

Introducción al Control Óptimo y aplicación del Principio de Pontryagin al
comportamiento de un motor de Corriente Continua



Luis Mariano Serrano Malagón
Oscar Andrés Álvarez León

Universidad Pontificia Bolivariana
Escuela de ingeniería y Administración
Facultad de Ingeniería Electrónica
Bucaramanga
2009

Introducción al Control Óptimo y aplicación del Principio de Pontryagin al
comportamiento de un motor de Corriente Continua



Luis Mariano Serrano Malagón
Oscar Andrés Alvarez León

Proyecto de grado para optar por el título de:
Ingeniero Electrónico

Director del proyecto:
Edgar Barrios Urueña
Ing MSc. Ingeniería Eléctrica

Universidad Pontificia Bolivariana
Escuela de ingeniería y Administración
Facultad de Ingeniería Electrónica
Bucaramanga

2009

Nota de aceptación:

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bucaramanga, Diciembre 3 de 2009

AGRADECIMIENTOS

En la culminación de una de las etapas más importantes de mi vida, como es la terminación de mi carrera profesional, es para mí un honor agradecerle a todas las personas que contribuyeron de una forma u otra para hacer este sueño realidad.

En primer lugar, mi gratitud absoluta es para Dios mi señor y creador, quien me dio la vida, la salud y las fuerzas para sacar mis estudios adelante, en segundo lugar, mis más profundos agradecimientos a mis padres, esos seres que con su amor esfuerzo, dedicación y apoyo estuvieron siempre a mi lado dándome palabras de aliento y la confianza necesarias para estar hoy a las puertas de mi graduación. Gracias queridos padres por creer e invertir en mi.

No puedo dejar de agradecer al Doctor Barrios por su guía y apoyo en la realización de este proyecto.

Finalizo reconociendo que nada logramos solos, siempre Dios y las personas que nos aman contribuyen a su manera para que seamos mejores, una vez mas muchas gracias por su amor, apoyo y oraciones, hoy me acompañan en el alcance de un sueño del cual todos ustedes hicieron parte.

CONTENIDO

Pág.

1. INTRODUCCION.....	11
2. OBJETIVOS.....	12
2.1 Objetivo general.....	12
2.2 Objetivos específicos.....	12
3. MARCO TEORICO.....	14
3.1 Control Óptimo.....	14
3.2 Cálculo Variacional.....	15
3.3 El Principio del Máximo de Lev S. Pontryagin.....	17
3.4 Problemas del Control Óptimo.....	21
3.5 Programación Dinámica.....	22
4. DESARROLLO DEL PROYECTO.....	25
4.1 Identificación del modelo del sistema.....	25
4.2 Respuesta transitoria del motor.....	26
4.3 Función de transferencia.....	29
4.4 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO DE PONTRYAGIN.....	31
4.4.1 Problema de Control de Tiempo Mínimo.....	32
4.4.1.1 Problema de Control de Tiempo Mínimo Realimentado.....	40
4.4.2 Problema de Control Mínimo Integral.....	46
4.4.3 Problema de Control Terminal o Final.....	56
5. CONCLUSIONES.....	59

6. OBSERVACIONES.....	61
7. BIBLIOGRAFIA.....	62
8. ANEXOS.....	63
8.1 Modulo 33 – 002.....	63
8.1.1 Unidad Mecánica 33 – 100.....	64
8.1.2 Unidad de Control Analógico 33 – 110.....	67

LISTA DE FIGURAS

pág

Figura 1. Esquema del Motor D.C. y Característica Ideal del motor.....	25
Figura 2. Imagen del sistema.....	26
Figura 3. Características transitorias del motor.....	26
Figura 4. Curvas características transitorias del motor.....	27
Figura 5. Imagen de la respuesta transitoria.....	28
Figura 6. Gráfico del la respuesta transitoria.....	29
Figura 7. Respuesta transitoria del sistema.....	35
Figura 8. Diagrama de simulación del sistema en Simulink.....	36
Figura 9. Grafico de la repuesta de simulación del sistema para el Problema de control de tiempo mínimo.....	37
Figura 10. Plano de fase comparativo entre trayectorias óptimas y trayectorias no óptimas para el Problema de tiempo mínimo.....	39
Figura 11. Diagrama de bloques en SIMULINK del sistema de control de tiempo mínimo en lazo cerrado.....	40
Figura 12. Diagrama de bloques en SIMULINK del sistema controlado por PID.....	41
Figura 13. Repuesta del sistema comparativa de velocidades entre el Problema de control de tiempo mínimo y control con PID.....	43
Figura 14. Plano de fase comparativo entre el Problema de control de tiempo mínimo y el control PID.....	44
Figura 15. Gráfico comparativo de acciones de control entre el Problema de control de tiempo mínimo y el control PID.....	45
Figura 16. Diagrama de bloques en SIMULINK.....	49
Figura 17. Grafico de simulación del Problema de control mínimo integral.....	50
Figura 18. Grafico de simulación del Problema de control mínimo integral.....	51

Figura 19. Plano de fase comparativo entre el Problema de control mínimo integral y el control PID.....	52
Figura 20. Grafico comparativo de simulación de velocidades entre el Problema de control mínimo integral y el PID.....	53
Figura 21. Gráfico comparativo de simulación de la acción de control entre el Problema de control mínimo integral y el PID.....	54
Figura 22. Gráfico comparativo de simulación de las energías de las señales de control entre el Problema de control mínimo integral y el PID....	55

RESUMEN GENERAL DE TRABAJO DE GRADO

TITULO: Introducción al Control Optimo y aplicación del Principio de Pontryagin al comportamiento de un motor de corriente continua

AUTOR(ES): Luis Mariano Serrano Malagón
Oscar Andres Alvarez León

FACULTAD: Facultad de Ingeniería Electrónica

DIRECTOR: Edgar Barrios Urueña

RESUMEN

En el transcurso de la vida se presentan situaciones donde se hace necesario buscar una forma de solucionarlas de manera adecuada, según distintas necesidades, restricciones y objetivos de abordar el problema de forma que se alcance un objetivo deseado de la mejor manera posible; lo anterior se denomina optimización. La mayoría del tiempo se confunde el término optimizar un control con el de mejorarlo; al controlar cierto proceso se logra mejorar su comportamiento, en cambio al optimizar se busca es llegar al máximo rendimiento de determinado proceso. En un proceso el diseño del control se hace, usualmente, seleccionando el controlador del proceso por diversos métodos como son el uso de circuitos adelantadores, atrasadores, por asignación de polos o PID's. Este tipo de diseño busca que la respuesta del sistema satisfaga ciertas condiciones durante el transitorio y el estado estacionario, pero no se tienen en cuenta aspectos como minimización de tiempos de control, consumos de energía, reducción costos, entre otros. El problema que se quiso resolver fue el desconocimiento de las técnicas de Control Optimo y su aplicación en el diseño de controladores, esto se corrigió incursionando en el campo del Control Óptimo, estudiándolo específicamente, el Principio del Máximo de Pontryagin; además, se estudiaron los problemas clásicos de Control Optimo: Control de Tiempo Mínimo, Control Final y Control Mínimo Integral. El Control Optimo estudiado se aplicó, a modo de ejemplo, a un motor de corriente continua del módulo de servomecanismos Feedback del Laboratorio de Control de la Universidad; se diseñaron los controladores que optimizaron, para cada problema clásico, el comportamiento del motor; el cual previamente a la optimización de su comportamiento, fue caracterizado y modelado. Se realizaron simulaciones del motor y de los controladores diseñados para verificar el cumplimiento de los objetivos.

PALABRAS CLAVES: Control Óptimo, Pontryagin, Cálculo Variacional, Optimizar, Controladores, Restricción.

GENERAL ANALYSIS OF DEGREE PROYECT

TITLE: Introduction to Optimal Control and Implementation of the Pontryagin's Principle to the behavior of a DC motor

AUTHORS: Luis Mariano Serrano Malagón
Oscar Andrés Álvarez León

FACULTY: Electronic Engineering Faculty

DIRECTOR: Edgar Barrios Urueña

SUMMARY

In the course of life there are situations where it is necessary to find a way to resolve them adequately, according to different needs, constraints and objectives to board the problem so as to reach a desired objective as best as possible, the above is denominated optimization. Most of the time is confused the term optimize a control with improve it, by controlling certain process is done their improve behaviour instead when you optimize you seek to reach the maximum performance of certain process. In a Process the controller design is done, usually, selecting the process controller by various methods such as using circuit forward, backward, pole assignment or PIDs. This type of design search that the response of the system satisfies certain conditions during the transitory and stationary state but are not taken into account issues such as minimization of time control, energy consumption, cost reduction, among others. The problem that wanted to be resolve the was Ignorance of the techniques of Optimal Control and their application in the design of controllers, this was corrected by making inroads into the field of optimal control, studying specifically, the Pontryagin maximum principle, moreover, was studied the classic problems of Optimal Control: Minimum Time Control, Final Control and minimum Integral Control. The optimal control studied was applied, as an example to a DC motor from module of servomechanisms Feedback from Control Laboratory of the University: were designed controllers to optimize, for each classical problem, the motor performance, which prior to the optimization of its behaviour, was characterized and modeled. Were performed simulations of the motor and the controllers designed to verify the compliance of the objectives.

KEY WORDS: Optimal Control, Pontryagin, calculation of variations, optimize, controllers, restriction.

1. INTRODUCCION

En el transcurso de la vida se presentan situaciones y problemas en donde se hace necesario buscar una forma de solucionarlos de manera adecuada, según distintas necesidades, restricciones y objetivos de abordar un problema de forma que se alcance un objetivo deseado, de la mejor manera posible, esto es lo que se le denomina optimización. El Control Óptimo consiste en determinar cuales señales de control harán que el proceso cumpla con ciertas restricciones y paralelamente mejore su rendimiento; en otras palabras consiste en obtener el mejor resultado sujeto a ciertas condiciones dadas.

En nuestro medio, académico y aplicado, el control se trabaja mediante la metodología clásica que hace compensación con los métodos de respuesta en frecuencia y lugar de las raíces y se usa en forma generalizada en la industria el controlador PID.

Las técnicas en las que se considera la optimización de tiempos, costos y otros aspectos poco se estudian y menos se aplican. Las técnicas de optimización no son recientes ni en aspectos teóricos, los cuales datan de siglos pasados, ni en aspectos aplicados puesto que vienen siendo utilizados desde la mitad del siglo pasado.

Este Proyecto incursionó en el Control Óptimo, estudiando su teoría y aplicando sus métodos al caso de un motor de corriente continua. Se estudió en forma especial el Principio del Máximo de Lev S. Pontryagin.

Para contribuir a la difusión del Control Óptimo se ofreció un seminario introductorio sobre el tema a la comunidad Universitaria.

2. OJETIVOS

2.1 Objetivo general

- Estudiar el Principio de L. Pontryagin y aplicarlo para la optimización del comportamiento de un motor de corriente continua del módulo de servomecanismos del Laboratorio de Sistemas de Control de la Universidad.

2.2 Objetivos específicos

- Realizar una introducción al Control Óptimo, el Principio de Pontryagin y sus aplicaciones para resolver los tres problemas básicos de Control Óptimo: el Problema de Tiempo Mínimo de Control, el Problema de Control Final y el Problema de Control Mínimo Integral.
- Estudiar y obtener el modelo del motor de corriente continua, tomando un motor del módulo de servomecanismos del Laboratorio de Sistemas de Control de la Universidad y obtener el modelo de variación de velocidad en función del voltaje de armadura del motor.
- Aplicar el Principio de Pontryagin para hacer Control Óptimo del motor de corriente continua del módulo de servomecanismos del Laboratorio de Sistemas de Control de la Universidad, resolviendo los tres problemas básicos de Control Óptimo: Control de Tiempo Mínimo, el cual consiste en llevar el sistema del estado inicial x_i a un estado final deseado x_f en el menor tiempo posible; Control Final, en este se llevan las variables de estado del sistema a los valores finales especificados en un tiempo fijo; y Control Mínimo Integral, el cual consiste en llevar el sistema de un estado

inicial x_i a un estado final deseado x_f minimizando una integral y así reducir desviaciones que se presentan en ciertos procesos y sistemas.

- Divulgar el Principio de L. Pontryagin, mediante la realización de un seminario de introducción al Control Óptimo y al Principio de Pontryagin, para la comunidad universitaria.

3. MARCO TEORICO

3.1 Control Óptimo

A partir de los años sesenta se dividió la historia de la Teoría del Control; desde esta época se le empieza a llamar Teoría del Control Clásica a los trabajos presentados hasta ese momento. Luego de esto los trabajos de Bellman, en Programación Dinámica, los de trabajos de R. Kalman, en Filtrado y Análisis Algebraico de Problemas de Control, en los Estados Unidos y los trabajos de L. Pontryagin, con su Principio del Máximo, en la antigua Unión Soviética, establecieron las bases de la investigación de la Teoría del Control Moderno, conocida también como Control Óptimo.

La mayor parte del tiempo las personas confunden el término optimizar con el termino controlar o mejorar el control, lo cual son cosas completamente distintas; al controlar cierto proceso lo que se logra es que mejore su comportamiento, es decir, que sea un poco más eficaz, pero no en su totalidad; por el contrario al optimizar lo que quiere es que se llegue al máximo rendimiento de determinado proceso.

La Teoría del Control Óptimo se utiliza para desarrollar: Sistemas automotores, Manufacturas, Sistemas Robóticos, Procesos Industriales, Procesos Químicos, Sistemas Biomédicos, Modelos Socioeconómicos y sistemas Eléctricos; también en el manejo de controles ecológicos y ambientales.

El Control Óptimo y sus métodos de aplicación fueron establecidos desde siglos anteriores y desarrollados en la segunda mitad del siglo pasado, principalmente en el área de cohetes; pero, sus investigaciones y aplicaciones siguen vigentes hoy en día y son de gran importancia en la ciencia y en la tecnología a nivel mundial.

La formulación del control óptimo se basa en la utilización de variables de control que permiten maximizar o minimizar una función objetivo (índice de comportamiento) sujeta a restricciones o condiciones dadas.

Las variables de estado son utilizadas como instrumento en la optimización, estas serán medidas y usadas como una señal de control, cuando se ha logrado esto, se conocerá la trayectoria óptima de las variables de estado, a partir de la relación que las une (la ecuación).

Para poder determinar cuál de las variables que intervienen será de control, deben considerarse sólo aquéllas que afectarán a las variables de estado en su curso en el tiempo. En sí, el problema del Control Óptimo consiste o tiene por objetivo, el solucionar problemas de optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo y que son susceptibles a fuerzas externas, estableciendo una trayectoria óptima, es decir, la trayectoria que maximiza o minimiza el objetivo planteado, teniendo en cuenta la relación entre la señal de estado y la señal de control.

El control óptimo es aplicable a sistemas estables y con cierta reserva a sistemas no estables.

Los métodos usados para aplicar Control Óptimo son: La Programación Dinámica y El Principio de Pontryagin.

3.2 Cálculo Variacional

El cálculo variacional nace o surge en la antigua Grecia, pero se hizo su aparición en escena y se hizo importante en el desarrollo del cálculo del siglo XVIII.

El cálculo de variaciones o calculo variacional es una rama clásica y fundamental de las matemáticas, se puede decir que el desarrollo de esta rama ha ido a la par con el desarrollo de los conceptos centrales del análisis matemático y sus aplicaciones.

El cálculo variacional es un problema matemático el cual consiste en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional, constituyen una generalización del cálculo básico de máximos y mínimos de funcionales reales de una variable, en otras palabras, el cálculo de variaciones busca la optimización de problemas más allá del concepto clásico de máximo y mínimo.

El cálculo variacional trabaja con la maximización o minimización de funciones donde deben hallarse las funciones completas.

El primer problema relacionado con el cálculo variacional fue propuesto y resuelto por Newton en 1694 y se trataba de determinar la forma más aerodinámica posible de una superficie de revolución, es decir, la que presentara menor resistencia al movimiento.

El problema mas conocido del cálculo variacional es el de la braquistócrona, el cual fue propuesto por Bernoulli en 1696 como reto a otros matemáticos de la época, y tanto Bernoulli como Newton, L'Hopital y Leibnitz encontraron la solución correcta, este problema así como el de la catenaria y el de las geodésicas del plano tuvieron gran importancia en su época.

Los problemas fundamentales del cálculo variacional son:

Problema de Lagrange

Problema de Mayer

Problema de Bolza

Las principales aplicaciones del cálculo variacional se dan en la ciencia y en la ingeniería, entre otras están:

- Mecánica clásica
- Teoría Electromagnética
- Mecánica de fluidos
- Aerodinámica
- Control

Los problemas del cálculo variacional son de gran importancia en la actualidad, por ejemplo, diseñar la forma de un avión o un automóvil para que su resistencia al viento sea mínima, problemas de control donde se desea controlar un determinado sistema para obtener un rendimiento óptimo, entre otros.

3.3 El Principio del Máximo de Lev S. Pontryagin

En la antigüedad para las personas que presentaban problemas visuales, se convertía en un imposible acceder a la lectura de muchos textos, sobre todo si contienen material específico, como lo son los símbolos matemáticos. Pese a lo mencionado anteriormente, un joven ciego estudió matemáticas, consiguiendo resultados sobresalientes en esta disciplina, uno de ellos fue Lev Semyonovich Pontryagin. Nacido en la antigua Unión Soviética, mas precisamente en Moscú en el año de 1908.

Lev Semyonovich Pontryagin perdió la vista por un accidente a los 14 años; con la ayuda de su madre, quien le leía los manuscritos, fue capaz de adquirir una sólida formación desarrollando un particular interés por las matemáticas. Fue alumno de algunos de los grandes matemáticos rusos del momento, aportó diversas

innovaciones y aportes en diversos campos de la matemática, el mas importante o recordado es el Principio del Máximo, el cual lleva su nombre. Finalmente luego de toda una vida dedicada a la investigación Lev Pontryagin falleció en 1988.

El principio del Máximo de Pontryagin se derivó del Cálculo Variacional y este posee cierta concordancia con el Problema de Mayer. A diferencia del problema de Mayer, en el cual cada señal de control posee límites libres, en el Principio del Máximo de Pontryagin los valores de la señal de control están sujetos a ciertos límites o restricciones.

Mediante la aplicación del Principio del Máximo, la naturaleza del control y la estructura general del sistema de control óptimo pueden ser determinadas fácilmente.

Como se mencionó anteriormente, una de las principales contribuciones que se hizo al Control Optimo, fue la de Lev Semyonovich Pontryagin, a través del “Principio del Máximo”, dicho principio a grosso modo consiste en lo siguiente:

Se tiene un sistema determinado por:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad 3.3-1$$

Donde: $\dot{x}$: Es la primera derivada con respecto al tiempo

x : Es la variable de estado

u : Es la acción de control

t : El tiempo

Se desea optimizar (minimizar o maximizar) el Índice de comportamiento corresponde al funcional:

$$J = \int_a^b L(x, u, t) dt \quad 3.3-2$$

Donde: J : es el índice de comportamiento

L : Lagrangiano

a : Es el tiempo inicial

b : Es el tiempo final

El Lagrangiano es una función en términos de variables de estado, de la acción de control y del tiempo. Dicha función debe ser positiva y para el caso de sistemas físicos es común expresar el lagrangiano en función de la energía del sistema.

El problema consiste en hallar el control óptimo $u = f(x(t), t)$ que minimice el índice de comportamiento J sobre el intervalo $[a, b]$.

Para su solución el Principio de Pontryagin usa el método de los multiplicadores de Lagrange de la siguiente forma:

Primero se forma la función de Pontryagin H dada por:

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda f(x, u, t) \quad 3.3-3$$

Donde λ : Multiplicadores de Lagrange

H : Hamiltoniano

El hamiltoniano es una expresión conformada a partir del lagrangiano y la dinámica del sistema (restricciones del sistema).

El Hamiltoniano tiene dos significados, en el primero de ellos el Hamiltoniano es una función que describe el estado del sistema mecánico en términos de variables de posición y de momento, esto dentro de la mecánica clásica. Y el segundo

significado dice que el Hamiltoniano es el correspondiente al observable de energía, esto anterior se aplica en la mecánica cuántica.

En segundo lugar se resuelve la ecuación:

$$\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} = 0 \quad 3.3-4$$

Para obtener:

$$u^o = u^o(x, \lambda, t) \quad 3.3-5$$

Donde: u^o : vector óptimo de control

A continuación de esto se debe encontrar la función H óptima:

$$H^o(x, \lambda, t) = H(x, u^o, \lambda, t) \quad 3.3-6$$

Luego se debe resolver el conjunto de 2n ecuaciones canónicas diferenciales:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H^o(x, \lambda, t)}{\partial x} \quad 3.3-7$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H^o(x, \lambda, t)}{\partial \lambda} \quad 3.3-8$$

Sujetas a las condiciones de contorno dadas x (a) y x (b).

Por último se debe sustituir los resultados del paso inmediatamente anterior en la expresión de u^o para obtener la ecuación que optimiza el sistema.

Es importante conocer que la señal de control obtenida o generada, sea consecuente con el sistema analizado, ya que se presentan señales de control obtenidas analíticamente que son imposibles de implementar en sistemas reales

debido a restricciones físicas. Un índice de desempeño puede ser apropiado para un problema, pero muy inapropiado bajo las consideraciones de otro problema.

En cuanto se refiere a los sistemas no lineales, las condiciones de optimalidad que el Principio del Máximo de Pontryagin proporciona pueden ser difíciles de interpretar; de hecho, en muchas ocasiones no se puede obtener de estas condiciones una descripción completa de las trayectorias óptimas, lo cual frecuentemente requiere de un análisis basado en técnicas geométricas.

3.4 Problemas de Control Óptimo

Existen tres problemas básicos de control óptimo que son importantes, estos son: el Problema de Tiempo Mínimo de Control, el Problema de Control Final y el Problema de Control Mínimo Integral; estos tres métodos deben ser solucionados mediante el uso del Principio del Máximo de Pontryagin.

El Problema de Tiempo Mínimo de Control puede definirse como la determinación de vectores de control apropiados, para que el sistema sea llevado del estado inicial x_i a un estado final deseado x_f en el menor tiempo posible.

Un sistema de control final lleva las variables de estado del sistema a los valores especificados en un tiempo fijo. El control final dice que si las condiciones iniciales de un sistema caracterizado por un conjunto de ecuaciones diferenciales sean conocidas la respuesta futura del sistema se puede predecir en ausencia de disturbios al sistema. El estado final deseado se alcanza por acción continua del control y la predicción de las condiciones finales.

Por lo tanto el sistema es controlado hasta el valor final de las variables de salida aunque se produzcan disturbios. El principio del control final se ha aplicado al diseño de sistemas de aterrizaje de aeronaves y cohetes, entre otros.

El problema de control final puede describirse como la determinación de vectores de control admisibles, tal que en un determinado intervalo de tiempo τ , el sistema pasa de un estado inicial x_0 a un estado en el cual una, o una combinación de las variables de estado se convierte en máxima o mínima y el resto de variables de estado se mantienen dentro de los límites establecidos por la naturaleza del sistema.

El problema de control integral mínimo consiste en la optimización de un sistema con respecto a una integral; este problema se puede describir como la determinación de un vector admisible de control, de tal manera que la integral se reduzca al mínimo durante el tiempo variación y así reducir desviaciones que se presentan en ciertos procesos y sistemas.

Los tres métodos de control óptimo se pueden transformar en la optimización respecto a las coordenadas o variables de estado que es la generalización del modo de control óptimo. Los tres problemas de control: el Problema de Tiempo Mínimo de Control, el Problema de Control Final y el Problema de Control Mínimo Integral son casos especiales del problema de minimización con respecto a una coordenada. Dicha transformación se lleva a cabo mediante el procedimiento de aumentar la dimensionalidad del vector de estado mediante la adición de una nueva coordenada o variable).

3.5 Programación Dinámica

En el diseño “Divide y Vencerás” desarrollado por Bellman, se puede ver como para resolver un problema, este se divide en subproblemas independientes, los cuales se resuelven para combinar finalmente las soluciones y así resolver el problema original. El principal problema que se presenta, es la no independencia de los subproblemas obtenidos, presentándose un solapamiento entre ellos;

entonces resulta una solución no eficiente por la repetición de cálculos que conlleva. Es en estos casos donde la Programación Dinámica ofrece una solución aceptable; la eficiencia de este método de optimización, consiste en resolver los subproblemas, considerándolos encajados en un problema más grande.

Como no era de esperarse, el término Programación Dinámica tiene poco que ver con escribir un código; Richard Bellman fue el primero en dar esta definición en la década de 1950. En esa época el término programación era relacionado con la planeación, la programación dinámica fue desarrollada para planear óptimamente procesos de varias etapas.

La programación dinámica se basa en el Principio de Optimalidad enunciado por Bellman en 1957, el cual dice: *“Una secuencia óptima de decisiones de un proceso de decisión multietápico, tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado y la decisión inicial, el resto de las decisiones deben constituir una secuencia de decisiones óptima para el resto del problema, es decir cualquier subsecuencia debe ser también óptima”*.

La programación dinámica consiste en determinar las decisiones que optimizan el comportamiento de un sistema que evoluciona en el tiempo; en otras palabras, trata de encontrar la secuencia de decisiones que optimiza el comportamiento de un proceso con múltiples etapas.

Una subestructura óptima es aquella que proporciona soluciones óptimas de subproblemas y que pueden ser usadas para encontrar las soluciones óptimas de un problema general.

La manera de resolver los subproblemas mediante este método es dividiendo estos en subproblemas más pequeños, hasta alcanzar un caso relativamente sencillo, donde la solución al problema resulte trivial.

Cuando un problema tiene subproblemas superpuestos, se quiere decir que un mismo subproblema es usado para resolver diferentes problemas mayores, una mala implementación puede acabar desperdiciando tiempo recalculando las soluciones óptimas a subproblemas que ya han sido resueltos anteriormente.

Lo mencionado anteriormente se puede evitar guardando las soluciones que ya han calculado, entonces se necesita resolver el mismo problema más tarde, se puede obtener la solución de la lista de soluciones calculadas y reutilizarla. Este acercamiento al problema se llama memorización. Si se está seguro de que no se volverá a necesitar una solución en concreto, esta se puede descartar para ahorrar espacio.

En general, la programación dinámica hace uso de:

- Subproblemas superpuestos
- Subestructuras óptimas
- Memorización

Y, la solución de problemas mediante este método se basa en el llamado Principio de Optimalidad.

4. DESARROLLO DEL PROYECTO

4.1 Identificación del Modelo del Sistema

El sistema es accionado por un motor D.C. El motor es de imanes permanentes donde R_a es la resistencia de armadura. Si se aplica un voltaje V_a , una corriente I_a circula y produce la rotación del inducido, así mismo una fuerza contra electromotriz V_b se genera y hace que I_a caiga debido a que V_b es directamente proporcional a la velocidad n de rotación del inducido, por tanto, si en un motor ideal (sin pérdidas) la corriente I_a cae casi a cero entonces, $V_a = V_b$, luego el voltaje de armadura se hace proporcional a la velocidad del motor, esta forma de control se denomina “control por armadura”.

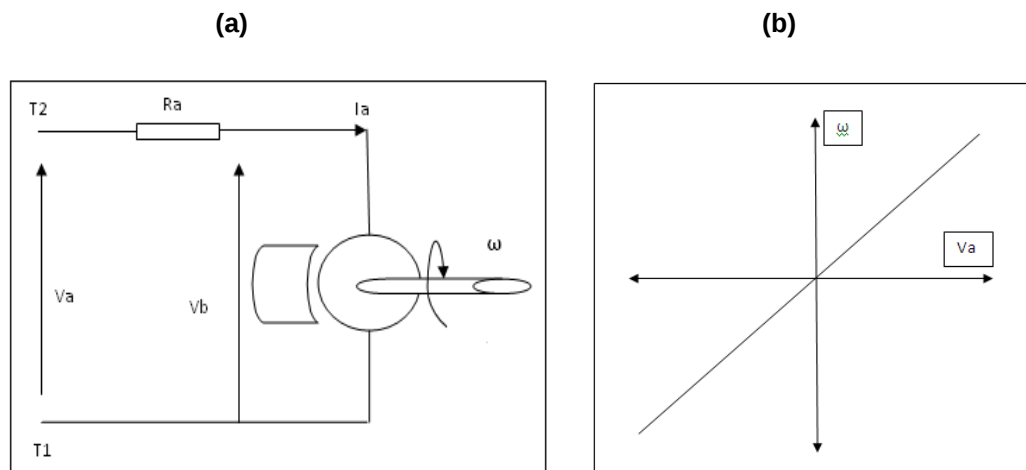


Figura 1. (a) Esquema del Motor D.C. y (b) Característica Ideal del motor

En primer lugar se procedió a identificar la función de transferencia del motor, aplicando para esto una entrada tipo escalón de 10 Voltios. Debido a la facilidad en su aplicación y utilidad en la información obtenida de las características de un sistema de control se considera la señal tipo escalón y su respuesta como elemento de estudio.

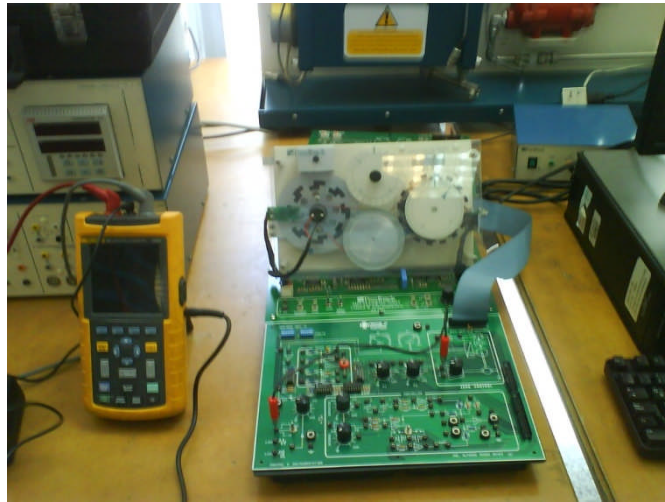


Figura 2. Imagen del sistema

4.2 Respuesta Transitoria del Motor

La velocidad del motor no puede cambiar instantáneamente debido a la inercia del inducido y a cualquier carga adicional del motor.

Si se aplica una tensión V_a en escalón circulará, inicialmente, una corriente elevada, limitada solamente por la resistencia de armadura. A medida que la velocidad aumenta se incrementa la fuerza contraelectromotriz y la corriente disminuye. En un motor ideal la corriente se reduce casi a cero como se muestra en la siguiente figura.

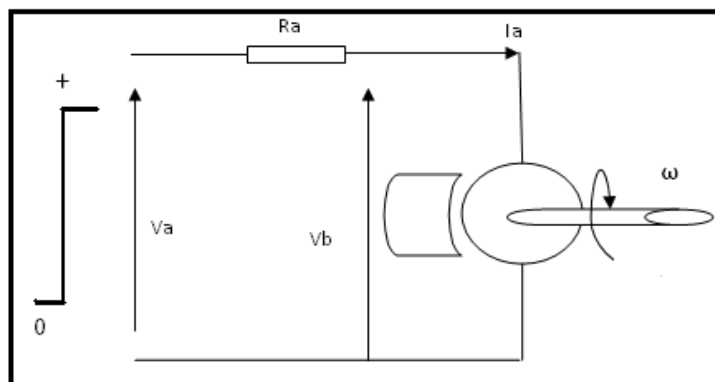


Figura 3. Características transitorias del motor

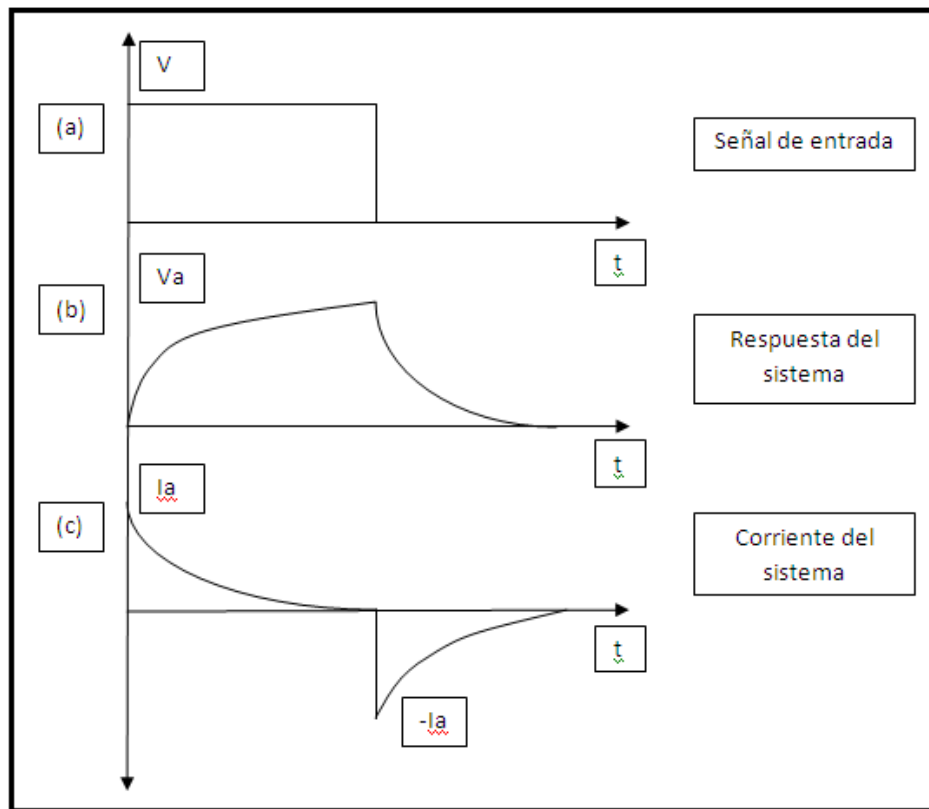


Figura 4. Curvas características transitorias del motor

Si V_a se reduce bruscamente a cero la fuerza contraelectromotriz persiste, el motor continúa girando en el mismo sentido y crea una corriente de sentido inverso al sentido inicial de la corriente, disipa energía y detiene el motor.

Una vez obtenido el transitorio del motor, se extrajo la siguiente información:



Figura 5. Imagen de la respuesta transitoria

Tiempo (mS)	Voltaje (V)
0	0
200	2.7
400	4.8
600	6
800	6.5
1000	6.7
1200	6.7
1400	6.7
1600	6.7
1800	6.7
2000	6.7

Tabla 1. Datos tomados de la respuesta transitoria del motor

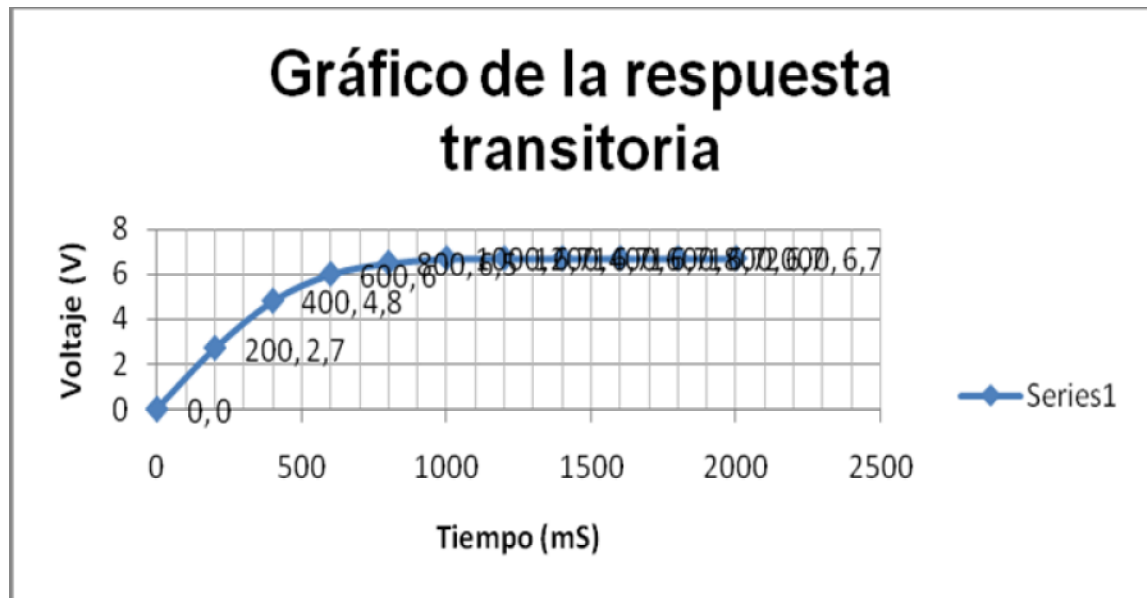


Figura 6. Gráfico del la respuesta transitoria

4.3 Función de Transferencia

Nuestro sistema posee una Función de Transferencia de la forma:

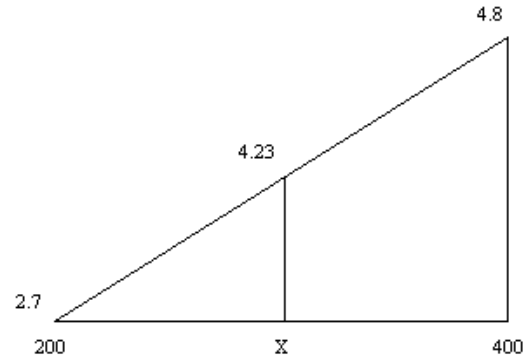
$$F = \frac{K}{Ts + 1}$$

Para aplicarla se necesito conocer τ , el cual sabemos que es el tiempo en el cual el sistema alcanza el 63.2% del voltaje.

Si 6.7 Voltios es el voltaje máximo (Voltaje en estado estacionario), para hallar el τ necesitamos conocer el 63.2% del valor del voltaje, esto equivale a 4.23 Voltios y el T hallado fue: $\tau = 345.7 \text{ mS}$.

Mediante el uso de la interpolación se obtuvo el valor de τ , como se muestra a continuación:

2.7	4.23	4.8
200	X	400



$$\frac{(400 - 200)}{(4.8 - 2.7)} = \frac{(x - 200)}{(4.23 - 2.7)}$$

$$\frac{(400 - 200) * (4.23 - 2.7)}{(4.8 - 2.7)} + 200 = x$$

$$\frac{(200 * 1.53)}{2.1} + 200 = x$$

$$\frac{306.88}{2.1} + 200 = x$$

$$145.71 + 200 = x$$

$$x = 345.71 \text{ mS} = 0.346 \text{ Segundos}$$

Como se mencionó anteriormente, el sistema tiene una función de transferencia de la forma:

$$F = \frac{K}{T_s + 1}$$

Donde:

$$K = \frac{V_{max_{ss}}}{V_{in_{ss}}} = \frac{6.7}{10.03} = 0.67$$

Entonces se obtuvo que la Función de Transferencia para el sistema fue:

$$F = \frac{0.67}{0.346s + 1}$$

Y la velocidad de estado estacionario (RPM) fue: $78.7 * 32 = 2518.4 \text{ RPM}$

4.4 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO DE PONTRYAGIN

El principio de Pontryagin se aplicó al control de un motor de corriente continua en el cual se consideraron los casos de Control de tiempo mínimo, Control Mínimo Integral y Control Terminal o Final. El motor utilizado fue el motor de corriente continua del Módulo de Servomecanismos cuya función transferencia se obtuvo el apartado 4.3. A continuación se describe el proceso de solución de los tres casos de control óptimo.

La función de transferencia:

$$F = \frac{0.67}{0.346s + 1}$$

La cual se lleva a la ecuación de estado obteniendo la expresión:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t)$$

Donde: a y b son deducidos posteriormente.

La ecuación de estado es una ecuación general para un sistema lineal de primer orden.

Lo anterior se logra de la siguiente manera:

$$\frac{0.67}{0.346s + 1} = \frac{\omega(s)}{u(s)}$$

Donde: $\omega(s)$ = Corresponde a la salida del sistema

$u(s)$ = Corresponde a la entrada del sistema

Continuando:

$$0.67 u(s) = 0.346s \omega(s) + \omega(s)$$

$$0.67 u(t) = 0.346 \frac{d\omega}{dt} + \omega(t)$$

$$\omega(t) + 0.346 \frac{d\omega}{dt} = 0.67 u(t)$$

Reemplazando:

$$x = \omega \quad \dot{x} = \frac{d\omega}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$x(t) + 0.346\dot{x}(t) = 0.67 u(t)$$

Reorganizando:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{0.346} x(t) + \frac{0.67}{0.346} u(t)$$

4.4.1 Problema de Control de Tiempo Mínimo:

Si se desea alcanzar una velocidad angular dada cualquiera en un motor de corriente continua en el menor tiempo posible desde una velocidad angular inicial dada arbitraria, es necesario representar el sistema empleando una ecuación lineal de primer orden:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \quad 4.4.1-1$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$ y sujeto a $|u| \leq 10$ y queriendo minimizar el tiempo T en que alcanza el estado final $x(T) = x_f$.

El tiempo T que le toma al sistema ir del estado inicial al estado final se puede expresar en forma integral de la siguiente manera:

$$J = T = \int_0^T 1 dt \quad 4.4.1-2$$

Donde J es el funcional para minimizar T .

Como se estableció en el apartado 4.3, el Hamiltoniano esta conformado por el lagrangiano más las restricciones del sistema, entonces el Hamiltoniano para este caso es:

$$H = 1 + \lambda(-ax + bu) \quad 4.4.1-3$$

De donde se derivan las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\dot{x} = H_\lambda = (-ax + bu) \quad 4.4.1-4$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda \quad 4.4.1-5$$

$$0 = H_u = b\lambda \quad 4.4.1-6$$

De la derivada del Hamiltoniano con respecto a la entrada de control $u(t)$ se obtiene el valor de $u(t)$ que minimiza el funcional.

Como no aparece $u(t)$ explícitamente en la expresión $0 = b\lambda$ es necesario tener en cuenta que el signo de u debe ser opuesto al de $b\lambda$ de forma que minimice el Hamiltoniano, entonces:

$$u^*(t) = -Sgn(b\lambda) \quad 4.4.1-7$$

Remplazando el valor de $u(t)$ en la ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - Sgn(b\lambda) \quad 4.4.1-8$$

A partir de la ecuación canónica $\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda$ se tiene la ecuación diferencial:

$$\dot{\lambda} = a\lambda \quad 4.4.1-9$$

Que tiene por solución:

$$\lambda(t) = \lambda(T)e^{-a(T-t)} \quad 4.4.1-10$$

El valor de la condición final $\lambda(T)$ se obtiene de considerar la condición de transversalidad:

$$1 + b\lambda u(t) = 1 + b|\lambda| \forall t \in [0, T] \quad 4.4.1-11$$

Y tomando el caso específico para $x(T) = 0$ se obtiene el valor para $\lambda(T)$:

El $\lambda^*(t)$ que determina una entrada u optima viene dada por

$$u^*(t) = -Sgn(b e^{-a(T-t)}) \quad 4.4.1-12$$

La cual se aplica hasta T y luego vale cero. El valor de T se obtiene de calcular el tiempo que le toma al estado $x(t)$ el llegar al estado final.

Para el caso en que se desee realizar la acción de control en lazo cerrado es necesario determinar el valor en que la variable de estado x alcanza el valor final deseado y suspender la acción de control en ese instante.

A continuación se muestra el gráfico de la respuesta transitoria del sistema:

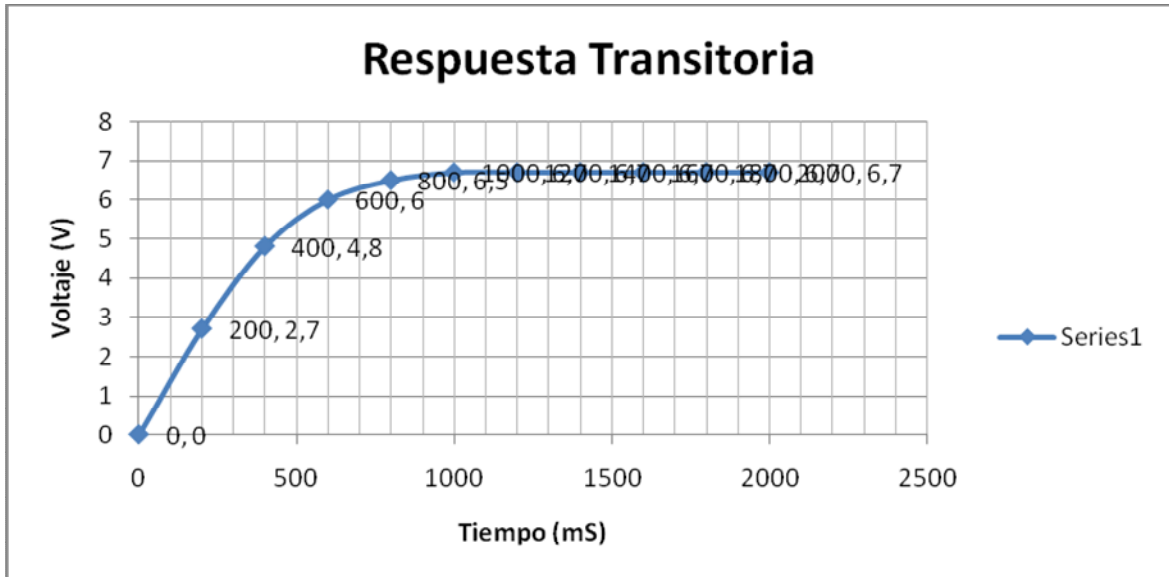


Figura 7. Respuesta transitoria del sistema

De la gráfica de la respuesta de la velocidad ante un escalón de voltaje se obtiene los parámetros $\tau = 345mS$ y $k = 0,668$ de donde:

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{\tau}\omega(t) + \frac{k}{\tau}u(t) \quad 4.4.1-13$$

- **Simulación en Simulink de Matlab del Problema de Control de Tiempo Mínimo**

Se realizó la simulación del Problema de tiempo mínimo usando Simulink según el esquema que se muestra en la Figura 8.

% parámetros del modelo

thao = 0.345;

k=251.8;

x= 503.6 rpm;

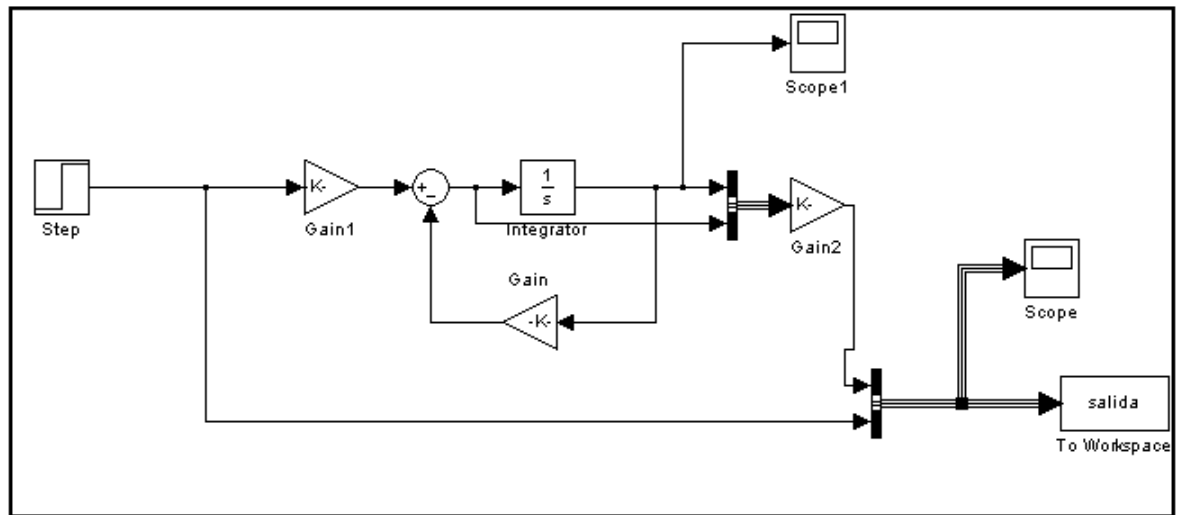


Figura 8. Diagrama de simulación del sistema en Simulink

A continuación se muestra el resultado de la simulación para el caso en que el estado inicial $\omega = 1259rpm$ y el estado final es $\omega = -125.9rpm$ alcanzado en el tiempo mínimo $T = 0.398$.

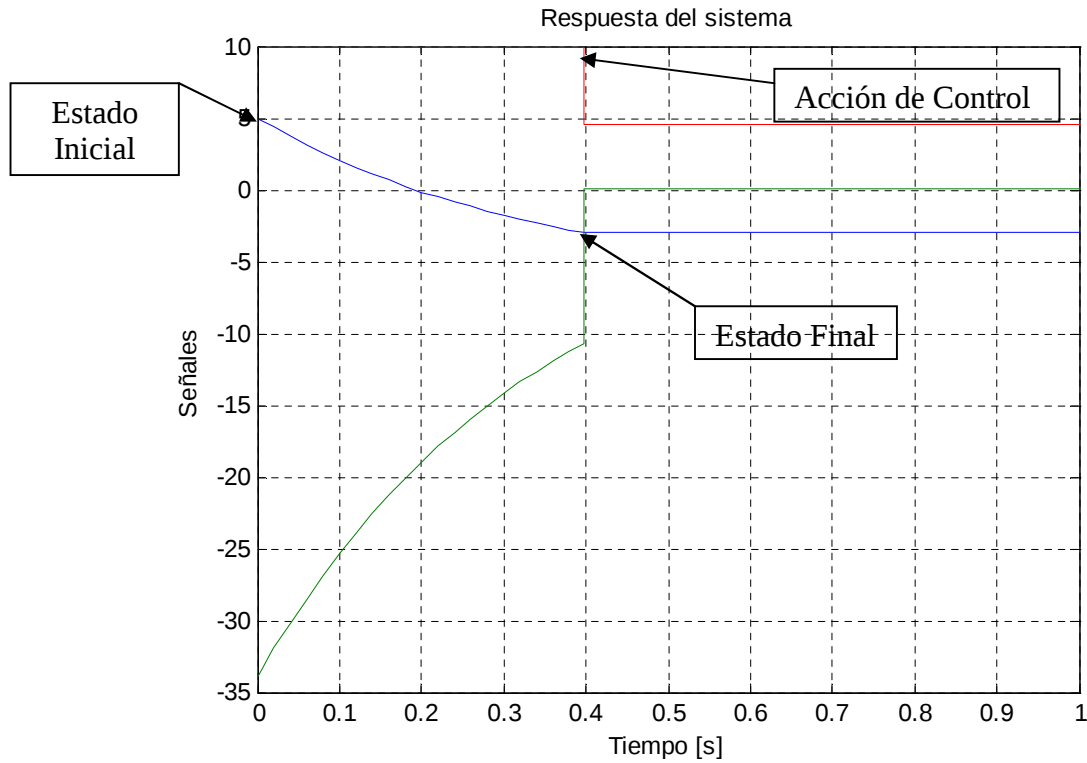


Figura 9. Grafico de la repuesta de simulación del sistema para el Problema de control de tiempo mínimo.

En la Figura 9 se observa en azul el comportamiento de la velocidad angular del sistema hasta llegar al estado final deseado donde; se puede ver que, al llegar al estado final propuesto, la acción de control conmuta para que el sistema permanezca en este estado. Como era de esperarse para alcanzar el estado final en el menor tiempo es necesario aplicar la acción de control máxima limitada tan sólo por las restricciones en la acción de control.

El tiempo T mínimo donde se alcanza el estado final se determina resolviendo la ecuación diferencial:

$$\dot{\omega}(t) = -\frac{1}{\tau}\omega(t) + \frac{k}{\tau}U_{\max} \quad \text{con} \quad \omega(0) = \omega_{ini} \text{ y } \omega(T) = \omega_{fin} \quad 4.4.1-14$$

Con solución:

$$\omega(t) = \omega(t \rightarrow \infty) + (\omega(t \rightarrow 0) - \omega(t \rightarrow \infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 4.4.1-15$$

Entonces

$$\omega_{fin} = \omega(T) = k * U_{max} + (\omega_{ini} - k * U_{max})e^{-\frac{T}{\tau}} \quad 4.4.1-16$$

Despejando se obtiene:

$$T = \tau * Ln \left(\frac{\omega_{ini} - k * U_{max}}{\omega_{fin} - k * U_{max}} \right) \quad 4.4.1-17$$

La ley de control en lazo abierto viene dada por:

$$u^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} + U_{max} & X_f > X_{in} \quad \wedge \quad t < \tau * Ln \left(\frac{\omega_{ini} - k * U_{max}}{\omega_{fin} - k * U_{max}} \right) \\ - U_{max} & X_f < X_{in} \quad \wedge \quad t < \tau * Ln \left(\frac{\omega_{ini} - k * U_{max}}{\omega_{fin} - k * U_{max}} \right) \\ x_f / k & t \geq \tau * Ln \left(\frac{\omega_{ini} - k * U_{max}}{\omega_{fin} - k * U_{max}} \right) \end{array} \right.$$

A continuación se construyó una representación geométrica de las trayectorias del sistema en el denominado plano de fase conformado por las variables de estado del sistema eliminando el parámetro de la variable independiente t . Para el sistema en particular se presenta el retrato de fase del sistema para cuatro pares de condiciones iniciales y finales distintas.

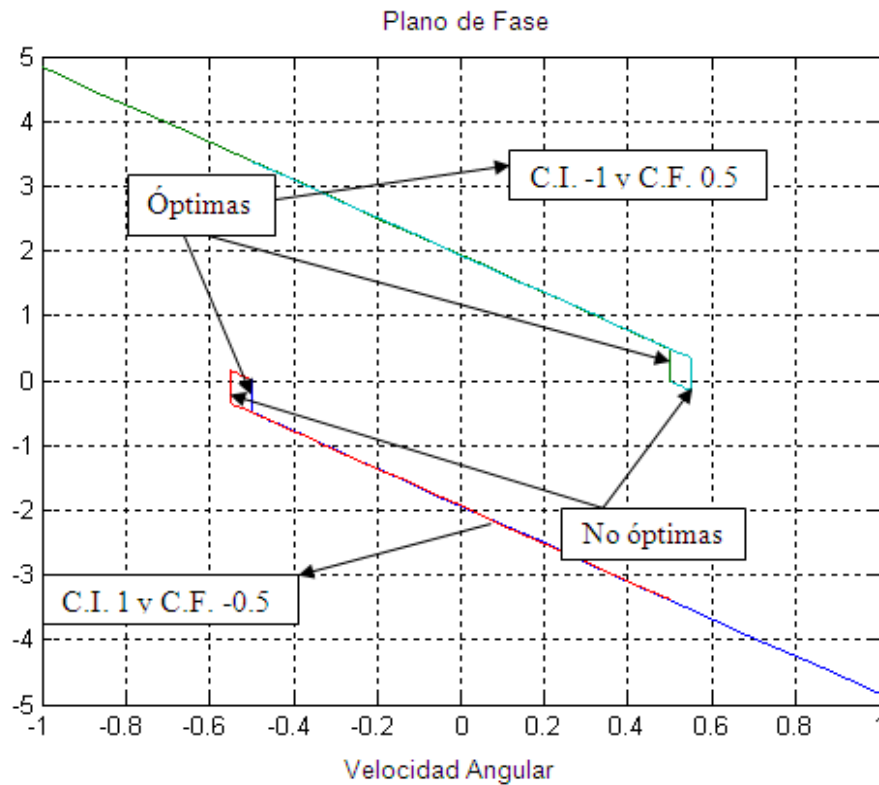


Figura 10. Plano de fase comparativo entre trayectorias óptimas y trayectorias no óptimas para el Problema de tiempo mínimo

En la Figura 10 se presenta el plano de fase en el que se observa el efecto de realizar la conmutación de la acción de control en un tiempo diferente en el que alcanza el estado final y se compara con la conmutación justo al alcanzar el estado final; es entonces posible concluir que el tiempo mínimo se obtiene en el segundo caso ya que inmediatamente que se alcanza el estado final el sistema se detiene, a diferencia del primero, en el que sobrepasa el estado final y debe volver. También es importante tener en cuenta que para cualquier otro valor de

acción de control que cumpla la restricción la pendiente será menor y tomará mayor tiempo en alcanzar el estado final.

4.4.1.1 Problema de Control de Tiempo Mínimo realimentado:

Se implementó el controlador de acción de control Todo o Nada para obtener un tiempo mínimo, empleando un interruptor que permite la conmutación entre la acción de control máxima permitida por la restricción en la acción de control y el valor necesario para garantizar la permanencia en el estado final deseado.

- **Simulación en Simulink de Matlab del Problema de Control de Tiempo Mínimo Realimentado**

Se realizó la simulación del Problema de tiempo mínimo usando Simulink según el esquema que se muestra en la Figura 11.

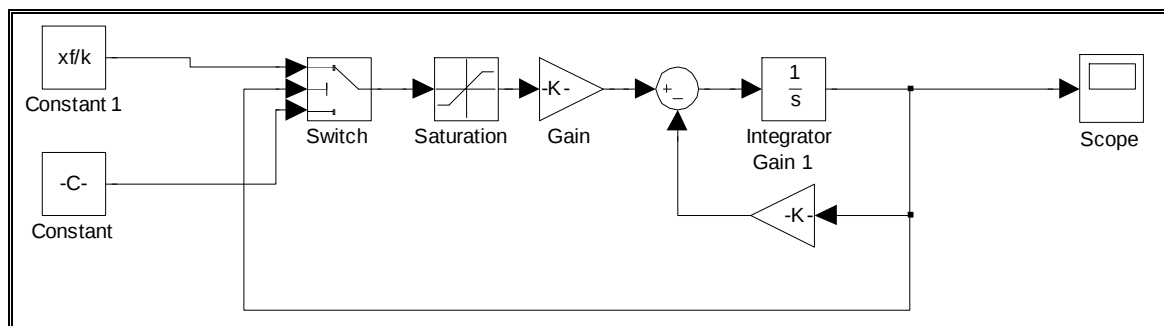


Figura 11. Diagrama de bloques del sistema de tiempo mínimo en lazo cerrado.

En el diagrama de bloques de la Figura 11 la acción de control es máxima y viene dada por el valor de C que es $\pm U_{max}$ hasta que el estado alcanza el valor final dado por la retroalimentación que efectúa la conmutación a un valor constante que garantice la permanencia en el estado final.

Para efectos de comparar las respuestas del sistema de control óptimo de tiempo mínimo con una acción de control no óptima se implementa el siguiente controlador PID.

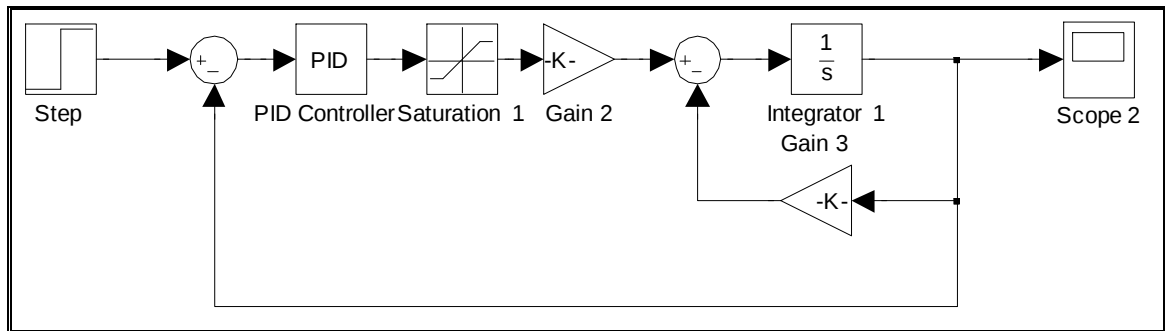


Figura 12. Diagrama de bloques en SIMULINK del sistema controlado por PID.

➤ Diseño del PID

Los cálculos del PID se hicieron a partir del método de Ziegler Nichols. En donde:

Ziegler-Nichols			
Controller Type	K_c	τ_I	τ_D
P	$\frac{1}{K} \left(\frac{\tau}{\alpha} \right)$	—	—
PI	$\frac{.9}{K} \left(\frac{\tau}{\alpha} \right)$	3.33α	—
PID	$\frac{1.2}{K} \left(\frac{\tau}{\alpha} \right)$	2.0α	0.5α
Recommended Range of Applicability $1.0 < (\alpha/\tau) < 0.1$			

Conociendo los valores de:

Alpha = 0.05

Thao = 0.345

k = 0.668

Y tomando como base la tabla del método se obtienen las variables:

$$k_c = (1.2 / k) * (thao / \alpha) = (1.2 / 0.668) * (0.345 / 0.05) = 12.3952$$

$$t_i = 2 * \alpha = 2 * 0.05 = 0.1$$

$$t_d = 0.5 * \alpha = 0.5 * 0.05 = 0.025$$

$$k_i = k_c / t_i = 12.3952 / 0.1$$

$$k_d = k_c * t_d = 12.3952 * 0.025 = 0.3099$$

Es posible reescribir la ley de control de lazo realimentado en términos del estado del sistema (ω) y viene dada por:

$$u^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} +U_{\max} & \omega_{fin} > \omega \\ -U_{\max} & \omega_{fin} < \omega \\ \omega_f / k & \omega_{fin} = \omega \end{array} \right\}$$

A continuación se muestra el resultado de las simulaciones realizadas:

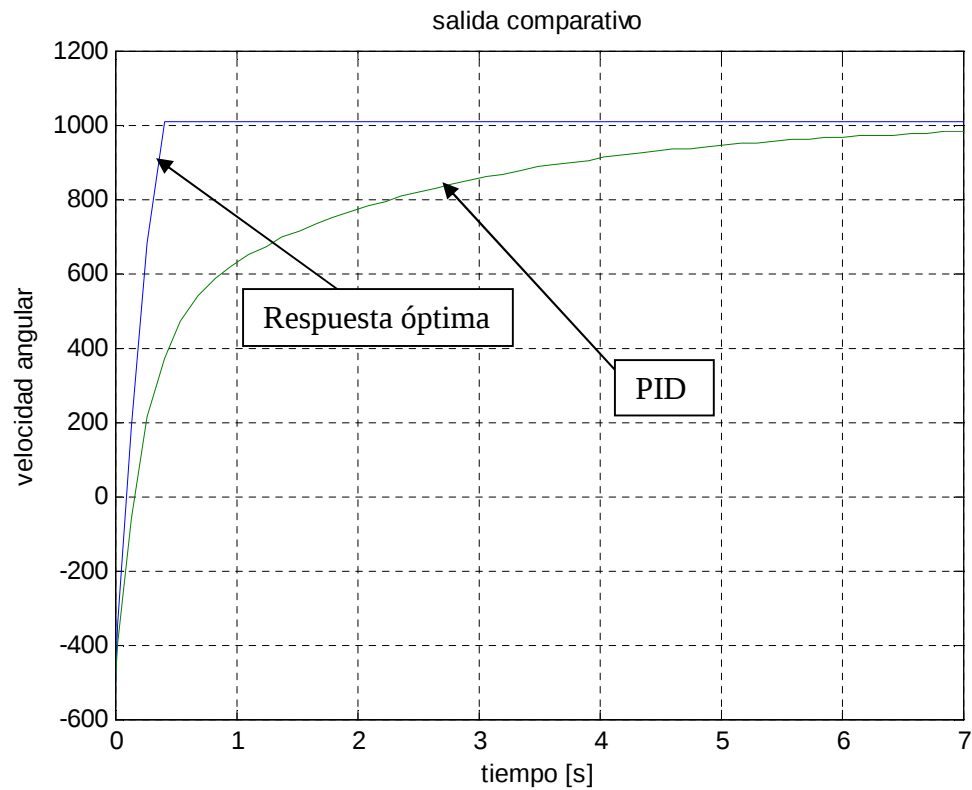


Figura 13. Respuesta del sistema comparativa de velocidades entre el Problema de control de tiempo mínimo y control con PID

La Figura 13 muestra las respuestas temporales del sistema de control de tiempo mínimo y del PID para condiciones de velocidad inicial de -503.6 rpm y final de 1007.2 rpm. Es evidente el efecto de aplicar la máxima acción de control posible produce la mayor pendiente de la respuesta al escalón del controlador óptimo (en azul).

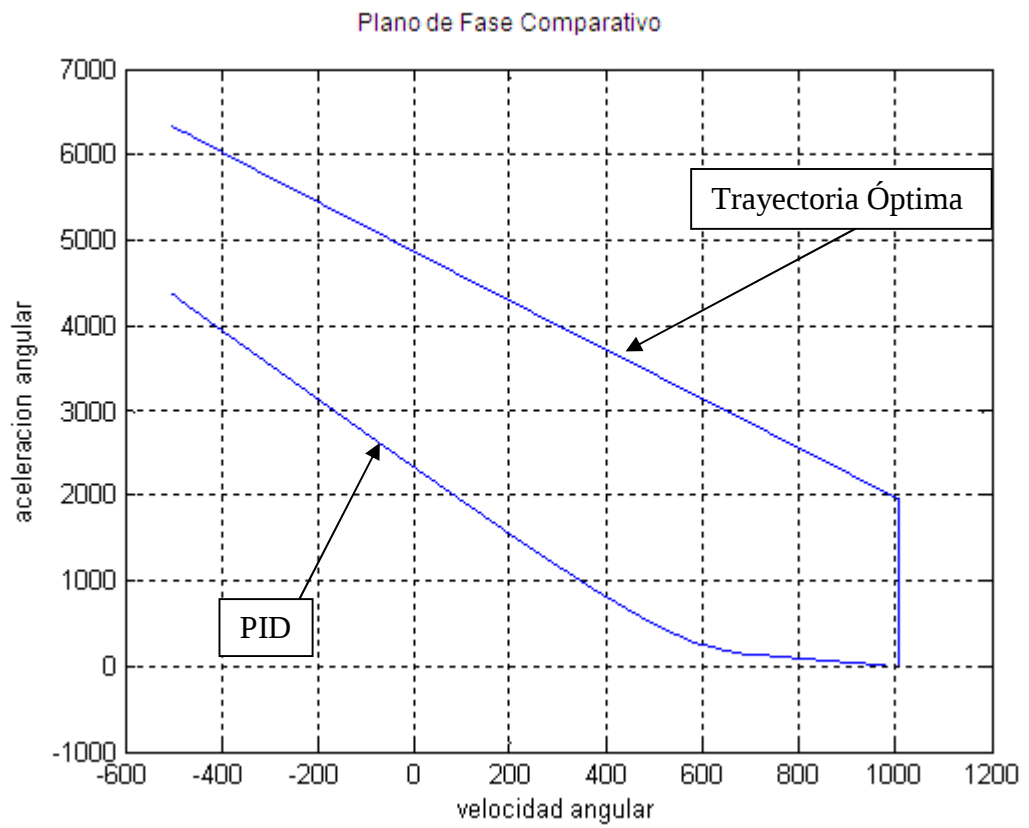


Figura 14. Plano de fase comparativo entre el Problema de control de tiempo mínimo y el control PID

La Figura 14, que muestra el retrato de fase, confirma los resultados obtenidos en la Figura 13 al ver el comportamiento de la trayectoria del sistema con el controlador PID al acercarse al valor final (velocidad angular igual a 755.4 rpm).

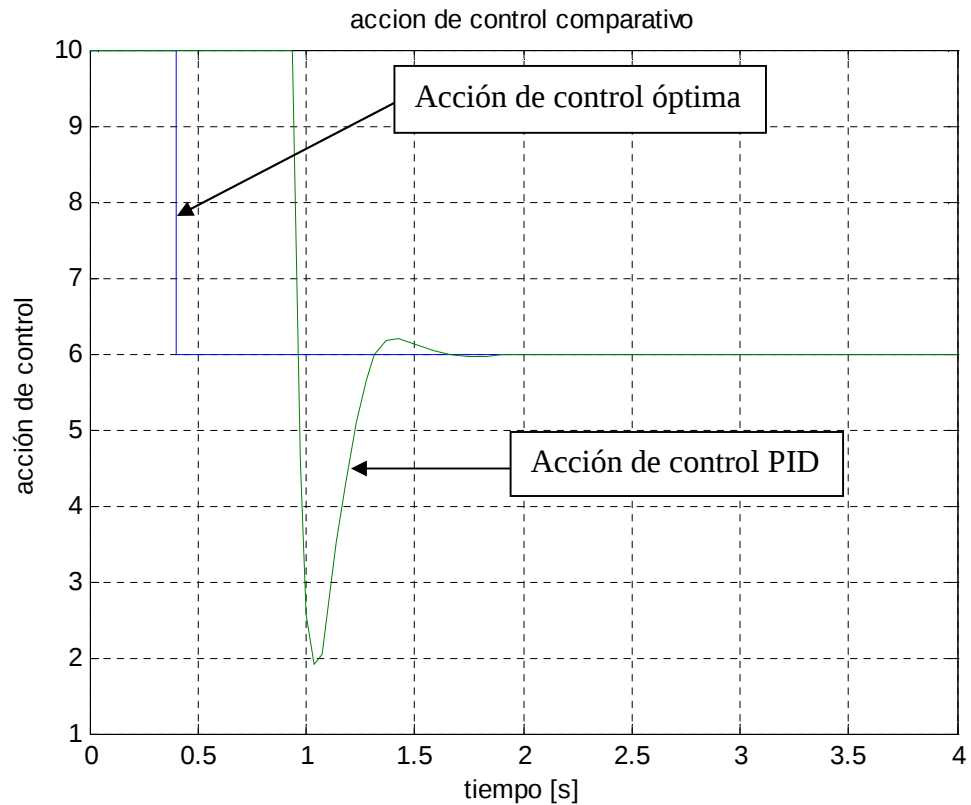


Figura 15. Gráfico comparativo de acciones de control entre el Problema de control de tiempo mínimo y el control PID

De la Figura 15 se concluye que la acción del controlador PID, que es función del error, es relativamente suave a diferencia de la acción de control óptima la cual es máxima en la medida de las restricciones de la acción de control y se suspende justo al alcanzar el estado final.

La acción de control tras alcanzar el estado final se escogió de modo que la aceleración angular se haga instantáneamente nula para sostener el valor del estado final como condición de equilibrio, en general en la literatura para obviar el este valor toma como estado final el valor cero.

4.4.2 Problema de Control Mínimo Integral:

Dado el sistema lineal de primer orden (Ver ecuación 4.4.1-1):

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \quad 4.4.2-1$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$ y estado final $x(T) = x_f$ restringido a minimizar la energía aplicada a la señal de entrada. Una expresión para la energía de la acción de control viene dada por:

$$E = J = \int_0^T u^2 dt \quad 4.4.2-2$$

Entonces el Hamiltoniano de acuerdo con lo establecido en el apartado 3.3, para problema de optimización viene dado por:

$$H = u^2 + \lambda(-ax + bu) \quad 4.4.2-3$$

Del cual se derivan las ecuaciones canónicas:

$$\dot{x} = H_\lambda = (-ax + bu) \quad 4.4.2-4$$

$$\dot{\lambda} = -H_x = a\lambda \quad 4.4.2-5$$

$$0 = H_u = u + b\lambda \quad 4.4.2-6$$

De la última ecuación canónica es posible obtener la función $u(t)$ que minimiza el Hamiltoniano:

$$u(t) = -b\lambda \quad 4.4.2-7$$

Donde $\lambda(t)$ es función del tiempo y corresponde a la estimación de estados que son posibles de obtener con un observador de estados para el caso de control en lazo cerrado o se puede obtener una expresión de solucionar la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\lambda} = a\lambda \quad 4.4.2-8$$

Con solución:

$$\lambda(t) = \lambda(T)e^{-a(T-t)} \quad 4.4.2-9$$

Restando por determinar el valor de $\lambda(T)$ que es posible de obtener a partir de las condiciones inicial y final de la ecuación de estado, sustituyendo el valor de $u(t)$:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - b^2\lambda(t) \quad 4.4.2-10$$

O

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - b^2\lambda(t)e^{-a(T-t)} \quad 4.4.2-11$$

Solucionando la ecuación diferencial empleando el método de Laplace:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s+a} - \frac{b^2\lambda(T)e^{-a(T)}}{(s+a)(s-a)} \quad 4.4.2-12$$

Volviendo al dominio del tiempo:

$$x(t) = x(0)e^{-at} - b^2\lambda(T)e^{-aT} \sinh(at) \quad 4.4.2-13$$

Considerando la condición inicial $x(0) = x_0$ y la condición final $x(T) = x_f$ es posible obtener la expresión que incluye $\lambda(T)$:

$$x_f = x(T) = x(0)e^{-aT} - \frac{b^2}{2a} \lambda(T)(1 - e^{-2aT}) \quad 4.4.2-14$$

Despejando se obtuvo:

$$\lambda(T) = \frac{2a(x(0)e^{-aT} - x_f)}{b^2(1 - e^{-2aT})} \quad 4.4.2-15$$

Sustituyendo se obtuvo el valor de $\lambda^*(t)$ óptimo:

$$\lambda^*(t) = -\frac{2a(x(T)e^{-aT} - x(0)e^{-2aT})}{b^2(1 - e^{-2aT})} e^{at} \quad 4.4.2-16$$

El valor de $\lambda^*(t)$ óptimo se substituyó en $u(t) = -b\lambda$ para obtener el $u(t)$ óptimo:

$$u^*(t) = \frac{2a(x(T)e^{-aT} - x(0)e^{-2aT})}{b(1 - e^{-2aT})} e^{at} \quad 4.4.2-17$$

- **Simulación en Simulink de Matlab del Problema de Control Mínimo Integral**

Se realizó la simulación del Problema de tiempo mínimo usando Simulink según el esquema que se muestra en la Figura 16.

% parámetros del modelo

Thao = 0.345;

k = 251.8;

%Especificación de los valores inicial y final

$X_0 = 755.4$ rpm;

$X_f = -251.8$ rpm;

T = 9;

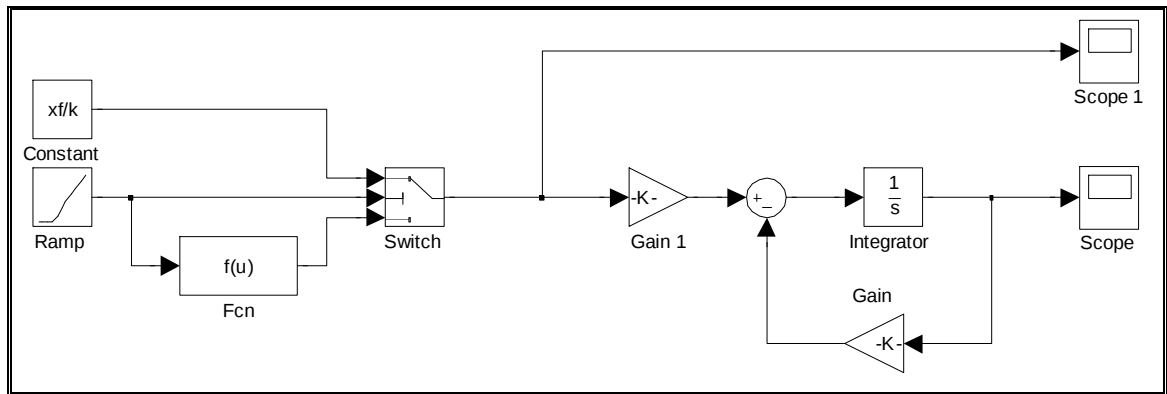


Figura 16. Diagrama de bloques en SIMULINK

En la Figura 16 la función rampa de pendiente unitaria sirve como referencia de la variable independiente t (tiempo); se emplea para el cálculo de la expresión de $u^*(t)$ óptima por el bloque $f(u)$ en lazo abierto. La conmutación de la acción de control se da para el valor $t = T$ de la variable independiente t , por un valor de referencia de modo tal que la aceleración angular se haga instantáneamente nula para sostener el valor del estado final en condición de equilibrio dada por la constante x_f/k .

La ley de control viene dada por:

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{2a(x(T)e^{-aT} - x(0)e^{-2aT})}{b(1 - e^{-2aT})} e^{at} & t < T \\ \omega_f / k & t \geq T \end{cases}$$

A continuación se presenta el resultado de las simulaciones realizadas:

% Parámetros inicial y final

$$X_0 = 755.4 \text{ rpm};$$

$$X_f = -251.8 \text{ rpm};$$

$$T = 9;$$

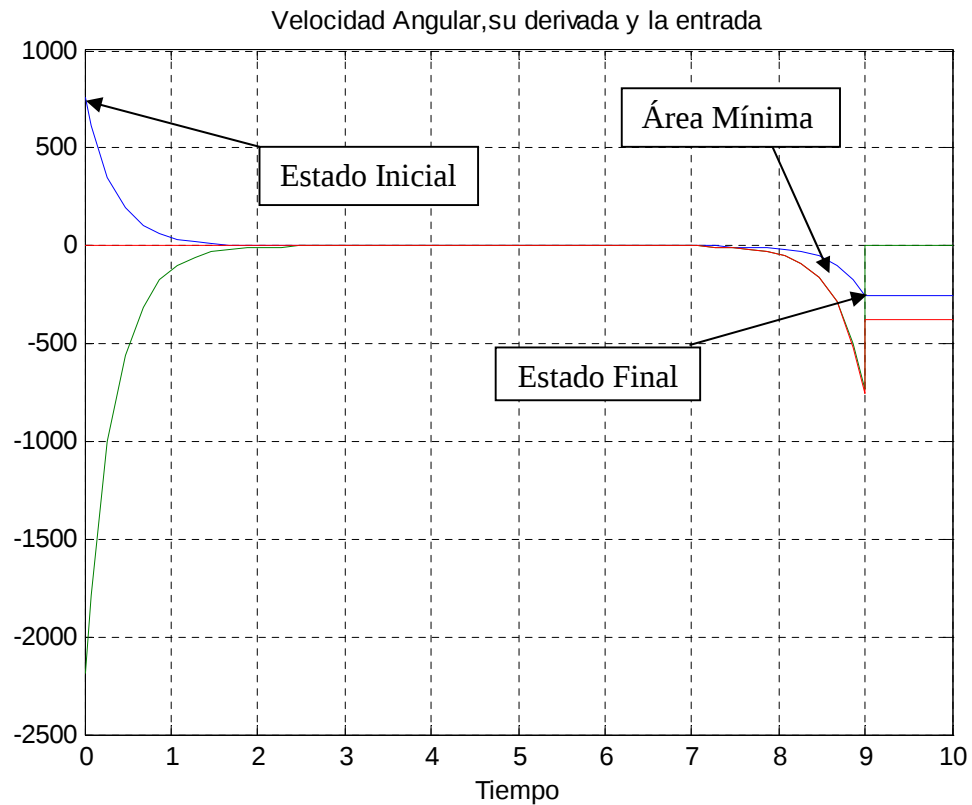


Figura 17. Grafico de simulación del Problema de control mínimo integral.

En la Figura 17 se observa que justo después del valor de estado inicial de la velocidad (azul) se aplica una acción de control nula (rojo) que garantiza el valor mínimo posible de energía aplicada que permite alcanzar el valor de velocidad cero y se mantiene en este valor hasta el momento justo en que se debe aplicar una acción de control del menor valor posible durante el menor tiempo para garantizar las restricción integral del problema de control.

A continuación se muestra el resultado de la simulación para los siguientes parámetros:

% Parámetros inicial y final

$X_0 = -503.6$ rpm;

$X_f = 755.4$ rpm;

$T = 6$;

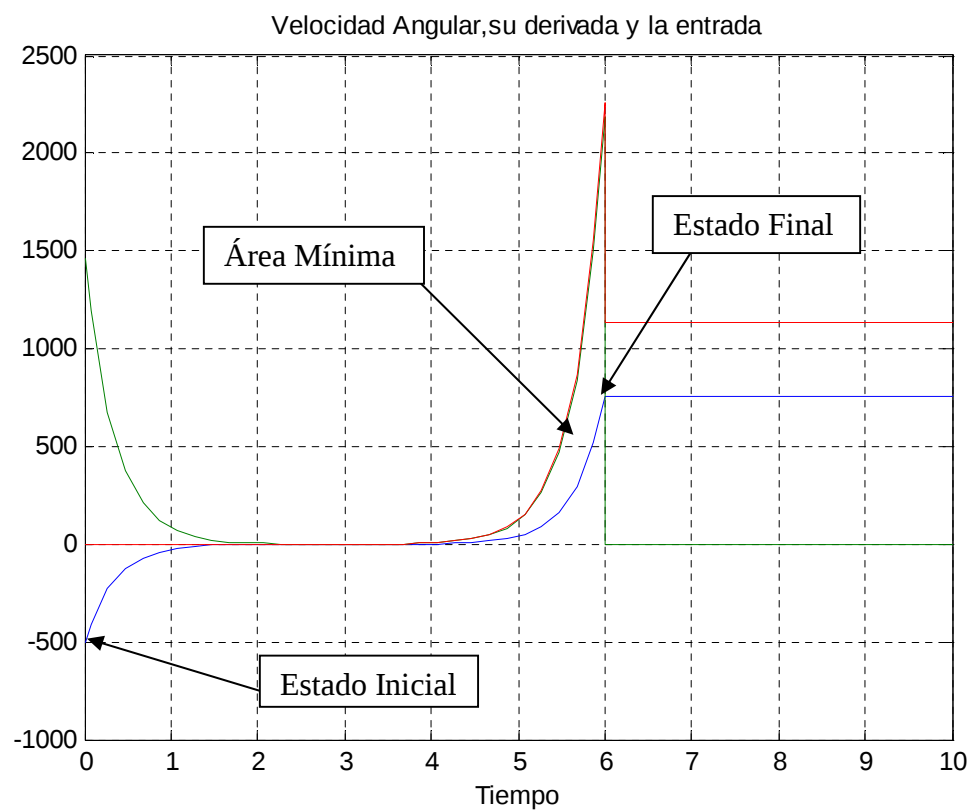


Figura 18. Grafico de simulación del Problema de control mínimo integral.

En la Figura 18 se observa el comportamiento de la acción de control para un valor de estado inicial y final de mismo signo pero de diferente valor a diferencia del caso anterior donde se ejemplifica condiciones inicial y final de diferente signo. En ambos caso es posible observar la misma tendencia en la acción de control explicada en el anterior párrafo.

Para propósitos de comparación de la respuesta de un sistema de control mínimo integral con una no óptima se muestran los retratos de fase de la acción de control mínima integral en lazo abierto contra una acción de control PID en lazo cerrado.

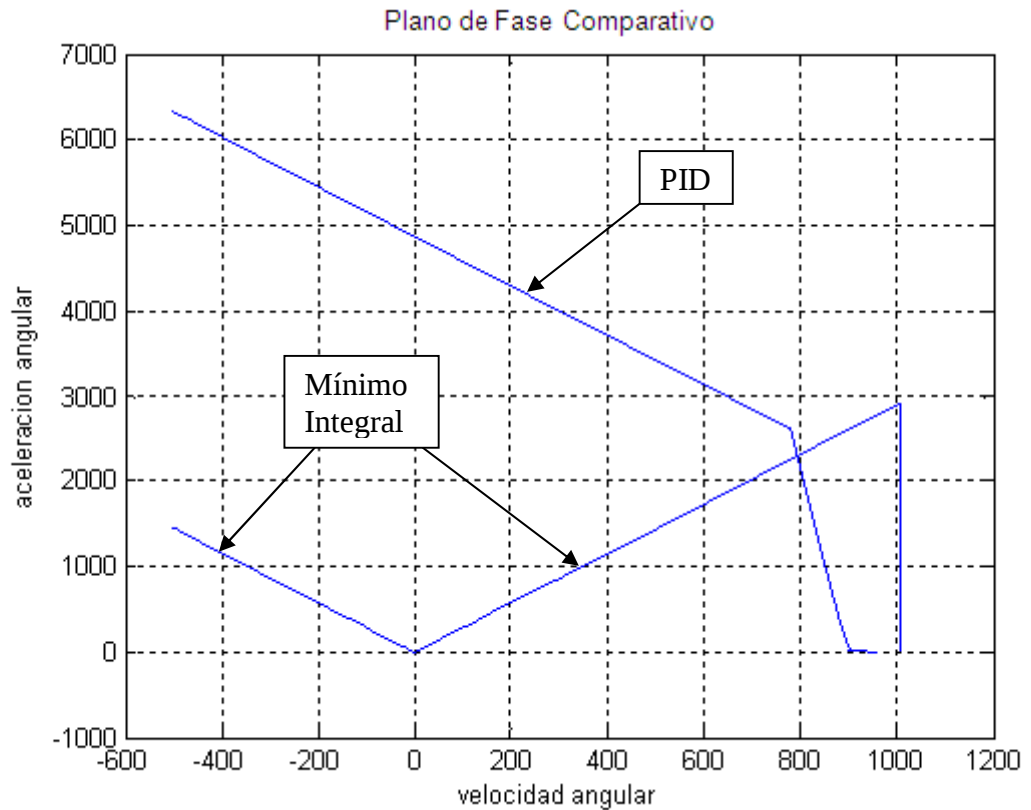


Figura 19. Plano de fase comparativo entre el Problema de control mínimo integral y el control PID

La Figura 19 muestra la acción de control mínimo integral que busca permanecer la mayor parte del tiempo en el origen mientras que en el PID en todo momento se tienen valores de las variables de estado diferentes de cero haciendo que siempre deba haber una acción de control no nula.

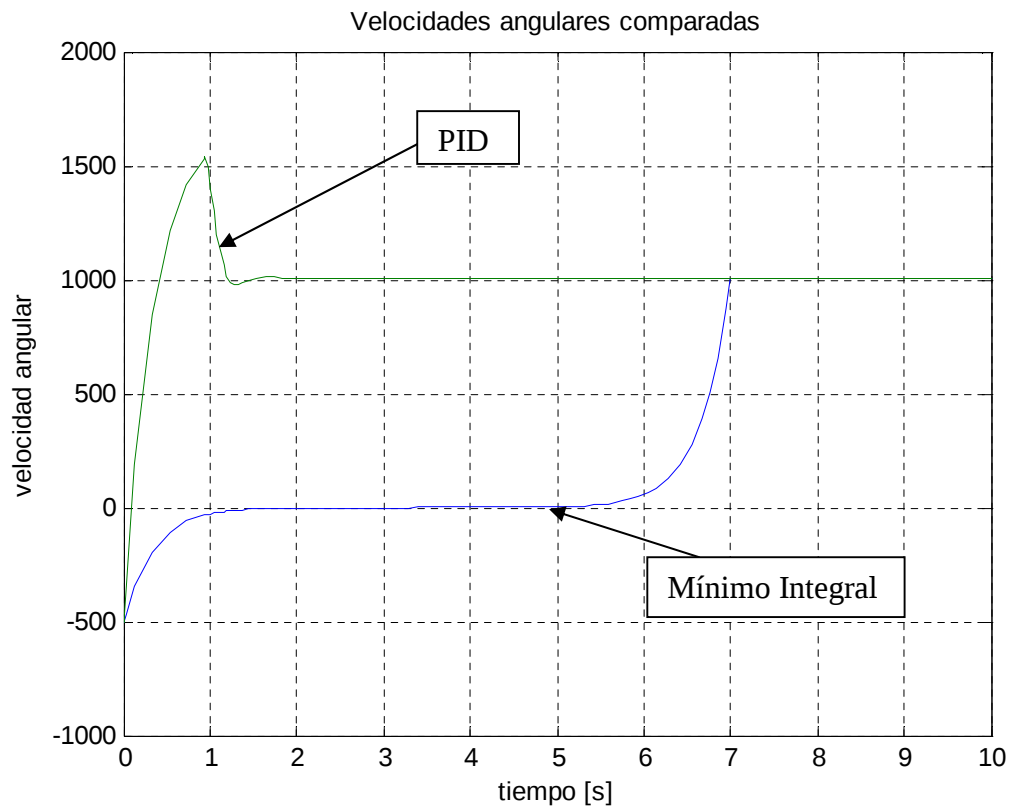


Figura 20. Grafico comparativo de simulación de velocidades entre el Problema de control mínimo integral y el PID

La Figura 20 muestra la respuesta temporal del sistema de control mínimo integral y el PID para condiciones inicial de -503.6 rpm y final de 1007.2 rpm. Es posible ver que el controlador mínimo integral busca mantener la velocidad en valores nulos por el mayor tiempo posible a diferencia de la acción de control PID, el cual en todo momento busca alcanzar el valor final.

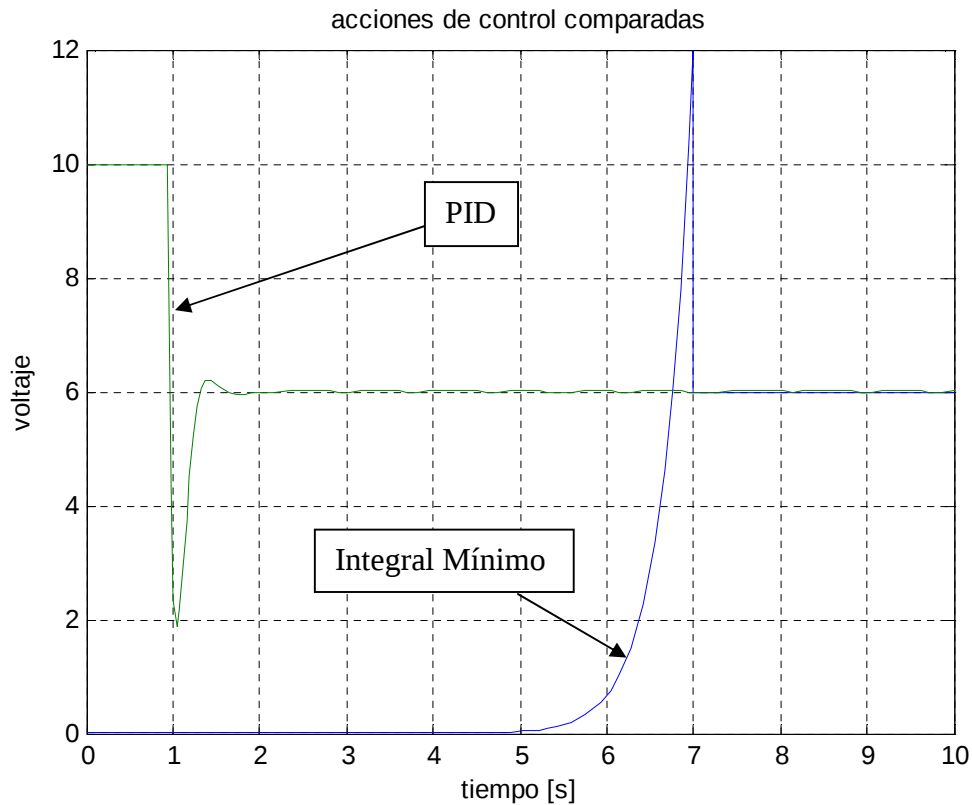


Figura 21. Gráfico comparativo de simulación de la acción de control entre el Problema de control mínimo integral y el PID

De la Figura 21 es posible concluir a partir de las acciones de control el control mínimo integral (azul) permanece nula y solo se aplica realmente para llevar al sistema de un estado de equilibrio con variables de estado nula al estado final en el tiempo T garantizando así la menor área posible bajo la curva del cuadrado de la acción de control a diferencia de la acción de control PID.

A continuación se muestra la grafica de simulación realizada de las energías de manera comparativa, tanto de la señal del PID, como de la señal óptima de control obtenida mediante la optimización.

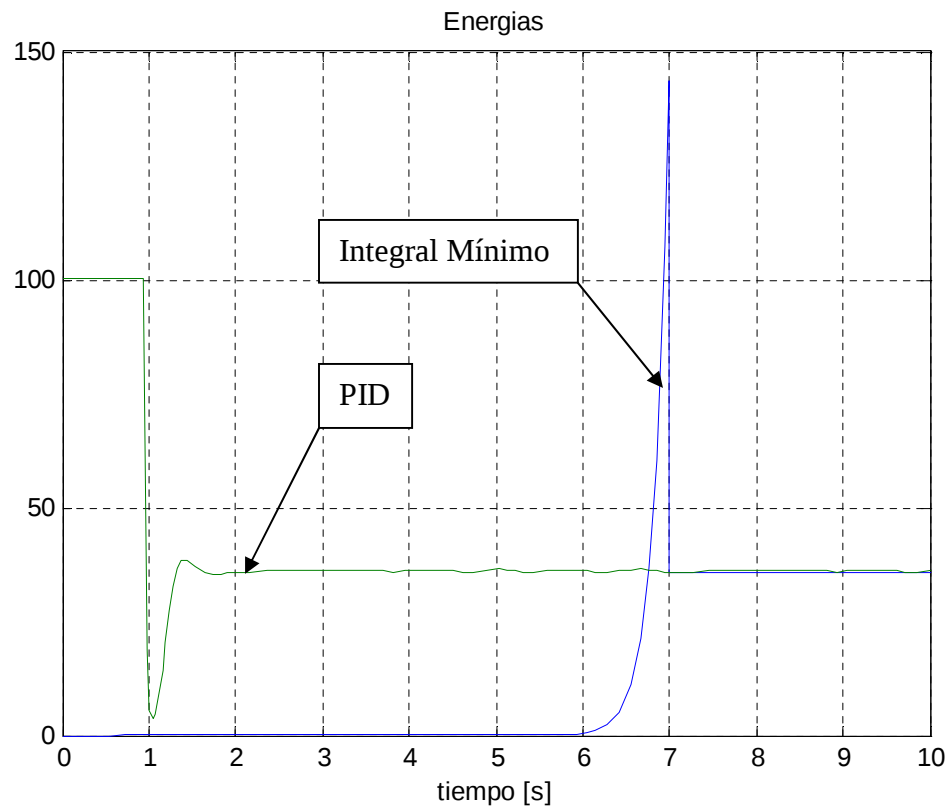


Figura 22. Gráfico comparativo de simulación de las energías de las señales de control entre el Problema de control mínimo integral y el PID

El valor de la señal de energía del Control mínimo integral fue de 132.88J, mientras que el valor de la energía para la señal del PID fue de 414.67J, este es un resultado contundente y muestra la efectividad de la aplicación del método de optimización desarrollado y el ahorro en el consumo de energía que mediante este se logra.

4.4.3 Problema de Control Final:

Considerando el sistema dinámico lineal de primer orden:

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t) \quad 4.4.3-1$$

Con condición inicial $x(0) = x_0$ y condición final $x(T) = x_f$ y se quiere minimizar la función error final:

$$e(T) = x_f - x(T) \text{ Sujeto } |u| \leq U_{\max} \quad 4.4.3-2$$

Dada la condición que busca minimizar la función $e(t)$ se necesita construir una ecuación de estado auxiliar y a partir de $e(t)$ dada por:

$$x_2(t) = x_f - x_1(t) \quad 4.4.3-3$$

El problema de control terminal consiste en la minimización de la nueva variable. Derivando $x_2(t)$ con respecto al tiempo se tiene el siguiente sistema ampliado:

$$\dot{x}_1(t) = -ax(t) + bu(t) \quad 4.4.3-4$$

$$\dot{x}_2(t) = -\dot{x}_1(t) = ax(t) - bu(t) \quad 4.4.3-5$$

Con condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_{ini} \text{ y } x_2(0) = e(0) \quad 4.4.3-6$$

El Hamiltoniano del problema de optimización para este caso viene dado por:

$$H = \lambda_1(-ax_1 + bu) + \lambda_2(ax_1 - bu) = (\lambda_2 - \lambda_1)ax_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)bu \quad 4.4.3-7$$

El Hamiltoniano del sistema para este caso viene conformado solamente por las restricciones del sistema.

El Hamiltoniano se maximiza si se cumple la condición:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)bu(t) > 0 \quad 4.4.3-8$$

Las ecuaciones canónicas del sistema vienen dadas por:

$$\dot{x}_1 = H_{\lambda_1} = (-ax + bu) \quad 4.4.3-9$$

$$\dot{x}_2 = H_{\lambda_2} = ax - bu \quad 4.4.3-10$$

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{x_1} = a\lambda_1 \quad 4.4.3-11$$

$$\dot{\lambda}_2 = -H_{x_2} = 0 \quad 4.4.3-12$$

$$0 = H_u = b(\lambda_1 - \lambda_2) \quad 4.4.3-13$$

De la última expresión se obtiene el valor de $u(t)$ que minimiza el Hamiltoniano. Como no aparece $u(t)$ explícitamente en la expresión:

$$0 = H_u = b(\lambda_1 - \lambda_2) \quad 4.4.3-14$$

Es necesario tener en cuenta que el signo de u debe ser opuesto al de $b\lambda$, entonces:

$$u^*(t) = -U_{\max} \text{Sgn}(b(\lambda_1 - \lambda_2)) \quad 4.4.3-15$$

Remplazando el valor de $u(t)$ en la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - U_{\max} \text{Sgn}(b(\lambda_1 - \lambda_2)) \quad 4.4.3-16$$

y empleando la condición de transversalidad

$$1 + b\lambda u(t) = 1 + b|\lambda| \forall t \in [0, T] \quad 4.4.3-17$$

La condición de transversalidad dice que todas las familias de funciones cumplen con la condición de tener el mismo punto inicial y el mismo punto final; es usada para hallar constantes de condiciones iniciales y finales.

Para el caso $x(T)=0$ es posible obtener el valor para $\lambda_1(T)$, a partir de la ecuación canónica:

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{x_1} = a\lambda_1 \quad 4.4.3-18$$

Se obtiene la ecuación diferencial:

$$\dot{\lambda}_1 = a\lambda_1 \text{ y } \dot{\lambda}_2 = 0 \quad 4.4.3-19$$

Con solución:

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(T)e^{-a(T-t)} \text{ y } \lambda_2(t) = Cte \quad 4.4.3-20$$

El $\lambda^*(t)$ que determina una entrada u optima viene dada por:

$$u^*(t) = -Sgn(be^{-a(T-t)}) \quad 4.4.3-21$$

Para el caso en lazo abierto o lazo cerrado se determina el valor en que la velocidad angular alcanza el valor final deseado y se deja de activar la entrada en ese momento; esta relación es equivalente al caso de control de tiempo mínimo en donde se garantiza que para cualquier tiempo T mayor al tiempo mínimo el sistema estará en el estado final deseado.

Para el caso de control terminal la respuesta es igual a la de control en tiempo mínimo cuando alcanza el estado final pero la condición de control terminal sólo es satisfecha hasta llegar al tiempo T permaneciendo en éste estado.

5. CONCLUSIONES

Para un sistema de Control Óptimo sujeto a restricciones, la acción de control es función de las variables de estado y para su implementación es necesario que todas las variables de estado sean efectamente observables y si no, es necesario, la implementación de estimadores de estado.

De ser posible es preferible usar las variables de estado instrumentables del sistema; en la medida de lo posible se debe evitar estimar las variables de estado que sean susceptibles a perturbaciones y tiendan a disminuir la relación señal ruido.

Para el caso de sistemas lineales de primer orden el problema de control de tiempo mínimo es un caso particular del control en tiempo final, al garantizar que el sistema alcanza el estado final en el menor tiempo posible y permanece en él para cualquier tiempo terminal arbitrario desde que sea mayor al tiempo mínimo en que puede alcanzar el estado terminal.

Una de las mayores dificultades conceptuales del controlador óptimo de tiempo mínimo y estado terminal es la singularidad para el cálculo de la acción de Control Óptimo, ya que no aparece explícitamente al derivarla de las ecuaciones canónicas; cuando esto sucede se debe recurrir a la función signo.

Mediante este trabajo se aplicaron los elementos de la teoría de Control Óptimo a un sistema lineal de primer orden. Se verificó que el principio del mínimo de Pontryagin empleado en la teoría de control óptimo es útil para el cálculo de la mejor acción de control para llevar a un sistema dinámico de un estado a otro, especialmente en la presencia de restricciones de los estados o las entradas de control.

Se debe tener en cuenta que el controlador obtenido sea consecuente con el sistema real estudiado, ya que se pueden presentar señales de control obtenidas analíticamente que no satisfacen las restricciones del controlador y por ende se descarta su solución.

Un índice de desempeño puede ser apropiado para un problema o sistema dado, pero inapropiado bajo las consideraciones de otro problema; por ejemplo, si se tiene un sistema donde se requiere que un índice conserve al máximo la energía, donde éste requiere de mayor tiempo de asentamiento y un segundo sistema, el cual busca una respuesta rápida, sabiendo que para lograr esto el sistema requerirá de mayor energía, el índice del primer sistema mencionado resultaría inadecuado.

Este trabajo abre el camino a futuros proyectos de aplicación de otras estrategias de Control Óptimo, tales como la programación dinámica y el cálculo de variaciones, que se pueden aplicar a diversos tipos de sistemas lineales y no lineales.

6. RECOMENDACIONES

Aplicar el Principio del máximo de Pontryagin a un sistema de orden superior para profundizar en el conocimiento del metodo de optimización.

Realizar la optimización del mismo sistema mediante otros metodos del Control Óptimo como lo es la programación dinamica y comparar los resultados obtenidos.

Extender la aplicabilidad del Principio del máximo de Pontryagin a diferentes campos como lo son: procesos quimicos, procesos economicos y procesos industriales entre otros.

Estudiar la aplicación del Principio del máximo de Pontryagin para sistemas discretos.

Estudiar e implementar el método de Control Óptimo del Regulador Lineal Cuadrático.

Se recomienda a la Universidad adquirir textos que traten el tema del Control Óptimo y que ahonden en éste, ya que uno de los principales inconvenientes que surgió durante el estudio fue obtener información acerca del Control Óptimo.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] Ogata K. Modern Control Engineering, 3th Ed. Prentice Hall. 1998
- [2] Ogata K. Discrete Time Control Systems, 2th Ed. Prentice Hall. 1996
- [3] Tou J.T. Modern Control Theory, 1th Ed. Mc Graw-Hill. 1964
- [4] Phillips Charles – Nagle H. Troy. Digital Control System Analysis and Design, 3th Ed. Prentice Hall. 1995
- [5] Pinch Enid. Optimal Control and The Calculus of Variations, Oxford University Press. 1993
- [6] Guías de Laboratorio de Control I. (Modulo de servomecanismos Analógicos) Universidad Pontificia Bolivariana. 2005

8. ANEXOS

8.1 Modulo 33 – 002

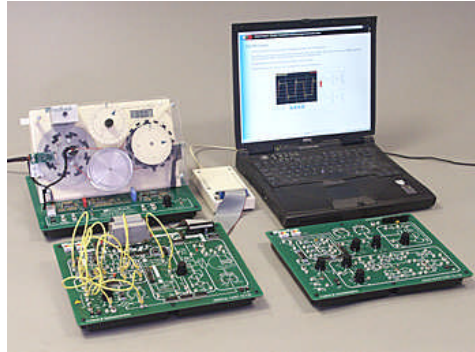


Figura 22. Imagen de modulo 33-002

El modulo 33-002 está constituido por dos unidades:

- Unidad de control analógico 33-110
- Unidad mecánica 33-100

Estas unidades se conectan como se muestra en la figura a continuación, donde los elementos dibujados con líneas de puntos representan equipos complementarios.

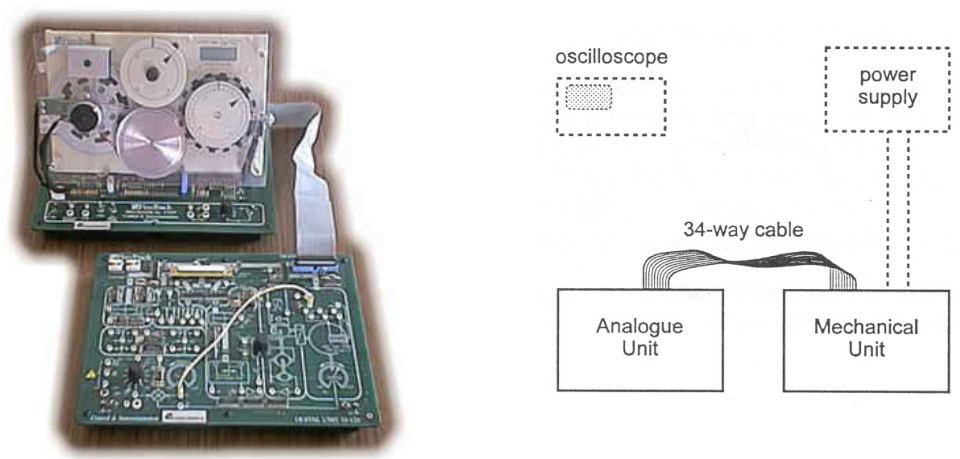


Figura 23. Interconexiones principales del sistema

8.1.1 Unidad Mecánica 33 – 100



Figura 24. Unidad Mecánica 33-100

Esta unidad contiene un amplificador de potencia para controlar un servomotor a partir de una entrada lineal o conmutada. El motor mueve al eje de salida a través de un sistema de reducción con correa de relación 32 a 1. Sobre el eje del motor están montados: un freno de corrientes parásitas (un disco de aluminio acoplado a un yugo magnético ajustable) y un tacogenerador (pequeño generador de corriente continua con imanes permanentes). El disco tiene pintadas dos pistas con rayas equiespaciadas, de las que un juego de fotodetectores obtiene un tren de pulsos bifásico que indica velocidad y sentido de giro.

El eje de salida tiene acoplados dos transductores de posición: uno analógico (potenciómetro) y uno digital (disco con código Gray de 6 bits).

Dentro de la unidad se incluyó un generador que provee las señales típicas de ensayo de servosistemas: triangulares, cuadradas y senoidales de baja frecuencia.

La unidad debe alimentarse con una fuente de alimentación que pueda proveer: $\pm 15\text{VCC}$ 1,5A y $+5\text{VCC}$ 0,5A

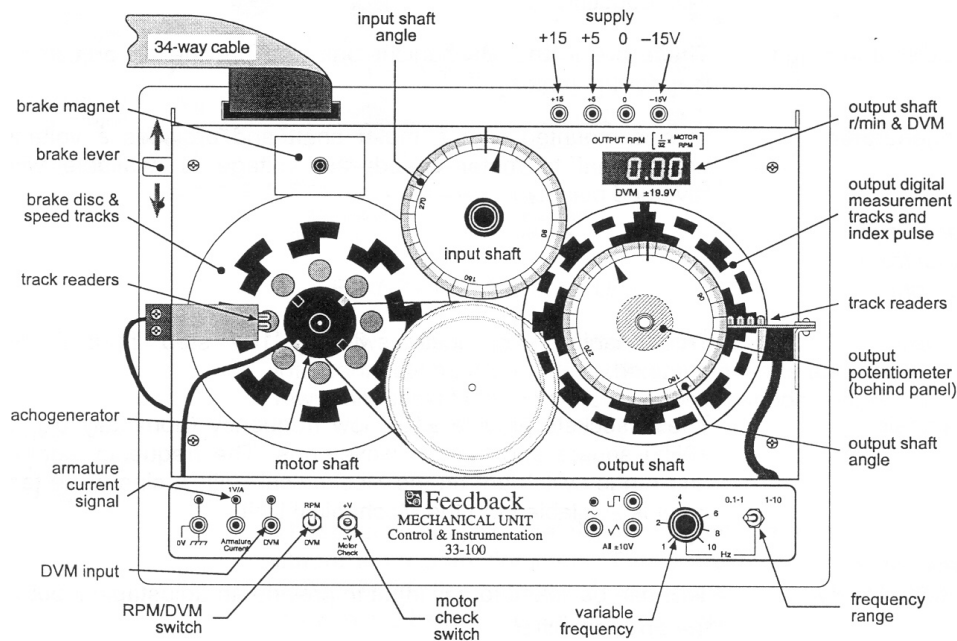


Figura 25. Esquema de la Unidad mecánica 33-100

La figura 25 muestra la disposición general de la unidad mecánica, esta unidad es de uso común a los sistemas de control analógico y digital. Dado que todas las señales, incluyendo hasta la alimentación, están disponibles en el cable plano de 34 conductores, esta unidad puede ser completamente controlada desde cualquier equipo que entregue las señales adecuadas a estos 34 conductores.

A continuación se muestra una pequeña descripción de la unidad mecánica:

➤ Alimentación:

Como se mencionó anteriormente, se requiere una alimentación externa de $\pm 15VCC$ 1,5^a y $+5VCC$ 0,5^a. Los conectores de entrada (hembras de fichas banana de 4mm) están protegidos contra inversiones de conectores, aún cuando en este caso se pueda volar un fusible.

➤ Eje del motor:

Está unido con el tacogenerador y el disco del freno por corrientes parásitas. El disco tiene grabadas dos pistas que lee el tacómetro digital.

➤ **Disco de freno e imanes:**

El freno es ajustado con una palanca que sobresale a la izquierda. La palanca se mueve sobre una escala, cuyo propósito es permitir repetir condiciones de trabajo determinadas.

➤ **Pistas tacométricas y optolectores:**

Estos proporcionan una señal bifásica de niveles TTL (0 a 5V) a razón de 8 ciclos por revolución. Estas señales están presentes en el conector de 34 vías.

➤ **Prueba del motor:**

Este permite aplicar tensión directa al motor para comprobar su funcionamiento.

➤ **Señal de corriente por armadura:**

Entrega una tensión que es proporcional a la corriente que circula por la armadura del motor. La escala es de 1V/A.

➤ **Eje de entrada:**

Está unido al potenciómetro de entrada, permite entregar a través de este la señal Θ_i en el rango de -10 a +10V.

➤ **Frecuencia y rango del generador de señales:**

Controlan el oscilador interno, que entrega señales senoidales, triangulares y cuadradas de 10Vp en dos rangos 1/10 a 1Hz y 1Hz a 10Hz. Las señales triangular y cuadrada están disponibles en el conector de 34 vías.

➤ **Eje de salida:**

Está unido con el potenciómetro de salida y el codificador angular de código Gray de 6 bits. El potenciómetro entrega la señal Θ_o en el rango de -10 a +10V.

➤ **Mediciones digitales:**

Las pistas concéntricas grabadas con código Gray permiten resolver 64 distintas posiciones del eje a través de lectores infrarrojos. Estos 6 bits están disponibles con niveles TTL en el conector de 34 vías.

➤ **Pulso de índice:**

A un pulso por revolución, permite contar con un punto de arranque para las mediciones incrementales. Su señal, con nivel TTL está disponible en el conector de 34 vías.

➤ **Display de velocidad:**

Muestra directamente la velocidad de rotación del eje de salida entre 00.0 y 99.9 RPM, utilizando la señal del tacogenerador. Teniendo en cuenta la reducción de 32 a 1, una velocidad del motor de 1000 RPM se traducirá en 31.1 RPM sobre el eje de salida.

8.1.2 Unidad de Control Analógico

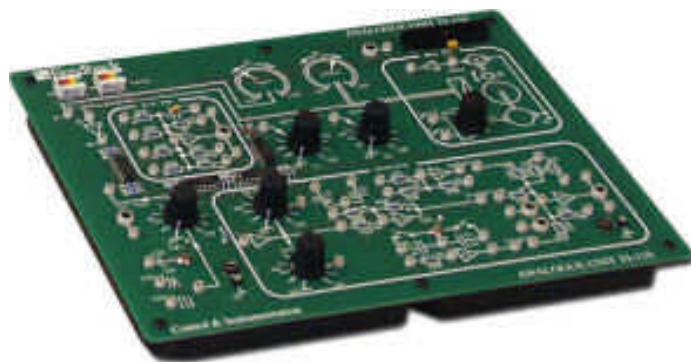


Figura 26. Unidad de Control Analógico 33-110

Esta unidad se conecta a la unidad mecánica a través de un cable plano de 34 conductores en el que se transportan todas las alimentaciones y señales necesarias para efectuar su control.

La unidad permite montar un sistema como el que se muestra en la siguiente figura y contiene los bloques circuitales necesarios para construir los compensadores analógicos típicos e investigar su impacto en el desempeño general del sistema.

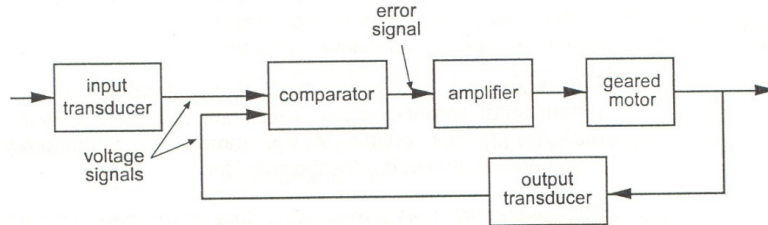


Figura 27. Sistema de control analógico

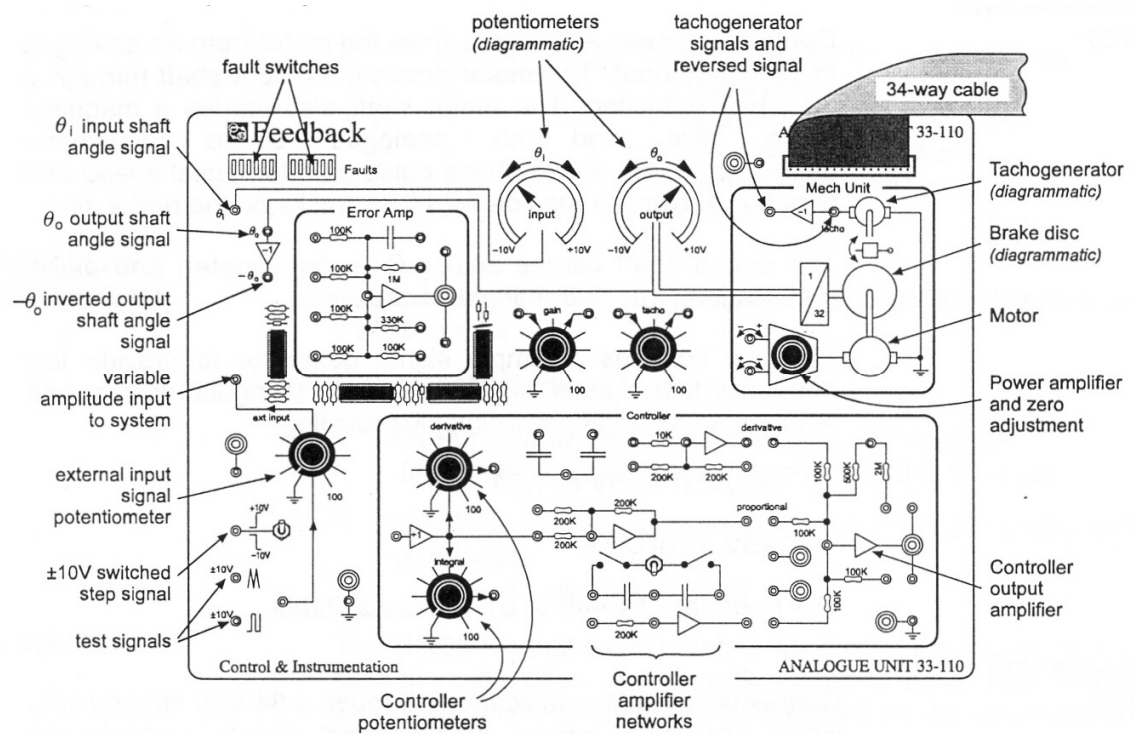


Figura 28. Esquema de la Unidad de control analógico 33-110

La figura 28 muestra la disposición general de esta placa. Las interconexiones se efectúan con cables rematados en fichas banana de 2mm y hay unas pocas hembras de fichas banana de 4mm para conectar a dispositivos externos o un osciloscopio.

A continuación se muestra una pequeña descripción de la unidad de control analógica:

➤ **Θ_i , Θ_o :**

Estos puntos de conexión entregan señales de tensión que se corresponden con los potenciómetros de entrada (posición deseada) y salida (posición del eje) del sistema. Aun cuando están representados en el centro del diagrama de la unidad controladora, físicamente se encuentran montados sobre la unidad mecánica.

➤ **$-\Theta_o$:**

Este punto de conexión entrega la señal de tensión correspondiente al ángulo de salida con signo invertido. Esta negación es requerida en ciertos montajes.

➤ **Interruptores para introducir fallas:**

Estos permiten introducir desperfectos en el sistema. Para uso normal (sin fallas) deben estar todos movidos hacia abajo (OFF).

➤ **Amplificador de error:**

Se usa para combinar las señales de los potenciómetros, entregando la señal de error (su diferencia).

➤ **Potenciómetros P1 y P2:**

Permiten controlar la ganancia del sistema y ajustar la amplitud de la señal entregada por el tacogenerador.

➤ **Amplificador de potencia:**

Alimenta y controla el motor, sus dos entradas mueven en motor en sentidos opuestos para una entrada determinada. El ajuste de cero permite hacer girar el motor aún cuando la señal de entrada es nula.

➤ **Motor:**

Se encuentra físicamente en la unidad mecánica. Mueve directamente al tacogenerador y el freno por corrientes parásitas. Mueve al eje de salida a través de una reducción de 32 a 1 por correa.

➤ **Disco e imanes de freno:**

Estos se encuentran en la unidad mecánica y constituyen una carga ajustable para el motor (por el método de las corrientes parásitas).

➤ **Tacogenerador:**

Está montado sobre el eje del motor y proporciona una tensión que es proporcional a su velocidad de rotación. Está disponible también en su versión negada, a través de un inversor de ganancia unitaria.

➤ **Escalón de +/-10V:**

Permite introducir manualmente un escalón de 10 de amplitud.

➤ **Señales de prueba:**

Este conector presenta señales de prueba triangulares y cuadradas de 10V de pico y baja frecuencia (desde 1/10Hz hasta 10Hz). Los controles de frecuencia (potenciómetro y selector de rango) están presentes en la unidad mecánica. También en la unidad mecánica hay una salida que entrega una onda senoidal.

➤ **Potenciómetro de ajuste de señal externa P3:**

Permite conectar a cualquier entrada para entrega una señal ajustable al amplificador de error.

➤ **Controlador:**

Este contiene amplificadores operacionales con sus redes de realimentación asociadas, permitiendo implementar varios circuitos de control y compensación que mejoran el comportamiento del sistema.