

**ACTUALIZACIÓN DE MODELOS BASADO EN SENSIBILIDAD**

**OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA SECCIONAL BUCARAMANGA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2015**

**ACTUALIZACIÓN DE MODELOS BASADO EN SENSIBILIDAD**

**OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA**

**Tesis como requisito para optar el título de ingeniero civil.**

**DIRECTOR  
GUSTAVO A. OSPINA  
PhD. INGENIERÍA CIVIL**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA SECCIONAL BUCARAMANGA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL  
BUCARAMANGA  
2015**

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

---

---

**Firma del presidente del jurado**

---

**Firma del jurado**

---

**Firma del jurado**

**Bucaramanga, 2015**

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero darle gracias a dios, a mis padres y familiares por la oportunidad de estudiar ingeniería civil y por el apoyo brindado durante todo el proceso.

También a mi director de proyecto de grado por la ayudada brindada para culminar con este trabajo de grado, y poder demostrar mis conocimientos de la carrera.

Quiero agradecerle a mis amigos, compañeros, profesores y a todas las personas que de una u otra manera ayudaron a mi formación como persona e ingeniero civil.

## CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	13
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	14
3. JUSTIFICACIÓN.....	15
4. OBJETIVOS.....	16
4.1. OBJETIVO GENERAL .....	16
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	16
5. ALCANCE.....	17
6. METODOLOGÍA.....	18
7. MARCO TEÓRICO.....	19
7.1. ESTADO DEL ARTE .....	19
7.2. CAUSAS DE ERROR EN LOS MODELOS NUMÉRICOS.....	24
7.2.1. ERRORES EN EL MODELO ESTRUCTURAL.....	24
7.2.2. ERRORES EN LA MODELACIÓN DE PARÁMETROS.....	26
7.2.3. ERRORES DE CÁLCULO.....	27
7.3. ACTUALIZACIÓN DE PARÁMETROS.....	28
7.3.1. PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS.....	28
7.3.2. PARÁMETROS DE LOS EFECTOS.....	28
7.4. TEORÍAS Y MÉTODOS.....	30
7.4.1. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN.....	30
7.4.2. ENERGÍA ESPECÍFICA DE DEFORMACIÓN.....	31
7.4.3. ENERGÍA ESPECÍFICA DE DEFORMACIÓN DE CADA TIPO DE DESPLAZAMIENTO Y ROTACIÓN.....	32
7.4.4. MATRIZ TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS LOCALES A GLOBALES.....	37
7.4.4. CONDENSACIÓN DE GUYAN (CONDENSACION ESTÁTICA).....	39
8. TEORÍA DE LA SENSIBILIDAD .....	41
8.1. ECUACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO .....	41
8.2. APLICACIÓN DEL MÉTODO.....	42
8.2.1. EJERCICIO SENCILLO .....	42

8.2.2. EJERCICIO VIGA DE ACERO REAL .....	59
8.2.3. RESULTADOS. ....	65
9. ANALISIS DE RESULTADOS .....	81
10. CONCLUSIONES.....	84
11. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES. ....	85
12. BIBLIOGRAFÍA.....	86
13. ANEXO 1. CÓDIGO DE MATLAB PARA EL CÁLCULO DE SENSIBILIDAD APLICADO A UNA VIGA DE ACERO REAL.....	89

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio sencillo con coeficiente de forma .....	65
Tabla 2. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado con coeficiente de forma.....	66
Tabla 3. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.....	66
Tabla 4. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio sencillo sin coeficiente de forma.....	67
Tabla 5. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado sin coeficiente de forma.....	68
Tabla 6. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio sencillo sin coeficiente de forma.....	68
Tabla 7. Porcentajes de error de las sensibilidades entre cálculo con y sin coeficiente de forma .....	69
Tabla 8. Porcentajes error entre los valores propios y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado con y sin coeficiente de forma.....	69
Tabla 9. Porcentajes de error de las sensibilidades de los efectos entre cálculo con y sin coeficiente de forma.....	70
Tabla 10. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.....	71
Tabla 11. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural con coeficiente de forma.....	72
Tabla 12. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.....	72
Tabla 13. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real sin coeficiente de forma.....	73
Tabla 14. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural sin coeficiente de forma.....	74
Tabla 15. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real sin coeficiente de forma.....	74
Tabla 16. Porcentajes de error de las sensibilidades entre cálculo con y sin coeficiente de forma .....	75
Tabla 17. Porcentajes error entre los valores propios y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural con y sin coeficiente de forma.....	75
Tabla 18. Porcentajes de error de las sensibilidades de los efectos entre cálculo con y sin coeficiente de forma.....	76
Tabla 19. Porcentajes de error entre frecuencia natural analítica y experimental.	76

Tabla 20. Sensibilidad por magnitud de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma. ....	77
Tabla 21. Error de las frecuencias naturales en función de la longitud. ....	77
Tabla 22. Error de las frecuencias naturales en función de la altura del ala. ....	78
Tabla 23. Frecuencias naturales de la viga de acero real actualizadas .....	78
Tabla 24. Frecuencias naturales de la viga de acero real actualizadas por cada parámetro .....	79
Tabla 25. Errores de las frecuencias y parámetros en comparación con la sensibilidad y la sensibilidad por magnitud .....	80
Tabla 26. Clasificación de los parámetros por signo .....	82

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Trabajo en función de la fuerza y la deformación.....	30
Figura 2. Cubo volumen unitario .....	31
Figura 3. Cubo deformado .....	31
Figura 4. Grados de libertad del cubo .....	32
Figura 5. Coordenadas giro eje y .....	37
Figura 6. Coordenadas giro eje x .....	37
Figura 7. Coordenadas giro eje z .....	37
Figura 8. Viga empotrada tridimensional.....	42
Figura 9. Corte transversal viga empotrada .....	43
Figura 10. Matriz de flexibilidad [fii] (Matlab). .....	45
Figura 11. Matriz de rigidez [Kii] (Matlab). .....	46
Figura 12. Desplazamiento axial eje x (AutoCAD) .....	47
Figura 13. Desplazamiento cortante eje y (AutoCAD).....	47
Figura 14. Rotación a flexión eje z (AutoCAD).....	48
Figura 15. Rotación a torsión eje x (AutoCAD).....	48
Figura 16. Desplazamiento cortante eje z (AutoCAD).....	49
Figura 17. Rotación a flexión eje y (AutoCAD).....	50
Figura 18. Matriz de rigidez [KBA] (Matlab).....	51
Figura 19. Corte transversal viga empotrada segundo nodo (AutoCAD) .....	52
Figura 20. Matriz de rigidez [KAA] (Matlab).....	53
Figura 21. Matriz total de rigidez (Matlab) .....	54
Figura 22. Matriz de rigidez [KBB] (Matlab).....	55
Figura 23. Matriz de masa (Matlab).....	55
Figura 24. Transformación de la matriz de rigidez de la viga en voladizo .....	56
Figura 25. Matriz de rigidez de la viga en voladizo condensada .....	56
Figura 26. Matriz de masa de la viga en voladizo .....	57
Figura 27. Matriz de Rigidez derivada respecto a la longitud (Matlab). .....	58
Figura 28. Matriz de masa derivada respecto a la longitud (Matlab). .....	58
Figura 29. Imagen de la viga real <sup>31</sup> .....	59
Figura 30. Peso adicional en la viga <sup>31</sup> .....	59
Figura 31. Sección transversal W14x53.....	60
Figura 32. Modo de vibración de la viga experimental .....	61
Figura 33. Matriz de masa de la viga de acero real.....	62
Figura 34. Matriz de transformación de la viga real.....	62
Figura 35. Longitud vs porcentaje de error en la frecuencia natural.....	64
Figura 36. Altura del ala vs porcentaje de error en la frecuencia natural. ....	64
Figura 37. Grados de libertad.....	81

## LISTA DE ANEXOS

13. ANEXO 1. CÓDIGO DE MATLAB PARA EL CÁLCULO DE SENSIBILIDAD APLICADO A UNA VIGA DE ACERO REAL.....	89
--	----

## **RESUMEN GENERAL DE TRABAJO DE GRADO**

TITULO: ACTUALIZACIÓN DE MODELOS BASADO EN SENSIBILIDAD

AUTOR(ES): OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA

FACULTAD: Facultad de Ingeniería Civil

DIRECTOR(A): GUSTAVO ANDRES OSPINA IDARRAGA

### **RESUMEN**

El contenido de este documento está enfocado al estudio del método de actualización de modelos basados en sensibilidad utilizando la ecuación de Fox y Kapoor. El objetivo de la actualización de modelos es el de obtener modelos numéricos más precisos, lo cual se consigue en este documento mediante el análisis de la sensibilidad de los parámetros de actualización. Se realiza una revisión del estado del arte, donde se menciona tanto el progreso y los problemas que varios autores encontraron cuando se utiliza la metodología a lo largo de diferentes investigaciones. En una segunda etapa, el documento describe la metodología utilizando una viga en voladizo. La metodología es aplicada en una viga simplemente apoyada cuyas características dinámicas se obtienen experimentalmente.

PALABRAS  
CLAVES:

Actualización de modelos, sensibilidad, condensación  
estática, elementos finitos.

V° B° DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO

## **GENERAL SUMMARY OF WORK OF GRADE**

TITLE: UPDATING MODELS BASED ON SENSITIVITY  
AUTHOR(S): OLIVER ANDRES STEVEN NAVAS POVEDA  
FACULTY: Facultad de Ingeniería Civil  
DIRECTOR: GUSTAVO ANDRES OSPINA IDARRAGA

### **ABSTRACT**

The content of this document is focused on the study of updating models based on sensitivity using the Fox and Kapoor's equation. The aim of model updating is to obtain more precise numerical models, which in this case is achieved by analyzing the sensitivity of the updating parameters. A revision of the state of the art is performed, where it is mentioned both the progress and problems that several authors encountered when using the methodology throughout different investigations. In a second stage, the document describes the methodology using a cantilever beam. An application of the methodology is performed on a simply supported beam whose dynamics characteristics are experimentally obtained.

### **KEYWORDS:**

Model Updating, sensitivity, static condensation, finite elements.

V° B° DIRECTOR OF GRADUATE WORK

## 1. INTRODUCCIÓN.

La dinámica estructural estudia la respuesta de sistemas estructurales ante cargas variables en el tiempo. Básicamente, cada estructura posee propiedades dinámicas que representan su huella estructural. Estas propiedades dinámicas pueden usarse para ajustar las discrepancias entre modelos numéricos de este sistema y la respuesta estructural del mismo. Estadísticamente, se puede demostrar que las propiedades geométricas y materiales de las estructuras civiles que conforman su sistema de rigidez introducen un nivel de incertidumbre en la respuesta numérica, haciendo imprecisos a los modelos numéricos<sup>1</sup>. Este es el punto de partida de las metodologías para la actualización de modelos, la cual busca reducir la incertidumbre en la respuesta numérica. La metodología de análisis de sensibilidad<sup>2</sup> permite estudiar cuáles parámetros pueden tener un rol determinante en la variación de la respuesta numérica.

El presente trabajo de grado presenta la metodología de la sensibilidad, la cual ha sido ampliamente estudiada y utilizada como metodología para la actualización de modelos. La descripción de la metodología se acompaña a través de un ejemplo numérico de fácil aplicación, y posteriormente se hace la aplicación de la metodología sobre un sistema de varios grados de libertad del cual se pueden obtener datos de vibración en el laboratorio de Dinámica Estructural de la Facultad de Ingeniería Civil.

Se pretende a través del presente proyecto evidenciar la necesidad de evaluar la validez de los modelos numéricos usados en ingeniería estructural a través de software como el SAP2000, herramienta de masiva utilización en el campo del diseño de estructuras civiles, además de evidenciar la necesidad de implementar metodologías para el ajuste de modelos numéricos.

---

<sup>1</sup> CAICEDO, J. M., & ZARATE., B. A. (2011). Reducing epistemic uncertainty using a model updating cognitive system. *Advances in Structural Engineering* 14, 55-65.

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El presente trabajo de grado pretende indagar sobre las metodologías disponibles para la actualización de modelos, para el cual se plantea el siguiente problema:

¿Cómo implementar la metodología de la sensibilidad en problemas de actualización de modelos?

La metodología de sensibilidad permite identificar cuales parámetros de rigidez en un modelo numérico resultan ser más sensibles cuando se trata de ajustar este modelo a valores experimentales de frecuencias y modos de vibración. La metodología es relativamente reciente y ampliamente divulgada (Mottershead, 1995) y el hecho de que las herramientas computacionales permiten usar modelos numéricos cada vez más complejos, la metodología propuesta resulta ser de gran utilidad en el análisis de parámetros de ajuste para la reducción de incertidumbre en modelos numéricos.

### 3. JUSTIFICACIÓN.

El modelamiento de estructuras complejas utilizando metodologías clásicas implica la necesidad de hacer suposiciones sobre la estructura real. Al comparar los resultados numéricos con los experimentales, se encontrará que casi siempre hay diferencias entre estos, atribuibles a las simplificaciones mencionadas y a otros factores externos que puedan afectar los resultados experimentales<sup>3</sup>. Uno de los métodos más utilizados para el análisis de estructuras es el de los elementos finitos. Su popularidad se debe a que esta metodología permite analizar una gran variedad de estructuras, y se hace altamente eficiente al aplicarlo apoyado en herramientas computacionales.<sup>4</sup>

Entre los errores que se inducen en el modelo numérico al hacer suposiciones se cuenta: uniones de la estructura (atornillado, soldadura o a presión) de lo cual se tiene poca comprensión, condiciones de apoyo (apoyo simple, empotrado, semi-empotrado, etc. (Friswell y Mottershead, 1993))<sup>2</sup> errores por defectos en los materiales que en su proceso de producción y/o de manipulación sus parámetros cambian de magnitud (Módulo Young, inercia, masa y longitud), o incluso la utilización de un número insuficiente de nodos para la discretización de la estructura.<sup>5</sup>

Al tema presentado en este trabajo de grado se le denomina Model Updating en lengua inglesa, lo que en español equivale a actualización de modelos. Esta disciplina busca abordar esta problemática para presentar soluciones adecuadas y eficientes computacionalmente, con el fin de obtener una menor divergencia de los datos analíticos y los resultados experimentales<sup>5</sup>

El método de la sensibilidad analiza cuán sensible es un modelo numérico ante las variaciones que puede tener un parámetro dado (por ejemplo, módulo de elasticidad) debido a su incertidumbre asociada. Las sensibilidades se presentan en términos de la variación de los valores propios del sistema (cuadrados de las frecuencias de vibración) debido a perturbaciones de sus matrices de rigidez y masa.<sup>6</sup>

---

<sup>3</sup> OBERKAMPF, WILLIAM, L., & DELAND, S. M. (2002). Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety* 75, no. 3, 333-357.

<sup>4</sup> A.C JACINTO, R. A. (2002). *Dynamic response of plates subjected to blast loading structures and buildings* 269-276.

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

<sup>5</sup> VÉLEZ, W., GÓMEZ, D., & THOMSON, P. (2009). Ajuste de modelos de elementos finitos. *Dyna*, 177-189.

<sup>6</sup> ALVIN, K. F. (1997). Efficient computation eigenvector sensitivities structural dynamics. *AIAA Journal*, 652-659.

## **4. OBJETIVOS**

### **4.1. OBJETIVO GENERAL**

Implementar la metodología de sensibilidad en la actualización de modelos.

### **4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.**

Elaborar un breve resumen sobre el estado del arte en metodologías para la actualización de modelos.

Describir de manera general el método de análisis matricial de estructuras aporricadas.

Describir la metodología de sensibilidad como herramienta en el análisis de parámetros estructurales y la sensibilidad de los parámetros dinámicos estructurales a variaciones de dichos parámetros.

Elaborar un ejemplo de aplicación de la metodología usando el laboratorio de dinámica estructural de la facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga.

## **5. ALCANCE.**

El alcance del presente proyecto abarca la revisión de literatura, descripción y aplicación de la metodología propuesta para actualización de modelos. La metodología se aplicará en un problema real, utilizando datos experimentales para compararlos con aquellos datos obtenidos numéricamente.

Se espera que el alcance del proyecto propuesto sirva como base para la futura aplicación de la metodología en otros problemas de actualización de modelos similares, como por ejemplo, el análisis de estructuras aperticadas ante excitación sísmica. Puesto que la actualización de modelos es un paso necesario para un adecuado análisis estructural (por ejemplo, qué sucede si una estructura excede su límite de carga), se espera que el aporte realizado por el presente documento sea de gran valor para el grupo de investigación en estructuras de la Universidad Pontificia Bolivariana.

## 6. METODOLOGÍA.

La metodología a seguir para el desarrollo del presente trabajo de grado considera los siguientes pasos básicos:

- Se realiza documentación para la descripción de la metodología de diversas fuentes: libros, artículos científicos, tesis y otras fuentes digitales.
- Se elabora el capítulo que describe la metodología con un ejemplo de fácil aplicación, y la importancia de la metodología en problemas de actualización de modelos
- Se define una estructura experimental que se pueda instrumentar y modelar numéricamente para su análisis
- Se procede a aplicar la metodología de sensibilidad para el análisis de parámetros de actualización. La metodología de sensibilidad es aplicada y verificada a través de la modelación numérica usando Matlab y SAP2000.
- Se describen los resultados y se concluye sobre la metodología aplicada

## 7. MARCO TEÓRICO.

### 7.1. ESTADO DEL ARTE

La búsqueda de precisión en los modelos numéricos conllevó a buscar su comportamiento real basados en las leyes de la física y su comprensión más detallada; aunque en muchos casos una observación del comportamiento de una estructura puede llegar a ser tan complejo, que lograr descubrir los fallos en los modelos solo queda en cuestión de la estadística y la comparación de los modelos analíticos de los experimentales; esta área es conocida como identificación de sistemas. Los modelos no lineales son aún más complejos de analizar por su comportamiento aleatorio, por lo cual se trata de linealizar siendo esto lo más sencillo, con el fin de encontrar la función de correlación  $\gamma^2$ .<sup>7</sup>

$$\gamma^2 = \frac{|H(w)|^2 * S_{xx}(w)}{S_{yy}(w)} \quad (7.1)$$

Donde  $H(w)$  es la función de transferencia del sistema y  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$  son respectivamente las respuestas del auto espectro. Documentado por el posible primer precursor del tema, el matemático Norbert Wiener<sup>8</sup> en 1930 con su trabajo de estimación de espectros.<sup>7</sup> Mas adelante Schetzen<sup>9</sup> suministraría los detalles de las series de Volterra y Wiener los cuales serían extensamente utilizados para la identificación no paramétrica en los sistemas no lineales.<sup>2</sup>

A diferencia de la actualización de modelos la identificación de sistemas no requiere que se cumpla un estricto comportamiento físico real, mientras la actualización de modelos busca un mejoramiento con predicción de comportamiento, haciendo esto que anteriormente se denominara identificación indirecta por el uso de un modelo analítico inicial. Mottershead y Friswell<sup>2</sup> grandes precursores del tema mencionan que gracias a Berman<sup>10</sup> se da un enfoque a la actualización de modelos como alternativa a la identificación directa de sistemas

---

<sup>7</sup> WORDEN, K., KERSCHEN, G., VAKAKIS, A., & GOLINVAL, J. (s.f.). *Nonlinear System Identification in Structural Dynamics*.

<sup>8</sup> WIENER, N. (1930). Generalized Harmonic Analysis. *Acta Mathematica*, 55: 117–258.

<sup>9</sup> SHETZEN, M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Non-linear. Systems. New York:John Wiley*.

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

<sup>10</sup> BERMAN. (1979). Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes. *AIAA Journal*, 17(8): 1147–1148.

estructurales, ya que señalo que es imposible obtener precisión sin un enfoque real del comportamiento de la estructura.<sup>5</sup>

Cuando el modelo estructural y el orden del modelo están definidos, sólo falta la estimación de los parámetros, siendo esto solucionado por el método más universal alrededor del siglo 19 basado en los cuadrados mínimos, desarrollado por Carl Friedrich Gauss el cual busca la función que se aproxima más a los datos deseados.<sup>2</sup>

En la identificación de sistemas sobresalen según su avance o complejidad, los métodos de linealización, la transformación de Hilbert que fue utilizada en este tema inicialmente por Simon y Tomlinson, el modelo de Narmax, las series funcionales y orden máximo FRFs, la restauración de fuerzas de la superficie procedimiento introducido por Masri y Caughey pero con más enfoque por Aubert, Crawley y O'Donnell , si se requiere profundizar más en cada método consultar el artículo de las referencias [7].<sup>7</sup>

En la actualización de modelos de parámetros basados en sensibilidad se busca obtener la mayor precisión en la obtención de los derivados del vector propio, lo cual ha hecho desarrollar muchos estudios y métodos tales como, el método exacto de Nelson, Método de superposición modal de Fox, el método de Wang y el método iterativo de Zhan y Zerva entre otros, si se requiere profundizar más en cada método consultar el artículo de las referencias [6].<sup>6</sup> Este método presentó otro problema al momento de su aplicación, ya que el cálculo de los valores propios puede generar equivalencia en la magnitud de sus resultados haciendo esto que hayan cualquier cantidad de combinaciones lineales con cada vector propio. Esto usualmente ocurre en las estructuras que tienen la misma rigidez y masa en dos direcciones perpendiculares entre sí (secciones circulares cruzadas, estructuras tridimensionales simétricas, estructuras bidimensionales complementarias etc). Haug y Rousselet<sup>11</sup> entre otros concluyeron que los valores propios repetidos son direccionalmente derivados. La sensibilidad para este caso se resuelve con otro sistema formado por el producto de los vectores propios de los valores propios y las respectivas derivadas de la matriz de masa y rigidez del

---

<sup>5</sup> VÉLEZ, W., GÓMEZ, D., & THOMSON, P. (2009). Ajuste de modelos de elementos finitos. *Dyna*, 177-189.

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

<sup>7</sup> WORDEN, K., KERSCHEN, G., VAKAKIS, A., & GOLINVAL, J. (s.f.). *Nonlinear System Identification in Structural Dynamics*.

<sup>6</sup> ALVIN, K. F. (1997). Efficient computation eigenvector sensitivities structural dynamics. *AIAA Journal*, 652-659.

<sup>11</sup> HAUG, E. J., & ROUSSELET, B. (1980). Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics: II Eigenvalue Variations. *Journal of Structural*, Vol. 8, No. 2, pp. 161-186.

sistema inicial. Ojalvo<sup>12</sup> siguió esta investigación computando los valores propios de la sensibilidad de los valores propios repetidos y complemento el método de Nelson para calcular las derivadas del vector propio relacionado a los vectores propios de los valores propios repetidos que tuvieran diferentes sensibilidades aunque, Dailey<sup>13</sup> preciso que el método de Ojalvo<sup>12</sup> de computar sólo se podía aplicar en ciertos casos sugiriendo un método, tomando las segundas derivadas de las ecuaciones con respecto al parámetro para encontrar el único coeficiente del vector propio de la sensibilidad. Mills Curran<sup>14</sup> encontró que los dos métodos anteriores fallaban al obtener una matriz no singular del sistema inicial y que este sistema se utilizó para resolver la parte no homogénea del vector propio de la sensibilidad; desarrollando un método más riguroso para calcular la sensibilidad en estos casos. En la investigación de Ting-Yu Chen<sup>15</sup> menciona que los métodos para calcular la sensibilidad en caso de equivalencia en los valores propios no son estrictamente utilizados porque no es necesaria la construcción de un sistema auxiliar, en ciertos casos.<sup>15</sup>

La comprensión de los modelos numéricos queda limitada ciertamente a la comprensión del funcionamiento del sistema estructural y sus componentes tales como las uniones, que puede variar desde soldadas hasta a presión. Por lo anteriormente mencionado, se recurre al ensayo experimental y al análisis del comportamiento abstracto del modelo en estudio con el fin de encontrar el modelo más adecuado según el criterio a utilizar entre el analítico y el experimental. La variedad de resultados posibles puede llegar a incrementar la incertidumbre de lo que ocurre realmente, por lo cual Ewins y Imregun<sup>16</sup> presentaron una comparación de resultados de elementos finitos producidos por 12 analistas independientes con 6 paquetes de elementos finitos comerciales, los resultados como era de esperarse concluían que los modelos tendían a diferir unos de otros y también de los modelos experimentales haciendo todo esto que se preste mucha más atención en corregir la inexactitud que hacer otro tipo de correcciones al modelo físico.<sup>2</sup>

---

<sup>12</sup> OJALVO. (1988). Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies. *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, pp. 361-366.

<sup>13</sup> DAILEY. (1989). Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4,, pp. 486-491.

<sup>14</sup> CURRAN, M. (1990). Comment on 'Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 10,, p. 1846.

<sup>15</sup> CHEN, T.-Y. (1993). Design sensitivity analysis for repeated eigenvalues in structural design. *AIAA Journal*, 2347-2350.

<sup>16</sup> IMREGUN, M., & EWINS. (1993). Reahsation of complex mode shapes. Proceedings of 11th International Modal Analysis Conference. pp. 1303-1309.

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

Motthershead<sup>2</sup> y su equipo de trabajo consideraron el problema en la forma de la función de discretización y observaron que los modelos producidos con un incremento en la refinación de la malla obtienen valores propios que tienden a converger. Los valores propios más bajos convergen más fácilmente, y tanto el números de elementos es incrementado aparecen nuevos valores propios que tienden a un límite con una refinación de malla adicional. En muchos casos en general los tres primeros valores propios son considerablemente menores que los que convergen, consecuentemente quiere decir que se requiere un modelo más grande (Más elementos y grados de libertad) para actualización que para diseño.

El amortiguamiento y las uniones de la estructura son características muy importantes pero al mismo tiempo un poco incomprensibles ampliamente estudiados por Wang & Liou<sup>17</sup> y Hong & Lee<sup>18</sup> que expresaron estas características como la diferencia de dos matrices dinámicas de rigidez. La expresión multiplicada y pos multiplicada por FRF matrices, desapareciendo así la matriz dinámica de rigidez. Sustituyendo la ecuación se pueden obtener los mínimos cuadrados de los parámetros de las uniones. Cuando los resultados medidos contienen menos modos que el orden del modelo se puede decir que está incompleto, posiblemente causado por la limitación del rango de frecuencias en los ensayos. Este aspecto fue estudiado por Natke quien uso el método EWLS, Mottershead uso SVS y Mottershead & Foster combinaron los dos métodos produciendo una técnica parecida a la de Zhang y Ojalvo quienes introdujeron el método de descomposición.<sup>2</sup> Principalmente se daba un enfoque más profundo a la incertidumbre por lo que Ibrahim y Pettit<sup>19</sup> presentaron un artículo de revisión, analizando la dinámica de juntas pernadas y presentando técnicas basadas en actualizaciones tanto para identificación lineal como no lineal mientras los modelos con soldaduras de punto en métodos directos con el uso de datos modales fueron estudiados por Palmonella<sup>20</sup> y su equipo de trabajo.<sup>5</sup>

---

<sup>17</sup> WANG, & LIOU. (1991). Experimental identification and mechanical joint parameters. *Transactions of the american society of mechanical engineers, Journal of vibration and acoustic*, 113(1), 28-36.

<sup>18</sup> LEE, H. (1991). Identification of linearised joint structural parameters by combined use of measured and computed frequency responses. *Mechanical systems and signal processing*, 5(4), 267-277.

<sup>19</sup> PETTIT, I. (2005). Uncertainties and Dynamic Problems of Bolted Joints and Other Fasteners. *Journal of sound and vibration*, 279, 857-936.

<sup>20</sup> PALMONELLA, FRISWELL, MOTTERSHEAD, & LEES. (2005). Finite Element Models of Spot Welds in Structural Dynamics. *Review and Updating. Computers and Structures*, 83, 648-661.

<sup>5</sup> VÉLEZ, W., GÓMEZ, D., & THOMSON, P. (2009). Ajuste de modelos de elementos finitos. *Dyna*, 177-189.

Dunn<sup>21</sup> fue uno de los grandes precursores del estudio de la actualización de modelos encontrando la relación del número de incógnitas, aspectos de unicidad en las soluciones y las ventajas y desventajas del uso de datos modales y de FRF.<sup>5</sup> El estado del arte en cuando a los sistemas no lineales fue el trabajo de Hemez y Doebling, mientras Datta presentó una revisión de métodos directos introduciendo dos enfoques basados en asignación parcial de valores propios y vectores propios. “Calvi señaló los problemas asociados al enfoque determinístico tradicional y describió el enfoque estocástico de actualización y validación de modelos”<sup>5</sup>. Con un avance en el tema lo suficientemente completo Ahmadian<sup>22</sup> revisó las técnicas de regularización y su funcionalidad en la estimación de los parámetros en la actualización de modelos.

---

<sup>21</sup> DUNN. (1994). Issues concerning the Updating of the Finite Element Models from Experimental Data. *NASA Technical Memorandum Langley Research Center, Hampton, Virginia.*, 109116.

<sup>22</sup> AHMADIAN, H., MOTTERSHEAD, J., & FRISWELL. (1998). Regularisation Methods for Finite Element Model Updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1), 47-64.

## 7.2. CAUSAS DE ERROR EN LOS MODELOS NUMÉRICOS

### 7.2.1. ERRORES EN EL MODELO ESTRUCTURAL

- **Conexiones mal definidas.**

Un modelo estructural tiende a discernir de su comportamiento real por la incertidumbre que se tiene con respecto a las uniones que lo conforman. Se puede asumir cualquier tipo de conexión para el modelado de la estructura pero su comportamiento puede variar por circunstancias complejas en los nodos provocando otro tipo de conexión con cierta similitud a la inicial. También se puede presentar el caso en el que se hace un modelado de las articulaciones asignando comportamientos diferentes a los reales.<sup>17, 18</sup>

- **Condiciones de apoyo mal asignadas o mal interpretadas.**

Al igual que el caso anterior se pueden asumir comportamientos que pueden ser diferentes a los reales o asignar erróneamente un tipo de conexión.

- **Efectos no modelados o inesperados.**

Cuando el pandeo de la sección transversal también produce efectos de torsión.

- **Comportamiento lineal o no lineal**

Asumir un comportamiento lineal en una estructura que realmente tiene un comportamiento no lineal puede ocurrir por facilidad en el cálculo o por desconocimiento total del comportamiento real de la estructura.<sup>23</sup>

- **Geometría de la estructura.**

La geometría de la estructura viene directamente relacionada con la geometría de los elementos que la conforman. Se puede presentar el caso en que se asuman geometrías diferentes a las reales o el elemento en si tenga variaciones peculiares de su forma geométrica sin ningún tipo de identificación, como sucede en probetas

---

<sup>17</sup> WANG, & LIOU. (1991). Experimental identification and mechanical joint parameters. *Transactions of the american society of mechanical engineers, Journal of vibration and acoustic*, 113(1), 28-36.

<sup>18</sup> LEE, H. (1991). Identification of linearised joint structural parameters by combined use of measured and computed frequency responses. *Mechanical systems and signal processing*, 5(4), 267-277.

<sup>23</sup> BOREST, A. P., & J.SCHMIDT, R. (2003). *Advanced mechanics of materials*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

de acero y otros metales, las cuales presentan una pronunciada pérdida de sección transversal cuando el nivel de carga supera la zona elástica del material.

- **Malla insuficiente.**

Modelado incompleto de la malla con suposiciones equivocadas o simplemente insuficiente, en el caso de trabajar con pocos nodos.<sup>2</sup>

- **Fuerzas externas.**

Modelado incorrecto de las fuerzas actuantes causado por las direcciones o las magnitudes de las fuerzas que pueden diferir de las reales. Fuerzas no tenidas en cuenta como por ejemplo las fuerzas del viento, de fricción en los apoyos, fuerzas mal calibradas entre otros.

- **Masa de la estructura.**

Ciertos elementos pueden presentar excentricidades que no se tienen en cuenta. Funciones de masa complejas de las que se tiene poca comprensión y por lo tanto se asumen distribuciones diferentes. Uso de varios materiales en los cuales su masa puede variar pero se modela con un solo tipo de material.<sup>24</sup>

- **Modelo mal coordinado.**

La transformación de un elemento de ciertas coordenadas a otras puede ser errónea si se asumen los ejes principales de forma distinta entre las coordenadas globales y locales. Matriz de transformación errónea. Confusiones en la forma del modelo en nodos con muchos elementos.

- **Matrices mal ensambladas**

El ensamblaje de una matriz puede ocasionar errores al momento que se definen filas y columnas en posiciones totalmente equivocadas. También se puede dar el caso que las matrices de masa y rigidez no tengan correlación por lo anteriormente mencionado.

---

<sup>2</sup> MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.

<sup>24</sup> MOTTERSHEAD, J. E., LINK, M., & FRISWELL, M. (2010). The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2275-2296.

- **Reducciones o comportamientos mal aplicados.**

Asumir condiciones en los grados de libertad que por fácil cálculo no represente el comportamiento real de la estructura. Reducir las matrices siendo la forma correcta una condensación.<sup>24</sup>

- **Estructura mal ensamblada.**

Puede ocurrir que por negligencia en el ensamblado de los elementos de la estructura a analizar o también por falta de exactitud se produzcan errores.

## 7.2.2. ERRORES EN LA MODELACIÓN DE PARÁMETROS

- **Contornos mal definidos.**

Los elementos a trabajar pueden presentar contornos con defectos de fábrica, haciendo que el área, la inercia y la longitud medidas no sean las reales.<sup>24</sup>

- **Aproximaciones**

Un pobre manejo de unidades que provoque la depreciación de decimales en el cálculo de parámetros.

- **Efectos mal calculados.**

En el caso del cálculo de efectos como es el ejemplo del efecto de cortante en el que en muchos casos se despreja el momento estático. Usualmente se presenta este caso en elementos con longitudes muy grandes en los cuales el efecto a cortante es mínimo en comparación a elementos con longitudes cortas.

- **Masas mal calibradas.**

Problemas con el método utilizado para medir las masas del elemento o imperfecciones que producen variaciones en la densidad del material asumido.

- **Geometría de los elementos.**

La geometría de un elemento es fundamental para el cálculo de casi todos sus parámetros; si se asume una geometría con incertidumbre se puede estar cometiendo un error al momento de calcular los efectos y los parámetros propios de la matriz de masa y rigidez.

---

<sup>24</sup> MOTTERSHEAD, J. E., LINK, M., & FRISWELL, M. (2010). The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2275-2296.

- **Módulos con discrepancias.**

El material del elemento a utilizar puede tener problemas de fábrica imperceptibles pero que pueden generar diferencias de exactitud en el módulo de Young.<sup>24</sup>

### 7.2.3. ERRORES DE CÁLCULO.

- **Cómputos imprecisos.**

Los cálculos utilizando un ordenador son en la actualidad una de las maneras más precisas de obtener resultados complejos, pero aún así presentan cierto rango de error que puede ser muy insignificante, pero se debe tener en cuenta.

- **Soluciones indeterminadas.**

Se puede llegar al caso en el que la modelación se puede volver algo compleja ya que se producen indeterminaciones, como ocurre cuando se reduce la matriz con resultados inesperados. Realizar algún procedimiento mal sin percatarse de ello, causa indeterminaciones por no cumplir con los requerimientos que cada método exige. Error en el código, en el caso de cálculos de cómputo que pueden ocasionar resultados totalmente diferentes con respecto a valores propios y/o vectores propios.<sup>24</sup>

- **Método mal aplicado.**

El uso de cualquier método implica su comprensión y conocimiento del campo de aplicación. En ocasiones por desconocimiento se aplican métodos arbitrariamente sin saber cuáles son sus restricciones, por ejemplo en el método de actualización de modelos basado en sensibilidad que tiene casos especiales en los cuales los valores propios de sensibilidad convergen, haciendo esto que se deba trabajar con otro método mencionado en este documento.

- **Ensayos poco controlados.**

El caso más frecuente se refiere a la obtención de resultados por medio de ensayos de vibración, siendo estos poco controlados y con una calidad de medición muy baja. También se puede presentar el caso en que tenga un control alto pero un equipo con poca exactitud.

---

<sup>24</sup> MOTTERSHEAD, J. E., LINK, M., & FRISWELL, M. (2010). The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2275-2296.

## 7.3. ACTUALIZACIÓN DE PARÁMETROS

### 7.3.1. PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS

Los parámetros característicos del elemento, que definen su geometría y material se deben actualizar de manera que se contemplen todas sus variables, por ejemplo la inercia y el área que se correlacionan dependiendo de medidas propias del elemento, que en una viga rectangular serían la base y la altura. Hay que reconocer cuales son las variables que se presentan en el elemento a estudiar aunque hay casos en los que la geometría del elemento hace que encontrar sus variables sea algo muy complejo a lo cual se deben trabajar con correlaciones.

Un elemento se caracteriza básicamente por su geometría y tipo de material donde cada parámetro se divide de la siguiente manera:

- **Geometría**

La base, altura, radio o parámetros de correlación son de relación directa con el área y la inercia. Los parámetros de coeficiente de forma  $k_1$  y  $k_2$  que dependen directamente de la forma geométrica de la sección transversal aunque su cálculo es resuelto en base a sus parámetros anteriormente mencionados

La longitud es de relación indirecta ya que no depende de ningún parámetro ya mencionado.

- **Material**

La densidad, el módulo de Young y el módulo transversal o módulo de cizalladura son de relación directa ya que son características típicas del material.

### 7.3.2. PARÁMETROS DE LOS EFECTOS

Los parámetros de los efectos (parámetros estructurales) son definidos por las condiciones de los elementos. Con referencia a condiciones se habla de las fuerzas actuantes y el tipo de apoyo del elemento. Al momento de actualizar cualquier parámetro estructural se deben tener en cuenta las relaciones que existen entre sí. A continuación se muestran los efectos con y sin coeficiente de forma, como corresponde.

Efectos de rigidez a flexión producen efectos de rigidez a cortante y los efectos de cortante junto con los efectos a flexión producen momentos  $M_{2f}$  y  $M_{3f}$  por lo que tienen una relación directa entre sí.

- **Vertical**

$$Q2 = \frac{12*E*Iz}{L^3} = \frac{12*A*Em*G*Iz}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iz*k1)} \quad \text{Rigidez a cortante} \quad (7.2)$$

$$Q2c = \frac{6*E*Iz}{L^2} = \frac{6*A*Em*G*Iz}{A*G*L^2 + 12*Em*Iz*k1} \quad \text{Rigidez a cortante producida por Rigidez a flexión vertical} \quad (7.3)$$

$$M3 = \frac{4*E*Iz}{L} = \frac{4*Em*Iz*(A*G*L^2 + 3*Em*Iz*k1)}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iz*k1)} \quad \text{Rigidez a flexión vertical} \quad (7.4)$$

$$M2f = \frac{2*E*Iy}{L} = \frac{6*A*Em*G*Iy*L}{A*G*L^2 + 12*Em*Iy*k2} - \frac{4*Em*Iy*(A*G*L^2 + 3*Em*Iy*k2)}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iy*k2)} \quad (7.5)$$

Momentos producidos por Q2c y M3

- **Transversal**

$$Q3 = \frac{12*E*Iy}{L^3} = \frac{12*A*Em*G*Iy}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iy*k2)} \quad \text{Rigidez a cortante transversal} \quad (7.6)$$

$$Q3c = \frac{6*E*Iy}{L^2} = \frac{6*A*Em*G*Iy}{A*G*L^2 + 12*Em*Iy*k2} \quad \text{Rigidez a cortante transversal producida por Rigidez a flexión transversal} \quad (7.7)$$

$$M2 = \frac{4*E*Iy}{L} = \frac{4*Em*Iy*(A*G*L^2 + 3*Em*Iy*k2)}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iy*k2)} \quad \text{Rigidez a flexión transversal} \quad (7.8)$$

$$M3f = \frac{2*E*Iz}{L} = \frac{6*A*Em*G*Iz*L}{A*G*L^2 + 12*Em*Iz*k1} - \frac{4*Em*Iz*(A*G*L^2 + 3*Em*Iz*k1)}{L*(A*G*L^2 + 12*Em*Iz*k1)} \quad (7.9)$$

Momentos producidos por Q3m y M2

El efecto axial es independiente del cortante y flexión por lo que se define como de relación indirecta en donde el grado de libertad axial es también independiente del grado de libertad a torsión.

- **Longitudinal**

$$A_o = \frac{E*A}{L} \quad \text{Rigidez axial de la viga} \quad (7.10)$$

$$T = \frac{G*J}{L} \quad \text{Rigidez rotacional} \quad (7.11)$$

La relación anteriormente mencionada estrictamente se refiere a una actualización paramétrica singular, porque todos los efectos están en función del módulo, el área, la inercia y la longitud básicamente.<sup>25</sup>

<sup>25</sup> MOTTERSHEAD, J. E., NG, FRISWELL, M. I., & BRANDON, J. A. (1996). Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(2), 171-182.

## 7.4. TEORÍAS Y MÉTODOS

### 7.4.1. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

El principio de la conservación de la energía, enuncia "la energía no se crea ni se destruye, se transforma". Un cuerpo de comportamiento elástico al cual se le aplica un trabajo externo le corresponde un trabajo interno de igual magnitud también denominado energía de deformación elástica ya que en un cuerpo elástico se desprecian las pérdidas por presencia de calor. De una manera mejor representada la expresión sería:  $U_i = U_e$  donde U representa la energía, y los subíndices (i, e) interna y externa como corresponde.<sup>26</sup>

El trabajo realizado para contrarrestar el trabajo interno es:

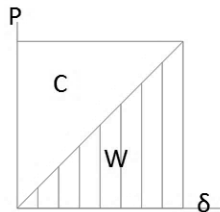
$$W = \int P d\delta \quad (7.12)$$

La deformación de una barra con una fuerza axial P que cumple con la ley de Hooke, es igual a:

$$\delta = \frac{LP}{EA} \quad \text{despejando } P \quad P = \frac{\delta EA}{L} \quad (7.13)$$

Por lo cual la ecuación ( 7.12 ) equivaldría a:

$$W = \int \frac{\delta EA}{LP} d\delta = \frac{\delta^2 EA}{2L} = \frac{P\delta}{2} \quad (7.14)$$



**Figura 1. Trabajo en función de la fuerza y la deformación**

La gráfica del W en función de la fuerza y la deformación, muestra el comportamiento lineal donde C es el trabajo complementario de deformación de igual magnitud a W.

$$C = \frac{P\delta}{2} \quad (7.15)$$

<sup>26</sup> CUEVAS, O. M. (2002). Análisis estructural. Limusa.

Cuando la carga de aplicación es instantánea el trabajo es igual a:

$$C + W = P\delta \quad (7.16)$$

### 7.4.2. ENERGÍA ESPECÍFICA DE DEFORMACIÓN

En presencia de fuerzas normales se producen esfuerzos axiales

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (7.17)$$

Donde la deformación unitaria viene dada por la expresión

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (7.18)$$

Y su deformación o desplazamiento cumple con la ley de Hooke

$$\delta = \frac{LP}{EA} \quad (7.19)$$

Despejando P de la ecuación (7.17) y  $\delta$  de la ecuación (7.18) y reemplazando en (7.14) se obtiene:

$$P = \sigma A \quad y \quad \delta = \varepsilon L \quad (7.20)$$

$$Wu = \frac{\sigma A \varepsilon L}{2} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} \quad (7.21)$$

Donde  $A \cdot L$  corresponde a un volumen unitario, W equivale a la energía de deformación en dicha unidad de volumen igual a Wu.

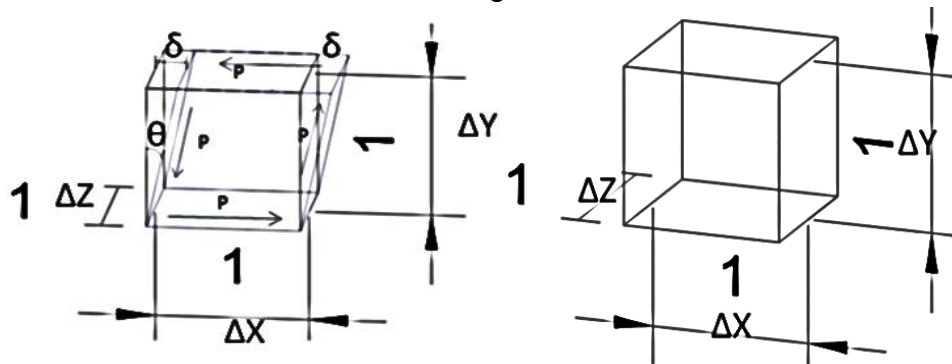


Figura 3. Cubo deformado      Figura 2. Cubo volumen unitario

El esfuerzo presente, en este caso cortante es representado por la ecuación

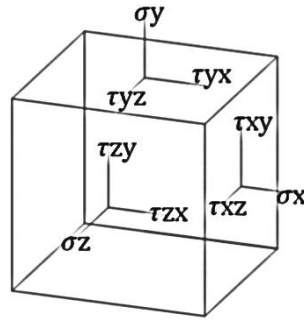
<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{\Delta X \Delta Z} \quad \text{Y el giro} \quad \theta = \frac{\delta}{\Delta Y} \quad (7.22)$$

Despejando P y  $\delta$  de las ecuaciones (7.22) y reemplazando en (7.14):

$$P = \tau \Delta X \Delta Z, \quad \delta = \theta \Delta Y \quad Wu = \frac{P \delta}{2} = \frac{\tau \Delta X \Delta Z \theta \Delta Y}{2} = \frac{\tau \theta}{2} \quad (7.23)$$

dado que  $\Delta X \Delta Z \Delta Y = 1$



**Figura 4. Grados de libertad del cubo**

El principio de superposición de causas (fuerzas) y efectos (desplazamientos y rotaciones) enuncia “el efecto producido por varias causas es igual a la suma de los efectos que cada causa produce individualmente”.

Por lo anteriormente mencionado:

$$Wu = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \theta_{xy} + \tau_{xz} \theta_{xz} + \tau_{yz} \theta_{yz}) \quad (7.24)$$

Nótese que se refiere a xy, xz y yz porque sobre esos ejes se producen los efectos, o también por su equilibrio interno.

$$\tau_{xy} \theta_{xy} = \tau_{yx} \theta_{yx} \quad \tau_{xz} \theta_{xz} = \tau_{zx} \theta_{zx} \quad \tau_{yz} \theta_{yz} = \tau_{zy} \theta_{zy}$$

Para obtener La energía de deformación total solo basta con integrar sobre su volumen la ecuación (7.21)

$$W = \iiint Wu \, dV \quad (7.25)$$

#### 7.4.3. ENERGÍA ESPECÍFICA DE DEFORMACIÓN DE CADA TIPO DE DESPLAZAMIENTO Y ROTACIÓN.

Analizar los diferentes desplazamientos que puede tener un elemento llegaría a ser algo complejo, por lo cual se dividen sus diferentes posibles desplazamientos haciendo así un cálculo mucho más sencillo y con más comprensión. Un elemento

<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

puede tener 6 diferentes tipos de desplazamientos divididos en sus ejes coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , en los cuales se generan esfuerzos o momentos que generen desplazamientos o rotaciones. Cada eje posee una dirección y una rotaciones generando así: Fuerzas normales, cortantes en  $y$ ,  $z$ , momentos de torsión, rotación y flexión cada uno equivalente a su eje. Cada tipo de desplazamiento o rotación es denominado grado de libertad.

A continuación se presentan los efectos de cada tipo de fuerza y momento.

#### 7.4.3.1. Fuerza normal

Utilizando la ecuación ( 7.17 ) y reemplazando la fuerza actuante  $Nx$  se obtiene:

$$\sigma_x = \frac{Nx}{A} \quad \text{donde se produce una deformación unitaria} \quad (7.26)$$

Donde se produce una deformación unitaria expresada por:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{\sigma_x}{E} \quad (7.27)$$

La energía específica de deformación por fuerzas normales reemplazando ( 7.26 ) y ( 7.27 ) en ( 7.21 ) queda expresada como:

$$W_u = \frac{1}{2} \frac{Nx}{A} \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{2} \frac{Nx}{A} \frac{Nx}{A E} = \frac{1}{2} \frac{Nx^2}{EA^2} \quad (7.28)$$

La energía de deformación se obtiene integrando la energía específica en función del volumen. Ecuación ( 7.25 ).

$$W = \iiint W_u dV = \iiint \frac{1}{2} \frac{Nx^2}{EA^2} dV = \int_0^L dx \iint \frac{1}{2} \frac{Nx^2}{EA^2} dA = \int_0^L dx \frac{1}{2} \frac{Nx^2}{EA^2} \iint dA$$

$Nx$ ,  $E$  y  $A$  son constantes,  $\iint dA = A$  por consiguiente la ecuación es:

$$W_n = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{Nx^2}{EA} dx \quad (7.29)$$

#### 7.4.3.2. Momento flector

La teoría de elasticidad y de resistencia de materiales coincide en que si actúa un momento flector  $Mz$ , se produce un esfuerzo

---

<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y \quad (7.30)$$

Reemplazando la ecuación ( 7.26 ) y ( 7.27 ) en ( 7.21 ).

$$W_u = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x = \frac{1}{2} \frac{M_z}{I_z} y \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{2} \frac{M_z}{I_z} y \frac{M_z}{I_z} y = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z^2} y^2 \quad (7.31)$$

La energía de deformación se obtiene integrando la energía específica en función del volumen.

$$\begin{aligned} W &= \iiint W_u dV = \iiint \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z^2} y^2 dV \dots \\ &= \int_0^L dx \iint \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z^2} y^2 dA = \int_0^L dx \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z^2} \iint y^2 dA \end{aligned}$$

$M_z$ ,  $E$ ,  $I_z$  son constantes,  $\iint y^2 dA = I$  por lo tanto la energía de deformación es:

$$W_{M_z} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{E I_z} dx \quad 27 \quad (7.32)$$

#### 7.4.3.3. Fuerza cortante

Considerando una fuerza cortante  $V_y$  la cual produce esfuerzos y deformaciones:

$$\tau_{xz} = \frac{V_y Q_z}{I_z b y} \quad (7.33)$$

$$\text{donde } \theta_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (7.34)$$

$Q_z$  = Momento estático respecto a  $z$

$b y$  = Ancho de la sección

$G$  = Módulo de elasticidad transversal que varía entre 0.4  $E$  y 0.5  $E$

Utilizando las ecuaciones ( 7.33 ) y ( 7.34 ) en ( 7.21 ), la ecuación de energía específica queda expresada por:

$$W_u = \frac{1}{2} \frac{V_y Q_z \tau_{xz}}{I_z b y G} = \frac{1}{2} \frac{V_y Q_z \frac{V_y Q_z}{I_z b y}}{G} = \frac{1}{2} \frac{V_y^2 Q_z^2}{G I_z^2 b y^2} \quad (7.35)$$

La energía de deformación se obtiene integrando la energía específica en función del volumen. Ecuación ( 7.25 ).

<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

$$WV_y = \iiint W_u dV = \iiint \frac{1}{2} \frac{Vy^2 Qz^2}{GIz^2 by^2} dV = \int_0^L dx \iint \frac{1}{2} \frac{Vy^2 Qz^2}{GIz^2 by^2} dA$$

El momento de inercia también puede ser expresado en función de su radio de giro

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \text{ despejando } I_z,$$

$$I_z = A\rho^2 \quad \text{reemplazando } I_z \text{ en la ecuación anterior,}$$

$$WV_y = \int_0^L dx \iint \frac{1}{2} \frac{Vy^2 Qz^2}{G A \rho^2 Iz by^2} dA$$

$V_y$ ,  $G$ ,  $A$  son constantes,  $\iint \frac{Qz^2}{\rho^2 Iz by^2} dA = k$  por lo tanto la energía de deformación es:

$$WV_y = \int_0^L k \frac{Vy^2}{2GA} dx \quad (7.36)$$

Como se puede observar,  $k$  depende de la forma de la sección equivalente a 1.2 en secciones rectangulares y triangulares, 10/9 en secciones circulares y en perfiles laminados varía  $\frac{A_{sección}}{A_{alma}}$ .<sup>27</sup>

#### 7.4.3.4. Momento torsor

Al igual que el momento flector, el momento torsor genera esfuerzos equivalentes:

$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{J} r \quad (7.37)$$

$J =$  Momento polar de inercia  $r =$  distancia al centro de la sección

Reemplazando en la ecuación (7.21) como se ha mostrado:

$$W_u = \frac{1}{2} \frac{M_x}{J} r \frac{M_x}{GJ} r = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{GJ^2} r^2 \quad (7.38)$$

La energía de deformación se obtiene integrando la energía específica en función del volumen. Ecuación (7.25).

<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

$$WMt = \iiint Wu \, dV = \iiint \frac{1}{2} \frac{Mx^2}{GJ^2} r^2 \, dV = \int_0^L dx \iint \frac{1}{2} \frac{Mx^2}{GJ^2} r^2 \, dA \quad (7.39)$$

$Mx$ ,  $G$  y  $J$  son constantes y  $\iint r^2 \, dA = J$  la energía de deformación queda expresada por:

$$WMt = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{Mx^2}{GJ^2} dx \quad (7.40)$$

El momento polar de inercia depende de la sección a lo cual en secciones circulares equivaldría a  $J = \frac{\pi}{32} (De^4 - Di^4)$

En secciones no circulares o anulares se utiliza  $Jm$ , momento polar de inercia modificado

$$WMt = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{Mx^2}{GJm^2} ds \quad (7.41)$$

Las secciones rectangulares tienen un valor de  $Jm = \frac{1}{3} bt^3$   
 Donde  $b$  es el lado mayor y  $t$  es la dimensión menor.<sup>27</sup>

---

<sup>27</sup> McCORMAC, & Jack. (2010). *Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed.* (Vol. 4). Alfaomega.

### 7.4.4 MATRIZ TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS LOCALES A GLOBALES.

Los efectos producidos por cada desplazamiento se calculan dependiendo del ángulo de la rotación en cada grado de libertad.

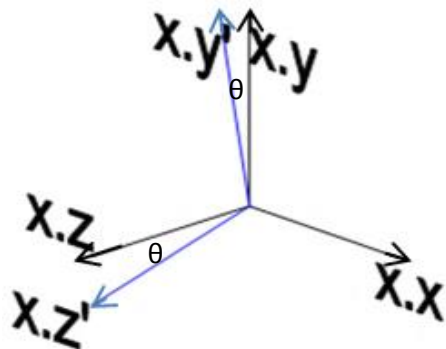


Figura 6. Coordenadas giro eje x

Girando el elemento alrededor del eje x

$$\text{eje x} \quad x.x = 1 \quad x.y = 0 \quad x.z = 0$$

$$\text{eje y} \quad x.x = 0 \quad x.y = x.y' * \cos(\theta)$$

$$x.z = x.y' * \text{sen}(\theta)$$

$$\text{eje z} \quad x.x = 0 \quad x.y = x.z' * -\text{sen}(\theta) \quad x.z = x.z' * \cos(\theta)$$

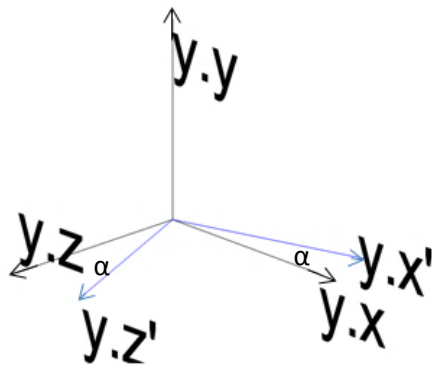


Figura 5. Coordenadas giro eje y

Girando el elemento alrededor del eje y

$$\text{eje x} \quad y.x = y.x' * \cos(\alpha) \quad y.y = 0$$

$$y.z = y.x' * -\text{sen}(\alpha)$$

$$\text{eje y} \quad y.x = 0 \quad y.y = 1 \quad y.z = 0$$

$$\text{eje z} \quad y.x = y.z' * \text{sen}(\alpha) \quad y.y = 0 \quad y.z = y.z' * \cos(\alpha)$$

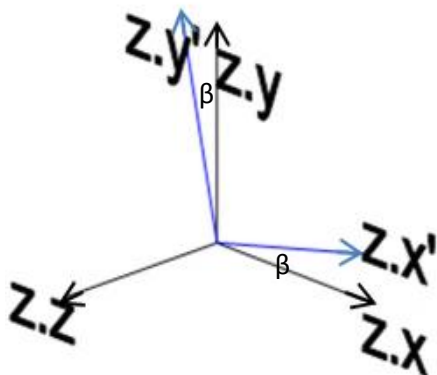


Figura 7. Coordenadas giro eje z

Girando el elemento alrededor del eje z

$$\text{eje x} \quad z.x = z.x' * \cos(\beta) \quad z.y = z.x' * \text{sen}(\beta) \quad z.z = 0$$

$$\text{eje y} \quad z.x = z.y' * -\text{sen}(\beta) \quad z.y = z.y' * \cos(\beta) \quad z.z = 0$$

$$\text{eje z} \quad z.x = 0 \quad z.y = 0 \quad z.z = 1$$

La matriz de transformación viene dada por la expresión

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

A lo cual podemos despejar T de las ecuaciones anteriores.

Girando el elemento alrededor del eje x

$$[Tx] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Girando el elemento alrededor del eje y

$$[Ty] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

Girando el elemento alrededor del eje z

$$[Tz] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

Multiplicando las matrices 3.6, 3.7 y 3.8 se obtiene:

$$\begin{aligned} T &= [Tx] * [Ty] * [Tz] \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \text{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \dots \\ &\quad \dots * \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de matrices con matlab y reemplazando los ángulos de la siguiente manera:  $\theta = th$      $\alpha = ar$      $\beta = br$      $T = \dots$

$$\begin{aligned} &/ \cos(ar) \cos(br) + \sin(ar) \sin(br) \sin(th), \cos(br) \sin(ar) \sin(th) - \cos(ar) \sin(br), \sin(ar) \cos(th) \backslash \\ &| \\ &| \quad \sin(br) \cos(th), \quad \cos(br) \cos(th), \quad -\sin(th) \quad | \\ &| \\ &\backslash \cos(ar) \sin(br) \sin(th) - \cos(br) \sin(ar), \sin(ar) \sin(br) + \cos(ar) \cos(br) \sin(th), \cos(ar) \cos(th) / \end{aligned} \quad (7.46)$$

El método de Galerkin<sup>28</sup> menciona que el trabajo virtual interno de un elemento es:

$$We = \psi'^T * K' * q' = \psi^T * L^T * K' * L * q \quad (7.47)$$

De la ecuación anterior se puede reconocer que la matriz de rigidez en coordenadas globales es,  $K = L^T * K' * L$  donde  $\psi'$  y  $\psi$  son respectivamente los desplazamientos nodales en coordenadas locales y globales.<sup>28</sup>

#### 7.4.4. CONDENSACIÓN DE GUYAN (CONDENSACION ESTÁTICA)

La condensación se refiere a la contracción o disminución de tamaño de un sistema de ecuaciones, eliminando ciertos grados de libertad. Seleccionando los grados de libertad a trabajar ( $\Delta c$ ) y los grados de libertad a eliminar ( $\Delta b$ ) que unidos forman el total ( $\Delta$ ).

La ecuación original viene dada por la forma  $[K] * \{\Delta\} = \{P\}$  subdividida se expresa:

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bc} \\ K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b \\ P_c \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

La forma condensada sería:

$$[K_{Ccc}] * \{\Delta c\} = \{P_{Cc}\} \quad (7.49)$$

Para transformar la ecuación ( 7.48 ) en la ecuación ( 7.49 ), se debe resolver la ecuación ( 7.48 ) despejando el termino  $\Delta b$  como se muestra a continuación.

$$\{\Delta b\} = -[K_{bb}]^{-1} * [K_{bc}] * \{\Delta c\} + [K_{bb}]^{-1} * \{P_b\} \quad (7.50)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación ( 7.48 ) se obtiene.

$$-[K_{cb}] * [K_{bb}]^{-1} * [K_{bc}] * \{\Delta c\} + [K_{cc}] * \{\Delta c\} = \{P_c\} - [K_{cb}] * [K_{bb}]^{-1} * \{P_b\} \quad (7.51)$$

Como se puede observar la ecuación ( 7.51 ) es idéntica a la ecuación ( 7.49 )

$$[K_{cc}] - [K_{cb}] * [K_{bb}]^{-1} * [K_{bc}] = [K_{Ccc}] \quad (7.52)$$

$$\{P_c\} - [K_{cb}] * [K_{bb}]^{-1} * \{P_b\} = \{P_{Cc}\} \quad (7.53)$$

Para mayor información referirse al documento de la referencia [29]<sup>29</sup>

---

<sup>28</sup> TIRUPATHI R. CHANDRUPATLA, A. D. (2002). Introduction to Finite Elements in Engineering. New Jersey: Prentice Hall. Inc.

<sup>29</sup> WILLIAM MCGUIRE, R. H. (2000). Matrix structural analysis. New York: JhonWiley&Sons Inc.

Siendo así la ecuación ( 7.52 ) la correspondiente a la matriz de rigidez condensada para el caso en los cuales la matriz de masa no es simétrica a la matriz de rigidez.

## 8. TEORÍA DE LA SENSIBILIDAD

### 8.1. ECUACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

La diferencia entre los vectores propios calculados numéricamente y aquellos calculados experimentalmente debería ser nula pero las causas de error mencionadas anteriormente redundan en modelos numéricos imprecisos. Pequeños cambios en los parámetros estructurales llevan obtener estas discrepancias de resultados. Dichas discrepancias se pueden reducir analizando el problema de valores y vectores propios de la dinámica estructural por medio de la ecuación de Fox y Kapoor<sup>30</sup>:

$$\lambda n - \lambda i = 0 \rightarrow \frac{K}{M} - \lambda i = 0 \rightarrow \text{Multiplicando por } M, \quad K - M\lambda i = 0$$

$$\delta_{ij} = \text{kroncker delta} = 0,1$$

$M = \text{Matriz de masa}$

$K = \text{Matriz de rigidez}$

$$\begin{aligned} K * \phi_i &= \lambda_i * M * \phi_i \\ \phi_i^T * M * \phi_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\lambda_i = \text{frecuencia natural} = W n_i^2$$

$\phi_i = \text{Vector propio del modo } i$

Derivando la ecuación ( 8.1 ) se obtiene:

$$(K - \lambda_i * M) * \phi_i' + (K' - \lambda_i * M' - \lambda_i' * M) * \phi_i = 0 \quad (8.2)$$

Se multiplica  $\phi^T$  en la ecuacion ( 8.2 )

Ya que la frecuencia natural es constante la ecuación del valor propio de la sensibilidad vendría siendo:

$$\begin{aligned} \phi^T * (K' - \lambda_i * M' - \lambda_i' * M) * \phi_i &= 0 \\ \text{Valor propio de la sensibilidad: } \lambda_i' &= \phi_i^T * (K' - \lambda_i * M') * \phi_i \end{aligned} \quad (8.3)$$

Para mayor información sobre el vector propio de la sensibilidad revisar el documento de referencia [6, 24].<sup>6, 24</sup>

<sup>30</sup> FOX, R. L., & KAPOOR, M. P. (1968). Rates of Change of Eigenvalues. *AIAA Journal*, VOL. 6, NO. 12 2426-2429.

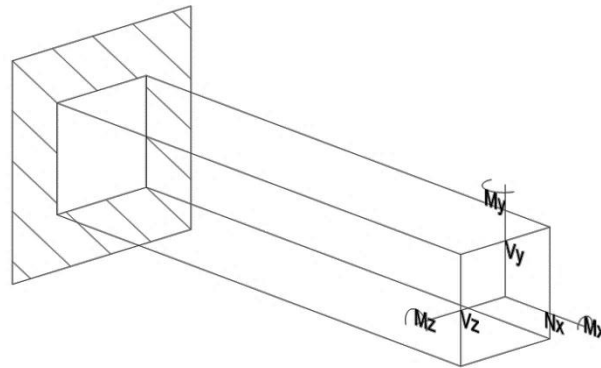
<sup>6</sup> ALVIN, K. F. (1997). Efficient computation eigenvector sensitivities structural dynamics. *AIAA Journal*, 652-659.

## 8.2. APLICACIÓN DEL MÉTODO

Se desarrollan dos ejercicios; uno sencillo con todos los procedimientos, desde el cálculo de desplazamientos hasta la aplicación de la teoría (ecuación ( 8.3 )), y otro ejercicio un poco más complejo con solo los cálculos realizados en matlab.

### 8.2.1. EJERCICIO SENCILLO

- SELECCIÓN ELEMENTO O ESTRUCTURA



**Figura 8. Viga empotrada tridimensional**

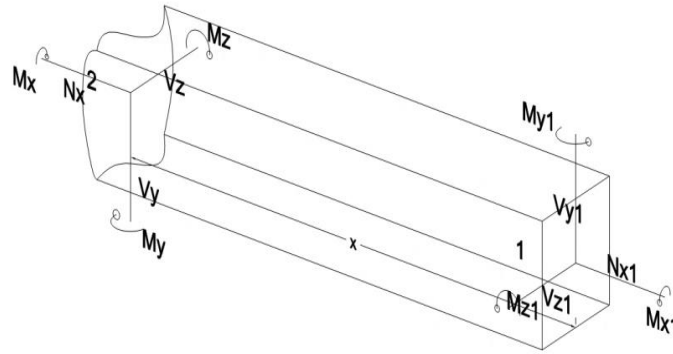
El elemento seleccionado es una viga empotrada, analizada en sus 6 grados de libertad.

El grado de libertad  $N_x$  representa la fuerza axial,  $M_x$  el momento torsor.  $V_y$  es equivalente a la fuerza cortante y  $M_y$  al momento rotacional.  $V_z$  al igual que  $V_y$  equivale a la fuerza cortante pero del eje  $z$  y  $M_z$  el momento a flexión.

---

<sup>24</sup> JHON E.MOTTERSHEAD A, N. M. (2010). The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2275-2296.

- **CÁLCULO DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN DEL ELEMENTO**



**Figura 9. Corte transversal viga empotrada**

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0, \\
 N_{x1} - N_x &= 0, \quad N_x = N_{x1}, \\
 \sum F_y &= 0, \\
 V_{y1} - V_y &= 0, \quad V_y = V_{y1}, \\
 \sum F_z &= 0, \quad V_{z1} - V_z = 0, \quad V_z = V_{z1}, \\
 \sum M_x &= 0, \quad M_{x1} - M_x = 0, \quad M_x = M_{x1}, \\
 \sum M_y &= 0, \quad M_{y1} - M_y - V_{z1} * x = 0, \quad M_y = M_{y1} - V_{z1} * x, \\
 \sum M_z &= 0, \quad M_{z1} - M_z + V_{y1} * x = 0, \quad M_z = M_{z1} + V_{y1} * x,
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

La energía de deformación del elemento con comportamiento lineal se puede representar:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^L \frac{N_x^2}{2EA} dx + \int_0^L \frac{k_1 V_y^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{M_z^2}{2EI_z} dx + \int_0^L \frac{M_x^2}{2GJ_m} dx + \int_0^L \frac{k_2 V_z^2}{2GA} dx \dots \\
 &+ \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} dx
 \end{aligned}$$

Reemplazando con los datos del análisis anterior:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^L \frac{N_{x1}^2}{2EA} dx + \int_0^L \frac{k_1 V_{y1}^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{(M_{z1} + V_{y1})^2}{2EI_z} dx + \int_0^L \frac{M_{x1}^2}{2GJ_m} dx \dots \\
 &+ \int_0^L \frac{k_2 V_{z1}^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{(M_{y1} - V_{z1})^2}{2EI_y} dx
 \end{aligned}$$

Resolviendo con matlab se obtiene:

$$W = \frac{L^3 * V_1^2}{6 * E_m * I_z} + \frac{L^3 * V_{z1}^2}{6 * E_m * I_y} + \frac{L^2 * M_{f1} * V_1}{2 * E_m * I_z} - \frac{L^2 * M_{r1} * V_{z1}}{2 * E_m * I_y} \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{L * Mf1^2}{2 * Em * Iz} + \frac{L * Mr1^2}{2 * Em * Iy} + \frac{L * Mt1^2}{2 * G * Jm} + \frac{L * N1^2}{2 * A * Em} + \frac{k1 * L * V1^2}{2 * A * G} \dots \quad (8.5) \\
& + \frac{k2 * L * Vz1^2}{2 * A * G}
\end{aligned}$$

• **CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS Y GIROS**

El segundo teorema de Castigliano enuncia que la derivada de la energía con respecto a la fuerza de dirección *i* corresponde al desplazamiento o giro en la dirección *i*.

$$\delta_i = \partial W / \partial P_i \quad (8.6)$$

Derivando la energía *W* con respecto a cada fuerza actuante en cada grado de libertad para obtener su desplazamiento o giro.

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{L * N1}{A * Em} \\
\delta_2 &= \frac{V1 * L^3}{3 * Em * Iz} + \frac{Mf1 * L^2}{2 * Em * Iz} + \frac{V1 * k1 * L}{A * G} \\
\delta_3 &= \frac{V1 * L^2}{2 * Em * Iz} + \frac{Mf1 * L}{Em * Iz} \\
\delta_4 &= \frac{L * Mt1}{G * Jm} \\
\delta_5 &= \frac{Vz1 * L^3}{3 * Em * Iy} - \frac{Mr1 * L^2}{2 * Em * Iy} + \frac{Vz1 * k2 * L}{A * G} \\
\delta_6 &= \frac{L * Mr1}{Em * Iy} - \frac{L^2 * Vz1}{2 * Em * Iy} \quad (8.7)
\end{aligned}$$





Desplazamiento en el eje x (axial)

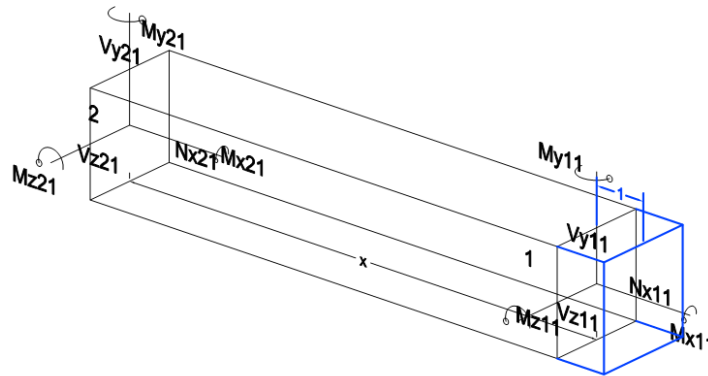


Figura 12. Desplazamiento axial eje x (AutoCAD)

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 & \quad N_{x21} + N_{x11} = 0, & \quad N_{x21} = -N_{x11}, \\
 \sum F_y = 0, & \quad V_{y11} + V_{y21} = 0, & \quad V_{y21} = -V_{y11}, \\
 \sum F_z = 0, & \quad V_{z11} + V_{z21} = 0, & \quad V_{z21} = -V_{z11}, \\
 \sum M_x = 0, & \quad M_{x11} + M_{x21} = 0, & \quad M_{x21} = -M_{x11}, \\
 \sum M_y = 0, & \quad M_{y11} + M_{y21} - V_{z11} * x = 0, & \quad M_{y21} = V_{z11} * x - M_{y11}, \\
 \sum M_z = 0 & \quad M_{z11} + M_{z21} + V_{y11} * x = 0 & \quad M_{z21} = -M_{z11} - V_{y11} * x
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

El procedimiento es similar por lo que se registran solo los resultados de los siguientes grados de libertad.

Desplazamiento en el eje y (Cortante)

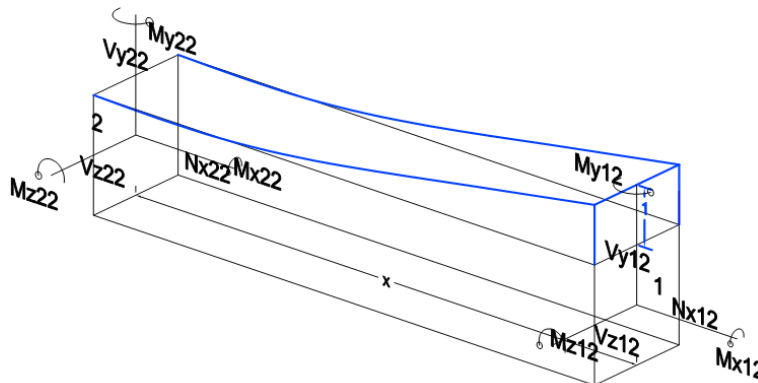
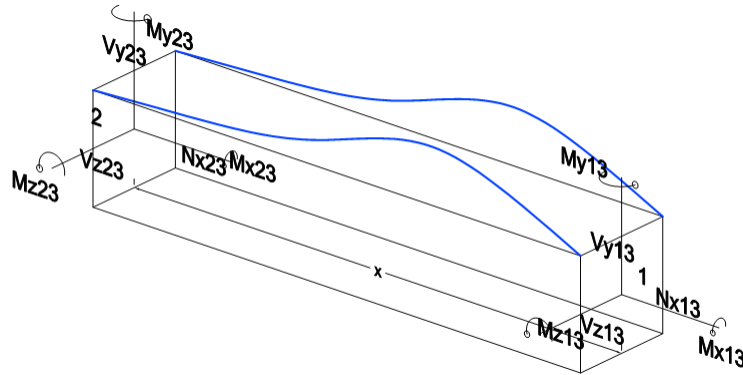


Figura 13. Desplazamiento cortante eje y (AutoCAD)

$$\begin{aligned}
 N_{x22} &= -N_{x12}, & M_{x22} &= -M_{x12}, \\
 V_{y22} &= -V_{y12}, & M_{y22} &= V_{z12} * x - M_{y12}, \\
 V_{z22} &= -V_{z12}, & M_{z22} &= -M_{z12} - V_{y12} * x
 \end{aligned}
 \tag{ 8.12 }$$

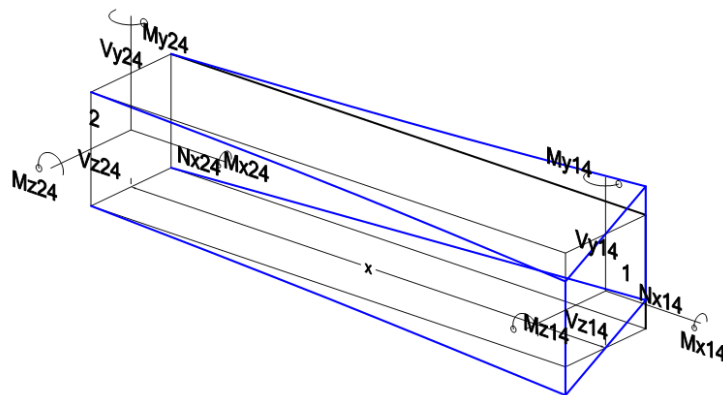
Rotación sobre el eje z (Mz momento a flexión)



**Figura 14. Rotación a flexión eje z (AutoCAD)**

$$\begin{aligned}
 N_{x23} &= -N_{x13}, & M_{x23} &= -M_{x13}, \\
 V_{y23} &= -V_{y13}, & M_{y23} &= V_{z13} * x - M_{y13}, \\
 V_{z23} &= -V_{z13}, & M_{z23} &= -M_{z13} - V_{y13} * x
 \end{aligned}
 \tag{ 8.13 }$$

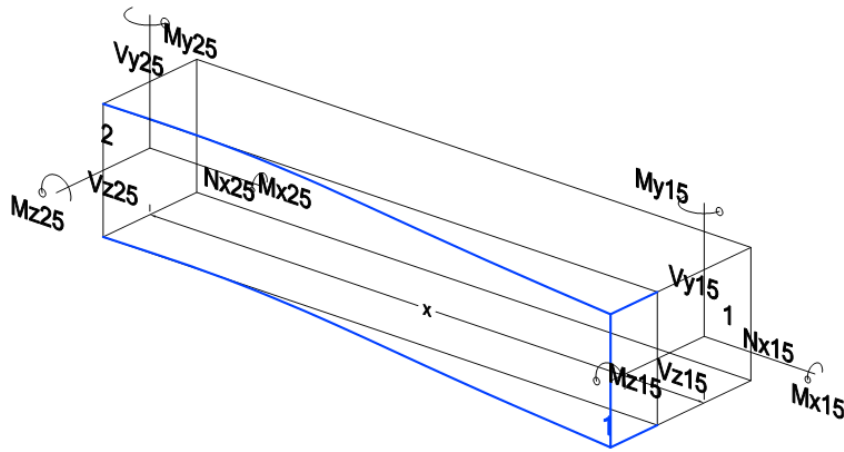
Rotación sobre el eje x (Mx momento a torsión)



**Figura 15. Rotación a torsión eje x (AutoCAD)**

$$\begin{aligned}
 Nx_{24} &= -Nx_{14}, & Mx_{24} &= -Mx_{14}, \\
 Vy_{24} &= -Vy_{14}, & My_{24} &= Vz_{14} * x - My_{14}, \\
 Vz_{24} &= -Vz_{14}, & Mz_{24} &= -Mz_{14} - Vy_{14} * x
 \end{aligned}
 \tag{8.14}$$

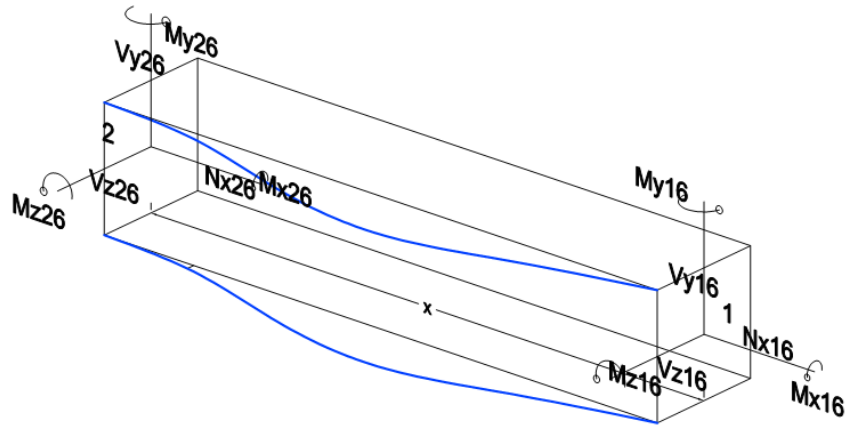
Desplazamiento en el eje z (Cortante)



**Figura 16. Desplazamiento cortante eje z (AutoCAD)**

$$\begin{aligned}
 Nx_{25} &= -Nx_{15}, & Mx_{25} &= -Mx_{15}, \\
 Vy_{25} &= -Vy_{15}, & My_{25} &= Vz_{15} * x - My_{15}, \\
 Vz_{25} &= -Vz_{15}, & Mz_{25} &= -Mz_{15} - Vy_{15} * x
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

Rotación sobre el eje y (My momento a flexión en y)



**Figura 17. Rotación a flexión eje y (AutoCAD)**

$$N_{x26} = -N_{x16}, \quad M_{x26} = -M_{x16}, \quad (8.16)$$

$$V_{y26} = -V_{y16}, \quad M_{y26} = V_{z16} * x - M_{y16},$$

$$V_{z26} = -V_{z16}, \quad M_{z26} = -M_{z16} - V_{y16} * x$$

Se debe reemplazar  $X=L$  donde  $L$  es la longitud correspondiente.

Sumando los efectos de los desplazamientos y rotaciones producidos en cada grado de libertad se forma la matriz  $[K_{ji}]$  o  $[K_{BA}]$ .

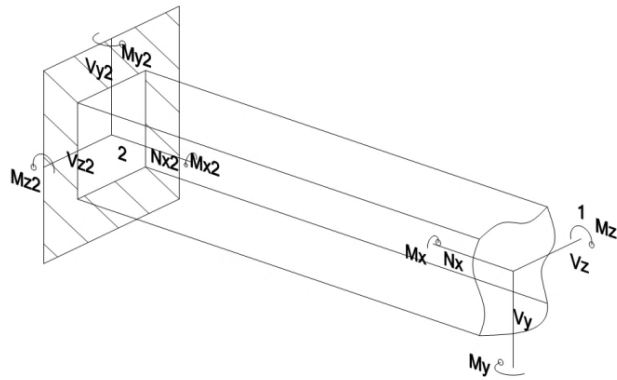
$$[K_{ji}] = \text{Matriz rigidez} = [KBA]$$

$$\begin{array}{c}
 / \quad A \text{ Em} \\
 | \quad - \text{-----}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad L \\
 | \\
 | \quad 12 A \text{ Em G Iz} \\
 | \quad 0, \quad - \text{-----}, \quad -\#1, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad L \#3 \\
 | \\
 | \quad 6 A \text{ Em G Iz L} \quad \text{Em Iz} (\#5 + 3 \text{ Em Iz } k1) \ 4 \\
 | \quad 0, \quad \#1, \quad \text{-----} \text{-----}, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad \#3 \quad L \#3 \\
 | \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \text{G Jm} \\
 | \quad \text{-----}, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad L \\
 | \\
 | \quad 12 A \text{ Em G Iy} \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad - \text{-----}, \quad \#2 \\
 | \quad L \#4 \\
 | \\
 | \quad 6 A \text{ Em G Iy L} \quad \text{Em Iy} (\#5 + 3 \text{ Em Iy } k2) \ 4 \\
 | \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -\#2, \quad \text{-----} \text{-----} \\
 | \quad \#4 \quad L \#4 \\
 \backslash
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \#1 == \frac{6 A \text{ Em G Iz}}{\#3} \quad \#2 == \frac{6 A \text{ Em G Iy}}{\#4} \quad \#3 == \#5 + 12 \text{ Em Iz } k1 \quad \#4 == \#5 + 12 \text{ Em Iy } k2 \quad \#5 == A G L^2
 \end{array}$$

Figura 18. Matriz de rigidez [KBA] (Matlab)

La matriz de rigidez KAA o K22 se calcula realizando el procedimiento inicial, lo único que variaría sería el diagrama de fuerzas y momentos.



**Figura 19. Corte transversal viga empotrada segundo nodo (AutoCAD)**

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0, & & N_{x2} - N_x = 0, & & N_x = N_{x2}, \\
 \sum F_y = 0, & & V_{y2} - V_y = 0, & & V_y = V_{y2}, \\
 \sum F_z = 0, & & V_{z2} - V_z = 0, & & V_z = V_{z2}, \\
 \sum M_x = 0, & & M_{x2} - M_x = 0, & & M_x = M_{x2}, \\
 \sum M_y = 0, & & M_{y2} - M_y + V_{z2} * x = 0, & & M_y = M_{y2} + V_{z2} * x, \\
 \sum M_z = 0, & & M_{z2} - M_z - V_{y2} * x = 0, & & M_z = M_{z2} - V_{y2} * x
 \end{aligned} \tag{ 8.17 }$$

$$\begin{array}{l}
 / \text{ A Em} \\
 | \text{ ----, } 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \text{ L} \\
 | \\
 | \quad 12 \text{ A Em G Iz} \\
 | 0, \text{ ----, } \quad \#1, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad \text{L \#3} \\
 | \\
 | \quad 4 \text{ Em Iz (\#5 + 3 Em Iz V1 k1)} \\
 | 0, \quad \#1, \text{ ----, } 0, \quad 0, \quad 0 \\
 | \quad \quad \text{L \#3} \\
 | \\
 | \quad \quad \quad \text{G Jm} \\
 | 0, \quad 0, \quad 0, \quad \text{----, } 0, \quad 0 \\
 | \quad \quad \quad \text{L} \\
 | \\
 | \quad \quad \quad 12 \text{ A Em G Iy} \\
 | 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \text{ ----, } \quad \#2 \\
 | \quad \quad \quad \text{L \#4} \\
 | \\
 | \quad \quad \quad \text{Em Iy (\#5 + 3 Em Iy k2) 4} \\
 | 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \#2, \text{ ----} \\
 | \quad \quad \quad \text{L \#4} \\
 \backslash
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \backslash \\
 | \\
 | \quad 6 \text{ A Em G Iz} \\
 | \#1 = \text{ ----} \\
 | \quad \quad \#3 \\
 | \\
 | \quad 6 \text{ A Em G Iy} \\
 | \#2 = - \text{ ----} \\
 | \quad \quad \#4 \\
 | \\
 | \#3 = \#5 + 12 \text{ Em Iz V1 k1} \\
 | \\
 | \#4 = \#5 + 12 \text{ Em Iy k2} \\
 | \\
 | \quad \quad \quad 2 \\
 | \#5 = \text{ A G L} \\
 | \\
 | \\
 | \\
 /
 \end{array}$$

Figura 20. Matriz de rigidez [KAA] (Matlab)

$$\begin{Bmatrix} PA \\ PB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} KAA & KAB \\ KBA & KBB \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta A \\ \delta B \end{Bmatrix} \quad (8.18)$$

La matriz de rigidez total o K es igual a:

<pre> / A Em   ----, 0, 0, 0, 0, 0, #2, 0, 0, 0, 0, 0     L     0, #7, #3, 0, 0, 0, 0, -#7, #3, 0, 0, 0       0, #3, #9, 0, 0, 0, 0, -#3, #5, 0, 0, 0                 G Jm   0, 0, 0, ----, 0, 0, 0, 0, 0, #1, 0, 0               L     0, 0, 0, 0, #8, -#4, 0, 0, 0, 0, -#8, -#4       0, 0, 0, 0, -#4, #10, 0, 0, 0, 0, #4, #6                 A Em   #2, 0, 0, 0, 0, 0, ----, 0, 0, 0, 0, 0               L     0, -#7, -#3, 0, 0, 0, 0, #7, -#3, 0, 0, 0       0, #3, #5, 0, 0, 0, 0, -#3, #9, 0, 0, 0                 G Jm   0, 0, 0, #1, 0, 0, 0, 0, 0, ----, 0, 0               L     0, 0, 0, 0, -#8, #4, 0, 0, 0, 0, #8, #4     \ 0, 0, 0, 0, -#4, #6, 0, 0, 0, 0, #4, #10 / </pre>	<pre> \ G Jm   #1 == - ----   L     A Em   #2 == - ----   L     6 A Em G Iz   #3 == -----   #11     6 A Em G Iy   #4 == -----   #12     6 A Em G Iz L   #5 == ----- - #9   #11     6 A Em G Iy L   #6 == ----- - #10   #12     12 A Em G Iz   #7 == -----   L #11     12 A Em G Iy   #8 == -----   L #12 </pre>	
<pre> Em Iy (#13 + 3 Em Iy k2) 4 #10 == -----                 L #12                 2 #13 == A G L </pre>	<pre> #11 == #13 + 12 Em Iz k1 #12 == #13 + 12 Em Iy k2 </pre>	<pre> Em Iz (#13 + 3 Em Iz k1) 4 #9 == -----                 L #11 </pre>

**Figura 21. Matriz total de rigidez (Matlab)**

Ya que el elemento estudiado es empotrado, solo tendrá libertad de movimiento en uno de sus lados en este caso en el nodo 2. Para una mejor comprensión se adecúa la matriz de rigidez en el orden x, y, z, Mx, My, Mz, (tanto filas como columnas) de esta manera es más sencillo analizar los grados de libertad en los cuales la masa tiene influencia.

Matriz de rigidez del nodo 2 = KBB o K22 organizada





$$\begin{array}{c}
 / \text{ A L ro} \\
 | \text{ -----, } 0, 0 | \\
 | 2 | \\
 | | \\
 | \text{ A L ro} | \\
 | 0, \text{ -----, } 0 | \\
 | 2 | \\
 | | \\
 | \text{ A L ro} | \\
 | 0, 0, \text{ -----} | \\
 | 2 | \\
 \backslash
 \end{array}$$

Figura 26. Matriz de masa de la viga en voladizo

• **APLICACION DE LA TEORÍA DE SENSIBILIDAD**

Para aplicar la teoría de sensibilidad es necesario calcular las derivadas de la matriz de masa y rigidez respecto al parámetro analizar, y calcular los valores y vectores propios de la frecuencia natural como indica la ecuación ( 8.3 ) de la teoría de sensibilidad

$$\lambda_i' = \phi_i^T * (K' - \lambda_i * M') * \phi_i$$

Resolviendo con el software matlab se puede observar cuales son los parámetros críticos por lo que sólo se da la explicación de dichos parámetros. El parámetro crítico encontrado fue la inercia por consiguiente se le hizo un análisis a sus variables, encontrando que la variable crítica en este caso en el modo 1 es la altura del elemento aunque en el modo 2 es la base y en el modo 3 es la densidad. La variable crítica negativa en los 3 modos es la longitud.

Se procede hacer el análisis con el parámetro L por ser crítico en los 3 nodos y por ser de relación indirecta a diferencia de la altura la base y la densidad.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial L} = \phi_i^T * \left( \frac{\partial K}{\partial L} - \lambda_i * \frac{\partial M}{\partial L} \right) * \phi_i$$

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \quad \lambda_i = \begin{Bmatrix} 1272.12868 \\ 1272.12868 \\ 512820.51282 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial K}{\partial L} =$$

```

/ A Em
| ----, 0, 0
| 2
| L
|
| 2 2 2 2
| #1 9 A Em G Iz 12 A Em G Iz 24 A Em G Iz #1
| 0, ---- + ----, 0
| 2 #5 #3 2 2 2
| #5 #3 L #3 #3 #5 #3
|
| 2 2 2 2
| #2 9 A Em G Iy 12 A Em G Iy 24 A Em G Iy #2
| 0, 0, ---- + ----
| 2 #6 #4 2 2 2
| #6 #4 L #4 #4 #6 #4 /
|
| 3 3 2 3 3 2
| #1 == 18 A Em G Iz L #2 == 18 A Em G Iy L #3 == #7 + 12 Em Iz k1 #4 == #7 + 12 Em Iy k2 #5 == #7 + 3 Em Iz k1
| #6 == #7 + 3 Em Iy k2 #7 == A G L

```

**Figura 27. Matriz de Rigidez derivada respecto a la longitud (Matlab).**

$$\frac{\partial M}{\partial L} =$$

```

/ A ro
| ----, 0, 0
| 2
|
| A ro
| 0, ----, 0
| 2
|
| A ro
| 0, 0, ----
| 2 /

```

**Figura 28. Matriz de masa derivada respecto a la longitud (Matlab).**

Con las variables de la ecuación definidas, los valores propios de la sensibilidad son:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial L} = \begin{Bmatrix} -19768410.093 \\ -19768410.093 \\ -4000000000 \end{Bmatrix}$$

La frecuencia natural del sistema es inversamente proporcional a la longitud, a medida que aumenta la longitud, su frecuencia natural disminuye. Dependiendo de los resultados experimentales se actualiza el modelo analítico actualizando la longitud como corresponde. Se disminuye la longitud si se necesita aumentar la frecuencia natural o se aumenta la longitud si se necesita disminuir la frecuencia natural.

## 8.2.2. EJERCICIO VIGA DE ACERO REAL

- **CARACTERISTICAS DE LA VIGA EXPERIMENTADA**

El ensayo de la viga es una recopilación del documento referenciado [31], de título Técnica de identificación de modo rápido para la monitorización en línea<sup>31</sup> en español.



Figura 29. Imagen de la viga real<sup>31</sup>

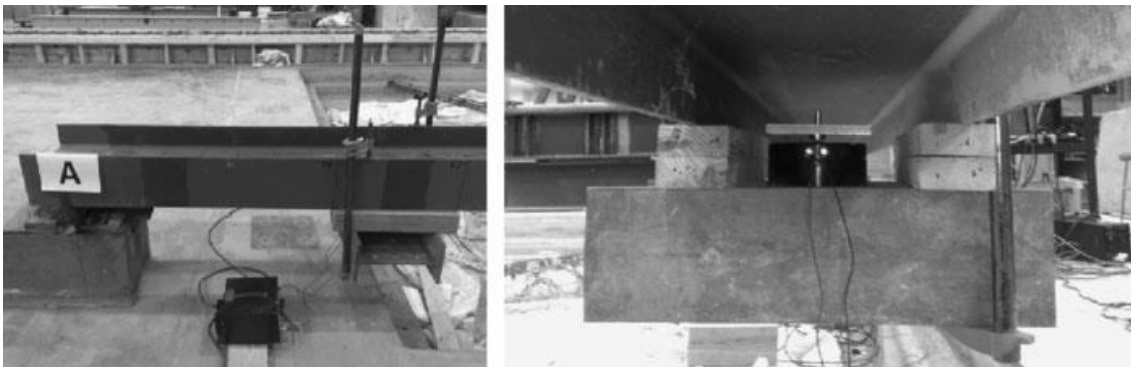
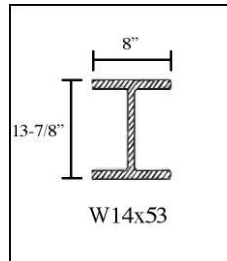


Figura 30. Peso adicional en la viga<sup>31</sup>

---

<sup>31</sup> CAICEDO, J. M., & MARULANDA, J. (2010). Fast mode identification technique for online monitoring. *Struct. Control Health Monit*, 18:416–429.



**Figura 31. Sección transversal W14x53**

Sección transversal = W14x53 viga en acero.

Longitud de la viga = 7.010m

Longitud entre apoyos=6.706m

Simplemente apoyada = 0.152m del final de cada límite.

Pesos adicionales = 1.55kg

Localización del peso adicional = 1.118m del final A.

Distancia del peso al apoyo = 0.9660m

La viga fue instalada a vibrar en su eje más flexible y se excita mediante el electro dinámico agitador Bru el & Kjær, accionado por un amplificador de potencia y controlado por un tiempo real Quanser Q8. Una señal de ruido blanco de banda limitada de 100 Hz se generó usando el Q8 para excitar el haz.<sup>31</sup>

Frecuencia natural del modo 1 = 9.448 Hz

Frecuencia natural del modo 2 = 30.758Hz

Frecuencia natural del modo 3 = 67.959Hz<sup>31</sup>

---

<sup>31</sup> CAICEDO, J. M., & MARULANDA, J. (2010). Fast mode identification technique for online monitoring. *Struct. Control Health Monit*, 18:416–429.

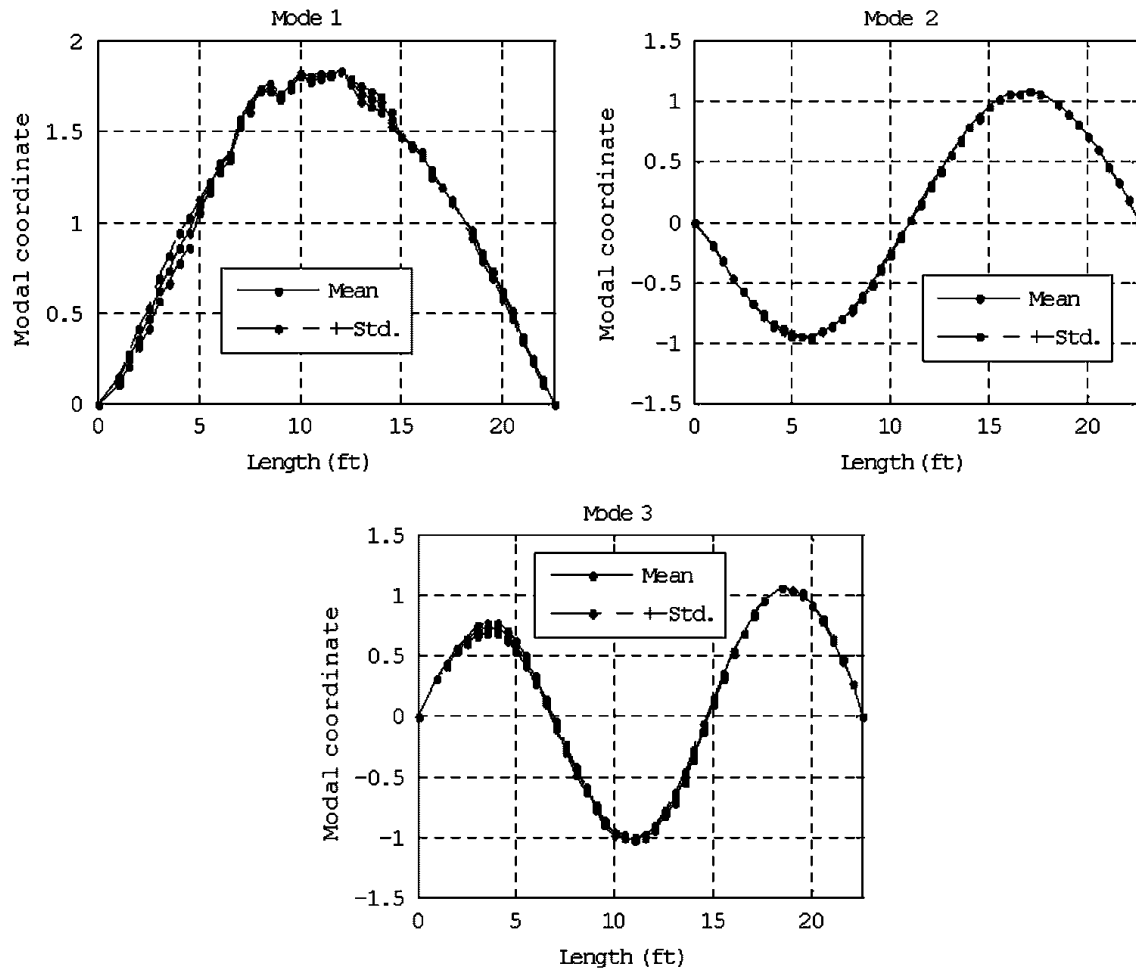


Figura 32. Modo de vibración de la viga experimental <sup>31</sup>

- **CÁLCULO DE LA MATRIZ DE MASA Y RIGIDEZ**

El sistema analizar al ser simplemente apoyado, sus grados de libertad x,y,z en los nodos se eliminan, por lo que no se refleja bien el comportamiento del elemento, lo que con lleva a seleccionar un nodo con todos sus grados de libertad libres. Se calculan las frecuencias de los grados de libertad del nodo media del elemento al ser de grados de libertad libres.

La modelación de la matriz de rigidez vendría siendo de la siguiente manera:

$$K = \begin{bmatrix} KmAA & KmAC & 0 \\ KmCA & KCC & KmCmB \\ 0 & KmBmC & KmBB \end{bmatrix}$$

<sup>31</sup> CAICEDO, J. M., & MARULANDA, J. (2010). Fast mode identification technique for online monitoring. *Struct. Control Health Monit*, 18:416–429.

Donde m se refiere a los grados de libertad con rotaciones y CC el nodo medio del elemento. La carga adicional se modela en la matriz KmAA, KCC ya que su ubicación es antes del centro y cerca al apoyo AA.

La matriz de masa:

$$\begin{matrix} / & A & L & r_o, & 0, & 0 & \backslash \\ | & & & & & & | \\ | & 0, & A & L & r_o, & 0 & | \\ | & & & & & & | \\ \backslash & 0, & 0, & A & L & r_o & / \end{matrix}$$

Figura 33. Matriz de masa de la viga de acero real

- **TRANSFORMACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ**

La matriz de transformación para el nodo del centro corresponde a una matriz identidad, ya que el elemento se desarrolla sobre el eje coordenado.

$$T = \begin{matrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T = & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Figura 34. Matriz de transformación de la viga real

- **CONDENSACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ**

Dividiendo la matriz de rigidez organizada como se presenta a continuación.

$$\begin{aligned} K_{bb} &= KBB([1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12], [1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]) \\ K_{bc} &= KBB([1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12], 4:6) \\ K_{cc} &= KBB(4:6, 4:6) \quad K_{cb} = KBB(4:6, [1 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12]) \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación ( 7.52 ) de condensación:

$$[K_{Ccc}] = [K_{cc}] - [K_{cb}] * [K_{bb}]^{-1} * [K_{bc}]$$

Reemplazando las variables como corresponde para condensar la matriz en función de Kbb.

$$[KCbb] = [Kbb] - [Kbc] * [Kcc]^{-1} * [Kcb]$$

La solución del cálculo anterior es muy extensa.

- **APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE SENSIBILIDAD**

Para aplicar la teoría de sensibilidad es necesario calcular las derivadas de la matriz de masa y rigidez respecto al parámetro analizar, y calcular los valores y vectores propios de la frecuencia natural como indica la ecuación ( 8.3 ) de la teoría de sensibilidad.

$$\lambda i' = \phi i^T * (K' - \lambda i * M') * \phi i$$

Como se puede observar en la Tabla 10 el parámetro crítico de la sensibilidad por unidad de parámetro es la altura del ala; haciendo un análisis más detallado como se muestra en la Tabla 20 el parámetro crítico en el modo 1 que es el modo en estudio con respecto su magnitud, es la longitud.

Se procede hacer el análisis con el parámetro L por ser crítico en los 3 nodos y por ser de relación indirecta. También se analiza la altura del ala.

- **ACTUALIZACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO**

Luego de encontrar el parámetro crítico y encontrar su correlación con el error en el modelo numérico se actualiza el modelo de la estructura como se puede observar en la gráfica 2 y 3.

Graficando actualizaciones realizadas a la longitud y calculando su tendencia, resulta que es más de tipo exponencial que lineal. Se trató de calcular su longitud máxima en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{Longitud con tendencia lineal} &= 7.602 \text{ m} \\ \text{Longitud con tendencia exponencial} &= 7.608 \text{ m} \\ \text{Longitud empírica máxima} &= 7.625 \text{ m} \end{aligned}$$

El porcentaje de error entre la longitud máxima y la real es de 13.7% mientras que el error entre la frecuencia natural experimental y la frecuencia natural analítica con el modelo actualizado es de 0.1%.

Graficando actualizaciones realizadas a la altura del ala y calculando su tendencia, resulta que es más de tipo lineal ya que exponencialmente presenta un error. Se trató de calcular su altura de ala máxima en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{Altura del ala con tendencia lineal} &= 0.0042 \text{ m} \\ \text{Altura del ala con tendencia exponencial} &= 185.755 \text{ m} \end{aligned}$$

Altura del ala empírica máxima = 0.0055 m

El porcentaje de error entre la altura de ala mínima y la real es de 67% mientras que el error entre la frecuencia natural experimental y la frecuencia natural analítica con el modelo actualizado es de 0.39%.

### 8.2.2.1. Gráficas

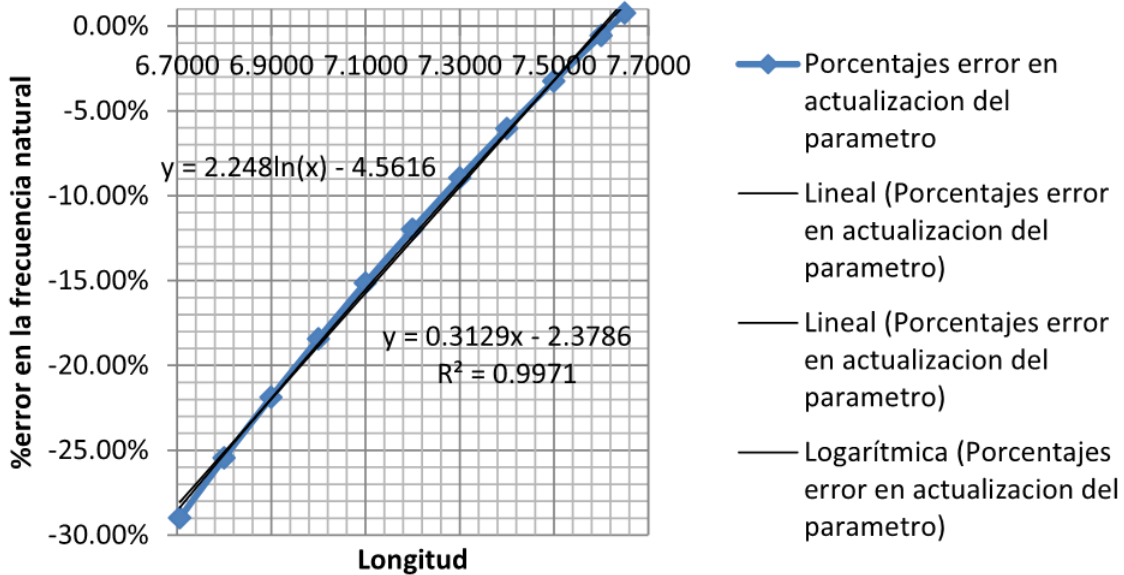


Figura 35. Longitud vs porcentaje de error en la frecuencia natural

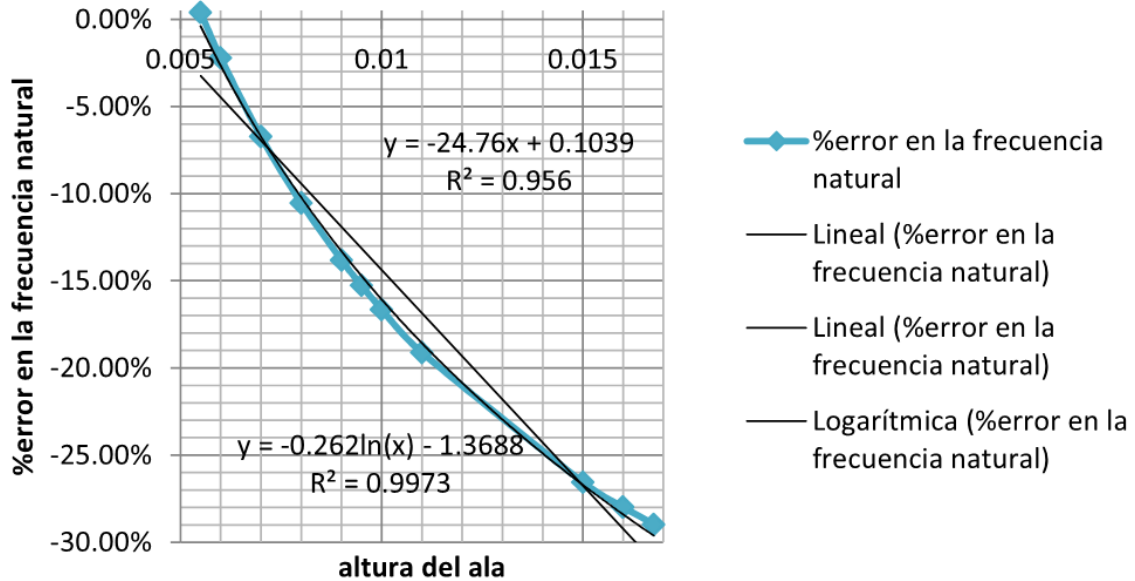


Figura 36. Altura del ala vs porcentaje de error en la frecuencia natural.

### 8.2.3. RESULTADOS.

#### 8.2.3.1. Resultados del ejercicio sencillo.

**Tabla 1. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio sencillo con coeficiente de forma**

Símbolo	Parámetro	Sensibilidades			Magnitud	Unidades
		modos				
		1	2	3		
$\rho$ o ro	Densidad	-6.36E+03	-6.36E+03	-2.56E+06	7800	kg/m3
E	Módulo	2.46E-04	2.46E-04	1.00E-01	200	Gpa
G	Módulo transversal	4.99E-06	4.99E-06	0.00E+00	76.923	Gpa
L	Longitud	-1.98E+07	-1.98E+07	-4.00E+09	10	m
A	Área	-4.92E+07	-4.92E+07	2.91E-07	1	m2
Iz	Inercia eje z	5.91E+08	0.00E+00	0.00E+00	0.0833	m4
Iy	Inercia eje y	0.00E+00	5.91E+08	0.00E+00	0.0833	m4
I	Inercia	5.91E+08	5.91E+08	0.00E+00	0.0833	m4
J	Momento polar de Inercia	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.1338	m4
k1	coeficiente de forma	-3.20E+05	0.00E+00	0.00E+00	1.2	Adimensional
k2	coeficiente de forma	0.00E+00	-3.20E+05	0.00E+00	1.2	Adimensional
k	coeficiente de forma	-3.20E+05	-3.20E+05	0.00E+00	1.2	Adimensional
h	Altura	9.85E+07	6.59E-09	2.91E-07	1	m
b	Base	6.59E-09	9.85E+07	2.91E-07	1	m

**Tabla 2. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado con coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedades	modos		
		1	2	3
$\lambda$ o $Wn^2$	Frecuencias naturales al cuadrado	1272.13	1272.13	512820.51
$\phi$	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0	0	1
		1	0	0
		0	1	0

**Tabla 3. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Sensibilidades		
		modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.000	0.000	1.000
T	Torsor	0.000	0.000	0.000
Q2	Cortante	1.000	0.000	0.000
Q3	Cortante transversal	0.000	1.000	0.000
M3	Flexión	0.022	0.000	0.000
M2	Flexión transversal	0.000	0.022	0.000
Q2m	Cortante por flexión	-0.298	0.000	0.000
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.000	-0.298	0.000

**Tabla 4. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio sencillo sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetro	Sensibilidades			Magnitud	Unidades
		Modos				
		1	2	3		
$\rho$ o ro	Densidad	-6.41E+03	-6.41E+03	-2.56E+06	7800	kg/m3
E	Módulo	2.50E-04	2.50E-04	1.00E-01	200	Gpa
G	Módulo transversal	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	76.923	Gpa
L	Longitud	-2.00E+07	-2.00E+07	-4.00E+09	10	m
A	Área	-5.00E+07	-5.00E+07	2.91E-07	1	m2
Iz	Inercia eje z	6.00E+08	0.00E+00	0.00E+00	0.0833	m4
Iy	Inercia eje y	0.00E+00	6.00E+08	0.00E+00	0.0833	m4
I	Inercia	6.00E+08	6.00E+08	0.00E+00	0.0833	m4
J	Momento polar de Inercia	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.1338	m4
k1	coeficiente de forma	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.2	Adimensional
k2	coeficiente de forma	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.2	Adimensional
k	coeficiente de forma	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.2	Adimensional
h	Altura	1.00E+08	0.00E+00	2.91E-07	1	m
b	Base	0.00E+00	1.00E+08	2.91E-07	1	m

**Tabla 5. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedades	Modos		
		1	2	3
$\lambda$ o $Wn^2$	Frecuencias naturales al cuadrado	1282.05	1282.05	512820.51
$\phi$	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0	0	1
		1	0	0
		0	1	0

**Tabla 6. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio sencillo sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Sensibilidades		
		Modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.000	0.000	1.000
T	Torsor	0.000	0.000	0.000
Q2	Cortante	1.000	0.000	0.000
Q3	Cortante transversal	0.000	1.000	0.000
M3	Flexión	0.023	0.000	0.000
M2	Flexión transversal	0.000	0.023	0.000
Q2m	Cortante por flexión	-0.300	0.000	0.000
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.000	-0.300	0.000

Los porcentajes de error aquí calculados son la diferencia entre los cálculos con coeficiente de forma y los cálculos sin coeficiente de forma asumiendo un comportamiento físico real por parte de los cálculos con coeficiente de forma.

$$\%Error = \frac{\lambda'c - \lambda's}{\lambda'c} \quad (8.19)$$

$\lambda'c$  = Sensibilidad con coeficiente de forma

$\lambda's$  = Sensibilidad sin coeficiente de forma

**Tabla 7. Porcentajes de error de las sensibilidades entre cálculo con y sin coeficiente de forma**

Símbolo	Parámetro	Porcentajes error de la sensibilidad		
		modos		
		1	2	3
$\rho$ o $\rho$	Densidad	0.78%	0.78%	0.00%
E	Módulo	-1.57%	-1.57%	0.00%
G	Módulo transversal	100.00%	100.00%	0.00%
L	Longitud	1.17%	1.17%	0.00%
A	Área	1.57%	1.57%	0.00%
$I_z$	Inercia eje z	-1.57%	0.00%	0.00%
$I_y$	Inercia eje y	0.00%	-1.57%	0.00%
I	Inercia	-1.57%	-1.57%	0.00%
J	Momento polar de Inercia	0.00%	0.00%	0.00%
k1	coeficiente de forma	-100.00%	0.00%	0.00%
k2	coeficiente de forma	0.00%	-100.00%	0.00%
k	coeficiente de forma	-100.00%	-100.00%	0.00%
h	Altura	-1.57%	100.00%	0.00%
b	Base	100.00%	-1.57%	0.00%

**Tabla 8. Porcentajes error entre los valores propios y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado con y sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedades	Porcentajes error del valor y vector propio		
		Modos		
		1	2	3
$\lambda$ o $\omega_n^2$	Frecuencias naturales al cuadrado	-0.78%	-0.78%	0.00%
$\phi$	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0.00%	0.00%	0.00%
		0.00%	0.00%	0.00%
		0.00%	0.00%	0.00%

**Tabla 9. Porcentajes de error de las sensibilidades de los efectos entre cálculo con y sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Porcentajes de error de la sensibilidad		
		Modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.00%	0.00%	0.00%
T	Torsor	0.00%	0.00%	0.00%
Q2	Cortante	0.00%	0.00%	0.00%
Q3	Cortante transversal	0.00%	0.00%	0.00%
M3	Flexión	-1.57%	0.00%	0.00%
M2	Flexión transversal	0.00%	-1.57%	0.00%
Q2m	Cortante por flexión	0.78%	0.00%	0.00%
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.00%	0.78%	0.00%

### 8.2.3.2. Resultados del ejercicio de la viga de acero real

Tabla 10. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.

Símbolo	Parámetro	Sensibilidades			Magnitud	Unidades
		modos				
		1	2	3		
$\rho$ o ro	Densidad	-3.880E+02	-3.038E+03	-1.506E+05	7800	kg/m <sup>3</sup>
E	Módulo	1.501E-05	1.001E-04	5.888E-03	200	Gpa
G	Módulo transversal	3.460E-07	4.793E-05	0.000E+00	76.923	Gpa
L	Longitud	-1.795E+06	-1.304E+07	-3.508E+08	6.7060	m
A	Área	-3.039E+08	-2.027E+09	3.057E+08	0.0099	m <sup>2</sup>
Iz	Inercia eje z	1.251E+11	0.000E+00	0.000E+00	0.00002	m <sup>4</sup>
Iy	Inercia eje y	0.000E+00	9.081E+10	0.000E+00	0.00022	m <sup>4</sup>
I	Inercia	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.0000	m <sup>4</sup>
J	Momento polar de Inercia	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000882	m <sup>4</sup>
k1	coeficiente de forma	-8.960E+03	0.000E+00	0.000E+00	2.9708	-
k2	coeficiente de forma	0.000E+00	-1.241E+06	0.000E+00	2.9708	-
k	coeficiente de forma	-8.960E+03	-1.241E+06	0.000E+00	2.9708	-
hf	Altura del ala	-1.255E+08	-9.830E+08	-4.872E+10	0.0168	m
bf	Base del ala	-1.028E+07	-8.049E+07	-3.990E+09	0.20472	m
hs	Altura del alma	-2.882E+06	-2.256E+07	-1.118E+09	0.320042	m
bs	Base o espesor del alma	-9.813E+07	-7.683E+08	-3.808E+10	0.009398	m

**Tabla 11. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural con coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedad	Modos		
		1	2	3
f	Frecuencia natural	12.19	34.1	240.05
$\lambda$ o $Wn^2$	Frecuencias naturales al cuadrado	5861.78	45897.52	2274855.60
$\phi$	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0	0	1
		1	0	0
		0	1	0

**Tabla 12. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Sensibilidades		
		Modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.00	0.00	2.00
T	Torsor	0.00	0.00	0.00
Q2	Cortante	2.00	0.00	0.00
Q3	Cortante transversal	0.00	2.00	0.00
M3	Flexión	0.00	0.00	0.00
M2	Flexión transversal	0.00	0.00	0.00
Q2m	Cortante por flexión	0.00	0.00	0.00
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.00	0.00	0.00

**Tabla 13. Sensibilidad de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetro	Sensibilidades			Magnitud	Unidades
		modos				
		1	2	3		
$\rho$ o ro	Densidad	-3.92E+02	-3.60E+03	-1.51E+05	7800	kg/m3
E	Módulo	1.53E-05	1.40E-04	5.89E-03	200	Gpa
G	Módulo transversal	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	76.923	Gpa
L	Longitud	-1.82E+06	-1.67E+07	-3.51E+08	6.706	m
A	Área	-3.09E+08	-2.84E+09	3.06E+08	0.0099	m2
Iz	Inercia eje z	1.27E+11	0.00E+00	0.00E+00	0.00002	m4
Iy	Inercia eje y	0.00E+00	1.27E+11	0.00E+00	0.00022	m4
I	Inercia	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0	m4
J	Momento polar de Inercia	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.000882	m4
k1	k1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.9708	-
k2	k2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.9708	-
k	Kn	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.9708	-
hf	Altura del ala	-1.27E+08	-1.16E+09	-4.87E+10	0.0168	m
bf	Base del ala	-1.04E+07	-9.53E+07	-3.99E+09	0.20472	m
hs	Altura del alma	-2.91E+06	-2.67E+07	-1.12E+09	0.32004	m
bs	Base o espesor del alma	-9.90E+07	-9.10E+08	-3.81E+10	0.009398	m

**Tabla 14. Valores y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedad	Modos		
		1	2	3
f	Frecuencia natural	12.24	37.104	240.05
$\lambda$ o $Wn^2$	Frecuencias naturales al cuadrado	5914.46	54349.41	2274855.60
$\phi$	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0	0	1
		1	0	0
		0	1	0

**Tabla 15. Sensibilidad de los parámetros de efectos del ejercicio viga de acero real sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Sensibilidades		
		Modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.00	0.00	2.00
T	Torsor	0.00	0.00	0.00
Q2	Cortante	2.00	0.00	0.00
Q3	Cortante transversal	0.00	2.00	0.00
M3	Flexión	0.00	0.00	0.00
M2	Flexión transversal	0.00	0.00	0.00
Q2m	Cortante por flexión	0.00	0.00	0.00
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.00	0.00	0.00

Los porcentajes de error aquí calculados son la diferencia entre los cálculos con coeficiente de forma y los cálculos sin coeficiente de forma asumiendo un comportamiento físico real por parte de los cálculos con coeficiente de forma.

$$\%Error = \frac{\lambda'c - \lambda's}{\lambda'c} \quad (8.19)$$

**Tabla 16. Porcentajes de error de las sensibilidades entre cálculo con y sin coeficiente de forma**

Símbolo	Parámetro	Porcentajes error		
		modos		
		1	2	3
ρ o ro	Densidad	0.90%	18.41%	0.00%
E	Módulo	-1.79%	-40.22%	0.00%
G	Módulo transversal	-	-	-
L	Longitud	1.52%	28.40%	0.00%
A	Área	1.79%	40.23%	0.00%
Iz	Inercia eje z	-1.79%	0.00%	0.00%
Iy	Inercia eje y	0.00%	-40.22%	0.00%
I	Inercia	0.00%	0.00%	0.00%
J	Momento polar de Inercia	0.00%	0.00%	0.00%
k1	coeficiente de forma	-	-	-
k2	coeficiente de forma	-	-	-
k	coeficiente de forma	-	-	-
hf	Altura del ala	0.90%	18.41%	0.00%
bf	Base del ala	0.90%	18.41%	0.00%
hs	Altura del alma	0.90%	18.41%	0.00%
bs	Base o espesor del alma	0.90%	18.41%	0.00%

**Tabla 17. Porcentajes error entre los valores propios y vectores propios de la frecuencia natural al cuadrado y la frecuencia natural con y sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Propiedad	Modos		
		1	2	3
f	Frecuencia natural	-0.45%	-8.82%	0.00%
λ o Wn2	Frecuencias naturales al cuadrado	-0.90%	-18.41%	0.00%
φ	Vector propio de la frecuencia natural al cuadrado	0.00%	0.00%	0.00%
		0.00%	0.00%	0.00%
		0.00%	0.00%	0.00%

**Tabla 18. Porcentajes de error de las sensibilidades de los efectos entre cálculo con y sin coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetros (Efectos)	Porcentajes de error		
		Modos		
		1	2	3
Ao	Axial	0.00%	0.00%	0.00%
T	Torsor	0.00%	0.00%	0.00%
Q2	Cortante	0.00%	0.00%	0.00%
Q3	Cortante transversal	0.00%	0.00%	0.00%
M3	Flexión	0.00%	0.00%	0.00%
M2	Flexión transversal	0.00%	0.00%	0.00%
Q2m	Cortante por flexión	0.00%	0.00%	0.00%
Q3m	Cortante transversal por flexión transversal	0.00%	0.00%	0.00%

Los siguientes porcentajes de error son la diferencia entre los cálculos de la frecuencia natural experimental y la frecuencia natural analítica asumiendo un comportamiento físico real por parte de los cálculos experimentales.

$$\%Error = \frac{\lambda_{exp} - \lambda_{an}}{\lambda_{exp}} \quad (8.20)$$

$\lambda_{exp}$  = frecuencia natural experimental.

$\lambda_{an}$  = frecuencia natural analítica.

**Tabla 19. Porcentajes de error entre frecuencia natural analítica y experimental.**

Símbolo	Propiedad	modos
		1
fexp	Frecuencia natural experimental	9.448
fan	Frecuencia natural analítica	12.185
%	Error	-28.972%

**Tabla 20. Sensibilidad por magnitud de los parámetros característicos del ejercicio viga de acero real con coeficiente de forma.**

Símbolo	Parámetro	Sensibilidades por magnitud		
		Modos		
		1	2	3
$\rho$ o ro	Densidad	-3.03E+06	-2.37E+07	-1.17E+09
E	Módulo	3.00E+06	2.00E+07	1.18E+09
G	Módulo transversal	2.66E+04	3.69E+06	0.00E+00
L	Longitud	-1.20E+07	-8.75E+07	-2.35E+09
A	Área	-3.00E+06	-2.00E+07	3.02E+06
Iz	Inercia eje z	3.00E+06	0.00E+00	0.00E+00
Iy	Inercia eje y	0.00E+00	2.00E+07	0.00E+00
I	Inercia	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
J	Momento polar	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
k1	coeficiente de forma	-2.66E+04	0.00E+00	0.00E+00
k2	coeficiente de forma	0.00E+00	-3.69E+06	0.00E+00
K	coeficiente de forma	-2.66E+04	-3.69E+06	0.00E+00
Hf	Altura del ala	-2.10E+06	-1.65E+07	-8.17E+08
Bf	Base del ala	-2.10E+06	-1.65E+07	-8.17E+08
Hs	Altura del alma	-9.22E+05	-7.22E+06	-3.58E+08
Bs	Base del alma	-9.22E+05	-7.22E+06	-3.58E+08

**Tabla 21. Error de las frecuencias naturales en función de la longitud.**

Parámetro	modo 1		
	Frecuencias naturales al cuadrado	Frecuencia natural Hz	%
			Error
6.7060	5861.78	12.185	-28.97%
6.80	5546.21	11.853	-25.45%
6.90	5233.43	11.514	-21.86%
7.00	4942.36	11.189	-18.43%
7.10	4671.23	10.878	-15.13%
7.20	4418.41	10.579	-11.97%
7.30	4182.44	10.293	-8.94%
7.40	3962.00	10.018	-6.03%
7.50	3755.88	9.754	-3.24%
7.60	3562.97	9.500	-0.55%
7.65	3471.15	9.377	0.75%

**Tabla 22. Error de las frecuencias naturales en función de la altura del ala.**

Parámetro	modo 1		
Altura del ala	Frecuencias naturales	Frecuencia natural Hz	%
	al cuadrado		Error
0.016764	5861.78	12.185	-28.97%
0.016	5771.56	12.091	-27.98%
0.015	5644.29	11.957	-26.56%
0.011	5000.08	11.254	-19.12%
0.01	4794.29	11.020	-16.64%
0.0095	4682.64	10.891	-15.27%
0.009	4564.48	10.753	-13.81%
0.008	4306.27	10.444	-10.54%
0.007	4014.18	10.084	-6.73%
0.006	3681.21	9.656	-2.21%
0.0055	3496.65	9.411	0.39%

**Tabla 23. Frecuencias naturales de la viga de acero real actualizadas**

Parámetro actualizado	modos 1	
	Frecuencias naturales al cuadrado	Frecuencia natural Hz
Experimental	3524.03	9.45
Sin actualizar	5861.78	12.19
Longitud	3516.69	9.44
Altura del ala	3496.65	9.41

**Tabla 24. Frecuencias naturales de la viga de acero real actualizadas por cada parámetro**

Símbolo	Parámetro actualizado	Magnitud inicial	Magnitud final	Unidades	modo 1	
					Frecuencias naturales al cuadrado	Frecuencia natural Hz
$\rho$ o $\rho_0$	Densidad	7800	12977	kg/m <sup>3</sup>	3523.91	9.448
E	Modulo	200	119.812	Gpa	3511.54	9.431
G	Modulo transversal	76.92	-	kg/ms <sup>2</sup>	-	-
L	Longitud	6.706	7.621	m	3524.04	9.448
A	Area	0.0099	0.016	m <sup>2</sup>	3524.03	9.448
I <sub>z</sub>	Inercia eje z	0.00002	0.000014	m <sup>4</sup>	3524.03	9.448
I <sub>y</sub>	Inercia eje y	0.00022	-	m <sup>4</sup>	-	-
I	Inercia	0	-	m <sup>4</sup>	-	-
J	Momento polar de Inercia	0.00088	-	m <sup>4</sup>	-	-
k <sub>1</sub>	k <sub>1</sub>	2.9708	-	Adimensional	-	-
k <sub>2</sub>	k <sub>2</sub>	2.9708	-	Adimensional	-	-
k	kn	2.9708	-	Adimensional	-	-
hf	Altura del ala	0.0168	0.005	m	3391.17	9.268
bf	Base del ala	0.2047	0.164	m	3526.62	9.451
hs	Altura del alma	0.3200	1.027	m	3511.48	9.431
bs	Base o espesor del alma	0.0094	0.113	m	3536.13	9.464

El cálculo del porcentaje de error en las frecuencias naturales se calcula de acuerdo a la ecuación ( 8.20 ). Para el cálculo del porcentaje de error del parámetro en análisis se asumió como real la magnitud inicial del parámetro.

$$\%Error = \frac{\theta_{inicial} - \theta_{actualizado}}{\theta_{inicial}} \quad ( 8.21 )$$

$\theta_{inicial}$  = Magnitud inicial del parámetro

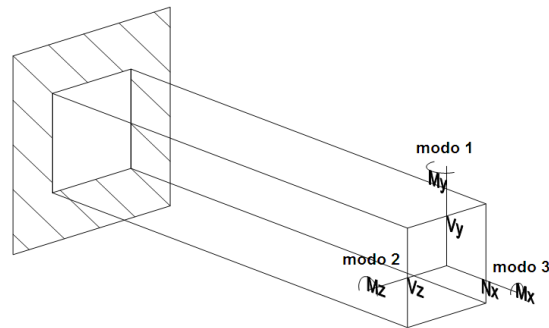
$\theta_{actualizado}$  = Magnitud actualizada del parámetro

**Tabla 25. Errores de las frecuencias y parámetros en comparación con la sensibilidad y la sensibilidad por magnitud**

Símbolo	Parámetro actualizado	modo 1			
		%			Sensibilidad
		Error Frecuencia	Error del parámetro	Sensibilidad	por magnitud
$\rho$ o ro	Densidad	0.00%	-66.37%	-3.88E+02	-3.03E+06
E	Módulo	0.18%	40.09%	1.50E-05	3.00E+06
G	Módulo transversal	-	-	3.46E-07	2.66E+04
L	Longitud	0.00%	-13.64%	-1.79E+06	-1.20E+07
A	Área	0.00%	-66.96%	-3.04E+08	-3.00E+06
Iz	Inercia eje z	0.00%	40.09%	1.25E+11	3.00E+06
Iy	Inercia eje y	-	-	0.00E+00	0.00E+00
I	Inercia	-	-	0.00E+00	0.00E+00
J	Momento polar de Inercia	-	-	0.00E+00	0.00E+00
k1	k1	-	-	-8.96E+03	-2.66E+04
k2	k2	-	-	0.00E+00	0.00E+00
k	kn	-	-	-8.96E+03	-2.66E+04
hf	Altura del ala	1.90%	68.80%	-1.26E+08	-2.10E+06
bf	Base del ala	-0.04%	19.78%	-1.03E+07	-2.10E+06
hs	Altura del alma	0.18%	-220.88%	-2.88E+06	-9.22E+05
bs	Base o espesor del alma	-0.17%	-1105.78%	-9.81E+07	-9.22E+05

## 9. ANALISIS DE RESULTADOS

En el primer ejercicio, como se puede observar en la Tabla 1, la sección transversal del elemento es el parámetro más sensible en sus dos primeros modos y en el tercer modo su parámetro más sensible es la longitud ya que la longitud es paralela al efecto axial, al igual que el área y la inercia son paralelas a los efectos cortantes. El modo 1 es más sensible a la inercia sobre el eje z mientras que el modo 2 es más sensible a la inercia del eje y por último el modo 3 es más sensible a su longitud.



**Figura 37. Grados de libertad**

En cuanto a variables críticas en el primer modo el parámetro más sensible es la altura y en el segundo modo la base, cumpliendo lo anteriormente mencionado. La inercia del eje z es más sensible en el modo 1 que en el modo 2 y la inercia del eje y tiene el mismo comportamiento en el modo 2 por lo que en cuanto a la inercia, su sensibilidad dependerá perpendicularmente al cambio o desplazamiento presente. El modo 3 que es el comportamiento axial del elemento, es estrictamente sensible a la longitud y menos sensible a su densidad. Los resultados de la Tabla 3 muestra las sensibilidades de los parámetros por efectos de cada modo de vibración siendo sensible en cada modo de vibración su parámetro principal (cortante, cortante transversal y axial donde cada una tiene sensibilidad 1 siendo esto el mayor valor propio de cada modo de vibración).

Las Tablas 1, 2, 3 son mínimamente similares a las Tablas 4, 5 y 6, varían dependiendo del coeficiente de forma. Los errores de diferencia entre las tablas anteriormente mencionadas se encuentran en las Tablas 7, 8 y 9. Los errores del 100% que se pueden encontrar son el resultado de cálculos primordiales realizados con el coeficiente de forma. Lo que ocurre es que con el coeficiente de forma (mencionado en el capítulo 347.4.3.3) los resultados son mucho más precisos, por lo tanto si no se tiene en cuenta el coeficiente de forma la sensibilidad en algunos parámetros será igual a 0 mientras que con el coeficiente de forma no, sin importar su magnitud porque al no ser tenido en cuenta se está

desprecia la energía de deformación por cortante del elemento. El signo de los porcentajes de error en las sensibilidades expresa la relación entre el cálculo con coeficiente de forma y sin coeficiente de forma. El signo negativo indica que el cálculo sin coeficiente de forma es mayor mientras que el signo positivo indica lo contrario. El signo en los errores en los cálculos de la frecuencia natural tiene el mismo comportamiento que en los errores de las sensibilidades. El signo negativo indica que la frecuencia natural analítica es mayor que la experimental y el signo positivo lo contrario ya que tanto los resultados experimentales y con coeficiente de forma se asumieron como los reales.

Los signos de las sensibilidades corresponden a la relación entre la frecuencia natural y el parámetro en análisis. El signo negativo indica que el parámetro es inversamente proporcional a la frecuencia natural y un signo positivo indica que es proporcional a la frecuencia natural. En las variables críticas del área y la inercia, la proporcionalidad depende de la sensibilidad por magnitud donde los valores más sensibles tienen un comportamiento similar a la inercia y los menos sensibles un comportamiento similar al área.

**Tabla 26. Clasificación de los parámetros por signo**

<b>Negativos</b>	<b>Positivos</b>	<b>Iguales a 0</b>
Densidad	Módulo	Inercia y
Longitud	Módulo transversal	Momento polar de inercia
Área	Inercia z	Coeficiente de forma 2
coeficiente de forma 1		

Todos los parámetros críticos tienen signo negativo pero tiene el comportamiento ya mencionado.

La lectura de los resultados de las tablas 10 a la 18 es similar a las tablas de la 1 a la tabla 9. Los resultados de la tabla 19 son las frecuencias naturales tanto analítica como experimental y el error entre sí, producido por causas posibles ya mencionadas. En la tabla 20 se encuentran las sensibilidades por magnitud que indica que parámetro es más sensible con menos porcentaje de error en su cambio (calculado en la tabla 21) mientras que la tabla 22 se refiere a la actualización en base a la sensibilidad propia.

La figura 2 representa los resultados de la tabla 21 donde se muestra como a medida que la longitud aumenta el error de las frecuencias disminuye, a causa de la proporcionalidad negativa en su sensibilidad. La figura 3 representa los resultados de la tabla 22 de igual manera, ilustrando la proporcionalidad inversa de la altura del ala (a menor altura del ala, menor error en la frecuencia) causada por la inercia mayor que el área.

Las tablas 24 y 25 contienen la relación que existe entre los errores de cada parámetro y sus sensibilidades, asumiendo una actualización total de la frecuencia natural (comprobando las explicaciones ya realizadas).

## 10. CONCLUSIONES.

Un modelo numérico sin coeficiente de forma puede presentar errores alrededor de 0.45% a 1.75% en elementos más largos y en elementos más cortos, se pueden presentar errores alrededor de 0.45 a 18.41 %. Al desprestigiar el coeficiente de forma se producen errores mayores en los modos controlados por las flexiones producidas por fuerzas cortantes y por consiguiente en vigas de longitudes más cortas.

En el ejercicio propuesto se obtuvieron errores iniciales entre la frecuencia natural experimental y la analítica, de 28.97% aproximadamente, mientras que con el modelo actualizado se redujo ese error al 0.39% y 0.1% aunque el error de la longitud que era el parámetro crítico por magnitud, se incrementó en 14% y el error en el parámetro de la altura del ala se incrementó en 67%. Como se puede observar, la diferencia de error entre las frecuencias iniciales, la frecuencia final y el error del parámetro se correlacionan en cuanto al rango de error corregido, mejorando los modelos numéricos en cuanto a confiabilidad.

La diferencia del cambio en la longitud fue alrededor de 1 metro mientras que la diferencia en la altura del ala fue de 11.264 milímetros, demostrando que la altura del ala es el parámetro más sensible del elemento y la longitud es el parámetro más sensible respecto a su magnitud, ya que se producen menos errores de parámetro al modificar este último.

Estos errores pueden ser el resultado de una discrepancia del modelado de los apoyos en el ensamblaje de la matriz de rigidez. También pueden ser causados por errores en el cómputo de resultados y en el control de la viga experimentada. Con los errores obtenidos se puede concluir que en un modelo numérico es más crítico el modelado de su estructura que los mismos parámetros característicos del elemento.

Los errores obtenidos también pueden ser causa de una combinación indefinida de parámetros que originando errores pequeños cada uno, produzcan los errores resultantes obtenidos.

## 11. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES.

Los elementos en este trabajo de grado se asumieron como de sección no variable y con comportamientos lineales cumpliendo con la ley de Hooke.

Se recomienda verificar el modelado de los apoyos y/o conexiones de la estructura a analizar, ya que su variación puede ser mucho más crítica que los propios parámetros característicos del elemento. La modelación de la estructura, especialmente en longitudes cortas es recomendable trabajarla con su respectivo coeficiente de forma porque pueden diferir los resultados en caso contrario. En caso de presentarse fuerzas cortantes externas en el elemento es indispensable trabajar con el correspondiente coeficiente de forma

En un modelo numérico con incertidumbre se recomienda actualizar su longitud, con el fin de actualizar todos sus modos de vibración, mientras que en un modelo específicamente trabajado a cortante, es mejor actualizar su sección transversal. Actualizar la altura del elemento mejoraría los resultados en el modo vertical del elemento mientras que actualizar su base mejoraría los resultados en su modo transversal.

En elementos con secciones variables como la viga de acero, se puede presentar el caso que el cálculo de sus parámetros de área e inercia, difiera de los recomendados por el fabricante por lo que hacer un análisis más detallado es un poco más impreciso. En tal caso se recomienda trabajar con los parámetros de área e inercia donde la inercia presenta mayor sensibilidad que el área. La actualización de cualquiera de los dos parámetros mencionados, modificaría automáticamente el otro pero dependiendo del caso se podría encontrar la relación matemática entre ellos.

En el desarrollo de este trabajo de grado se pudo observar que un modelado erróneo de los apoyos y/o conexiones pueden generar errores por encima del 100% haciendo esto un poco incomprensible y hace un modelo muy difícil de actualizar ya que llevaría sus parámetros al límite con un porcentaje de error muy grande.

El enfoque de este estudio se basó en la actualización unánime de parámetros por lo que su continuación debería ser enfocada a la actualización en cuanto a combinación de parámetros dependiendo de su sensibilidad para tener una comprensión más detallada de las causas de error en los modelos numéricos.

## 12. BIBLIOGRAFÍA

- [1]CAICEDO, J. M., & ZARATE., B. A. (2011). Reducing epistemic uncertainty using a model updating cognitive system. *Advances in Structural Engineering* 14, 55-65.
- [2]MOTTERSHEAD, & FRISWELL. (1993). Model Updating in structural dynamics a survey. *Journal of sound and vibrations*, 347-373.
- [3]OBERKAMPF, WILLIAM, L., & DELAND, S. M. (2002). Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety* 75, no. 3, 333-357.
- [4] A.C JACINTO, R. A. (2002). Dynamic response of plates subjected to blas loading structures and buildings 269-276.
- [5]VÉLEZ, W., GÓMEZ, D., & THOMSON, P. (2009). Ajuste de modelos de elementos finitos. *Dyna*, 177-189.
- [6]ALVIN, K. F. (1997). Efficient computation eigenvector sensitivities structural dynamics. *AIAA Journal*, 652-659.
- [7]WORDEN, K., KERSCHEN, G., VAKAKIS, A., & GOLINVAL, J. (s.f.). *Nonlinear System Identification in Structural Dynamics*.
- [8]WIENER, N. (1930). Generalized Harmonic Analysis. *Acta Mathematica* , 55: 117–258.
- [9]SHETZEN, M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Non-linear. Systems*. New York:John Wiley.
- [10]BERMAN. (1979). Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes. *AIAA Journal*, 17(8): 1147–1148.
- [11]HAUG, E. J., & ROUSSELET, B. (1980). Design Sensitivity Analysis in Structural Mechanics: II Eigenvalue Variations. *Journal of Structural*, Vol. 8, No. 2, pp. 161-186.
- [12]OJALVO. (1988). Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies. *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 3, pp. 361-366.
- [13]DAILEY. (1989). Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 4,, pp. 486-491.
- [14]CURRAN, M. (1990). Comment on 'Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues. *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 10,, p. 1846.
- [15]CHEN, T.-Y. (1993). Design sensitivity analysis for repeated eigenvalues in structural design. *AIAA Journal*, 2347-2350.

- [16]IMREGUN, M., & EWINS. (1993). Reahsation of complex mode shapes. Proceedings of 11th International Modal Analysis Conference. pp. 1303-1309.
- [17]WANG, & LIOU. (1991). Experimental identificacion and mechanical joint parameters. Transactions of the american society of mechanical engineers, Journal of vibration and acoustic, 113(1), 28-36.
- [18]LEE, H. (1991). Identification of linearised joint structural parameters by combined use of measured and computed frequency responses. Mechanical systems and signal processing, 5(4), 267-277.
- [19]PETTIT, I. (2005). Uncertainties and Dynamic Problems of Bolted Joints and Other Fasteners. Journal of sound and vibration, 279, 857-936.
- [20]PALMONELLA, FRISWELL, MOTTERSHEAD, & LEES. (2005). Finite Element Models of Spot Welds in Structural Dynamics. Review and Updating. Computers and Structures, 83, 648-661.
- [21]DUNN. (1994). Issues concerning the Updating of the Finite Element Models from Experimental Data. NASA Technical Memorandum Langley Research Center, Hampton, Virginia., 109116.
- [22]AHMADIAN, H., MOTTERSHEAD, J., & FRISWELL. (1998). Regularisation Methods for Finite Element Model Updating. Mechanical Systems and Signal Processing, 12(1), 47-64.
- [23]BOREST, A. P., & J.SCHMIDT, R. (2003). Advanced mechanics of materials. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- [24]AnalisisDeEstructuras. (2014). Teoría del cálculo de la matriz de rigidez.
- [24]MOTTERSHEAD, J. E., LINK, M., & FRISWELL, M. (2010). The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial. Mechanical Systems and Signal Processing, 2275-2296.
- [25]MOTTERSHEAD, J. E., NG, FRISWELL, M. I., & BRANDON, J. A. (1996). Geometric parameters for finite element model updating of joints and constraints. Mechanical Systems and Signal Processing, 10(2), 171-182.
- [26]CUEVAS, O. M. (2002). Análisis estructural. Limusa.
- [27]McCORMAC, & Jack. (2010). Análisis de estructuras - métodos clásico y matricial - 4a ed. (Vol. 4). Alfaomega.
- [28]CHANDRUPATLA, T. R., & BELENGUDU, A. D. (2002). Introduction to Finite Elements in Engineering. New Jersey: Prentice Hall. Inc.
- [29]MCGUIRE, W., GALLAGHER, R. H., & ZIEMIAN, R. D. (2000). Matrix structural analisis. New York: JhonWiley&Sons Inc.

- [30]FOX, R. L., & KAPOOR, M. P. (1968). Rates of Change of Eigenvalues. AIAA Journal, VOL. 6, NO. 12 2426-2429.
- [30]PAZ, T. (1999). Ingenieria mecanica estatica. Mexico: Reverte s.a.
- [31]CAICEDO, J. M., & MARULANDA, J. (2010). Fast mode identification technique for online monitoring. Struct. Control Health Monit, 18:416–429.
- [32]EADIC.(S.F.). (2014). Obtenido de <http://eadic.com/wp-content/uploads/2014/03/an%C3%A1lisis-matricial-de-las-estructuras-por-el-m%C3%A9todo-de-la-rigidez.pdf>
- [33]FUENTES, D. (s.f.). ptolomeo. (s.f.). Recuperado el 5 de Agosto, de Actualizacion de frecuencias experimentales apartir de sus características dinámicas analíticas: <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/3602/Actualizaci%C3%B3n%20de%20frecuencias%20experimentales%20de%20una%20estructura%20de%20acero%20a%20partir%20de%20sus%20caracter%C3%ADsticas%20din%C3%A1micas%20anal%C3%ADticas.pdf?s>
- [34]GARCIA, L. (Marzo de 2014). Redalyc. Recuperado el 27 de Junio de 2014, de Análisis de sensibilidad aplicado a la dinámica: <http://www.redalyc.org/pdf/430/43030033006.pdf>
- [35]REYES, L. (1998). Dinamica estructural aplicada al diseño sismico. Colombia.
- [36]VARAS P, M., & ERASO, J. C. (2014). scielo. Obtenido de [http://www2.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0798-10152007000300006&lng=es&nrm=i](http://www2.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-10152007000300006&lng=es&nrm=i)
- [37]. (2014). uhu. Obtenido de Analisis matricial de estructuras: <http://www.uhu.es/javier.pajon/apuntes/matricial.pdf>
- [38]Elasticidad. (2014). unican. Obtenido de <http://ocw.unican.es/enseñanzas-tecnicas/ciencia-y-tecnologia-de-los-materiales/materiales-de-clase-1/Tema2.pdf>
- [39]HOWAR, D. M., & HAFTKA, R. T. (1986). Sensitivity analysis of discrete structural systems. AIAA Journal, 823-832.
- [40]. (1991). ANALISIS DE ESTRUCTURAS. COLOMBIA: UNIANDES.

### 13. ANEXO 1. CÓDIGO DE MATLAB PARA EL CÁLCULO DE SENSIBILIDAD APLICADO A UNA VIGA DE ACERO REAL

```

clear all; close all; clc;
% CODIGO QUE GENERA LA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UN ELEMENTO.
%Variables simbolicas definidas
syms W norm cort flex cortz tor rot Nx Em A x L k1 Vy G Mz Iz k2 Vz Mx Jm
My Iy P real
syms N1 V1 Vz1 Mt1 Mr1 Mf1 Fadi Madi s dist real
% <&> Se hace sumatoria en cada grado de libertad y se despejan las
variables
%% Espacio donde se escriben las características del diagrama de fuerzas
y momentos. (Revizar el Mz y My)
ig=0;
Nx=N1;
Vy=V1-Fadi; %Vy=V1-Fadi; Vy=V1;
Vz=Vz1;
Mx=Mt1;
My=Mr1+Vz1*x;
Mz=Mf1-V1*x+Fadi*(dist); %Mz=Mf1-V1*x+Fadi*(dist); Mz=Mf1-V1*x;
dist=2.387
%% Cálculo de la energía de deformación
%Energía de cada grado de libertad
norm=int(Nx^2/(2*Em*A), x,0,L);
cort=int((k1*Vy^2)/(2*G*A), x,0,L);
flex=int(Mz^2/(2*Em*Iz),x,0,L);
tor=int(Mx^2/(2*G*Jm), x,0,L);
cortz=int((k2*Vz^2)/(2*G*A), x,0,L);
rot=int(My^2/(2*Em*Iy), x,0,L);
%Energía total
W=norm+cort+cortz+flex+tor+rot;
%Variables simbolicas de las deflexiones definidas
syms d1 d2 d3 d4 d5 d6 f f2 dex1 dex2 dex3 dex4 dex5 dex6
%Cálculo de cada deflexión derivando la Energía respecto al grado de
%libertad
d1=diff(W,N1); d2=diff(W,V1); d3=diff(W,Mf1); d4=diff(W,Mt1);
d5=diff(W,Vz1); d6=diff(W,Mr1);
%Solución de las ecuaciones de cada deflexión para su posterior
%organización de la matriz de flexibilidad
dex1=expand(d1); dex2=expand(d2);
dex3=expand(d3); dex4=expand(d4);
dex5=expand(d5); dex6=expand(d6);
%Codigo que elimina la variable k1 y k2
if ig==1
dex2=subs(dex2,k1,0);
dex5=subs(dex5,k2,0);
end
%Variables simbolicas para organizar la matriz de rigidez eliminando las
%fuerzas
syms f11 f12 f13 f14 f15 f16 f21 f22 f23 f24 f25 f26 f31 f32 f33 f34 f35
f36 f41 f42 f43 f44 f45 f46 f51 f52 f53 f54 f55 f56 f61 f62 f63 f64 f65
f66 real;

f11=dex1; f21=dex2; f31=dex3; f41=dex4; f51=dex5; f61=dex6; %fila 1
f11=subs(f11,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{1,0,0,0,0,0});
f21=subs(f21,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{1,0,0,0,0,0,0});

```

```

f31=subs(f31,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{1,0,0,0,0,0,0});
f41=subs(f41,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{1,0,0,0,0,0});
f51=subs(f51,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{1,0,0,0,0,0});
f61=subs(f61,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{1,0,0,0,0,0});
f12=dex1; f22=dex2; f32=dex3; f42=dex4; f52=dex5; f62=dex6; %fila 2
f12=subs(f12,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,1,0,0,0,0});
f22=subs(f22,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,1,0,0,0,0,Fadi});
f32=subs(f32,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,1,0,0,0,0,Fadi});
f42=subs(f42,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,1,0,0,0,0});
f52=subs(f52,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,1,0,0,0,0});
f62=subs(f62,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,1,0,0,0,0});
f13=dex1; f23=dex2; f33=dex3; f43=dex4; f53=dex5; f63=dex6; %fila 3
f13=subs(f13,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,1,0,0,0});
f23=subs(f23,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,1,0,0,0,Fadi});
f33=subs(f33,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,1,0,0,0,Fadi});
f43=subs(f43,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,1,0,0,0});
f53=subs(f53,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,1,0,0,0});
f63=subs(f63,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,1,0,0,0});
f14=dex1; f24=dex2; f34=dex3; f44=dex4; f54=dex5; f64=dex6; %fila 4
f14=subs(f14,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,1,0,0});
f24=subs(f24,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,1,0,0,0});
f34=subs(f34,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,1,0,0,0});
f44=subs(f44,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,1,0,0});
f54=subs(f54,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,1,0,0});
f64=subs(f64,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,1,0,0});
f15=dex1; f25=dex2; f35=dex3; f45=dex4; f55=dex5; f65=dex6; %fila 5
f15=subs(f15,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,1,0});
f25=subs(f25,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,0,1,0,0});
f35=subs(f35,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,0,1,0,0});
f45=subs(f45,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,1,0});
f55=subs(f55,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,1,0});
f65=subs(f65,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,1,0});
f16=dex1; f26=dex2; f36=dex3; f46=dex4; f56=dex5; f66=dex6; %fila 6
f16=subs(f16,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,0,1});
f26=subs(f26,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,0,0,1,0});
f36=subs(f36,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1,Fadi},{0,0,0,0,0,1,0});
f46=subs(f46,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,0,1});
f56=subs(f56,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,0,1});
f66=subs(f66,{N1,V1,Mf1,Mt1,Vz1,Mr1},{0,0,0,0,0,1});
f=[f11 f12 f13 f14 f15 f16
f21 f22 f23 f24 f25 f26
f31 f32 f33 f34 f35 f36
f41 f42 f43 f44 f45 f46
f51 f52 f53 f54 f55 f56
f61 f62 f63 f64 f65 f66];
%Definicion de la matriz simbolica de rigidez en AA o 11 y BB o 22
syms KAA KBB KAB KBA real
%Cálculo de la matriz de rigidez (la inversa de la deflexión)
KAA=inv(f);
%Cálculo de KBA KAB
ba11=-KAA(1,1); ba12=-KAA(1,2); ba13=-KAA(1,3); ba14=-KAA(1,4);
ba15=-KAA(1,5); ba16=-KAA(1,6);
ba21=-KAA(2,1); ba22=-KAA(2,2); ba23=-KAA(2,3); ba24=-KAA(2,4);
ba25=-KAA(2,5); ba26=-KAA(2,6);
ba31=-KAA(3,1)-ba21*L; ba32=-KAA(3,2)-ba22*L; ba33=-KAA(3,3)-ba23*L;
ba34=-KAA(3,4)-ba24*L; ba35=-KAA(3,5)-ba25*L; ba36=-KAA(3,6)-ba26*L;

```

```

    ba41=-KAA(4,1); ba42=-KAA(4,2); ba43=-KAA(4,3); ba44=-KAA(4,4);
ba45=-KAA(4,5); ba46=-KAA(4,6);
    ba51=-KAA(5,1); ba52=-KAA(5,2); ba53=-KAA(5,3); ba54=-KAA(5,4);
ba55=-KAA(5,5); ba56=-KAA(5,6);
    ba61=-KAA(6,1)+ba51*L; ba62=-KAA(6,2)+ba52*L; ba63=-KAA(6,3)+ba53*L;
ba64=-KAA(6,4)+ba54*L; ba65=-KAA(6,5)+ba55*L; ba66=-KAA(6,6)+ba56*L;

```

```

KBA=[ba11 ba12 ba13 ba14 ba15 ba16
     ba21 ba22 ba23 ba24 ba25 ba26
     ba31 ba32 ba33 ba34 ba35 ba36
     ba41 ba42 ba43 ba44 ba45 ba46
     ba51 ba52 ba53 ba54 ba55 ba56
     ba61 ba62 ba63 ba64 ba65 ba66];

```

```
KAB=KBA';
```

```
KBB=-KAA;
```

```
KBB(1,1)=-KBB(1,1); KBB(2,2)=-KBB(2,2);
```

```
KBB(3,3)=-KBB(3,3); KBB(5,5)=-KBB(5,5);
```

```
KBB(4,4)=-KBB(4,4); KBB(6,6)=-KBB(6,6);
```

```
%Matriz final del elemento
```

```
Kt=[KAA KAB
     KBA KBB];
```

```
%% Verificacion de la matriz de transformacion
```

```
% se tiene un elemento en el espacio donde las coordenadas x,y,z de los
nodos i,j
```

```
% son
```

```
ni = [0 0 0];
```

```
nj = [6.706 0 0];
```

```
L = sqrt(sum((nj-ni).^2)); % longitud total del elemento
```

```
% en el plano xy, se proyecta un elemento de longitud Lxy
```

```
Lxy = sqrt(sum((nj(1:2)-ni(1:2)).^2));
```

```
% por tanto, el ángulo entre los ejes x-x' es arctan(y/x)
```

```
br = atan((nj(1,2))/(nj(1,1)));
```

```
% En este caso, el angulo entre y-y' es el mismo que entre x-x'
```

```
th = br;
```

```
% el azimut (ángulo entre z y el plano x'y') es arcsen(lxy/L)
```

```
az = asin(Lxy/L);
```

```
ar = az; % ar representa el azimut
```

```
% De acuerdo a las notas del libro, el vector unitario del elemento es
```

```
l1 = (nj(1)-ni(1))/L;
```

```
m1 = (nj(2)-ni(2))/L;
```

```
n1 = (nj(3)-ni(3))/L;
```

```
Vx = [l1 m1 n1]; % vector unitario del elemento
```

```
% se requiere un tercer punto de orientacion en el plano x'y', que se
puede
```

```
% obtener con el vector unitario del elemento y el eje z (esto asume que
el plano y'-z' no rota)
```

```
if Vx ~= [0 0 1]
```

```
    nk = cross([0 0 1],Vx);
```

```
else
```

```
    nk = [0 1 0];
```

```
end
```

```
L13 = sqrt(sum((nk-ni).^2)); % longitud entre nodo 1 y 3
```

```
l13 = (nk(1)-ni(1))/L13;
```

```

m13 = (nk(2)-ni(2))/L13;
n13 = (nk(3)-ni(3))/L13;
if nk(1)-ni(1)==0
    l13=0;
end
if nk(2)-ni(2)==0
    m13=0;
end
if nk(3)-ni(3)==0
    n13=0;
end
V13 = [l13 m13 n13];
% Encuentra el vector unitario del eje z'
Vz = cross(Vx,V13)/sqrt(sum((cross(Vx,V13)).^2));

% Encuentra el vector unitario del eje y'
Vy = cross(Vz,Vx);
% La matriz de transformacion es
R = [Vx; Vy; Vz];

%Rt = zeros(12,12);
%Rt(1:3,1:3) = R;
%Rt(4:6,4:6) = R;
%Rt(7:9,7:9) = R;
%Rt(10:12,10:12) = R;

%% Matriz de transformacion por medio de trigonometria
%Carga las coordenadas del elemento inscritas en el documento .txt
load coordenadas.txt
V=coordenadas;
%Cálculo de angulos
br=atan((V(2,2)-V(1,2))/(V(2,1)-V(1,1))); %angulo de x respecto x'
ar=atan((V(2,3)-V(1,3))/(V(2,1)-V(1,1))); %angulo de x respecto x'
th=atan((V(2,2)-V(1,2))/(V(2,3)-V(1,3))); %angulo de y respecto y'
if (V(2,3)-V(1,3))==0
    ar=0;
end
if (V(2,2)-V(1,2))==0
    br=0;
    th=0;
end

%br=subs(degtorad(br)); %angulo alpha en radianes
%ar=subs(degtorad(ar));
%th=subs(degtorad(th));
%syms cos(br) sin(br) cos(ar) sin(ar) cos(th) sin(th) real
Rz=[cos(br) -sin(br) 0
    sin(br) cos(br) 0
    0 0 1];

Ry=[cos(ar) 0 sin(ar)
    0 1 0
    -sin(ar) 0 cos(ar)];
Rx=[1 0 0

```

```

    0 cos(th) -sin(th)
    0 sin(th) cos(th)];

R=Rx*Ry*Rz;
%Rt = zeros(12,12);
%Rt(1:3,1:3) = R;
%Rt(4:6,4:6) = R;
%Rt(7:9,7:9) = R;
%Rt(10:12,10:12) = R;
%pretty(R)

%% Definicion de las matrices ordenadas y matrices simbolicas con
respecto a su efecto
%organizacion de matrices

KafMz=Kt(3,:); KafMy=Kt(6,:); KafVz=Kt(5,:); KbfMz=Kt(9,:);
KbfMy=Kt(12,:); KbfVz=Kt(11,:);
Kt(3,:)=KafVz; Kt(6,:)=KafMz; Kt(5,:)=KafMy; Kt(9,:)=KbfVz;
Kt(12,:)=KbfMz; Kt(11,:)=KbfMy;

KacMz=Kt(:,3); KacMy=Kt(:,6); KacVz=Kt(:,5); KbcMz=Kt(:,9);
KbcMy=Kt(:,12); KbcVz=Kt(:,11);
Kt(:,3)=KacVz; Kt(:,6)=KacMz; Kt(:,5)=KacMy; Kt(:,9)=KbcVz;
Kt(:,12)=KbcMz; Kt(:,11)=KbcMy;

% La matriz de masa es similar
% mo = ro*A*L/2 % Masa concentrada en cada nodo de la matriz de masa
syms mo real
Me = mo*diag([1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0]);
%Variables simbolicas de los efectos
syms Ao T Q2 Q2m M2 M2t Q3 Q3m M3 M3t mo real
% Ensamble de la matriz de rigidez respecto a los efectos
ke = zeros(12,12)*Ao; % Genera una matriz simbolica de ceros
% Arma la mitad superior de K
ke(1,1) = Ao; ke(1,7) = -Ao;
ke(2,2) = Q2; ke(2,6) = Q2m; ke(2,8) = -Q2; ke(2,12) = Q2m;
ke(3,3) = Q3; ke(3,5) = -Q3m; ke(3,9) = -Q3; ke(3,11) = -Q3m;
ke(4,4) = T; ke(4,10) = -T;
ke(5,5) = M2; ke(5,9) = Q3m; ke(5,11) = M2t;
ke(6,6) = M3; ke(6,8) = -Q2m; ke(6,12) = M3t;
ke(7,7) = Ao;
ke(8,8) = Q2; ke(8,12) = -Q2m;
ke(9,9) = Q3; ke(9,11) = Q3m;
ke(10,10) = T;
ke(11,11) = M2;
ke(12,12) = M3;
% arma la mitad inferior usando la simetria de K
ke = ke + ke' - diag(diag(ke));

%ke=Rt'*ke*Rt;
%% Dependiendo de las condiciones del elemento se asume el comportamiento
a estudiar.
%em=1; %Empotrado
%em=0; %No empotrado
em=0;

```

```

lado=3;
% Calculamos la matriz de rigidez de manera simbolica para poderla
derivar
% Los grados de libertad cero son los 1, 2, ..., 6
% Los grados de libertad no-cero son los 7,8, ...,12
%punto B empotrado
if em==1
if lado==2
Kem=Kt(7:12,7:12); % solo toma la porcion de ke con los grados de
libertad activos
Mem=Me(7:12,7:12); % solo toma la porcion de ke con los grados de
libertad activos
Kemsim=ke(7:12,7:12);

end
if lado==1
Kem=Kt(1:6,1:6); % solo toma la porcion de ke con los grados de libertad
activos
Mem=Me(1:6,1:6); % solo toma la porcion de ke con los grados de libertad
activos
Kemsim=ke(1:6,1:6);
end
end
% ya que tenemos ceros en la diagonal de la matriz de masa, se tiene que
% condensar las matrices k y m
if em==0
estr=0;
%Transformacion de la matriz asumiendo que no hay desplazamientos
pero
%si momentos. estr = 0=          1 = (simplemente apoyada).
2=totamente libre
if estr==0

Kl=subs(Kt, 'L', 'L/2');
Kl2=subs(Kl, {'Fadi', 'dist'}, {0,0});

%Kapoy([1 2 3],[1 2 3])=Kl([4 5 6],[4 5 6]);
%Kapoy([1 2 3],[4 5 6])=Kl([4 5 6],[10 11 12]);
%Kapoy([4 5 6],[1 2 3])=Kl([10 11 12],[4 5 6]);
%Kapoy([4 5 6 7 8 9],[4 5 6 7 8 9])=Kl([7 8 9 10 11 12],[7 8 9 10 11
12])+Kl2([1 2 3 4 5 6],[1 2 3 4 5 6]);
%Kapoy([10 11 12],[10 11 12])=Kl2([10 11 12],[10 11 12]);
%Kapoy([10 11 12],[7 8 9])=Kl2([10 11 12],[4 5 6]);
%Kapoy([7 8 9],[10 11 12])=Kl2([4 5 6],[10 11 12]);

Kmo([1 2 3 4 5 6 7 8 9 10],[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10])=Kl([1 3 4 5 6 7 9
10 11 12],[1 3 4 5 6 7 9 10 11 12]);
Kmo([11 12 13 14 15 16 17 18 19 20],[11 12 13 14 15 16 17 18 19
20])=Kl2([1 3 4 5 6 7 9 10 11 12],[1 3 4 5 6 7 9 10 11 12]);
Kmo([6 7 8 9 10],[6 7 8 9 10])=Kl([7 8 9 10 11 12],[7 8 9 10 11
12])+Kl2([1 2 3 4 5 6],[1 2 3 4 5 6]);

Kmosim([1 2 3 4 5 6 7 8 9 10],[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10])=ke([1 3 4 5 6 7
9 10 11 12],[1 3 4 5 6 7 9 10 11 12]);

```

```

    Kmosim([11 12 13 14 15 16 17 18 19 20],[11 12 13 14 15 16 17 18 19
20])=ke([1 3 4 5 6 7 9 10 11 12],[1 3 4 5 6 7 9 10 11 12]);
    Kmosim([6 7 8 9 10],[6 7 8 9 10])=ke([7 8 9 10 11 12],[7 8 9 10 11
12])+ke([1 2 3 4 5 6],[1 2 3 4 5 6]);

    %Keapoy([1 2 3],[1 2 3])=ke([4 5 6],[4 5 6]);
    %Keapoy([1 2 3],[4 5 6])=ke([4 5 6],[10 11 12]);
    %Keapoy([4 5 6],[1 2 3])=ke([10 11 12],[4 5 6]);
    %Keapoy([4 5 6 7 8 9],[4 5 6 7 8 9])=ke([7 8 9 10 11 12],[7 8 9 10 11
12])+ke([1 2 3 4 5 6],[1 2 3 4 5 6]);
    %Keapoy([10 11 12],[10 11 12])=ke([10 11 12],[10 11 12]);
    %Keapoy([10 11 12],[7 8 9])=ke([10 11 12],[4 5 6]);
    %Keapoy([7 8 9],[10 11 12])=ke([4 5 6],[10 11 12]);

if lado==3

%agdl = [4 5 6]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 1
%pgdl = [1 2 3 7 8 9 10 11 12]; % indica cuales son los grados de
libertad del nodo 2
%Matriz parametros
%Ktt = Kmo(agdl,agdl);
%Kto = Kmo(agdl,pgdl);
%Kot = Kmo(pgdl,agdl);
%Koo = Kmo(pgdl,pgdl);
%disp(' Kc corregido' )
%Kc=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot % matriz de rigidez condensada

agdl = [6 7 8]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 1
pgdl = [1 2 3 4 5 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20]; % indica cuales
son los grados de libertad del nodo 2
%Matriz parametros
Ktt = Kmo(agdl,agdl);
Kto = Kmo(agdl,pgdl);
Kot = Kmo(pgdl,agdl);
Koo = Kmo(pgdl,pgdl);
Kc=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot; % matriz de rigidez condensada

Ktt = Kmosim(agdl,agdl);
Kto = Kmosim(agdl,pgdl);
Kot = Kmosim(pgdl,agdl);
Koo = Kmosim(pgdl,pgdl);
Kcsim=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot; % matriz de rigidez condensada

end

end
if estr==2
agdl = [1 2 3 4 5 6]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo
1
pgdl = [7 8 9 10 11 12]; % indica cuales son los grados de libertad del
nodo 2
%Matriz parametros
Ktt = Kt(agdl,agdl);
Kto = Kt(agdl,pgdl);
Kot = Kt(pgdl,agdl);

```

```

Koo = Kt(pgd1,pgd1);
Kapoy=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot; % matriz de rigidez condensada

Kss = ke(agdl,agdl);
Ksm = ke(agdl,pgdl);
Kms = ke(pgd1,agdl);
Kmm = ke(pgd1,pgdl);
keapoy=Kss-Ksm*inv(Kmm)*Kms; % matriz de rigidez condensada

    end
    if estr==1;
Kapoy=[Kt([4 5 6],[4 5 6]) Kt([4 5 6],[10 11 12])
        Kt([10 11 12],[4 5 6]) Kt([10 11 12],[10 11 12])];
keapoy=[ke([4 5 6],[4 5 6]) ke([4 5 6],[10 11 12])
        ke([10 11 12],[4 5 6]) ke([10 11 12],[10 11 12])];
    end
    if lado==1
agdl = [1 2 3]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 1
pgdl = [4 5 6]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 2
%Matriz parametros
Ktt = Kapoy(agdl,agdl);
Kto = Kapoy(agdl,pgdl);
Kot = Kapoy(pgd1,agdl);
Koo = Kapoy(pgd1,pgdl);
Kc=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot; % matriz de rigidez condensada
%Matriz efectos
Kss = keapoy(agdl,agdl);
Ksm = keapoy(agdl,pgdl);
Kms = keapoy(pgd1,agdl);
Kmm = keapoy(pgd1,pgdl);
Kcsim=Kss-Ksm*inv(Kmm)*Kms; % matriz de rigidez condensada
    end
    if lado==2
agdl = [4 5 6]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 2
pgdl = [1 2 3]; % indica cuales son los grados de libertad del nodo 1
%Matriz parametros
Ktt = Kapoy(agdl,agdl);
Kto = Kapoy(agdl,pgdl);
Kot = Kapoy(pgd1,agdl);
Koo = Kapoy(pgd1,pgdl);
Kc=Ktt-Kto*inv(Koo)*Kot; % matriz de rigidez condensada
%Matriz efectos
Kss = keapoy(agdl,agdl);
Ksm = keapoy(agdl,pgdl);
Kms = keapoy(pgd1,agdl);
Kmm = keapoy(pgd1,pgdl);
Kcsim=Kss-Ksm*inv(Kmm)*Kms; % matriz de rigidez condensada
    end

end
if em==1
agdl = [1 2 3]; % indica cuales son los grados de libertad con masa
pgdl = [4 5 6]; % indica cuales son los grados de libertad con masa igual
a cero
Me=subs(Me,Mem);
Kt=Kem;

```

```

Ksim=Kemsim;
Ktt = Kt (agdl, agdl);
Kto = Kt (agdl, pgdl);
Kot = Kt (pgdl, agdl);
Koo = Kt (pgdl, pgdl);
Kc=Ktt-Kto*inv (Koo) *Kot; % matriz de rigidez condensada

%Matriz efectos
Kss = ke (agdl, agdl);
Ksm = ke (agdl, pgdl);
Kms = ke (pgdl, agdl);
Kmm = ke (pgdl, pgdl);
Kcsim=Kss-Ksm*inv (Kmm) *Kms; % matriz de rigidez condensada
end
% matrices condesadas
syms ro Mc A L real
Mc=Me ([1 2 3], [1 2 3]); % matriz de masa condensada
Mc=subs (Mc, mo, ro*A*L/2);
%% Sustitucion de datos
%fig se refiere a la figura 1. con base y altura      0. radio  2. Viga
W
fig=2;
% Se asumen las siguientes propiedades geometricas y materiales
E = 200000000000; % Se asume acero, E = 200GPa  200000000000kg/m2
nu=0.3; %concreto acero= nu = 0.3; % Relacion de Poisson
G = E/(2*(1+nu)); % Módulo de cortante
ro=7800;%2200 %ro=2376.67 %ro = 7800; % densidad del material, kg/m3
L=7.625; %L = 7.010-2*0.152; % se asume longitud 10m.  0.37

if fig==1
k1=1.2; %k1=10/9; %rectangulares y triangulares 1.2      circulares 10/9
Laminados Aseccion/Aalma
k2=1.2;%k2=10/9;
base=0.1; altura=0.1; %0.15  0.15
Iy=(1/12)*altura*base^3;
Iz=(1/12)*altura*base^3;
A=base*altura;
Jrect=0.80295*(base^4)/6; %Ya que es una seccion rectangular de a=b
end
%A = pi/4*(0.10^2)-pi/4*(0.07^2); % se asume un cilindro hueco de
diametro externo 10mm y 3mm de espesor
%Iy = pi/64*(0.10^4)-pi/64*(0.07^4); % Momento de inercia, igual en
cualquier direccion
%Iz = Iy;
if fig==2
h=0.35357; %Altura viga
hf=0.016764; %hf=0.016764; %altura ala
bf=0.20472; %base o ancho ala
bs=0.0093980; %bs=0.0093980; %base o ancho alma
hs=h-2*hf;
D1=hf/2;
D2=hf+hs/2;
D3=hf+hs+hf/2;
A1=hf*bf;
A2=hs*bs;
A3=bf*hf;

```

```

A=A1+A2+A3;
sumaDA=A1*D1+A2*D2+A3*D3;
Dtotal=sumaDA/A;
d1=abs(Dtotal-D1);
d2=abs(Dtotal-D2);
d3=abs(Dtotal-D3);
Ifig1=(bf*hf^3)/(12);
Ifig2=(bs*hs^3)/(12);
Ifig3=(bf*hf^3)/(12);
Iy=Ifig1+Ifig2+Ifig3+A1*(d1^2)+A2*(d2^2)+A3*(d3^2); % La viga en
estudio esta acostada por lo que Iz seria Iz y Iy seria Iz.
Dy=bf/2;
sumaDyA=A1*Dy+A2*Dy+A3*Dy;
Dytotal=sumaDyA/A;
dy=abs(Dytotal-Dy);
Iyfig1=(hf*bf^3)/(12);
Iyfig2=(hs*bs^3)/(12);
Iyfig3=(hf*bf^3)/(12);
Iz=Iyfig1+Iyfig2+Iyfig3+A1*(dy^2)+A2*(dy^2)+A3*(dy^2);
Jrect=((1/3)*bf*h^3)-2*((1/3)*((bf-bs)/2)*(hs)^3);

k1=A/(bs*h);
k2=k1;
end

if k1==k2
    ksub=k1;
else
    ksub=0;
end
if Iz==Iy
    Insub=Iz;
else
    Insub=0;
end

Insub=double(Insub);
ksub=double(ksub);
%% Cálculo de vectores y valores propios
%Definicion de las matrices de Kc y Mc en numericas
Kc=subs(Kc,{'Fadi','dist'},{1.55*9.81,2.387});
if lado==3
Madi=[1.55*(0.9660/6.706) 0 0
      0 1.55*(0.9660/6.706) 0
      0 0 1.55*(0.9660/6.706)];
Mc=subs(Mc,'L/2','L');
Mc=Mc+Madi;
end
Knum=subs(Kc,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},{E,G,A
,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
Knum=double(Knum);
Mnum=subs(Mc,{'ro','L','A'},{ro,L,A});
Mnum=double(Mnum);
% Cálculo de los modos de vibracion y las frecuencias
[phi, wn2] = eig(inv(Mnum)*Knum);
[wn2, indx] = sort(diag(wn2));

```

```

phi = phi(:,indx);
fn = sqrt(wn2)/2/pi;
[filas, modos]=size(phi);
%for utilizado para el cálculo de todos los modos de vibracion
for i=1:modos
modo=phi(:,i);
L1 = wn2(i); % esto es (w1)^2 = (2*pi*f1)^2
% En general, la expresion para la sensibilidad de las frecuencias es
%  $d(L_j)/dq = \phi_j' * (d(K)/dq - L_j * d(M)/dq) * \phi_j$ 
%
% en la expresion anterior,
%  $L_j = w_j^2$ , valor propio j, el cual es el cuadrado de la frecuencia de
vibracion wj
%  $L_j$  es la frecuencia para la cual queremos calcular la sensibilidad
% respecto al parametro q (por ejemplo, Módulo de elasticidad E)
%% Cálculo de la sensibilidad en los parametros
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto a la Densidad
dK_dro = diff(Kc, 'ro');
dM_dro = diff(Mc, 'ro');
dL1_dro = modo*(dK_dro - L1*dM_dro)*modo;
dL1_dro=subs(dL1_dro,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dro=double(dL1_dro);
Densidad=sprintf('sensibilidad respecto a la densidad %0.5f',dL1_dro);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto al Area
dK_dA = diff(Kc, 'A');
dM_dA = diff(Mc, 'A');
dL1_dA = modo*(dK_dA - L1*dM_dA)*modo;
dL1_dA=subs(dL1_dA,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dA=double(dL1_dA);
Area=sprintf('sensibilidad respecto al Area %0.5f',dL1_dA);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto a la longitud

dK_dL = diff(Kc, 'L');
dM_dL = diff(Mc, 'L');
pretty(dK_dL)
pretty(dM_dL)
dL1_dL = modo*(dK_dL - L1*dM_dL)*modo
dL1_dL=subs(dL1_dL,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dL=double(dL1_dL);
Longitud=sprintf('sensibilidad respecto a la longitud %0.5f',dL1_dL);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto al Momento
dK_dE = diff(Kc, 'Em');
dM_dE = diff(Mc, 'Em');
dL1_dE = modo*(dK_dE- L1*dM_dE)*modo;
dL1_dE=subs(dL1_dE,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dE=double(dL1_dE);
Módulo=sprintf('sensibilidad respecto al Momento %0.5f',dL1_dE);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo

```

```

% respecto al Momento transversal
dK_dG = diff(Kc, 'G');
dM_dG = diff(Mc, 'G');
dL1_dG = modo'*(dK_dG- L1*dM_dG)*modo;
dL1_dG=subs(dL1_dG,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dG=double(dL1_dG);
Módulotransversal=sprintf('sensibilidad respecto al Momento transversal
%0.5f',dL1_dG);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto la Inercia respecto z
dK_dIz = diff(Kc, 'Iz');
dM_dIz = diff(Mc, 'Iz');
dL1_dIz = modo'*(dK_dIz- L1*dM_dIz)*modo;
dL1_dIz=subs(dL1_dIz,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dIz=double(dL1_dIz);
Inerciaejz=sprintf('sensibilidad respecto a la Inercia respecto z
%0.5f',dL1_dIz);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto la Inercia respecto y
dK_dIy = diff(Kc, 'Iy');
dM_dIy = diff(Mc, 'Iy');
dL1_dIy = modo'*(dK_dIy- L1*dM_dIy)*modo;
dL1_dIy=subs(dL1_dIy,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dIy=double(dL1_dIy);
Inerciaejy=sprintf('sensibilidad respecto a la Inercia respecto y
%0.5f',dL1_dIy);
if Iz==Iy
syms In Ksubic real
Ksubic=subs(Kc,{'Iy','Iz'},{'In','In'});
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto la Inercia
dK_dIn = diff(Ksubic, 'In');
dM_dIn = diff(Mc, 'In');
dL1_dIn = modo'*(dK_dIn- L1*dM_dIn)*modo;
dL1_dIn=subs(dL1_dIn,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
,'In'),{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect,Insub});
dL1_dIn=double(dL1_dIn);
Inercia=sprintf('sensibilidad respecto a la Inercia %0.5f',dL1_dIn);
else
dL1_dIn=0;
end
dK_dJ = diff(Kc, 'Jm');
dM_dJ = diff(Mc, 'Jm');
dL1_dJ = modo'*(dK_dJ- L1*dM_dJ)*modo;
dL1_dJ=subs(dL1_dJ,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'},
{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dJ=double(dL1_dJ);
Momentopolar=sprintf('sensibilidad respecto al Momento polar
%0.5f',dL1_dJ);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto a k1
dK_dk1 = diff(Kc, 'k1');
dM_dk1 = diff(Mc, 'k1');

```

```

dL1_dk1 = modo'*(dK_dk1- L1*dM_dk1)*modo;
dL1_dk1=subs(dL1_dk1,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'
},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dk1=double(dL1_dk1);
Variablek1=sprintf('sensibilidad respecto a k1 %0.5f',dL1_dk1);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto k2
dK_dk2 = diff(Kc,'k2');
dM_dk2 = diff(Mc,'k2');
dL1_dk2 = modo'*(dK_dk2- L1*dM_dk2)*modo;
dL1_dk2=subs(dL1_dk2,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'
},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect});
dL1_dk2=double(dL1_dk2);
Variablek2=sprintf('sensibilidad respecto a k2 %0.5f',dL1_dk2);
if k1==k2
syms kn Ksubkc In real
Ksubkc=subs(Kc,{'k2','k1'},{'kn','kn'});
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
% respecto a kn
dK_dkn = diff(Ksubkc,'kn');
dM_dkn = diff(Mc,'kn');
dL1_dkn = modo'*(dK_dkn- L1*dM_dkn)*modo;
dL1_dkn=subs(dL1_dkn,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','Jm'
,'kn'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,Jrect,knsub});
dL1_dkn=double(dL1_dkn);
Variablekn=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dkn);
end
%I y A en funcion de b y h
%Iy=subs(Iy,);
%Iz=subs(Iz,);
%A=subs(A,);
if fig==2
%En caso que la viga este apoyada s invierte Iy con Iz

%Iy=(hf*bf^3)/(12)+(hs*bs^3)/(12)+(hf*bf^3)/(12)+((hf*bf)+hs*bs+bf*hf)*(a
bs(((hf*bf+hs*bs+bf*hf)*(bf/2))/(hf*bf+hs*bs+bf*hf)-bf/2)^2);
%A=hf*bf+hs*bs+bf*hf;

%Iz=(bf*hf^3)/(12)+(bs*hs^3)/(12)+(bf*hf^3)/(12)+(hf*bf)*((abs(((hf*bf*hf
/2+hs*bs*(hf+hs/2)+bf*hf*(hf+hs+hf/2)))/(hf*bf+hs*bs+bf*hf))-
(hf/2)))^2)+hs*bs*(abs(((hf*bf*hf/2+hs*bs*(hf+hs/2)+bf*hf*(hf+hs+hf/2)))/(
hf*bf+hs*bs+bf*hf))-
(hf+hs/2)^2)+bf*hf*(abs(((hf*bf*hf/2+hs*bs*(hf+hs/2)+bf*hf*(hf+hs+hf/2)))/(
hf*bf+hs*bs+bf*hf))-
(hf+hs+hf/2)^2);
%Jrect=((1/3)*bf*(hs+2*hf)^3)-2*((1/3)*(bf-bs)/2)*(hs)^3);

syms bfs hfs hss bss real
Kcfig=subs(Kc,'Iz',(hfs*bfs^3)/(12)+(hss*bss^3)/(12)+(hfs*bfs^3)/(12)+((h
fs*bfs)+hss*bss+bf*hf)*(abs(((hfs*bfs+hss*bss+bf*hf)*(bfs/2))/(hfs*bf
s+hss*bss+bf*hf))-bfs/2)^2));
Kcfig=subs(Kc,'Iy',(bfs*hfs^3)/(12)+(bss*hss^3)/(12)+(bfs*hfs^3)/(12)+(hf
s*bfs)*((abs(((hfs*bfs*hfs/2+hss*bss*(hfs+hss/2)+bfs*hf*(hfs+hss+hf/2))
/(hfs*bfs+hss*bss+bf*hf))-
(hfs/2)))^2)+hss*bss*(abs(((hfs*bfs*hfs/2+hss*bss*(hfs+hss/2)+bfs*hf*(hf
s+hss+hf/2)))/(hfs*bfs+hss*bss+bf*hf))-

```

```

(hfs+hss/2))^2)+bfs*hfs*(abs(((hfs*bfs*hfs/2+hss*bss*(hfs+hss/2)+bfs*hfs*(hfs+hss+hfs/2))/(hfs*bfs+hss*bss+bfs*hfs))-(hfs+hss+hfs/2))^2));
Kcfig=subs(Kc,'A',hfs*bfs+hss*bss+bfs*hfs);
Kcfig=subs(Kc,'Jm',((1/3)*bfs*(hss+2*hfs)^3)-2*((1/3)*(bfs-bss)/2)*(hss^3));
Mcfig=subs(Mc,'A',hfs*bfs+hss*bss+bfs*hfs);

dK_dbfs = diff(Kcfig,'bfs');
dM_dbfs = diff(Mcfig,'bfs');
dL1_dbfs = modo'*(dK_dbfs- L1*dM_dbfs)*modo;
dL1_dbfs=subs(dL1_dbfs,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','bfs','hfs','hss','bss'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,bf,hf,hs,bs});
dL1_dbfs=double(dL1_dbfs);
Variablebfs=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dbfs);

dK_dhfs = diff(Kcfig,'hfs');
dM_dhfs = diff(Mcfig,'hfs');
dL1_dhfs = modo'*(dK_dhfs- L1*dM_dhfs)*modo;
dL1_dhfs=subs(dL1_dhfs,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','bfs','hfs','hss','bss'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,bf,hf,hs,bs});
dL1_dhfs=double(dL1_dhfs);
Variablehfs=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dhfs);

dK_dbss = diff(Kcfig,'bss');
dM_dbss = diff(Mcfig,'bss');
dL1_dbss = modo'*(dK_dbss- L1*dM_dbss)*modo;
dL1_dbss=subs(dL1_dbss,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','bfs','hfs','hss','bss'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,bf,hf,hs,bs});
dL1_dbss=double(dL1_dbss);
Variablebss=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dbss);

dK_dhss = diff(Kcfig,'hss');
dM_dhss = diff(Mcfig,'hss');
dL1_dhss = modo'*(dK_dhss- L1*dM_dhss)*modo;
dL1_dhss=subs(dL1_dhss,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','bfs','hfs','hss','bss'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,bf,hf,hs,bs});
dL1_dhss=double(dL1_dhss);
Variablehss=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dhss);
end

if fig==1
syms b h real
Kcfig=subs(Kc,{'Iy','Iz','A','Jm'},{(1/12)*h*b^3,(1/12)*b*h^3,b*h,0.80295*(b^4)/6;});
Mcfig=subs(Mc,'A',b*h);

dK_db = diff(Kcfig,'b');
dM_db = diff(Mcfig,'b');
dL1_db = modo'*(dK_db- L1*dM_db)*modo;
dL1_db=subs(dL1_db,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','b','h','Jm'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,base,altura,Jrect});
dL1_db=double(dL1_db);
Variableb=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_db);

dK_dh = diff(Kcfig,'h');

```

```

dM_dh = diff(Mcfig, 'h');
dL1_dh = modo'*(dK_dh- L1*dM_dh)*modo;
dL1_dh=subs(dL1_dh,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','b','h','Jm'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,base,altura,Jrect});
dL1_dh=double(dL1_dh);
Variableh=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dh);
end

if fig==0
%Iy=subs(Iy,);
%Iz=subs(Iz,);
%A=subs(A,);
dK_dr = diff(Ksubkcfg, 'r');
dM_dr = diff(Mcfig, 'r');
dL1_dr = modo'*(dK_dr- L1*dM_dr)*modo;
dL1_dr=subs(dL1_dr,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','b','h','Jm'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,base,altura,Jrect});
dL1_dr=double(dL1_dr);
Variabler=sprintf('sensibilidad respecto a kn %0.5f',dL1_dr);
end

%% Cálculo de la sensibilidad en los efectos
syms Ao J T Q2 Q2m M2 M2t Q3 Q3m M3 M3t La real
%Condicional sin momento estatico
if ig==1
Ao = (E*A)/La; % Rigidez axial de la viga
T = (G*J)/La; % Rigidez rotacional
Q2 = (12*E*Iz)/La^3; % Rigidez a cortante
Q2m = (6*E*Iz)/La^2; % Rigidez a cortante producida por Rigidez a flexion vertical
M2 = (4*E*Iy)/La; % Rigidez a flexion transversal
M2t = (2*E*Iy)/La; % Momentos producidos por Q2m y M3
Q3 = (12*E*Iy)/La^3; % Rigidez a cortante transversal
Q3m = (6*E*Iy)/La^2; % Rigidez a cortante transversal producida por Rigidez a flexion transversal
M3 = (4*E*Iz)/La; % Rigidez a flexion vertical
M3t = (2*E*Iz)/La; % Momentos producidos por Q3m y M2
end
%Condicional con momento estatico
if ig==0
Ao = (A*Em)/La;
Q2 = (12*A*Em*G*Iz)/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iz*k1));
Q3 = (12*A*Em*G*Iy)/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iy*k2));
T = (G*Jm)/La;
Q2m = (6*A*Em*G*Iz)/(A*G*La^2 + 12*Em*Iz*k1);
Q3m = (6*A*Em*G*Iy)/(A*G*La^2 + 12*Em*Iy*k2);
M2 = (4*Em*Iy*(A*G*La^2 + 3*Em*Iy*k2))/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iy*k2));
M3 = (4*Em*Iz*(A*G*La^2 + 3*Em*Iz*k1))/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iz*k1));
M3t = (6*A*Em*G*Iz*La)/(A*G*La^2 + 12*Em*Iz*k1) - (4*Em*Iz*(A*G*La^2 + 3*Em*Iz*k1))/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iz*k1));
M2t = (6*A*Em*G*Iy*La)/(A*G*La^2 + 12*Em*Iy*k2) - (4*Em*Iy*(A*G*La^2 + 3*Em*Iy*k2))/(La*(A*G*La^2 + 12*Em*Iy*k2));
end
if lado==3
Ao=subs(Ao, 'La', 'L/2');
Q2=subs(Q2, 'La', 'L/2');

```

```

Q3=subs(Q3,'La','L/2');
T=subs(T,'La','L/2');
Q2m=subs(Q2m,'La','L/2');
Q3m=subs(Q3m,'La','L/2');
M2=subs(M2,'La','L/2');
M3=subs(M3,'La','L/2');
M3t=subs(M3t,'La','L/2');
M2t=subs(M2t,'La','L/2');
else
Ao=subs(Ao,'La','L/2');
Q2=subs(Q2,'La','L/2');
Q3=subs(Q3,'La','L/2');
T=subs(T,'La','L/2');
Q2m=subs(Q2m,'La','L/2');
Q3m=subs(Q3m,'La','L/2');
M2=subs(M2,'La','L/2');
M3=subs(M3,'La','L/2');
M3t=subs(M3t,'La','L/2');
M2t=subs(M2t,'La','L/2');
end
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% axial , Ao
dK_dAo = diff(Kcsim,'Ao');
dM_dAo = diff(Mc,'Ao');
dL1_dAo = modo'*(dK_dAo - L1*dM_dAo)*modo;
dL1_dAo =
subs(dL1_dAo,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q
2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t})
dL1_dAo=subs(dL1_dAo,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn'
,'J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dAo = double(dL1_dAo);
Axial=sprintf('sensibilidad respecto axial , Ao %0.5f',dL1_dAo);

% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% axial , T
dK_dT = diff(Kcsim,'T');
dM_dT = diff(Mc,'T');
dL1_dT = modo'*(dK_dT - L1*dM_dT)*modo;
dL1_dT =
subs(dL1_dT,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q2
,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dT=subs(dL1_dT,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn','
J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dT = double(dL1_dT);
Torsor=sprintf('sensibilidad respecto axial , Ao %0.5f',dL1_dT);

% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% rigidez a cortante , Q2
dK_dQ2 = diff(Kcsim,'Q2');
dM_dQ2 = diff(Mc,'Q2');
dL1_dQ2 = modo'*(dK_dQ2 - L1*dM_dQ2)*modo;

```

```

dL1_dQ2 =
subs(dL1_dQ2,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q
2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dQ2=subs(dL1_dQ2,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn'
,'J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dQ2 = double(dL1_dQ2);
Cortante=sprintf('sensibilidad respecto rigidez a cortante , Q2
%0.5f',dL1_dQ2);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% rigidez a cortante transversal, Q3
dK_dQ3 = diff(Kcsim,'Q3');
dM_dQ3 = diff(Mc,'Q3');
dL1_dQ3 = modo'*(dK_dQ3 - L1*dM_dQ3)*modo;
dL1_dQ3 =
subs(dL1_dQ3,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q
2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dQ3=subs(dL1_dQ3,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn'
,'J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dQ3 = double(dL1_dQ3);
Cortantetransversal=sprintf('sensibilidad respecto rigidez a cortante
transversal, Q3 %0.5f',dL1_dQ3);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% rigidez a flexion transversal, M2
dK_dM2 = diff(Kcsim,'M2');
dM_dM2 = diff(Mc,'M2');
dL1_dM2 = modo'*(dK_dM2 - L1*dM_dM2)*modo;
dL1_dM2 =
subs(dL1_dM2,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q
2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dM2=subs(dL1_dM2,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn'
,'J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dM2 = double(dL1_dM2);
Flexiontransversal=sprintf('sensibilidad respecto rigidez a flexion
transversal, M2 %0.5f',dL1_dM2);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% flexion , M3
dK_dM3 = diff(Kcsim,'M3');
dM_dM3 = diff(Mc,'M3');
dL1_dM3 = modo'*(dK_dM3 - L1*dM_dM3)*modo;
dL1_dM3 =
subs(dL1_dM3,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,Q
2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dM3=subs(dL1_dM3,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','kn'
,'J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dM3 = double(dL1_dM3);
Flexion=sprintf('sensibilidad respecto rigidez a cortante producidos por
la flexion, Q2m %0.5f',dL1_dM3);
% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% rigidez a cortante producidos por la flexion, Q2m
dK_dQ2m = diff(Kcsim,'Q2m');
dM_dQ2m = diff(Mc,'Q2m');
dL1_dQ2m = modo'*(dK_dQ2m - L1*dM_dQ2m)*modo;

```

```

dL1_dQ2m =
subs(dL1_dQ2m,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,
Q2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dQ2m=subs(dL1_dQ2m,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','k
n','J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dQ2m = double(dL1_dQ2m);
Cortanteporflexion=sprintf('sensibilidad respecto flexion , M3
%0.5f',dL1_dQ2m);
% dL1_dQ2m es negativa, indicando que a mayor rigidez a cortante
% transversal, menor será la frecuencia natural 1

% cálculo de la sensibilidad del modelo de la viga en su primer modo
respecto a la
% rigidez a cortante transversal producidos por flexion transversal, Q3m
dK_dQ3m = diff(Kcsim,'Q3m');
dM_dQ3m = diff(Mc,'Q3m');
dL1_dQ3m = modo*(dK_dQ3m - L1*dM_dQ3m)*modo;
dL1_dQ3m =
subs(dL1_dQ3m,{'Ao','Q2','Q3','T','Q2m','Q3m','M2','M3','M3t','M2t'},{Ao,
Q2,Q3,T,Q2m,Q3m,M2,M3,M3t,M2t});
dL1_dQ3m=subs(dL1_dQ3m,{'Em','G','A','Iy','Iz','L','k1','k2','ro','mo','k
n','J'},{E,G,A,Iy,Iz,L,k1,k2,ro,mo,k1,Jrect});
dL1_dQ3m = double(dL1_dQ3m);
Cortantetransversalporflexiontransversal=sprintf('sensibilidad respecto
rigidez a cortante transversal producidos por flexion transversal, Q3m
%0.5f',dL1_dQ3m);

%Recopilacion de informcion en vectores
datos(:,i)=[L1
            modo];
if fig==1
Tablanum(:,i)=[dL1_dro
              dL1_dE
              dL1_dG
              dL1_dL
              dL1_dA
              dL1_dIz
              dL1_dIy
              dL1_dIn
              dL1_dJ
              dL1_dk1
              dL1_dk2
              dL1_dkn
              dL1_dh
              dL1_db];
end
if fig==2

Tablanum(:,i)=[dL1_dro
              dL1_dE
              dL1_dG
              dL1_dL
              dL1_dA
              dL1_dIz
              dL1_dIy
              dL1_dIn

```

```

        dL1_dJ
        dL1_dk1
        dL1_dk2
        dL1_dkn
        dL1_dhfs
        dL1_dbfs
        dL1_dhss
        dL1_dbss];
end
Tablaefectos(:,i)=[dL1_dAo
        dL1_dT
        dL1_dQ2
        dL1_dQ3
        dL1_dM3
        dL1_dM2
        dL1_dQ2m
        dL1_dQ3m];

end

if fig==1
datos2=[ro
        E
        G
        L
        A
        Iz
        Iy
        Insub
        Jrect
        k1
        k2
        knsub
        altura
        base];
end
if fig==2
    Insub=0;
    datos2=[ro
            E
            G
            L
            A
            Iz
            Iy
            Insub
            Jrect
            k1
            k2
            knsub
            hf
            bf
            hs
            bs];
end

```