un inversionista necesita seleccionar la cartera óptima para fines de inversión. En correspondencia con la afirmación anterior, la cartera óptima se determina utilizando la noción del ratio de Sortino, que mide la prima de rentabilidad por unidad de riesgo soportado de una cartera dada.

La tabla 8.9 presenta los parámetros que definen la función de pertenencia de la rentabilidad objetivo difusa de tipo L-R y su respectivo valor esperado para las carteras I, II, III y IV.

Una vez definidos los valores medios *crisp* credibilísticos de la rentabilidad objetivo, se procede a determinar las carteras óptimas vía análisis de dos elementos básicos que las integran; esto es, la rentabilidad y el riesgo. Al maximizar el ratio credibilístico de Sortino, se maximiza también la rentabilidad ajustada al riesgo de la cartera y se obtienen los pesos de inversión óptimos de una cartera de diez acciones (ver figura 8.6). Obsérvese que los

Tabla 8.9. Rentabilidad objetivo difusa esperada (carteras I-IV)

Cartera	Tasa de madurez constante de 6 meses de los bonos americanos	
	$\xi_{Rf} = (a_{Rf}, b_{Rf}, c_{Rf}, d_{Rf})_{\pi_{Rf}, \rho_{Rf}}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Cartera I	$(0.00040, 0.00080, 0.00090, 0.00277)_{L_{1.00000}, R_{0.44913}}$ $(0.00040, 0.00080, 0.00090, 0.00277)_{L_{1.00000}, R_{0.44913}}$	0.001040
Cartera II	$(0.00050, 0.00090, 0.00110, 0.00470)_{L_{0.99641}, R_{0.27891}}$	0.001293
Cartera III	$(0.00050, 0.00100, 0.00120, 0.00509)_{L_{1.35692}, R_{0.59988}}$	0.001685
Cartera IV	$(0.00050, 0.00100, 0.00120, 0.01020)_{L_{1.35692}, R_{0.67060}}$	0.002762

Fuente: elaboración propia a partir de información estadística de la *Federal Reserve Bank of St. Louis*.

pesos óptimos de las carteras seleccionadas muestran una mayor proporción de inversión en el mercado accionario mexicano: cartera I [México: 60.85 % - Chile: 39.15 %], Cartera II [México: 69.30 % - Chile: 30.70 %], cartera III [México: 84.77 % - Chile: 15.23 %] y cartera IV [México: 74.87 % - Chile: 25.13 %].

Por su parte, la tabla 8.10 y la figura 8.7 presentan los retornos difusos esperados de las carteras óptimas I a IV y sus respectivas funciones de pertenencia. Como se puede apreciar, existe una desigualdad en las amplitudes izquierda y derecha de estos números difusos de tipo L-R; es decir, $(b-a) \neq (d-c)$, lo cual evidencia la asimetría existente en las funciones de pertenencia de los 10 activos que conforman cada una de las carteras óptimas y, por lo tanto, la elección de la medida de riesgo *downside*, esto es, que la semivarianza fue la decisión más apropiada para medir el riesgo de la cartera.

La figura 8.8 muestra las distribuciones de credibilidad del retorno difuso esperado de las carteras óptimas. Haciendo uso de la medida de credibilidad se puede determinar el nivel de ocurrencia de esta rentabilidad en un evento dado. A partir del teorema de inversión de credibilidad, la medida de credibilidad de una variable difusa de tipo L-R L-R $[\xi = (a, b, c, d)_{(\pi, \rho)}]$ es (ver sección 4.3.4.1):

$$Cr\{\xi \leq x\} = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \leq a, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^\pi \right), & \text{Si } a < x < b, \\ \frac{1}{2}, & \text{Si } b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^\rho \right), & \text{Si } c < x < d, \\ 1, & \text{Si } d \leq x. \end{cases} \quad 4.9$$

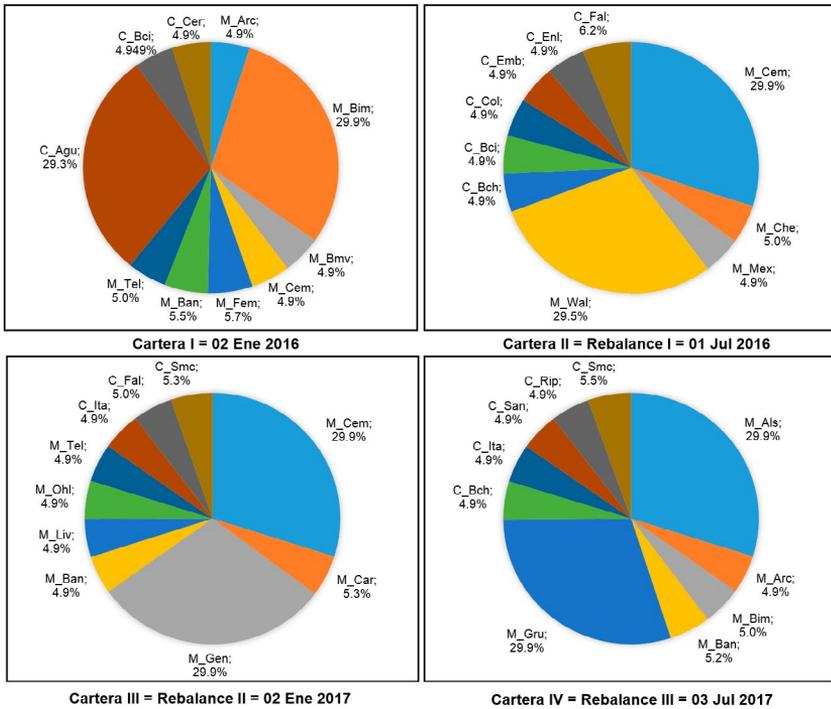


Figura 8.6. Asignación óptima de los activos de las carteras I-IV.
Fuente: elaboración propia.

Tabla 8.10. Rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV)

Cartera	Rentabilidad esperada	
	$\xi_{r_D} = (a_{r_D}, b_{r_D}, c_{r_D}, d_{r_D}) \pi_{r_D} \rho_{r_D}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Cartera I	$(-0.06614, -0.00260, 0.00450, 0.07577) L_{0.54269} R_{0.51432}$ $(-0.06614, -0.00260, 0.00450, 0.07577) L_{0.54269} R_{0.51432}$	0.001879
Cartera II	$(-0.07540, -0.00302, 0.00502, 0.08160) L_{0.54111} R_{0.54992}$	0.001877
Cartera III	$(-0.08014, -0.00202, 0.00656, 0.08786) L_{0.54263} R_{0.54860}$	0.002933
Cartera IV	$(-0.06328, -0.00186, 0.00568, 0.07593) L_{0.55015} R_{0.51942}$	0.003018

Fuente: elaboración propia.

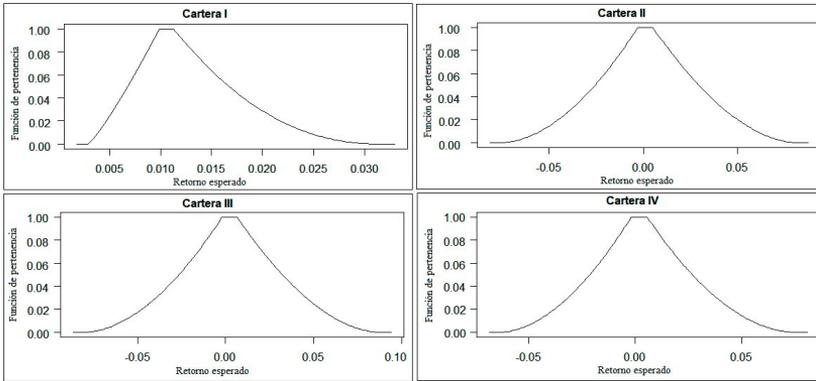


Figura 8.7. Funciones de pertenencia rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV).

Fuente: elaboración propia.

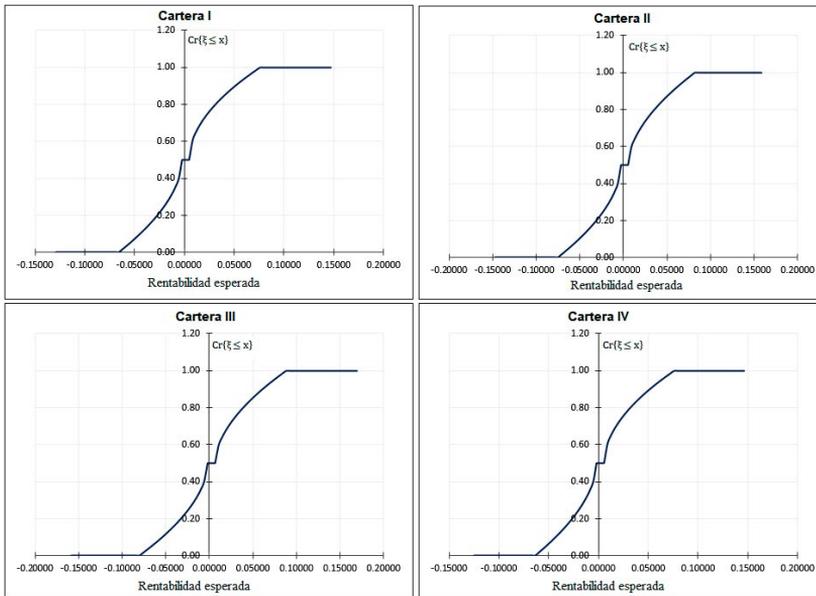


Figura 8.8. Distribuciones de credibilidad rentabilidad difusa esperada (carteras I-IV).
Fuente: elaboración propia.

Para el retorno esperado de la cartera óptima I, en otras palabras, $\xi_{rp} = (-0.06614, -0.00260, 0.00450, 0.07577) L_{0.54269} R_{0.51432}$, y de acuerdo con la ecuación 4.9 se tiene que $Cr\{\xi \leq 0.001879\} = 0.5$, lo que significa que hay solo un 50 % de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea menor o igual que el rendimiento esperado, esto es, 0.001879. Dado que la medida de credibilidad tiene la propiedad de auto-dualidad, es decir, $Cr\{\xi \leq x\} + Cr\{\xi > x\} = 1$, cuando se conoce el valor de $Cr\{\xi \leq x\}$, es fácil conocer el valor de $Cr\{\xi > x\}$. En el marco de la observación anterior, se tiene que $Cr\{\xi > x\} = 1 - Cr\{\xi \leq 0.001879\} = 0.5$, lo cual indica que existe un 50 % de posibilidad de que el rendimiento de la cartera sea mayor al rendimiento esperado.

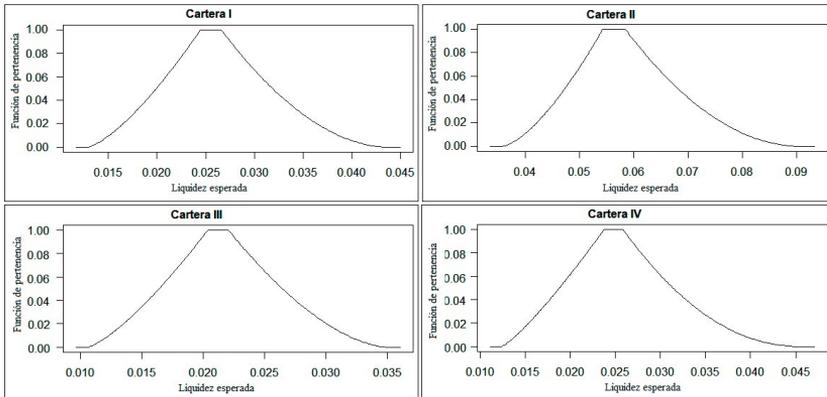


Figura 8.9. Funciones de pertenencia liquidez difusa esperada (carteras I-IV).
 Fuente: elaboración propia.

Tabla 8.11. Liquidez difusa esperada (carteras I-IV)

Cartera	Rentabilidad esperada	
	$\xi_{l_v} = (a_{l_v}, b_{l_v}, c_{l_v}, d_{l_v}) \pi_{l_v}, \rho_{l_v}$	Valor medio <i>crisp</i> credibilístico
Cartera I	$(0.01286, 0.02447, 0.02661, 0.04384) L_{0.71453} R_{0.52445}$ $(0.01286, 0.02447, 0.02661, 0.04384) L_{0.71453} R_{0.52445}$	0.026082
Cartera II	$(0.03568, 0.05428, 0.05844, 0.09122) L_{0.66121} R_{0.49489}$	0.058085
Cartera III	$(0.01056, 0.02037, 0.02204, 0.03512) L_{0.75103} R_{0.58917}$	0.021527
Cartera IV	$(0.01239, 0.02376, 0.02586, 0.04586) L_{0.82649} R_{0.46779}$	0.025422

Fuente: elaboración propia.

Análogamente, las figuras 8.9 y 8.10 y la tabla 8.11 presentan la liquidez difusa esperada de las carteras I, II, III y IV y sus respectivas funciones de pertenencia y distribuciones de credibilidad.

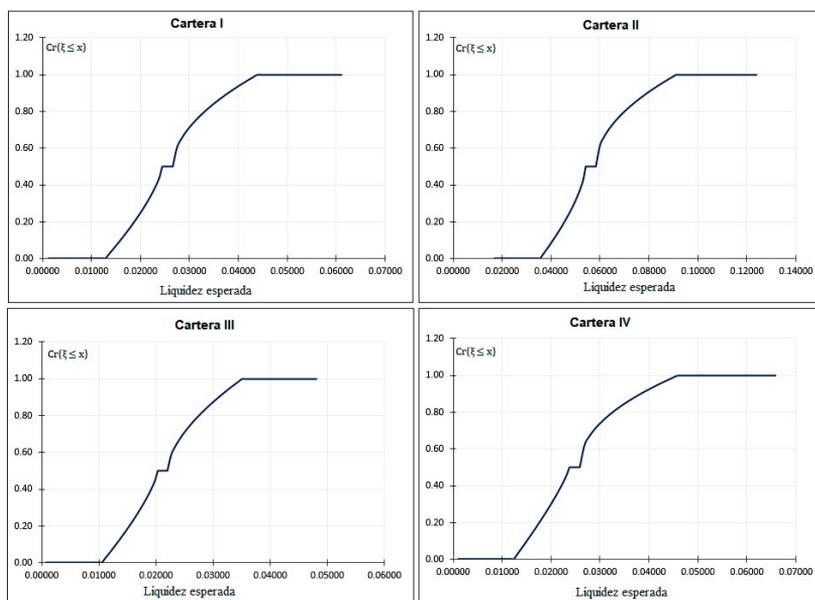


Figura 8.10. Distribuciones de credibilidad liquidez difusa esperada (carteras I-IV).
Fuente: elaboración propia.

8.4.7 Rebalanceo de carteras

Una vez seleccionadas las carteras óptimas del modelo *crisp* triobjetivo propuesto se procede a analizar la estrategia de rebalanceo planteada. En este orden de ideas, la figura 8.11 presenta la evolución de la estrategia de rebalanceo durante el periodo de enero de 2016 a octubre de 2017. Obsérvese que la estrategia de recomponer la cartera en cuatro ocasiones durante el periodo de tiempo considerado conlleva a obtener mejores resultados frente a los que se hubiesen tenido en una estrategia de no rebalanceo.

En virtud de un análisis en un escenario más práctico, es oportuno estudiar el comportamiento de la estrategia de rebalanceo resultante del modelo credibilístico propuesto y contrastarlo con el desempeño de una alternativa de inversión existente en el mercado. En la Bolsa de Valores de México

está listado actualmente el ETF MILA TRC, el cual se ha convertido en el principal vehículo de inversión de las Administradoras de Fondos de Pensiones de Chile y México.

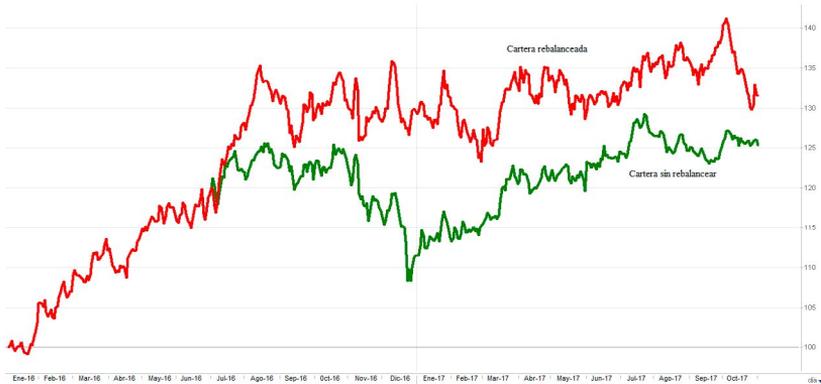


Figura 8.11. Tendencia del comportamiento de la cartera rebalancada frente a la cartera sin rebalancear, enero 2016-octubre 2017.

Fuente: Economatica®.

En atención a lo expuesto en el párrafo anterior, la figura 8.12 ilustra la tendencia del comportamiento de la cartera rebalancada frente al ETF MILATRC durante el periodo de marzo de 2016 a octubre de 2017. Llama la atención que, a pesar de que las dos tuvieron un desempeño muy diferente durante los 19 meses, ambas finalizan a octubre de 2017 con una rentabilidad final muy similar y cercana al 21 % en el periodo de tiempo indicado.

No obstante, al analizar el binomio VaR-rentabilidad (figura 8.13), se aprecia que el ETF MILATRC presenta un riesgo de mercado más alto (25,33 % anual) en comparación con el percibido para la cartera balanceada (22,34 % anual). Nótese que los resultados en cuanto a VaR-rentabilidad de la cartera rebalancada se ubican en medio de los presentados por la cartera sin rebalancear y el ETF MILATRC.

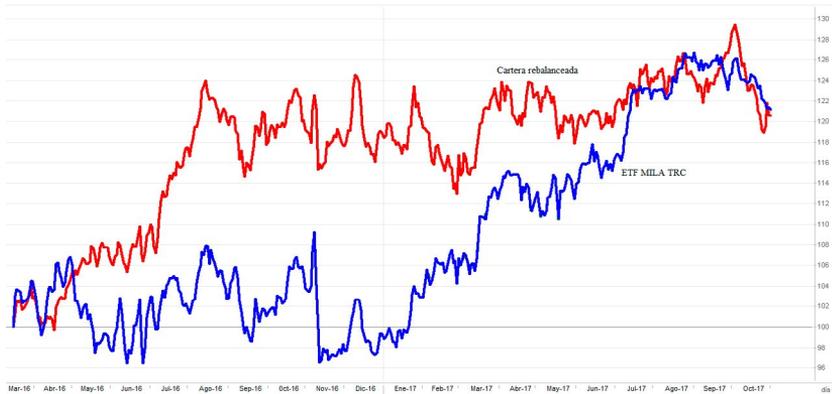


Figura 8.12. Tendencia del comportamiento de la cartera rebalanciada frente al ETF MILATRC, marzo 2016-octubre 2017.
Fuente: Economática®.

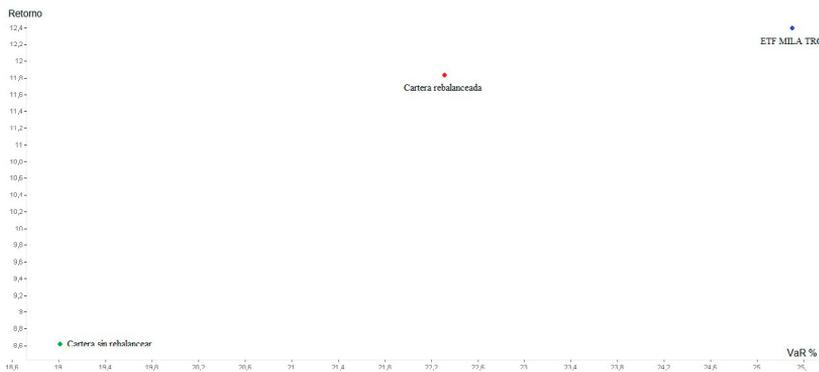


Figura 8.13. Dominancia carteras óptimas frente al ETF MILATRC, marzo 2016-octubre 2017.
Fuente: Economática®.

El Mercado Integrado Latinoamericano (MILA) es un acuerdo de integración en el cual los inversionistas de Chile, Colombia, México y Perú pueden adquirir títulos de renta variable de los cuatro países indicados. En el orden de la consideración anterior, la figura 8.14 analiza los resultados

que habría tenido un inversionista de esta región de América si hubiese invertido en la estrategia de rebalanceo resultante del modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez. Como puede observarse, el mejor resultado lo habría tenido el inversionista mexicano, seguido por el colombiano, el peruano y el chileno. Cabe agregar que los notables resultados del comportamiento del inversionista de México obedecen a que las carteras óptimas resultantes han tenido en promedio más del 60 % de participación en este país.

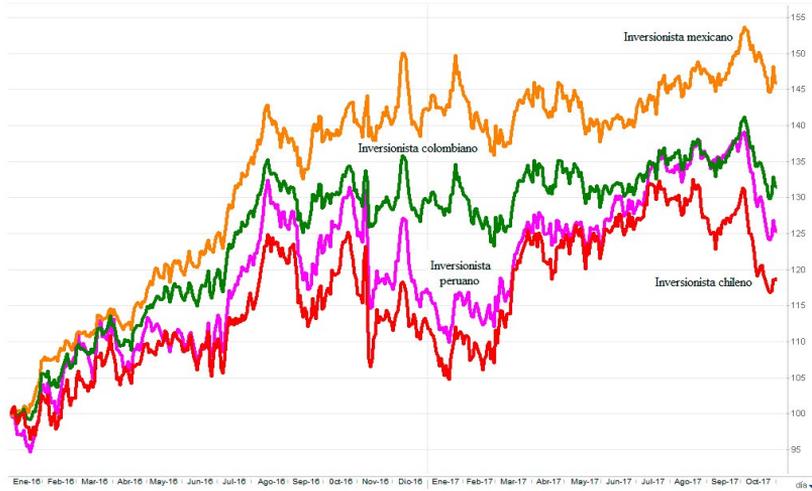


Figura 8.14. Efecto del tipo de cambio en la rentabilidad de la cartera rebalanceada para un inversionista de Chile, Colombia, México y Perú, enero 2016-octubre 2017.

Fuente: Economática®.

Finalmente, es de vital importancia señalar que el procedimiento propuesto en esta tesis doctoral puede emplearse para establecer una estrategia de inversión alternativa, ya que está diseñado para cuantificar la incertidumbre asociada al rendimiento y liquidez futuros de la inversión. En atención a lo anteriormente expuesto, se concluye que el modelo aquí desplegado le proporciona al tomador de decisiones una forma efectiva y factible de resolver el problema de selección de cartera.

Capítulo 9. Conclusiones y desarrollos futuros

Este último capítulo cierra esta tesis doctoral, y expone las principales conclusiones de la revisión de la literatura, la investigación empírica y las futuras líneas de profundización que, sustentadas en el modelo propuesto y desarrollado, se espera puedan surgir a partir de esta investigación.

9.1 Conclusiones de la revisión de la literatura

Tras lo expuesto en los capítulos 2, 3 y 4, esta sección presenta las conclusiones de la revisión de la literatura. No obstante, si bien cada capítulo incluye un numeral con las conclusiones referentes a cada uno, este apartado brinda un cierre general de cada uno de los capítulos indicados:

9.1.1 Optimización de carteras

Markowitz introdujo el marco de referencia de la optimización de cartera basado en un contexto bicriterio de retorno-riesgo (media-varianza), cuyos principios continúan siendo el núcleo de varios enfoques modernos para la asignación de activos, análisis de inversiones, gestión de riesgos, presupuestos de capital y toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre. No obstante, a medida que ha aumentado la vulnerabilidad en los entornos empresariales y financieros globalizados, el marco introducido por Markowitz ha mostrado que necesita actualizarse y, como consecuencia, se ha producido una creciente complejidad en los modelos que abordan el problema de selección de carteras, los cuales han incorporado nuevas medidas de riesgo (semivarianza, desviación absoluta, valor en riesgo VaR, valor en riesgo condicional CVaR, entre otras), y factores que permiten modelizar las preferencias del inversionista o de los mercados financieros (costo de transacciones, restricciones de cardinalidad, restricción de cotas mínima y máxima de participación de un activo en la cartera, entre otros).

9.1.2 MOEAs en optimización de carteras

La revisión de los artículos más relevantes de la aplicación de los algoritmos evolutivos multiobjetivo (MOEAs) en el problema de optimización de carteras, evidencia que las principales líneas de investigación en este campo de la industria financiera se han enfocado a: i) el desarrollo de modelos que, además de las formulaciones clásicas, incluyen características más realistas, indicadas en el párrafo anterior; ii) la adaptación del modo de trabajo de los MOEAs a estos nuevos modelos, al aprovechar su capacidad para producir un conjunto de soluciones no-dominadas en una sola ejecución, y tratar las formulaciones complejas de los problemas que aparecen en este ámbito de aplicación.

9.1.3 Teoría de la credibilidad

Debido a la información vaga y ambigua presente en los mercados financieros, la teoría de conjuntos difusos ha sido utilizada en el problema de selección de carteras para integrar información cualitativa y cuantitativa, las preferencias subjetivas de los inversionistas y el conocimiento experto. Bajo esta perspectiva, la medida de credibilidad, al ser una medida auto-dual y poseer la ventaja de consistencia con la ley de medio excluido y la ley de contradicción, ha jugado un papel fundamental para cuantificar la incertidumbre del rendimiento futuro de los activos financieros en los modelos de optimización de cartera bajo un entorno de decisión difusa.

9.2 Conclusiones de la investigación empírica

9.2.1 Caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica

El capítulo cinco expone los resultados de la caracterización de los mercados de capitales de Latinoamérica. Empero, si bien esta sección de la tesis presenta las conclusiones referentes a los resultados de este capítulo, este apartado propone la conclusión general del cumplimiento de este objetivo específico:

A partir de la década de los noventa, América Latina se vio embarcada en un proceso de globalización y liberalización financieras que implicó un dinamismo en sus mercados de capitales. No obstante, un análisis de la evolución de estos mercados durante el periodo 2000-2016 muestra que son pequeños, ilíquidos y concentrados, y los ubica como una réplica en menor escala de los mercados de capitales de los países desarrollados y de algunas economías emergentes. Dadas las condiciones que anteceden, se evidencia que las expectativas generadas por las reformas emprendidas por los gobiernos de estos países para incentivar el desarrollo doméstico de sus mercados de capitales no se han alcanzado como se esperaba.

Frente a la situación descrita, las futuras políticas de desarrollo del mercado de capitales de América Latina deben tener en cuenta no solo las características intrínsecas de las economías en vía de desarrollo (*i.e.* mercados pequeños e ilíquidos, falta de diversificación del riesgo, presencia de monedas débiles y prevalencia del riesgo sistemático), sino también la forma en que estas características limitan el alcance del desarrollo de mercados de capitales profundos.

9.2.2 Modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras

Esta tesis doctoral tuvo como fin optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad. Con el fin de cumplir con este propósito, se propuso un novedoso modelo difuso de optimización denominado “modelo credibilístico multiobjetivo de media-semivarianza-liquidez para la selección de carteras”. La incertidumbre de la liquidez y el rendimiento futuro de cada activo se modelaron por medio de números difusos L-R con funciones de referencia tipo potencia, donde sus funciones de pertenencia se obtuvieron a partir de los percentiles muestrales de sus rendimientos históricos y del índice de liquidez en bolsa, respectivamente. Con el objetivo de conseguir un modelo más realista se consideró la restricción de cardinalidad, que limita el número de activos que participan en las carteras y las restricciones de cotas superiores e inferiores que permiten combinaciones de activos que respetan las preferencias del inversor. La introducción de re-

stricciones realistas convirtió el modelo en un problema de programación cuadrática de enteros mixtos (*quadratic mixed-integer problem*) que fue resuelto aplicando el *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGAI).

La demostración de la efectividad y eficiencia del modelo en aplicaciones prácticas se realizó para un inversionista imaginario que asume la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que compone los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

Los resultados de los experimentos numéricos establecieron que el modelo propuesto proporciona conjuntos de carteras no-dominadas ampliamente distribuidas en el frente de Pareto, lo cual le proporciona al tomador de decisiones una imagen real de los *trade-offs* (o mejores compromisos) entre los tres criterios seleccionados. Además, al maximizar el índice de Sortino por primera vez en un entorno de credibilidad, se seleccionaron los pesos de inversión óptimos de una estrategia de rebalanceo correspondiente a cuatro carteras de diez acciones. En virtud de un análisis en un escenario más práctico, el desempeño de esta estrategia de rebalanceo fue contrastado con el comportamiento del ETF MILA TRC durante el periodo de marzo de 2016 a octubre de 2017, donde se aprecia que la cartera rebalanceada ofrece una mejor alternativa en cuanto a la rentabilidad y riesgo del mercado, medida por el VaR.

El procedimiento propuesto en esta tesis doctoral puede usarse para establecer una estrategia de inversión alternativa, ya que está diseñado para cuantificar la incertidumbre asociada a la liquidez y el rendimiento futuros de la inversión. En atención a lo anteriormente expuesto, se concluye que el modelo propuesto le proporciona al tomador de decisiones una forma efectiva y factible de resolver el problema de selección de cartera.

9.3 Futuras líneas de investigación

Esta tesis doctoral desarrolló un modelo de optimización empleando un método distintivo de medición del riesgo-retorno-liquidez, que puede proveerles a los inversionistas una información más completa y útil durante el proceso de toma de decisiones. Sin embargo, para cualquier línea

futura de investigación, hay algunos aspectos que no han logrado incluirse en el alcance de esta tesis doctoral, los cuales serían potencial tema de investigación en trabajos futuros.

- i. Técnica de estimación sofisticada de la rentabilidad y el riesgo:** esta investigación empleó una técnica de estimación novedosa de la rentabilidad y el riesgo para la selección de carteras, al combinar métodos financieros y la teoría de conjuntos difusos. No obstante, podría haber formas más efectivas para modelar el rendimiento futuro y evaluar el riesgo potencial en un entorno económico de alta incertidumbre y sujeto a continuos cambios.
- ii. Costos de transacción:** esta tesis consideró tres restricciones realistas (cardinalidad, cota mínima y cota máxima de participación de un activo en la cartera). Sin embargo, en los mercados financieros, la compra y venta de activos acarrear el pago de comisiones de corretaje e impuestos a los inversionistas. Por lo anterior, desde un punto de vista más práctico, el modelo de optimización de cartera podría extenderse incorporando, como restricción, los costos de transacción.
- iii. Optimización de carteras multiperiodo:** el problema de optimización multiobjetivo de esta investigación evalúa la rentabilidad-riesgo-liquidez de la cartera en un solo periodo de tiempo. No obstante, en las condiciones cambiantes del mercado, el marco de un solo periodo adolece de una estrategia miope cuando se aplica repetidamente en varios periodos posteriores, debido a que asume que la rentabilidad de un activo en cada periodo de inversión es independiente. En este orden de ideas, sería interesante ampliar el modelo a un problema de selección de carteras multiperiodo y de optimización dinámica.
- iv. Análisis de sensibilidad:** en futuros trabajos, se podría aplicar un análisis de sensibilidad para evaluar qué restricciones son más importantes, así como también, qu activos financieros influyen más en el impacto del desempeño global de la cartera.

Referencias

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1487–1503.
- Adjasi, C. K. D., & Biekpe, N. B. (2006). Stock Market Development and Economic Growth: The Case of Selected African Countries. *African Development Review*, 18(1), 144–161.
- Akian, M., Menaldi, J. L., & Sulem, A. (1996). On an Investment-Consumption Model with Transaction Costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(1), 329–364.
- Alonso, J. C., & Berggrun, L. (2015). *Introducción al análisis de riesgo financiero* (3.ª Ed.). Eco Ediciones.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2010). A Portfolio Optimization Model with three Objectives and Discrete Variables. *Computers & Operations Research*, 37(7), 1285–1297.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011a). Multiobjective Evolutionary Algorithms for Complex Portfolio Optimization Problems. *Computational Management Science*, 8(3), 259–279.
- Anagnostopoulos, K. P., & Mamanis, G. (2011b). The Mean-Variance Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem: An Experimental Evaluation of Five Multiobjective Evolutionary Algorithms. *Expert Systems with Applications*, 38 (11), 14208-14217
- Andriosopoulos, K., & Nomikos, N. (2014). Performance Replication of the Spot Energy Index with Optimal Equity Portfolio Selection: Evidence from the UK, US and Brazilian Markets. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 571–582.
- Arbeláez, M. A., Zuluaga, S., & Guerra, M. L. (2002). *El mercado de capitales colombiano en los noventa y las firmas comisionistas de bolsa*. Bogota: Alfaomega-Fedesarrollo.
- Arenas-Parra, M., Bilbao-Terol, A., & Rodríguez-Uría, M. V. (2001). A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection. *European Journal of Operational Research*, 133(2), 287–297.
- Armanianzas, R., & Lozano, J. A. (2015). A Multiobjective Approach to the Portfolio Optimization Problem. In *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (Vol. 2, pp. 1388–1395). Edinburgh, Scotland, UK: IEEE.

- Arnone, S., Loraschi, A., & Tettamanzi, A. (1993). *A Genetic Approach to Portfolio Selection*. *Neural Network World - International Journal on Neural and Mass - Parallel Computing and Information Systems*, 3(6), 597–604.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Arzac, E. R., & Bawa, V. S. (1977). *Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-First Investors*. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 277–288.
- Azmi, R. (2013). *Investment Portfolio Selection Using Goal Programming: An Approach to Making Investment Decisions*. Newcastle: Cambridge Scholars Publishing.
- Azmi, R., & Tamiz, M. (2010). *A Review of Goal Programming for Portfolio Selection*. In Jones D., Tamiz M., & Ries J. (Eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* (pp. 15–33). Berlin/Heidelberg: Springer.
- Babaei, S., Sepehri, M. M., & Babaei, E. (2015). *Multi-Objective Portfolio Optimization Considering the Dependence Structure of Asset Returns*. *European Journal of Operational Research*, 244(2), 525–539.
- Bäck, T., Fogel, D. B., & Michalewicz, Z. (1997). *Handbook of Evolutionary Computation*. Oxford: Oxford University Press.
- Bäck, T., & Schwefel, H. P. (1993). *An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization*. *Evolutionary Computation*, 1(1), 1–23.
- Bahadur, S., & Neupane, S. (2006). *Stock Market and Economic Development: a Causality Test*. *The Journal of Nepalese Business Studies*, 3(1), 36–44.
- Banco Central de la Reserva del Perú. (2017). *Estadísticas mercado de capitales. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 de: <http://www.bcrp.gob.pe/estadisticas/cuadros-de-la-nota-semanal.html>*
- Barak, S., Abessi, M., & Modarres, M. (2013). *Fuzzy Turnover Rate Chance Constraints Portfolio Model*. *European Journal of Operational Research*, 228(1), 141–147.
- Bawa, V. S. (1975). *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects*. *Journal of Financial Economics*, 2(1), 95–121.
- Bawa, V. S. (1976). *Admissible Portfolio for All Individuals*. *The Journal of Finance*, 31(4), 1169–1183.
- Bawa, V. S., & Lindenberg, E. B. (1977). *Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework*. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 189–200.
- Bencivenga, V. R., & Smith, B. D. (1991). *Financial Intermediation and Endogenous Growth*. *The Review of Economic Studies*, 58(2), 195.
- Bermúdez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2007). *Modelos borrosos de optimización para la selección de carteras basados en intervalos de medias*. En *Cuadernos del*

- CIMBAGE - XII Congreso Internacional de la Sociedad de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF) (p. 27–36 paginas). Bahía Blanca: (Argentina).
- Bermúdez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2012). A Multi-Objective Genetic Algorithm for Cardinality Constrained Fuzzy Portfolio Selection. *Fuzzy Sets and Systems*, 188(1), 16–26.
- Bermudez, J. D., Segura, J. V., & Vercher, E. (2007). A Fuzzy Ranking Strategy for Portfolio Selection Applied to the Spanish Stock Market. En 2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference (pp. 1–4). IEEE.
- Bermúdez, J. D., & Vercher, E. (2012). Selección de carteras mediante un algoritmo evolutivo con múltiples objetivos. En VIII Congreso Español sobre Metaheurística, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados (MAEB 2012) (pp. 383–389). Albacete (España).
- Bhalla, V. K. (2008). *Investment Management: Security Analysis and Portfolio Management* (19.º Ed.). New Delhi: Chand.
- Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015). Higher Order Comoments of Multifactor Models and Asset Allocation. *Finance Research Letters*, 13, 225–233.
- Branke, J., Scheckenbach, B., Stein, M., Deb, K., & Schmeck, H. (2009). Portfolio Optimization with an Envelope-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithm. *European Journal of Operational Research*, 199(3), 684–693.
- Brooks, C. (2002). *Introductory Econometrics for Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brown, D. B., & Smith, J. E. (2011). Dynamic Portfolio Optimization with Transaction Costs: Heuristics and Dual Bounds. *Management Science*, 57(10), 1752–1770.
- Cadena, X. (2004). *Los determinantes de la prima de riesgo país colombiana (Coyuntura Económica)*.
- Calvo, C., Ivorra, C., & Liern, V. (2015). Soft Computing Techniques for Portfolio Selection: Combining SRI with Mean-Variance Goals. In E. Ballesteros & A. Pérez-Gladish, B. García-Bernabeu (Eds.), *Socially Responsible Investment. International Series in Operations Research & Management Science*, vol. 219 (pp. 283–301).
- Calvo, C., Ivorra, C., & Liern, V. (2016). Fuzzy Portfolio Selection Including Cardinality Constraints and Integer Conditions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 170(1), 343–355.
- Campbell, J. Y., Lettau, M., Malkiel, B. G., & Xu, Y. (2001). Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk. *The Journal of Finance*, 56(1), 1–43.
- Campos, L., & Verdegay, J. L. (1989). Linear Programming Problems and Ranking of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 32(1), 1–11.

- Caporale, G. M., Howells P., G. A., & Soliman, A. M. (2004). *Stock Market Development and Economic Growth: the Causal Linkage*. *Journal of Economic Development*, 29(1), 33–50.
- Carlsson, C., Fullér, R., & Majlender, P. (2002). *A Possibilistic Approach to Selecting Portfolios with Highest Utility Score*. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1), 13–21.
- Castillo, M. G., & Coello, C. A. (2007). *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms in Economics and Finance: A survey*. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 532–539). IEEE. Singapore
- Cesarone, F., Scozzari, A., & Tardella, F. (2013). *A New Method for Mean-Variance Portfolio Optimization With Cardinality Constraints*. *Annals of Operations Research*, 205(1), 213–234.
- Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M. (2000). *Heuristics for Cardinality Constrained Portfolio Optimization*. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271–1302.
- Chang, T. J., Yang, S. C., & Chang, K. J. (2009). *Portfolio Optimization Problems in Different Risk Measures Using Genetic Algorithm*. *Expert Systems with Applications*, 36(7), 10529–10537.
- Chapados, N. (2011). *Portfolio Choice Problems: an Introductory Survey of Single and Multiperiod Models*. Springer.
- Chen, J. E., & Otto, K. N. (1995). *Constructing Membership Functions using Interpolation and Measurement Theory*. *Fuzzy Sets and Systems*, 73(3), 313–327.
- Chen, J. M. (2016). *Postmodern Portfolio Theory*. New York: Palgrave Macmillan .
- Chen, Y., Liu, Y. K., & Chen, J. (2006). *Fuzzy Portfolio Selection Problems Based on Credibility Theory*. In Yeung D.S., Liu Z.Q., Wang X.Z., & Yan H. (Eds.), *Advances in Machine Learning and Cybernetics. Lecture Notes in Computer Science* (Vol. 3930, pp. 377–386). Berlin/Heidelberg: Springer.
- Chen, Y., & Wang, X. (2015). *A Hybrid Stock Trading System Using Genetic Network Programming and Mean Conditional Value-at-Risk*. *European Journal of Operational Research*, 240(3), 861–871.
- Chiam, S. C., Al Mamun, A., & Low, Y. L. (2007). *A Realistic Approach to Evolutionary Multiobjective Portfolio Optimization*. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 204–211). IEEE. Singapore
- Chiam, S. C., Tan, K. C., & Al Mamun, A. (2008). *Evolutionary Multi-Objective Portfolio Optimization in Practical Context*. *International Journal of Automation and Computing*, 5(1), 67–80.
- Choobineh, F., & Branting, D. (1986). *A Simple Approximation for Semivariance*. *European Journal of Operational Research*, 27(3), 364–370.

- Chunhachinda, P., Dandapani, K., Hamid, S., & Prakash, A. J. (1997). *Portfolio Selection and Skewness: Evidence from International Stock Markets*. *Journal of Banking & Finance*, 21(2), 143–167.
- Cintra, M. E., Camargo, H. A., & Monard, M. C. (2008). *A Study on Techniques for the Automatic Generation*. In *Congresso da Academia Trinacional de Ciências (C3N) (Vol. 1, pp. 1–10)*.
- Clempner, J. (2014). *Mono-Objective Function Analysis Using an Optimization Approach*. *IEEE Latin America Transactions*, 12(2), 300–305.
- Coello, C. A. (1999). *A Comprehensive Survey of Evolutionary-Based Multiobjective Optimization Techniques*. *Knowledge and Information Systems*, 1(3), 269–308.
- Coello, C. A. (2006). *Evolutionary Multi-Objective Optimization: a Historical View of the Field*. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 1(1), 28–36.
- Coello, C. A., Lamont, G. B., & Van, D. A. (2007). *Evolutionary Algorithms for solving multi-objective problems (2.º Ed.)*. New York: Springer.
- Corazza, M., Fasano, G., & Gusso, R. (2013). *Particle Swarm Optimization with Non-Smooth Penalty Reformulation for a Complex Portfolio Selection Problem*. *Applied Mathematics and Computation*, 224, 611–624.
- Corne, D., Knowles, J., & Oates, M. (2000). *The Pareto Envelope-Based Selection Algorithm for Multiobjective Optimization*. In *Parallel Problem Solving from Nature VI Conference (pp. 839–848)*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Cottin, C., & Döhler, S. (2009). *Risikoanalyse : Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen*. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner.
- Crama, Y., & Schyns, M. (2003). *Simulated Annealing for Complex Portfolio Selection Problems*. *European Journal of Operational Research*, 150(3), 546–571.
- Crossley, W. A., & Williams, E. A. (2000). *Simulated Annealing and Genetic Algorithm Approaches for Discontinuous Coverage Satellite Constellation Design*. *Journal Engineering Optimization*, 32(3), 353–371.
- Cura, T. (2009). *Particle Swarm Optimization Approach to Portfolio Optimization*. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2396–2406.
- Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2005). *Intermediate Financial Theory*. Elsevier.
- Darwin, C. (1859). *The Origin of Species: By Means of Natural Selection or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. London (Reissue ed): Murray.
- Davis, M. H. A., & Norman, A. R. (1990). *Portfolio Selection with Transaction Costs*. *Mathematics of Operations Research*, 15(4), 676–713.
- De Cooman, G. (1997). *Possibility Theory I–III*. *International Journal of General System*, 25, 291–371.

- Deb, K. (2001). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York: John Wiley & Sons.
- Deb, K. (2012). *Optimization for Engineering Design: Algorithms and Examples (2.ª Ed.)*. New Delhi: Prentice Hall.
- Deb, K., Agrawal, K., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2002). A Fast Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197.
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., & Meyarivan, T. (2000). A Fast Elitist Non-dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization: NSGA-II. In Schopenhauer M. et al. (Ed.), *Parallel Problem Solving from Nature PPSN VI. PPSN 2000. Lecture Notes in Computer Science (Vol. 1917, pp. 849–858)*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- DeLlano-Paz, F. (2015). *Un modelo para la selección de carteras eficientes de activos energéticos en el marco de la Unión Europea (tesis doctoral)*. Universidade da Coruña: La Coruña, España.
- Demirgüç-Kunt, A., & Levine, R. (1996). Stock Market Development and Financial Intermediaries: Stylized Facts. *World Bank Economic Review*, 10(2), 291–321.
- Deng, G. F., Lin, W. T., & Lo, C. C. (2012). Markowitz-Based Portfolio Selection with Cardinality Constraints Using Improved Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4), 4558–4566.
- Devereux, M. B., & Smith, G. W. (1994). International Risk Sharing and Economic Growth. *International Economic Review*, 35(3), 535.
- Dowd, K. (2002, 2005). *Measuring market risk*. London: John Wiley & Sons
- Downes, J. (2014). *Dictionary of Finance and Investment Terms (9.ª Ed.)*. New York: Barrons Educational Serie.
- Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications (Vol. 144)*. New York: Academic Press.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1985). A Note on Measures of Specificity for Fuzzy Sets. *International Journal of General Systems*, 10(4), 279–283.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1987a). Fuzzy Numbers: an Overview. In J. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information (pp. 3–39)*. Boca Raton: CRC Press.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1987b). The Mean Value of a Fuzzy Number. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3), 279–300.
- Dubois, D. J., & Prade, H. (1988). *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. New York: Plenum.
- Dumas, B., & Luciano, E. (1991). An Exact Solution to a Dynamic Portfolio Choice Problem under Transactions Costs. *The Journal of Finance*, 46(2), 577–595.

- Durai, S. R. S., & Bhaduri, S. N. (2011). *Correlation Dynamics in Equity Markets: Evidence from India*. *Research in International Business and Finance*, 25(1), 64–74.
- Duran, F. C., Cotta, C., & Fernández, A. J. (2009). *Algoritmos evolutivos multiobjetivo para selección de carteras de inversión con restricciones de cardinalidad*. In A. Enrique, F. Chicano, F. Luna, & G. Luque (Eds.), *VI Congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados - MAEB'09* (pp. 223–230). Málaga: Universidad de Málaga.
- Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. London: C. Kegan Paul & Co.
- Ehrgott, M., Klamroth, K., & Schwehm, C. (2004). *An MCDM Approach to Portfolio Optimization*. *European Journal of Operational Research*, 155(3), 752–770.
- Estrada, J. (2004). *The Cost of Equity of Internet Stocks: a Downside Risk Approach*. *The European Journal of Finance*, 10(4), 239–254.
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). *Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis*. *The Journal of Finance*, 23(5), 761.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Kolm, P. N. (2006). *Financial Modeling of the Equity Market: from CAPM to Cointegration*. New Jersey: Wiley.
- Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Kolm, P. N. (2010). *Quantitative Equity Investing: Techniques and Strategies*. New Jersey: John Wiley.
- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. M. (2002). *The Legacy of Modern Portfolio Theory*. *The Journal of Investing*, 11(3), 7–22.
- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). *Robust Portfolio Optimization and Management*. New Jersey: John Wiley.
- Fama, E. F. (1965a). *Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market*. *Management Science*, 11(3), 404–419.
- Fama, E. F. (1965b). *The Behavior of Stock-Market Prices*. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- Fang, Y., Lai, K. K., & Wang, S. Y. (2006). *Portfolio Rebalancing Model with Transaction Costs Based on Fuzzy Decision Theory*. *European Journal of Operational Research*, 175(2), 879–893.
- Federación Iberoamericana de Bolsas. (2017). *Anuarios Estadísticos*. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 de: http://www.fiabnet.org/es/categoria.asp?id_categoria=50
- Fernández, A., & Gómez, S. (2007). *Portfolio Selection Using Neural Networks*. *Computers & Operations Research*, 34(4), 1177–1191.
- Fishburn, P. C. (1970). *Utility Theory for Decision Making*. London: Wiley.
- Fishburn, P. C. (1977). *Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns*. *The American Economic Review*, 67(2), 116–126.

- Fogel, L. J., Owens, A. J., & Walsh, M. J. (1966). *Artificial Intelligence Through Simulated Evolution*. New York: Wiley.
- Fonseca, C., & Fleming, P. (1993). *Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation-Discussion and Generalization*. In *Fifth International Conference on Genetic Algorithms* (pp. 416–423). Morgan Kaufmann.
- Fu, T., Chung, C., & Chung, F. (2013). *Adopting Genetic Algorithms for Technical Analysis and Portfolio Management*. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(10), 1743–1757.
- Gaivoronski, A. A., & Pflug, G. C. (2005). *Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*. *Journal of Risk*, 7(2), 1–31.
- García-García, M., Nogueira-Collazo, M., Cotta, C., Fernández-Leiva, A., & Merello-Guervós, J. (2015). *Implementación de algoritmos meméticos con capacidad de autogeneración sobre CouchBD*. En F. Chávez, R. M. Luque-Baena, F. Luna, & F. Fernández (Eds.), *X Congreso Español de Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados - MAEB 2015* (pp. 189–195). Mérida-Almendralejo: Universidad de Extremadura.
- García-Rodríguez, S. (2012). *Application of Multiobjective Evolutionary Techniques for Robust Portfolio Optimization (tesis doctoral)*. Universidad Carlos III, Madrid - España.
- García, F., González-Bueno, J., & Oliver, J. (2015). *Mean-Variance Investment Strategy Applied in Emerging Financial Markets: Evidence from the Colombian Stock Market*. *Intellectual Economics*, 9(1), 22–29.
- García, J., Sánchez, M. Á., & Trinidad, J. E. (1998). *El principio primero, la seguridad de Roy y su derivación hasta el modelo de Markowitz*. *Cuadernos Aragoneses de Economía*, 8(2), 423–429.
- Gaspero, L. D., Tollo, G. D., Roli, A., & Schaerf, A. (2011). *Hybrid Metaheuristics for Constrained Portfolio Selection Problems*. *Quantitative Finance*, 11(10), 1473–1487.
- Gil, J. M. (2007). *Caracterización del mercado accionario colombiano, 2001-2006: un análisis comparativo*. *Borradores de Economía*, 457, FALTAN LAS PÁGINAS.
- Glover, F., & Laguna, M. (1997). *Tabu Search*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Goh, C. K., & Tan, K. C. (2009). *Evolutionary Multi-Objective Optimization in Uncertain Environments: Issues and Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley.
- Golmakani, H. R., & Fazel, M. (2011). *Constrained Portfolio Selection using Particle Swarm Optimization*. *Expert Systems with Applications*, 38(7), 8327–8335.

- Gordon, A. (2009). *From Markowitz to Modern Risk Management*. *The European Journal of Finance*, 15(5–6), 451–461.
- Gordon, A., & Baptista, A. (2002). *Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison With Mean-Variance Analysis*. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7–8), 1159–1193.
- Gordon, A., Sharpe, W., & Bailey, J. (2003). *Fundamentos de inversiones: teoría y práctica* (3.º Ed.). Mexico: Pearson Educación.
- Graham, B., & Dodd, D. L. (1934). *Security Analysis*. Londres: McGraw-Hill.
- Grootveld, H., & Hallerbach, W. (1999). *Variance vs. Downside Risk: Is There Really That Much Difference?* *European Journal of Operational Research*, 114(2), 304–319.
- Grubel, H. G. (1968). *Internationally Diversified Portfolios: Welfare Gains and Capital Flows*. *The American Economic Review*, 58(5), 1299–1314.
- Gullu, I., & Kilic, N. O. (2017). *An Evaluation on the Attractiveness of Turkish Economy in Terms of Foreign Direct Investments*. *European Journal of Sustainable Development Research*, 2(1), 70–79.
- Gupta, P., Inuiguchi, M., & Mehlawat, M. K. (2011). *A Hybrid Approach for Constructing Suitable and Optimal Portfolios*. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5620–5632.
- Gupta, P., Inuiguchi, M., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (2013). *Multiobjective Credibilistic Portfolio Selection Model with Fuzzy Chance-Constraints*. *Information Sciences*, 229, 1–17.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014a). *Portfolio Optimization: An Overview*. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol. 316, pp. 1–31). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014b). *Portfolio Optimization Using Credibility*. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol. 316, pp. 127–160). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014c). *Portfolio Optimization with Interval Coefficients*. In *Fuzzy Portfolio Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing* (Vol. 316, pp. 33–59). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Mittal, G. (2012). *Asset Portfolio Optimization using Support Vector Machines and Real-Coded Genetic Algorithm*. *Journal of Global Optimization*, 53(2), 297–315.
- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Saxena, A. (2008). *Asset Portfolio Optimization Using Fuzzy Mathematical Programming*. *Information Sciences*, 178(6), 1734–1755.

- Gupta, P., Mehlawat, M. K., & Saxena, A. (2010). *A Hybrid Approach to Asset Allocation with Simultaneous Consideration of Suitability and Optimality*. *Information Sciences*, 180(11), 2264–2285.
- Gupta, P., Mittal, G., & Mehlawat, M. K. (2013). *Expected Value Multiobjective Portfolio Rebalancing Model with Fuzzy Parameters*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 190–203.
- Hallerbach, W., & Spronk, J. (2002). *A Multidimensional Framework for Financial-Economic Decisions*. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 11(3), 111–124.
- Hanisch, J. (2006). *Risikomessung mit dem Conditional Value-at-Risk: entscheidungstheoretische Grundlagen und Implikationen für das Risikomanagement*. *Risikomessung mit dem Conditional Value-at-Risk (tesis doctoral)*. Verlag Nicht Ermitelbar, Kovač, Alemania..
- Harlow, W. V., & Rao, R. K. S. (1989). *Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence*. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24(3), 285–311.
- Heilpern, S. (1992). *The Expected Value of a Fuzzy Number*. *Fuzzy Sets and Systems*, 47(1), 81–86.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: an Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Re-issued by MIT Press (1992). University of Michigan Press.
- Holmström, B., & Tirole, J. (1998). *Private and Public Supply of Liquidity*. *Journal of Political Economy*, 106(1), 1–40.
- Hong, T. P., & Chen, J. B. (1999). *Finding Relevant Attributes and Membership Functions*. *Fuzzy Sets and Systems*, 103(3), 389–404.
- Horn, J. R., Nafpliotis, N., & Goldberg, D. (1993). *Multiobjective Optimization using the Niche Pareto Genetic Algorithm*. Technical Report IlliGAL Report 93005. Urbana-Champaign.
- Huang, X. (2006). *Fuzzy Chance-Constrained Portfolio Selection*. *Applied Mathematics and Computation*, 177(2), 500–507.
- Huang, X. (2007). *Portfolio Selection with Fuzzy Returns*. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 18(4), 383–390.
- Huang, X. (2008a). *Mean-Semivariance Models for Fuzzy Portfolio Selection*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(1), 1–8.
- Huang, X. (2008b). *Risk Curve and Fuzzy Portfolio Selection*. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(6), 1102–1112.
- Huang, X. (2009). *A Review of Credibilistic Portfolio Selection*. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(3), 263–281.

- Huang, X. (2010). *Portfolio Analysis, From Probabilistic to Credibilistic and Uncertain Approaches* (Vol. 250). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Huang, X., & Qiao, L. (2012). A Risk Index Model for Multi-Period Uncertain Portfolio Selection. *Information Sciences*, 217, 108–116.
- Inuiguchi, M., Ichihashi, H., & Tanaka, H. (1990). *Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments*. In R. Slowinski & J. Teghem (Eds.), *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty* (Vol. 6, pp. 45–68). Dordrecht: Springer.
- Ito, K., Akagi, S., & Nishikawa, M. (1983). A Multiobjective Optimization Approach to a Design Problem of Heat Insulation for Thermal Distribution Piping Network Systems. *Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design*, 105(2), 206.
- J.P.Morgan. (1995). *Introducing the Emerging Markets Bond Index Plus (EMBI+)*. Methodology Brief.
- J.P.Morgan. (1996). *Riskmetrics Technical Document* (4.º Ed.). New York: Morgan Guaranty Trust Company of New York.
- J.P.Morgan. (1999). *Introducing the JP Morgan Emerging Markets Bond Index Global (EMBI Global)*. Methodology Brief.
- Jain, C., Jain, P., & McNish, T. H. (2012). Short Selling: The Impact of SEC Rule 201 of 2010. *Financial Review*, 47(1), 37–64.
- Jalota, H., Thakur, M., & Mittal, G. (2017a). A Credibilistic Decision Support System for Portfolio Optimization. *Applied Soft Computing*, 59, 512–528.
- Jalota, H., Thakur, M., & Mittal, G. (2017b). Modelling and Constructing Membership Function for Uncertain Portfolio Parameters: A Credibilistic Framework. *Expert Systems with Applications*, 71, 40–56.
- Jansen, D. W., Koedijk, K. G., & De-Vries, C. G. (2000). Portfolio Selection with Limited Downside Risk. *Journal of Empirical Finance*, 7(3–4), 247–269.
- Jin, H., Markowitz, H., & Yu Zhou, X. (2006). A Note of Semivariance. *Mathematical Finance*, 16(1), 53–61.
- Jorion, P. (2003). *Financial Risk Manager Handbook* (2.º Ed.). New Jersey: Wiley.
- Joro, T., & Na, P. (2006). Portfolio Performance Evaluation in a Mean Variance Skewness Framework. *European Journal of Operational Research*, 175(1), 446–461.
- Kanthababu, M. (2013). Multi-Objective Optimization of Manufacturing Processes Using Evolutionary Algorithms. In: *Information Resources Management Association* (Ed.), *Industrial engineering : concepts, methodologies, tools, and applications* (p. 25). Hershey, Pensilvania: Engineering Science Reference.
- Kaplan, P. D., & Alldredge, R. H. (1997). Semivariance in Risk-Based Index Construction. *The Journal of Investing*, 6(2), 82–87.

- Kaufmann, A., & Gupta, M. M. (1985). *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold Co.
- Kim, W. C., Fabozzi, F. J., Cheridito, P., & Fox, C. (2014). Controlling Portfolio Skewness and Kurtosis Without Directly Optimizing Third and Fourth Moments. *Economics Letters*, 122(2), 154–158.
- Kim, Y. S., Giacometti, R., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J., & Mignacca, D. (2012). Measuring Financial Risk and Portfolio Optimization with a non-Gaussian Multivariate Model. *Annals of Operations Research*, 201(1), 325–343.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671–680.
- Klir, G. J., & Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Knowles, J., & Corne, D. (1999). The Pareto Archived Evolution Strategy: A New Baseline Algorithm for Pareto Multiobjective Optimisation. In *IEEE Cong. Evol. Comput* (pp. 98–105). New Jersey: IEEE Press.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of Portfolio Optimization: Practical Challenges and Current Trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356–371.
- Konak, A., Coit, D. W., & Smith, A. E. (2006). Multi-Objective Optimization using Genetic Algorithms: A Tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9), 992–1007.
- Konno, H. (1988). *Portfolio Optimization Using L1 Risk Measure*. Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology.
- Konno, H. (1990). Piecewise Linear Risk Functions and Portfolio Optimization. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 33(2), 139–156.
- Konno, H. (2003). Portfolio Optimization of Small Fund Using Mean-Absolute Deviation Model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 6(4), 403–418.
- Konno, H., & Koshizuka, T. (2005). Mean-Absolute Deviation Model. *IIE Transactions*, 37(10), 893–900.
- Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market. *Management Science*, 37(5), 519–531.
- Koza, J. R. (1992). *Genetic Programming: on the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. Cambridge: MIT Press.
- Kumar, N. V., & Ganesh, L. S. (1996). An Empirical Analysis of the Use of the Analytic Hierarchy Process for Estimating Membership Values in a Fuzzy Set. *Fuzzy Sets and Systems*, 82(1), 1–16.

- Lacagnina, V., & Pecorella, A. (2006). A Stochastic Soft Sonstraints Fuzzy Model for a Portfolio Selection Problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(10), 1317–1327.
- León, T., Liern, V., & Vercher, E. (2002). Viability of Infeasible Portfolio Selection Problems: A Fuzzy Approach. *European Journal of Operational Research*, 139(1), 178–189.
- León, T., & Vercher, E. (2004). Solving a Class of Fuzzy Linear Programs by Using Semi-Infinite Programming Techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, 146(2), 235–252.
- Lessard, D. R. (1974). World, National and Industry Factors in Equity Returns. *The Journal of Finance*, 29(2), 379–391.
- Levine, R. (1997). Financial Development and Economic Growth: Views and Agenda. *Journal of Economic Literature*, 35(2), 688–726.
- Levy, H., & Sarnat, M. (1970). International Diversification of Investment Portfolios. *The American Economic Review*, 60(4), 668–675.
- Li, J., & Xu, J. (2013). Multi-Objective Portfolio Selection Model with Fuzzy Random Returns and a Compromise Approach-Based Genetic Algorithm. *Information Sciences*, 220, 507–521.
- Li, X., & Liu, B. (2006). The Independence of Fuzzy Variables with Applications. *International Journal of Natural Sciences & Technology*, 1(1), 95–100.
- Li, X., & Qin, Z. (2014). Interval Portfolio Selection Models within the Framework of Uncertainty Theory. *Economic Modelling*, 41, 338–344.
- Li, X., Qin, Z., & Kar, S. (2010). Mean-Variance-Skewness Model for Portfolio Selection with Fuzzy Returns. *European Journal of Operational Research*, 202(1), 239–247.
- Li, X., Zhang, Y., Wong, H. S., & Qin, Z. (2009). A Hybrid Intelligent Algorithm for Portfolio Selection Problem with Fuzzy Returns. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2), 264–278.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2013). The Constrained Mean-Semivariance Portfolio Optimization Problem with the Support of a Novel Multiobjective Evolutionary Algorithm. *Journal of Software Engineering and Applications*, 6(7), 22–29.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2014). A new Probe Guided Mutation Operator and its Application for Solving the Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem. *Expert Systems with Applications*, 41(14), 6274–6290.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2015). Efficient Portfolio Construction with the Use of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Best Practices and Performance Metrics. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 14(3), 535–564.
- Liagkouras, K., & Metaxiotis, K. (2017). Examining the Effect of Different Configuration Issues of the Multiobjective Evolutionary Algorithms on the Efficient Frontier

- Formulation for the Constrained Portfolio Optimization Problem. Journal of the Operational Research Society, 1–23.*
- Lin, D., Wang, S., & Yan, H. (2001). *A Multiobjective Genetic Algorithm for Portfolio Selection Problem. Proceedings of the ICOTA 2001, Hong Kong, 15-17 December.*
- Liu, B. (2002a). *Theory and Practice of Uncertain Programming (2.ºEd., Vol. 239). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.*
- Liu, B. (2002b). *Toward Fuzzy Optimization without Mathematical Ambiguity. Fuzzy Optimization and Decision Making, 1(1), 43–63.*
- Liu, B. (2004). *Uncertainty Theory: an Introduction to its Axiomatic Foundations (Vol. 154). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.*
- Liu, B. (2007). *Uncertainty Theory an Introduction to its Axiomatic Foundations (2.º ed.). Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.*
- Liu, B., & Liu, Y. K. (2002). *Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10(4), 445–450.*
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhang, P. (2013). *A Multi-Period Portfolio Selection Optimization Model by Using Interval Analysis. Economic Modelling, 33, 113–119.*
- Liu, Y. J., Zhang, W. G., & Zhao, X. J. (2016). *Fuzzy Multi-Period Portfolio Selection Model with Discounted Transaction Costs. Soft Computing, 1–17.*
- Liu, Y. K., & Gao, J. (2007). *The Independence of Fuzzy Variables with Applications to Fuzzy Random Optimization. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 15(supp02), 1–20.*
- Liu, Y. K., & Liu, B. (2003). *Expected Value Operator of Random Fuzzy Variable and Random Fuzzy Expected Value Models. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 11(2), 195–215.*
- Lobo, M. S., Fazel, M., & Boyd, S. (2007). *Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs. Annals of Operations Research, 152(1), 341–365.*
- Lwin, K. T. (2015). *Evolutionary Approaches for Portfolio Optimization (tesis doctoral). University of Nottingham: Nottingham.*
- Lwin, K. T., Qu, R., & MacCarthy, B. L. (2017). *Mean-VaR Portfolio Optimization: A Non-Parametric Approach. European Journal of Operational Research, 260(2), 751–766.*
- Malkiel, B. G. (2002). *How Much Diversification Is Enough? In AIMR Seminar “The Future of Equity Portfolio Construction” (pp. 18–28). Virginia: AIMR (CFA Institute).*
- Mandelbrot, B. (1963a). *New Methods in Statistical Economics. Journal of Political Economy, 71(5), 421–440.*
- Mandelbrot, B. (1963b). *The Variation of Certain Speculative Prices. The Journal of Business, 36(4), 394–419.*

- Manzana, V. A. (2009). *Teorías sobre coberturas con contratos de futuro*. *Cuadernos de Economía*, 28(50), 157–190.
- Mao, J. C. T. (1970). *Models of Capital Budgeting, E-VVs E-S*. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 4(5), 657–675.
- Mao, J. C. T., & Brewster, J. F. (1970). *An E-Sb Model of Capital Budgeting*. *The Engineering Economist*, 15(2), 103–121.
- Maringer, D., & Kellerer, H. (2003). *Optimization of Cardinality Constrained Portfolios with a Hybrid Local Search Algorithm*. *OR Spectrum*, 25(4), 481–495.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Markowitz, H. (1991). *Foundations of Portfolio Theory*. *The Journal of Finance*, 46(2), 469–477.
- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993). *Computation of Mean-Semivariance Efficient Sets by the Critical Line Algorithm*. *Annals of Operations Research*, 45(1), 307–317.
- Mascareñas, J. (2015). *Gestión de carteras I: selección de carteras (Portfolio Management I: Portfolio Selection)*. *Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas*. Madrid.
- Mashayekhi, Z., & Omrani, H. (2016). *An Integrated Multi-Objective Markowitz–DEA Cross-Efficiency Model with Fuzzy Returns for Portfolio Selection Problem*. *Applied Soft Computing*, 38, 1–9.
- Maulik, U., Bandyopadhyay, S., & Mukhopadhyay, A. (2011). *Multiobjective Genetic Algorithms for Clustering: Applications in Data Mining and Bioinformatics*. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag.
- Mayer, C. (1988). *New Issues in Corporate Finance*. *European Economic Review*, 32(5), 1167–1183.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.
- Medaglia, A. L., Fang, S. C., Nuttle, H. L. W., & Wilson, J. R. (2002). *An Efficient and Flexible Mechanism for Constructing Membership Functions*. *European Journal of Operational Research*, 139(1), 84–95.
- Mehlawat, M. K. (2016). *Credibilistic Mean-Entropy Models for Multi-Period Portfolio Selection with Multi-Choice Aspiration Levels*. *Information Sciences*, 345, 9–26.
- Metaxiotis, K., & Liagkouras, K. (2012). *Multiobjective Evolutionary Algorithms for Portfolio Management: A Comprehensive Literature Review*. *Expert Systems with Applications*, 39(14), 11685–11698.

- Michalewicz, Z., & Nazhiyath, G. (1995). *Genocop III: A Co-Evolutionary Algorithm for Numerical Optimization Problems with Nonlinear Constraints*. In D. B. Fogel (Ed.), *The Second IEEE International Conference on Evolutionary Computation* (pp. 647–651). New Jersey: IEEE Press.
- Michaud, R. O. (1989). *The Markowitz Optimization Enigma: Is “Optimized” Optimal?* *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31–42.
- Mishkin, F. S. (2001). *The Economics of Money, Banking and Financial Markets* (6.° ed.). New York: Addison Wesley Longman.
- Mittnik, S., Rachev, S., & Schwartz, E. (2002). *Value-at-Risk and Asset Allocation with Stable Return Distributions*. *ASTA Advances in Statistical Analysis*, 86(1), 53–68.
- Moral-Escudero, R., Ruiz-Torrubiano, R., & Suárez, A. (2006). *Selection of Optimal Investment Portfolios with Cardinality Constraints*. In 2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (pp. 2382–2388). Vancouver, BC, Canada: IEEE.
- Morck, R., Shleifer, A., & Vishny, R. (1990). *Do Managerial Objectives Drive Bad Acquisitions?* *The Journal of Finance*, 45(1), 31–48.
- Morck, R., Shleifer, A., Vishny, R. W., Shapiro, M., & Poterba, J. M. (1990). *The Stock Market and Investment: Is the Market a Sideshow?* *Brookings Papers on Economic Activity*, 1990(2), 157.
- Moscoso, J. A. (2014). *Distribuciones de probabilidad alternativas para la gestión de riesgos en mercados financieros (tesis doctoral)*. Universitat de Valencia, Valencia.
- Mousavi, S., Esfahanipour, A., & Zarandi, M. H. F. (2014). *A Novel Approach to Dynamic Portfolio Trading System Using Multitree Genetic Programming*. *Knowledge-Based Systems*, 66, 68–81.
- Nahmias, S. (1978). *Fuzzy Variables*. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(2), 97–110.
- Nudelsman, S. (2013). *Implicaciones de la crisis financiera y económica global en América Latina*. *Problemas del Desarrollo*, 44(175), 125–146.
- Obstfeld, M. (1992). *Risk-Taking, Global Diversification, and Growth* (No. 4093). Cambridge, MA.
- Obstfeld, M. (1993). *Are Industrial-Country Consumption Risks Globally Diversified?* (No. 4308). Cambridge, MA.
- Ocampo, J. A. (2009). *Impactos de la crisis financiera mundial sobre América Latina*. *Revista Cepal*, 97, 9–32.
- Oksendal, B., & Sulem, A. (2002). *Optimal Consumption and Portfolio with Both Fixed and Proportional Transaction Costs*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(6), 1765–1790.

- Olivera, J. H. G. (2004). *Globalización, crecimiento económico y bienes públicos*. *Anales Academia Nacional de Derecho y Ciencias Sociales de Buenos Aires, año XLIX* (42), 309–313.
- Ortobelli, S., Rachev, S. T., Stoyanov, S., Fabozzi, F. J., & Biglova, A. (2005). *The Proper Use of Risk Measures in Portfolio Theory*. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(8), 1107–1133.
- Osyczka, A. (1985). *Multicriteria Optimization for Engineering Design*. In J. Gero (Ed.), *Design Optimization, Volume 1* (pp. 193–227). Sidney: Academic Press.
- Pareto, V. (1896). *Cours d'économie politique*. (F. Rouge, Ed.) (Volumen I). Lausanne.
- Ponsich, A., Jaimes, A., & Coello, C. A. (2013). *A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications*. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 17(3), 321–344.
- Qian, W., & Yin, M. (2014). *Portfolio Selection Based on Distance between Fuzzy Variables*. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1–12.
- Qin, Z. (2016). *Preliminaries*. In *Uncertain Portfolio Optimization* (pp. 1–28). Singapore: Springer.
- Qin, Z. (2017). *Random Fuzzy Mean-Absolute Deviation Models for Portfolio Optimization Problem with Hybrid Uncertainty*. *Applied Soft Computing*, 56, 597–603.
- Qin, Z., Li, X., & Ji, X. (2009). *Portfolio Selection Based on Fuzzy Cross-Entropy*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 139–149.
- Quintero, L. V., & Coello, C. A. (2006). *Introduction to Evolutionary Computation and some of its Applications in Economics and Finance*. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 2, 3–26.
- Ramírez-Sánchez, J. C. (2004). *Usos y limitaciones de los procesos estocásticos en el tratamiento de distribuciones de rendimientos con colas gordas*. *Revista de Análisis Económico*, 19(1), 51–76.
- Rancière, R., Tornell, A., & Westermann, F. (2008). *Systemic Crises and Growth*. *Quarterly Journal of Economics*, 123(1), 359–406.
- Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española*. (23.º Ed.). Madrid: Asociación de Academias de la Lengua Española.
- Rechenberg, I. (1973). *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Stuttgart: Frommann-Holzboog.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). *Optimization of Conditional Value-at-Risk*. *Journal of Risk*, 2(3), 21–41.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443–1471.

- Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994). *Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age*. *The Journal of Investing*, 3(3), 11–17.
- Romero-Zaliz, R. (2005). *Reconocimiento de perfiles de regulación genética mediante algoritmos evolutivos multiobjeto (tesis doctoral)*. Universidad de Granada, Granada.
- Rosenberg, R. S. (1960). *Simulation of Genetic Populations with Biochemical Properties (tesis doctoral)*. University of Michigan, Estados Unidos. .
- Roy, A. D. (1952). *Safety First and the Holding of Assets*. *Econometrica*, 20(3), 431–449.
- Saborido, R., Ruiz, A. B., Bermúdez, J. D., Vercher, E., & Luque, M. (2016). *Evolutionary Multi-Objective Optimization Algorithms for Fuzzy Portfolio Selection*. *Applied Soft Computing*, 39, 48–63.
- Saint-Paul, G. (1992). *Technological Choice, Financial Markets and Economic Development*. *European Economic Review*, 36(4), 763–781.
- Schaerf, A. (2002). *Local Search Techniques for Constrained Portfolio Selection Problems*. *Computational Economics*, 20(3), 177–190.
- Schaffer, J. D. (1984). *Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated (tesis doctoral)*. Vanderbilt University, Nashville., Estados Unidos.
- Schaffer, J. D. (1985). *Multiple Objective Optimization with Vector evaluated genetic Algorithm*. In *First International Conference on Genetic Algorithms* (pp. 93–100). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Schaffer, J. D., & Grefenstette, J. J. (1985). *Multi-Objective Learning via Genetic Algorithms*. In *9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-85)* (pp. 593–505). Los Angeles, California.
- Schlottmann, F., & Seese, D. (2004). *Financial Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms: Recent Developments and Future Research Directions*. In C. A. Coello & G. B. Lamont (Eds.), *Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms*. *Advances in Natural Computation (Volumen 1)*, pp. 627–652. Singapore: World Scientific.
- Scutellà, M. G., & Recchia, R. (2013). *Robust Portfolio Asset Allocation and Risk Measures*. *Annals of Operations Research*, 204(1), 145–169.
- Sensoy, A., Eraslan, V., & Erturk, M. (2016). *Do Sovereign Rating Announcements Have an Impact on Regional Stock Market Co-movements? The Case of Central and Eastern Europe*. *Economic Systems*, 40(4), 552–567.
- Sharpe, W. F. (1963). *A Simplified Model for Portfolio Analysis*. *Management Science*, 9(2), 277–293.
- Sharpe, W. F. (1966). *Mutual Fund Performance*. *The Journal of Business*, 39(1), 119–138.

- Sharpe, W. F. (1994). *The Sharpe Ratio*. *The Journal of Portfolio Management*, 21(1), 49–58.
- Shefrin, H., & Statman, M. (2000). *Behavioral Portfolio Theory*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(2), 127–151.
- Shin, S. Y., Lee, I. H., Kim, D., & Zhang, B. T. (2005). *Multiobjective Evolutionary Optimization of DNA Sequences for Reliable DNA Computing*. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 9(2), 143–158.
- Shoaf, J., & Foster, J. (1996). *A Genetic Algorithm Solution to the Efficient Set Problem: A Technique for Portfolio Selection Based on the Markowitz Model*. In *Proceedings of the Decision Sciences Institute Annual* (pp. 571–573). Orlando, Florida.
- Shreve, S. E., & Soner, H. M. (1994). *Optimal Investment and Consumption with Transaction Costs*. *The Annals of Applied Probability*, 4(3), 609–692.
- Simaan, Y. (1997). *Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model versus the Mean Absolute Deviation Model*. *Management Science*, 43(10), 1437–1446.
- Skolpadungket, P., Dahal, K., & Harnpornchai, N. (2007). *Portfolio Optimization Using Multi-Objective Genetic Algorithms*. In *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation* (pp. 516–523). IEEE.
- Smimov, K. (2014). *International Portfolio Choice and Political Instability Risk: A Multi-Objective Approach*. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 546–560.
- Sortino, F. A., & Forsey, H. J. (1996). *On the Use and Misuse of Downside Risk*. *The Journal of Portfolio Management*, 22(2), 35–42.
- Sortino, F. A., & Price, L. N. (1994). *Performance Measurement in a Downside Risk Framework*. *The Journal of Investing*, 3(3), 59–64.
- Sortino, F. A., & Van Der Meer, R. (1991). *Downside risk*. *The Journal of Portfolio Management*, 17(4), 27–31.
- Speranza, M. (1993). *Linear Programming Models for Portfolio Optimization*. *Finance*, 14, 107–123.
- Srinivas, N., & Deb, K. (1994). *Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms*. *Evolutionary Computation*, 2(3), 221–248.
- Stadler, W. (1988). *Fundamentals of Multicriteria Optimization*. In W. Stadler (Ed.), *Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences* (pp. 1–25). New York: Springer.
- Standard & Poor's. (2017). *Credit Rating History*. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 de: https://www.standardandpoors.com/en_US/web/guest/regulatory/ratings-history

- Stiglitz, J. E. (1993). *The Role of the State in Financial Markets*. *The World Bank Economic Review*, 7(suppl 1), 19–52.
- Subbu, R., Bonissone, P. P., Eklund, N., Bollapragada, S., & Chalermkraivuth, K. (2005). *Multiobjective Financial Portfolio Design: A Hybrid Evolutionary Approach*. In *2005 IEEE Congress on Evolutionary Computation (Vol. 2, pp. 1722–1729)*. IEEE.
- Suksonghong, K., Boonlong, K., & Goh, K. L. (2014). *Multi-Objective Genetic Algorithms for Solving Portfolio Optimization Problems in the Electricity market*. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 58, 150–159.
- Swain, S. C., Panda, S., & Mahapatra, S. (2016). *A Multi-Criteria Optimization Technique for SSSC Based Power Oscillation Damping Controller Design*. *Ain Shams Engineering Journal*, 7(2), 553–565.
- Tanaka, H., & Guo, P. (1999). *Portfolio Selection Based on Upper and Lower Exponential Possibility Distributions*. *European Journal of Operational Research*, 114(1), 115–126.
- Triantaphyllou, E., & Mann, S. H. (1990). *An Evaluation of the Eigenvalue Approach for Determining the Membership Values in Fuzzy Sets*. *Fuzzy Sets and Systems*, 35(3), 295–301.
- Unger, A., & Poddig, T. (2014). *The Use of Risk Budgets in Portfolio Optimization*. Friedrichsdorf: Springer Gabl.
- Uribe, J. M. (2007). *Indicadores básicos de desarrollo del mercado accionario colombiano*. *Temas de Estabilidad Financiera*. (28)
- Useche-Arévalo, A. J. (2015). *Construcción de portafolios de inversión desde las finanzas del comportamiento: una revisión crítica*. *Cuadernos de Administración*, 28(51), 11–43.
- Vardharaj, R., Fabozzi, F. J., & Jones, F. J. (2004). *Determinants of Tracking Error for Equity Portfolios*. *The Journal of Investing*, 13(2), 37–47.
- Vedarajan, G., Chan, L. C., & Goldberg, D. E. (1997). *Investment Portfolio Optimization Using Genetic Algorithms*. In J. R. Koza (Ed.), *LateBreaking Papers at the Genetic Programming 1997 Conference (pp. 255–263)*. California: Stanford University.
- Vercher, E. (2008). *Portfolios with Fuzzy Returns: Selection Strategies Based on Semi-Infinite Programming*. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 217(2), 381–393.
- Vercher, E. (2015). *Soft Computing Approaches to Portfolio Selection*. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 31(1), 23–46.

- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2012). *Fuzzy Portfolio Selection Models: A Numerical Study*. In M. Doumpos, C. Zopounidis, & P. M. Pardalos (Eds.), *Springer Optimization and Its Applications (volumen 70)*, pp. 253–280. Boston: Springer.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2013). *A Possibilistic Mean-Downside Risk-Skewness Model for Efficient Portfolio Selection*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 21(3), 585–595.
- Vercher, E., & Bermúdez, J. D. (2015). *Portfolio Optimization Using a Credibility Mean-Absolute Semi-Deviation Model*. *Expert Systems with Applications*, 42(20), 7121–7131.
- Vercher, E., Bermúdez, J. D., & Segura, J. V. (2007). *Fuzzy Portfolio Optimization under Downside Risk Measures*. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(7), 769–782.
- Vijayalakshmi Pai, G. A., & Michel, T. (2009). *Evolutionary Optimization of Constrained k-Means Clustered Assets for Diversification in Small Portfolios*. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(5), 1030–1053.
- Villazón-Terrazas, J. (2015). *Optimización de aperturas mediante técnicas de algoritmos evolutivos (tesis doctoral)*. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.
- Wang, B., Li, Y., & Watada, J. (2017). *Multi-Period Portfolio Selection with Dynamic Risk/Expected-Return Level under Fuzzy Random Uncertainty*. *Information Sciences*, 385, 1–18.
- Wang, B., Wang, S., & Watada, J. (2011). *Fuzzy-Portfolio-Selection Models With Value-at-Risk*. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(4), 758–769.
- Wang, F., Yu, P. L. H., & Cheung, D. W. (2014). *Combining Technical Trading Rules Using Particle Swarm Optimization*. *Expert Systems with Applications*, 41(6), 3016–3026.
- Wang, S., & Zhu, S. (2002). *On Fuzzy Portfolio Selection Problems*. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(4), 361–377.
- Watada, J. (1997). *Fuzzy Portfolio Selection and its Applications to Decision Making*. *Tatra Mountains Mathematical Publication*, 13, 219–248.
- Wen, D., & Peng, J. (2009). *Credibilistic Risk Optimization Models and Algorithms*. In *2009 International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing* (pp. 378–381). Wuhan, China: IEEE.
- World Federation of Exchange. (2017). *Annual Statistics*. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 de: <https://www.world-exchanges.org/home/index.php/statistics/annual-statistics>
- Yager, R. R. (1981). *A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval*. *Information Sciences*, 24(2), 143–161.
- Yager, R. R. (1992). *On the Specificity of a Possibility Distribution*. *Fuzzy Sets and Systems*, 50(3), 279–292.

- Yang, S. C., Lin, T. L., Chang, T. J., & Chang, K.-J. (2011). A Semi-Variance Portfolio Selection Model for Military Investment Assets. *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2292–2301.
- Yegireddy, N. K., & Panda, S. (2014). Design and Performance Analysis of PID Controller for an AVR System Using Multi-Objective non-Dominated Shorting Genetic Algorithm-II. In *2014 International Conference on Smart Electric Grid (ISEG)* (pp. 1–7). IEEE.
- Yue, W., & Wang, Y. (2017). A New Fuzzy Multi-Objective Higher Order Moment Portfolio Selection Model for Diversified Portfolios. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 465, 124–140.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, 3–28.
- Zhang, P., & Zhang, W. G. (2014). Multiperiod Mean Absolute Deviation Fuzzy Portfolio Selection Model with Risk Control and Cardinality Constraints. *Fuzzy Sets and Systems*, 255, 74–91.
- Zhang, W. G., & Nie, Z. K. (2005). On Admissible Efficient Portfolio Selection Policy. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 608–623.
- Zimmermann, H. J. (1985). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Zitzler, E., Deb, K., & Thiele, L. (2000). Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Evolutionary Computation*, 8(2), 173–195.
- Zitzler, E., Laumanns, M., & Thiele, L. (2001). *SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm (Technical Report 103)*. Switzerland.
- Zitzler, E., & Thiele, L. (1998). *An Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization: The Strength Pareto Approach (Technical Report 43)*. Switzerland.
- Zitzler, E., Thiele, L., & Bader, J. (2010). On Set-Based Multiobjective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 14(1), 58–79.
- Zopounidis, C., Doumpos, M., & Fabozzi, F. J. (2014). Preface to the Special Issue: 60 Years Following Harry Markowitz's Contributions in Portfolio Theory and Operations Research. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 343–345.



SU OPINIÓN



Para la Editorial UPB es muy importante ofrecerle un excelente producto. La información que nos suministre acerca de la calidad de nuestras publicaciones será muy valiosa en el proceso de mejoramiento que realizamos. Para darnos su opinión, comuníquese a través de la línea (57)(4) 354 4565 o vía e-mail a editorial@upb.edu.co Por favor adjunte datos como el título y la fecha de publicación, su nombre, e-mail y número telefónico.

La investigación tuvo como fin optimizar carteras multiobjetivo a la luz de la teoría de la credibilidad. Para cumplir este objetivo, se propuso un novedoso modelo difuso de optimización denominado "Modelo Credibilístico Multiobjetivo de Media-Semivarianza-Liquidez para la Selección de Carteras". La incertidumbre de la liquidez y el rendimiento futuro de cada activo se modeló por medio de números difusos L-R con funciones de referencia tipo potencia, donde sus funciones de pertenencia se obtuvieron a partir de los percentiles muestrales de sus rendimientos históricos y del índice de liquidez en bolsa, respectivamente. Con el objetivo de conseguir un modelo más realista se consideró la restricción de cardinalidad que limita el número de activos que participan en las carteras y las restricciones de cotas superiores e inferiores que permiten combinaciones de activos que respetan las preferencias del inversor. El problema de optimización multiobjetivo resultante fue lineal y convexo, y fue resuelto aplicando algoritmo NSGAI.

La ilustración de la efectividad y eficiencia del modelo en aplicaciones prácticas, se realizó para un inversionista que asume la toma de decisiones de inversión en el Mercado Integrado Latinoamericano (MILA), que integra los mercados bursátiles de Chile, Colombia, México y Perú.

El resultado del estudio empírico estableció que el modelo propuesto proporciona conjuntos de carteras no-dominadas ampliamente distribuidas en el frente óptimo de Pareto, lo cual provee al decisor una representación de los mejores trade-offs entre los tres criterios seleccionados. Así mismo, al maximizar el índice de Sortino por primera vez en un entorno credibilístico, se seleccionó los pesos de inversión óptimos de una estrategia de re-balanceo de 4 carteras. Seguidamente, esta estrategia de re-balanceo se contrastó con el comportamiento del ETF MILA TRC, y se demostró que la cartera re-balanceada ofrece una mejor alternativa en cuanto a la rentabilidad, la liquidez y riesgo del mercado