

EL CERO: ENTRE LA RELIGIÓN, LA FILOSOFÍA Y LA CIENCIA

Por:

Sebastián Ramírez Agudelo

Facultad de Filosofía y Letras

Medellín

Universidad Pontificia Bolivariana

2016

TABLA DE CONTENIDO

1. LOS PITAGÓRICOS Y LOS NÚMEROS	6
2. BABILONIA.....	9
3. GRIEGOS	12
4. LA INDIA	13
5. EL CERO EN LA INDIA.....	15
5.1. Āryabhaṭa	17
5.2. Varahamihira.....	18
5.3. Manuscrito Bakhshali	20
5.4. Brahmagupta	22
5.5. Mahāvīra	25
5.6. Bhāskara II	28
6. LO INFINITAMENTE PEQUEÑO Y LO INFINITAMENTE GRANDE.....	35
7. SUNYA	42
8. CONSIDERACIONES SOBRE LA MATEMÁTICA OCCIDENTAL E HINDÚ...44	
REFERENCIAS.....	47

TABLAS

Tabla 1. Inscripciones del cero en el manuscrito Bakhshali.....	22
Tabla 2. Inscripciones de Sunya en la India.....	42
Tabla 3. Formas de meditación Brahma.	43

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo intenta dar una mirada a la evolución del cero en la India y algunas repercusiones en la matemática moderna. En la primera parte se habla de la tradición matemática pitagórica, con el fin de mostrar la relación clásica que existió entre los números y la filosofía, que para este tiempo no se pensaban por separado. Luego se le da una mirada al sistema numérico de la civilización babilonia y griega, mostrando la utilización que le dieron al cero, cómo funcionaba cada sistema y las conclusiones sobre su influencia en la tradición matemática y astronómica de la India.

En la segunda parte, *el cero en la India*, se ofrece un breve recorrido histórico acerca de la obra de astrónomos y matemáticos de tradición hindú y jain. Se muestra la postura que asume cada uno frente al cero y sus concepciones sobre el vacío (*sunya*) matemático. Se revisan los pensadores: Āryabhaṭa (S. V d.C), quien comienza a expresar en su obra un cero primitivo. Varahamihira (S. VI), que reconoce explícitamente en sus textos la importancia de los aportes griegos y estudia otras tradiciones astronómicas. Brahmagupta (S. VII), primer matemático en definir las propiedades aritméticas del cero y en preguntarse por la división de un número n y cero. Mahāvīra perteneciente a una minoría religiosa en la India, primero en estudiar las matemáticas por separado de la astronomía; y por último se trabaja a Bhāskara II, quien propone una idea de infinito en las matemáticas a través de su concepción del cero. Llama la atención la manera en que estos pensadores escriben sus textos científicos, utilizando de forma permanente la poesía de su tradición, siendo rigurosos con la combinación de versos.

El siguiente apartado, *lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande* se hacen reflexiones alrededor de las paradojas propuestas por el presocrático Zenón que se leen a la luz del concepto moderno de límite para explorar su relación con lo infinitamente pequeño y el cero. Se pasa a tratar de cómo el cálculo integral computa áreas y volúmenes a partir de la aproximación de las curvas a otras

áreas de tamaño infinitamente pequeño. Vemos en este numeral cómo ciertas consideraciones del cero nos llevan a campos más complejos de la matemática.

Se trabaja en la siguiente parte el concepto de *sunya*, dándose razones para pensar que el símbolo del cero actual tiene su origen en la India. Luego se muestra brevemente el papel de este concepto en el campo astronómico y espiritual, de donde es tomado para aplicárselo al cero. Por último se hacen consideraciones frente a la matemática occidental versus la hindú, notándose que existe una diferencia significativa en la epistemología de ambas tradiciones. La primera le da superioridad a la llamada demostración universal y a partir de ahí juzga como verdaderos sus descubrimientos. La otra se apoya en la prueba empírica y no entiende como determinante la demostración lógica.

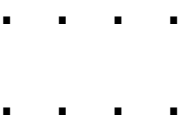
A lo largo de este estudio se harán comentarios sobre puntos específicos como los que se dan acerca de la poesía en los textos astronómicos de la India o la idea de infinito en Bhaskara II, o los pensamientos de Descartes y Espinosa sobre la idea matemática de infinito; todo esto nos ayuda a comprender mejor el contexto de nuestro problema. Este trabajo reúne diferentes posturas frente a la ciencia hindú y occidental a partir de ciertos autores. Hace las veces de compilador y agrega argumentos para ser sometidos a discusión. Cada autor citado nos propone una mirada y abre todo un campo de estudio. El cero es una de las más grandes innovaciones matemáticas de todos los tiempos, por ello resulta fundamental pensar su importancia histórica y filosófica.

1. LOS PITAGÓRICOS Y LOS NÚMEROS

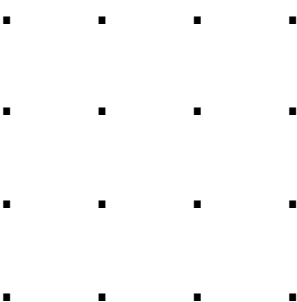
Los pitagóricos fueron una comunidad ascética que creía en la inmortalidad del alma. Pensaban que el número es anterior a las cosas y que constituye su esencia. Este era un principio místico-religioso que veía el cultivo de las matemáticas y la música como conocimientos de purificación. Para los llamados filósofos pre-socráticos, la materia era importante porque en ella se podía encontrar algo que permanecía en medio del movimiento siempre continuo; y fue desde allí que dieron explicaciones sobre la naturaleza del mundo. Los pitagóricos por otro lado, no le dieron tanta importancia a la materia sino más bien a la forma y proporción en la que sus elementos se combinan. Se reconocen como los primeros en proponer la búsqueda de constantes numéricas en medio del orden cambiante del mundo; sin embargo debemos tener en cuenta que en Oriente ya había una tradición matemática fuerte. Una constante célebre en geometría, por ejemplo, es el número pi (π), que se aproxima a un valor de 3.1415926, y relaciona la longitud de una circunferencia y su diámetro. En física cuántica se utiliza la Constante de Planck conocida como el *cuanto de acción*, denotada h con un valor de $6.62606896(33) \times 10^{-34}$ y de $1.054571628(53) \times 10^{-34}$ para la constante reducida; por dar algunos ejemplos de constantes en matemática y física.

Los pitagóricos relacionaron los números con la geometría, y vieron una correspondencia entre éstos y los fenómenos naturales. De esta manera, según ellos, se pueden encontrar relaciones numéricas en lo sensible como en el caso de la música. Entre sus hallazgos en música, se encuentra el descubrimiento de las leyes de los intervalos de la escala musical que sirvió de base para los futuros manuales. Boecio en el siglo VI d.C. tomó y desarrolló los principios pitagóricos sobre música en su libro *Tratado sobre la música*; texto que constituyó la base de la teoría musical en el Medioevo (Tomasini, 2003).

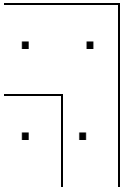
Los pitagóricos clasificaron los números racionales en pares e impares, que combinados formaban figuras geométricas. Así, el producto de dos factores desiguales cualquiera es siempre un rectángulo:

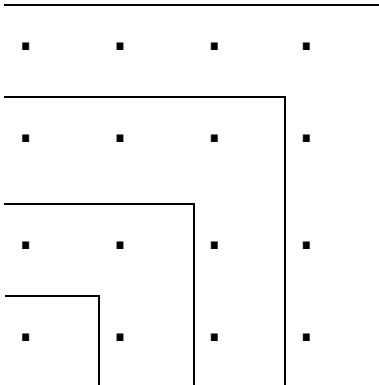
$$4 \times 2 = 8$$


El producto de dos números iguales es un cuadrado:

$$4 \times 4 = 16$$


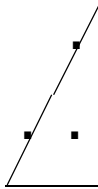
Un número que se obtiene de la suma de los N números impares se llama cuadrado N-ésimo:

$$1 + 3 = 4$$


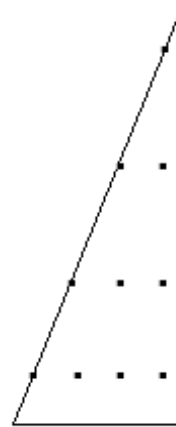
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$


Un número que sea la suma de los primeros N números se llama triángulo

$$1+2=3$$



$$1+2+3+4=10$$



Los sólidos regulares fueron otro interés geométrico de los pitagóricos. Estos sólidos se les llaman regulares porque todos los lados tienen la misma longitud y sus ángulos son iguales. Existen cinco sólidos regulares: Tetraedro (4 triángulos equiláteros), octaedro (8 triángulos equiláteros), hexaedro (6 cuadrados), Icosaedro (20 triángulos equiláteros) y dodecaedro (12 pentágonos regulares). Kepler, más tarde, incluirá estos sólidos en su cosmología inicial.

Esta premisa que relaciona números con figuras geométricas, dio la idea a los pitagóricos de que todo objeto natural debe poseer una relación numérica característica que es previa y forma las cosas. La visión del Cosmos de estos seguidores, se basaba en la idea de ordenar o limitar lo indefinido, teniendo el número como un principio universal. Al respecto Sepulveda (1995) comenta:

Ordenar el caos, dar forma a lo informe, o limitar lo ilimitado, son conceptos similares dentro del pitagorismo. Y en este marco, el número desempeña el papel fundamental, ya que es a través del poder limitador del número que lo informe adquiere forma. Platón y la escuela neoplatónica son los principales exponentes de este concepto.

Actualmente se considera el número como un signo que denota una cantidad. Es ante todo, un elemento útil, vinculado a sus aplicaciones. Pero para la escuela pitagórica el número es una entidad cuya naturaleza debe ser descubierta. El

número es un principio universal, a partir del cual se generan y ordenan todas las cosas

De esta forma, la matemática es el saber que permite el conocimiento de las cosas del mundo y con ella se filosofa. Esta tradición pitagórica no influirá directamente a otras civilizaciones donde se cultivó la matemática, pero se darán concepciones similares en la historia, sobre todo en cuanto a la caracterización de los patrones matemáticos que se observan en la naturaleza y en las mismas leyes que gobiernan los números. El planteamiento de Platón al definir que el demiurgo construye el universo utilizando geometría, parece obedecer a influencias pitagóricas. Los desarrollos greco-alejandrinos incorporaron nociones influyentes como las pitagóricas en su matemática. Ellos también buscaban patrones y estudiaban las relaciones que había entre las leyes de los números que iban descubriendo. Lo mismo pasa en la India y el mundo Árabe-musulmán, así como la modernidad. No es difícil encontrar un matemático en la actualidad que afirme que los fenómenos de la naturaleza están compuestos por números, constantes y relaciones matemáticas, como creían y demostraban en sus trabajos Kepler, Galileo, Descartes y Newton.

Tal vez no haya una influencia directa de los pitagóricos pero se puede rastrear una similitud en ciertos elementos comunes entre ambas tradiciones. Hasta la modernidad la matemática y la física estaban unidas a la filosofía pero la división de los saberes después de las propuestas de Kant en su *Crítica de la razón pura*, las separó por completo. Recuérdese que Newton antes de Kant, estaba estudiando Filosofía natural, a juzgar por el título de su magna obra, *Philosophiæ naturalis principia mathematica* en el siglo XVII.

2. BABILONIA

Se puede hablar de tres formas para evidenciar históricamente la aparición del cero, como número posicional, como concepto y como símbolo, sin entrar en las discusiones lingüísticas al respecto. En la matemática actual, estas tres

características aparecen entremezcladas, se usa el cero posicionalmente, como cuando se escribe 2010; está conceptualizado, en primera instancia, con propiedades aritméticas ($1+0=1$, $0 \times 0=0$, $1 \times 0=0$ etc.); y tiene un símbolo propio (0) que se conoce en todo el mundo al igual que el sistema decimal posicional, del que hace parte.

Se reconocen los babilonios como los primeros en usar el cero como número posicional (Miller, 1903). El sistema numérico babilonio como es bien sabido, era sexagesimal (unidades de 60). En la actualidad este sistema aún se utiliza en la medición de las horas, que aumentan una unidad cada 60 minutos y estos, cada 60 segundos.

Los babilonios en un principio no tuvieron símbolo para el cero. El cero en un sistema sexagesimal aparece con menos frecuencia que en sistemas de bases menores como el decimal posicional. En el sistema babilonio el cero no se da para números menores que 60^1 y sólo 59 veces para enteros menores a 3600 (comparándolo con el sistema decimal donde aparece 917 veces), además que existía cierta ambigüedad en el uso de la posición nula; los babilonios en un principio no vieron la necesidad de un símbolo para el cero (Boyer, 1944).

Entre el siglo VI y III a.C aparece un signo nuevo:  ó  que dentro de la jerarquía posicional babilonia quiere decir “espacio vacío”. Se plantea que la aparición de este signo se debe a que se necesitaba evadir una confusión que existió por siglos entre la unidad y el valor más alto del sistema base, el 60. Los babilonios escribían los números en tablas de barro, con un instrumento de punta que dejaba una marca tal a  , que sería el signo para la unidad. A partir de esta

unidad se escriben los números hasta el 9 () más adelante representado con

¹Al ser un sistema de base 60 habrá símbolos para cada número de 1 a 60 y con ellos se construirá el resto de números. En el sistema decimal por otro lado, hay 10 números y con ellos se construye el resto. Así podemos decir que hasta el número 60, el número cero, en el sistema decimal, aparece 6 veces: 10, 20, 30, 40, 50, 60.

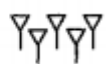


Se dice que el sistema babilonio es una mezcla entre el decimal y sexagesimal. Su utilización se remonta al año 2000 a.C.

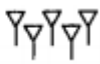
En un principio, nos cuenta Kaplan en su texto *The Nothing that is: A natural history of zero* (1999), que el signo para la unidad y el número 60, se diferenciaba sólo en que el 60 tenía más altura. En el momento de escribir números, muchas veces había confusión entre ambos signos y se tenía que deducir el valor de lo escrito a partir del contexto. Así para  se podría dar la siguiente confusión en su valor:

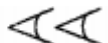
$3 \times 60 = 180$; $2 \times 60 + 1 = 121$; $1 \times 60 + 2 = 62$ o simplemente 3 unidades.

Para las tres primeras opciones, la confusión podría evitarse separando cifras, como efectivamente lo hacían los babilonios, sin embargo muchas veces podría

no notarse este espacio. Otro ejemplo que da Kaplan es  

que tiene un valor de $2 \times 60 + 5 = 125$. Es claro allí el espacio que los separa y hace que no se preste para confusiones. Pero ¿qué tal si lo que se quiere es expresar $2 \times 60^2 + 0 \times 60 + 5 = 7.205$? Para esto se necesita representar en el número una posición nula que permita identificar que las dos primeras marcas tienen como valor 2×60^2 y no 2×60 como en el primer caso. Esta representación es

el signo  cero posicional; por lo que el número 7.205 se escribiría de la siguiente forma    ($2 \times 60^2 + 0 \times 60 + 5 = 7.205$).

Sin embargo es de aclarar, que el cero babilonio sólo era utilizado entre números y no al final como cuando en sistema decimal escribimos 200, que se escribiría   ($3 \times 60 + 20$).

Vemos pues que en este sistema el cero posee un símbolo y se utiliza posicionalmente aunque no en cualquier caso, como se dijo anteriormente. También es relevante afirmar que se dieron varias formas para escribirlo, lo que

podría significar que aún no había intenciones en unificar el cero y que por esto, tal vez, no tenía tanta importancia en su sistema. Pero esto todavía estaría por probarse.

3. GRIEGOS

Antes del siglo III a.C el sistema griego representaba números a partir del alfabeto y no era posicional. Por ejemplo, el número 318 se expresaba de la siguiente manera $\text{HHH}\Delta\P\text{III}$ (3×100 (Hecta) + 1×10 (Deca) + 1×5 (Penta) + 3). Se puede observar que esta notación tiene símbolos para cada posición (cientos, decimas, unidades), por lo que si se escribiera en otro orden, se mantendría el valor. La no posicionalidad de este sistema numérico es evidencia suficiente para afirmar que el cero, en un principio, aún no tenía cabida en la matemática griega.

Probablemente tras la invasión griega de lo que quedaba del imperio Babilonio en 337 a.C, durante el gobierno de Alejandro Magno, fue que los griegos conocieron la importancia del cero y se lo llevaron consigo, además de muchas riquezas más.

Así, la matemática babilonia comenzó a tener una influencia importante sobre la griega, adoptándose una parte del sistema sexagesimal posicional babilonio en astronomía para subdividir números en partes fraccionales (Boyer, 1944). De esta manera, en términos del alfabeto jónico, el número 321,3895 se escribiría $\tau\kappa\alpha\ \kappa\delta'\ \kappa\alpha''$, esto es, $321 + 23/60 + 21/60^2$

Para el caso donde se daba una posición vacía, se utilizaba la letra omicrón (O), sugerida por la palabra $\text{o}\dot{\upsilon}\delta\epsilon\nu$ (vacío), que también tenía como valor el número 70 en el sistema de conteo de números enteros, que no era sexagesimal. Vander Warden va más allá y afirma que el cero tiene su origen actual en esa letra griega; sin embargo existen numerosos argumentos que tratan de desmentirlo y ponen su origen en la India del periodo védico. En este sentido, el número 321.005833 se escribiría $\tau\kappa\alpha\ \omicron'\ \kappa\alpha''$, esto es, $321 + 0/60 + 21/60^2$, indicándose de manera clara,

el uso del cero como posición vacía al igual que se observó con el sistema babilonio(Boyer, 1944). Si no estuviera el cero para indicar nulidad en esa posición podría darse la confusión con $321+21/60$, lo que sería incorrecto para este caso. Con todo lo anterior se puede ver el uso del cero como símbolo y como número de posición en el sistema babilonio y el griego tardío, pero aún no como concepto.

Los griegos tuvieron amplias posturas filosóficas frente al vacío, pero muchas veces se despreció su posibilidad de realidad, lo que podría explicar la no consideración de un número que representara el vacío y la nada como el cero. Parménides habló que era imposible que *no se sea*(Kirk , Raven , & Schonfield , 1983). Aristóteles en su sistema cosmológico afirmó que más allá de la esfera de las estrellas, lo que existía era vacío y por su contenido no habría que preocuparse.

El número griego desde el tiempo de Tales se entendió como un sistema de unidades, como una pluralidad de unos (Boyer, 1944). Los pitagóricos sólo veían viables los números racionales y se dedicaron a pensar sólo a éstos, hasta el punto de afirmarse que existió una grave crisis dentro del pitagorismo a causa del descubrimiento del número irracional $\sqrt{2}$, que es una constante que aparece en el cálculo de la hipotenusa para triángulos rectángulos de catetos iguales. Todas estas restricciones en la definición de número pudieron haber influido en la no aparición conceptual del cero en el sistema numérico griego, además de muchas otras que no se estudiarán aquí. Sin embargo en el trato del infinito apareció la idea de lo infinitamente pequeño que es un buen acercamiento al concepto de cero. Más adelante se tratará el asunto.

4. LA INDIA

La tradición matemática hindú, según se le conoce, no se dio solamente en la India actual, sino en otros lugares como Pakistán e Irán. También es de aclarar

que esta región del subcontinente indio no era gobernada por un poder central; de hecho, no existía la India en el propio sentido de la palabra. Se referirá a esta tradición como Hindú, pero como se verá, no todos los matemáticos y astrónomos que aquí se tratan pertenecen a esta tradición en el sentido estricto. Es algo parecido a lo que ocurre con la llamada región griega antigua. Es bien sabido que en esa época, las personas que habitaban allí no se reconocían como griegos, sino como atenienses, jónicos, espartanos, milesios. Este concepto de Grecia ha servido para unificar la región y referirnos a ella en términos más generales, porque se piensa comúnmente que todo el saber y acontecimientos históricos que allí se dieron, se pueden agrupar en una tradición más amplia. Para el caso de la India, sucede algo parecido y de esta manera abordaremos el problema del cero en esa región.

Para el periodo anterior al primer milenio antes de Cristo no existen escritos hindúes, a excepción de himnos sagrados compilados en el *Rig-veda* (del llamado periodo védico entre 1.400 a.C. y 800 a.C. aproximadamente), posiblemente debido a la fuerte tradición oral existente en la India para esa época. Es por esta razón que los estudiosos de la ciencia en la India se han concentrado en los años posteriores a este periodo oral, que por cierto es una tradición que existe hasta nuestros días aunque en un nivel religioso-espiritual. Los himnos hallados en el *Rig-veda* tienen un contenido matemático casi nulo, sin embargo incluyen referencias a nombres de números que evidencian que para esa época ya existía un sistema decimal (Ross, 2008).

A pesar de las recientes investigaciones, lo que se conoce sobre matemática y astronomía en la India es todavía poco, pues existe numeroso material que aún no se ha investigado. Sin embargo, es reconocido por distintos autores como Kaplan (1999), Neugebauer (2002) y Banerjee (2012) que la matemática hindú tuvo una enorme influencia de otras civilizaciones como la griega y babilonia. Neugebauer escribe: “[It] can be considered fairly certain, namely that the first and lasting

impact of western astronomy on India came via Greek astrological texts, operating with babylonian arithmetical methods².”

Se afirma más específicamente que la astronomía temprana hindú, cuya introducción en la India se dio gracias a los griegos, es de origen Babilonio. Esto se puede evidenciar, según Pingree (1963) en la similitud existente entre teorías planetarias de estas dos civilizaciones encontradas en distintas tablas cuneiformes del periodo Seléucida, Estado sucesor del imperio gobernado por Alejandro Magno alrededor del siglo II a.C. En astrología y astronomía se evidencia que los hindúes utilizaron palabras griegas para referirse a signos zodiacales y varios términos astronómicos como *kendra* del griego *kentron*, (centro) y *liptia* de *leptón* para referirse a minuto. Escribieron también fraccionarios sin línea de separación como lo hicieron los griegos; y definieron la *razón* del día más largo al más corto en 3:2, un dato que no era correcto para las latitudes del norte de la región hindú, pero sí para los babilonios; esta *razón* ya había sido adoptada previamente por los griegos (Kaplan, 1999). El texto *Yavanajātaka* del sánscrito, *griego* (Yavana) y *natividad* (jātaka), escrito en los primeros siglos de nuestra era, es la mejor evidencia de la influencia griega en India. Sin embargo a pesar de ser aceptada existen autores que discrepan en el impacto de los griegos en esta región, argumentando algunos que ciertos investigadores, han exagerado las influencias occidentales en la India para demeritar su saber y elevar el occidental³.

5. EL CERO EN LA INDIA

²Con certeza se puede considerar principalmente, que el primer y último impacto de la astronomía occidental en la India, vino por la vía de los textos astrológicos griegos, los cuales operaban con métodos aritméticos babilonios (La traducción es mía).

³Para ver una de estas discusiones veáse el artículo. The oldest “Indo-Greek text in sankrist” revisited: Additional readings from newly discovered manuscript Yavanajātaka Bill M. Mak (2014), donde se discrepa frente a la opinión generalmente aceptada de Pingree de que el Yavanajātaka es “la base de una obra versificada en una prosa original en griego, compuesta por Yavanésvara en Alejandría en 149/150 a.C.” Mak alega que la opinión anterior “no es posible continuar sosteniéndola dada la nueva evidencia” (La traducción es mía).

En cuanto al cero en la India, la evidencia histórica más antigua de su uso como número conceptual y simbólico del siglo IX, se encuentra en el puerto de Gwalior a 400 km al sur de Nueva Dehli donde se halla un templo con una inscripción con el número 270. También existen otras evidencias en documentos en placas de cobre con el signo cero, que se remontan al siglo VI d.C de los cuales se discute su veracidad (Kaplan, 1999).

Algunos autores afirman que la mención más antigua al cero como espacio vacío se da en el texto *Chandaḥśāstra* escrito por Pingala, que trata sobre métrica védica. En este texto de los alrededores del siglo III a.C, se discute un método para calcular el número de posibles variaciones para una métrica dados un número de sílabas. Es interesante ver que el método arroja $20.282.300 \times 10^{24}$ con lo que se evidencia que para la época ya utilizaban números largos. En conexión a esto se utiliza la palabra *śūnya* (vacío) representada como un punto (*bindu*)⁴(Gheverghese, 2008) que Pingala usa no como un concepto de vacío sino como un símbolo que se relaciona con el número cero (Datta, 1926). Así en los primeros siglos de la era cristiana, el cero ya estaba establecido en la India, como lo muestra el pasaje del romance sánscrito *Vasavadatta* escrito por Subandhu (aprox. 400 d.C.) al referirse a *shunya-bindu*:

*And at the time of the rising of the Moon with its blackness of night, bowing low, as it were, with folded hands under the guise of closing blue lotuses, immediately the stars shone forth... like zero dots (shunya-bindu) because of the nullity of metempsychosis scattered in the sky as if on the ink-blue skin rug of the Creator who reckoneth the sum total with a bit of the moon for chalk*⁵. (Mukherjee, 1977)”

⁴Este autor también desarrolló la serie 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... (conocida como la sucesión de Fibonacci (1170-1250)) trabajada también por Gopala (aprox. 1135) y Hemachandra (aprox. 1150). La matemática hindú como se verá, posee una amplia relación con la poesía y una expresión cultural importante de manera oral en prosa. El trabajo de Pingala también constituyó uno de los más tempranos en permutación y combinatoria *Ver Toward a Global Science: Mining Civilizational Knowledge*. Goonatilake (1998). Indiana University Press.

⁵ En el momento en que salía la Luna y la noche se hacía menos oscura, era como si las estrellas, con los brazos cruzados como lotos azules aún cerrados, hubieran comenzado a su vez a brillar como

Por otro lado, el *punto* ha sido utilizado de múltiples maneras en la literatura hindú tanto para expresar un sentido de partícula pequeña, como para referirse a aceite, oro u otros. Algunos autores no consideran esta evidencia como importante en la evolución del cero (Datta, 1926), pero no deja de verse que una especie de cero primitivo se estaba expresando allí.

Para continuar contextualizando la aparición del cero conceptual en la India se hace necesario echar un vistazo a ciertas posturas que permitieron que se fuera gestando hasta conseguir un estatus de número conceptual-posicional. Este status del cero será visto en todo su esplendor con los desarrollos de Bhaskara II que soluciona el problema planteado previamente por Brahmagupta cuando se pregunta por el resultado de una división entre un número y el cero.

5.1. Āryabhaṭa

Āryabhaṭa es un astrónomo hindú nacido en el año 476 d. C. Su trabajo *Āryabhaṭīya* es el primer texto astronómico hindú conocido que lleva el nombre de un personaje individual. Se le reconoce un segundo texto el *Āryabhaṭa-siddhānta*, pero solo mediante referencias de otros autores posteriores como Varāhamihira y Brahmagupta (Hockey et al, 2007).

Uno de los asuntos más importantes en la obra de Āryabhaṭa es la consideración de una posible rotación de la tierra; de un conjunto de parámetros planetarios que pudieron estar basados en sus propias observaciones; así como una teoría de epiciclos variable en tamaño. Ptolomeo, matemático alejandrino del siglo II d.C, también propuso una teoría de epiciclos pero con la diferencia de que éstos eran constantes o de un mismo tamaño. En matemáticas, Āryabhaṭa también

ceros (shunya-bindu) en el firmamento, diseminadas en el espacio por la vacuidad del Samsara, dispersas en el azul oscuro que recubre la piel del creador quien ha calculado su número sirviéndose de la Luna como tiza. (Traducción: Crespo, 2003)

contribuyó con un sistema alfabético de notación numeral, dio un valor aproximado al número pi (π) de 3.1416, y logró aportes a la función seno utilizada en trigonometría (Kaplan, 1999).

Āryabhaṭa necesitó un método conciso para almacenar números grandes que resultaban en sus estudios astronómicos. Así ideó un sistema numérico que consistía en designar dígitos con letras consonantes y las posiciones con las nueve letras del alfabeto sánscrito. Originalmente este sistema sólo daba nueve posibles posiciones, y como es de saber, los números en astronomía necesitan de muchas. La solución que da este astrónomo hindú es repetir una vez más, cada una de las nueve letras del alfabeto, por lo que se tendrían 18 signos posibles. Āryabhaṭa se refiere a esta “posición” mediante la palabra sánscrita *kha*⁶, que más tarde será una de las palabras más comunes para referirse al cero, por lo que designa simplemente una posición o en otras palabras, un espacio vacío posible en el que cabría un número. Aquí puede notarse un acercamiento implícito al concepto del cero. Más tarde astrónomos matemáticos comentarán su obra y la desarrollarán.

5.2. Varahamihira

Astrónomo, astrólogo y matemático de la India que vivió en el siglo VI d.C. Sus textos tratan de diversas ciencias como economía, agricultura y botánica. La importancia de este pensador radica en la revisión de teorías astronómicas anteriores, especialmente la *Surya Siddhānta*; y en compilar en una enciclopedia el saber popular que existía por ese tiempo (Hockey et al, 2007). Respecto a las Siddhāntas y la influencia griega que hay en ellas, Banerjee (2012) escribe: “*Hindu Siddhāntas are so evidently borrowed from the Greek sources, that apart from the*

⁶La traducción de kha por ‘lugar’ o por ‘espacio’ es incorrecta. No parece que la palabra kha se usara en el sentido de ‘posición notacional’ en ninguna parte en la literatura sánscrita. Sus significados son ‘nulo’, ‘cielo’, etc. [La traducción es mía] Ver alphabetic notation en: http://archive.org/stream/HinduMathematics/HinduMathematics_djvu.txt

*admission in some of these works respecting the teaching or the Yanavas, there could be no doubt as to their source*⁷”

Varahamihira no tenía un símbolo para el cero pero sí le dio diversos nombres, entre ellos el *kha* de Āryabhaṭa. Otros nombres: *amabara* (cielo), *ākāsa* (atmósfera), y *śūnya* (vacío), que será luego el nombre más usado para referirse al cero en la India. Este matemático reconoció en sus textos la importancia de la tradición astronómica griega y es aquí donde se plantea la hipótesis de que la idea de cero como posición *śūnya* en un principio, pudo ser de influencia griega (Karplan, 1999).

En su texto *Pañcasiddhāntikā* (505 d.C) este autor entrega un resumen de cinco *siddhāntas* (sistemas astronómicos): *Sūnya*, *Vasishṭa*, *Paulisa*, *Romaka*, *Brahma*. Cada una perteneciendo a una tradición distinta, entre la que se encuentra la Romana (*Romaka*) y griega (*Paulisa*). Afirma Varahamihira: “*the siddhāntas made by Paulisa is accurate, next to it stands the siddhāntas proclaimed by Romaka, more accurate is the Savitra (Surya- siddhānta, the hindu standard work) while the remaining two are far from the truth*”⁸ (Banerjee, 2012)

En la parte que se trata la *Pulisa-siddhāntas*, Varahamihira anuncia dos operaciones aritméticas donde afirma que el valor de una cantidad no cambia cuando *śūnya* se suma o se resta de ella. Se nota aquí que el cero también tiene un atributo de número al considerarse que se puede sumar y restar. En varios versos se escribe⁹:

Kha

⁷Las *siddhāntas* hindú son tan claramente tomadas de las fuentes griegas, que aparte de la admisión en algunos de estos trabajos respecto a las enseñanzas o las Yanavas, no podría haber duda de la fuente de donde viene. [la traducción es mía]

⁸La *siddhānta* hecha por *Paulisa* es precisa, le sigue la *Siddhānta* proclamada por *Romaka*; más preciso aún es la *Savitra* (de autoría hindú) mientras las otras dos están lejos de la verdad. [La traducción es mía]

⁹El número romano indica capítulo, el segundo número el verso. Para ampliar el significado de estos versos véase Datta (1926)

III.2 Corresponding to the signs of the anomaly, the numbers of minutes to be deducted (from the sun's mean longitude) are eleven; eight sixes; seventy minus one; and (that) plus zero [kha]; nine sixes; and five squared¹⁰.

Sūnya

IV.7 (To which to be added in succession) fifty plus one; five eights; five squared; four; thirty increased, by four; fifty-six; five; zero [Sūnya]¹¹.

XVIII.45 In Cancer, (in days) four, one, three and four, multiplied by ten and increased by two, eight, zero [Sūnya], six (respectively), (he passes through) five squared increased by one, halved, increased by one; and five squared degrees. [Simbólicamente]: days: $4 \times 10 + 2$; $1 \times 10 + 8$; $3 \times 10 + 0$; $4 \times 10 + 6$; degrees: $5 \times 5 + 1$; $5 \times 5 \times (1/2)$; $5 \times 5 + 1$; 5×5]¹²

Amabara

IV.8 The signs in Taurus are six; thirteen; nineteen; three eights; again thirty added with zero [ambara], five, nine, thirteen (in succession) minutes¹³ (Datta, 1926)

5.3. Manuscrito Bakhshali

En la India se utilizó el espacio vacío (*sūnya*) para expresar incógnitas, al estilo de la actual *x* en álgebra. Por ejemplo, este espacio se representó como un punto en el manuscrito *Bakhshali*, de autor desconocido, donde se estudian fracciones,

¹⁰Correspondiendo a la señal de la desviación, la anomalía, el número de minutos a ser deducido (de la longitud media del sol) es once (11), ocho seises (48); setenta menos uno (69); y (eso) más cero [kha] (69); nueve seises (54); y cinco al cuadrado (25). [La traducción es mía]

¹¹(A los cuales sumar en sucesión) cincuenta más uno (51); cinco ochos (40); cinco al cuadrado (25); cuatro (4); treinta incrementado en cuatro (34), cincuenta y seis (56); cinco (5); cero [sunya] (0). [La traducción es mía]

¹²En Cáncer, (en días) cuatro, uno, tres y cuatro, multiplicado por diez e incrementado en dos, ocho, cero [sunya], seis (respectivamente), (pasa a través de) cinco al cuadrado incrementado en uno, reducido a la mitad, incrementado en uno y cinco al cuadrado grados. [La traducción es mía]

Días: $4 \times 10 + 2$; $1 \times 10 + 8$; $3 \times 10 + 0$; $4 \times 10 + 6$.

Grados: $5 \times 5 + 1$; $5 \times 5 \times (1/2)$; $5 \times 5 + 1$; 5×5

¹³Las señales en Tauro son seis (6); trece (13); diecinueve (19); tres ochos (24), treinta sumado (en sucesión) a cero [ambara] (30), cinco (35), nueve (39), trece (43) minutos [La traducción es mía]

raíces, intereses en ganancia y pérdida, ecuaciones cuadráticas, aritmética y progresiones geométricas. Este manuscrito ha sido fechado por algunos autores en distintos momentos de la historia variando entre el siglo III d.C al XII d.C (Teresi, 2002). La notación utilizada es similar a la de Āryabhaṭa y Brahmagupta, excepto por el signo *más* (+) que se usó en este manuscrito para designar números negativos. Los fraccionarios se representaron de la misma manera que se hace en la actualidad con la diferencia que no lleva la línea que divide el fraccionario en numerador y denominador.

En la regla (*sūtra*) número 25 se tiene la siguiente operación:

$\cdot \quad 1 \quad 1 \quad 1$	
$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad bha \text{ sesam} \quad 32$	$phalam \ mula \quad 108$
$3+ \quad 3+ \quad 3+$	

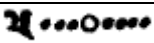
El punto negro simboliza la incógnita que se está buscando. Se tienen fracciones compuestas al haber tres números uno encima del otro, denotando $1-1/3$ (el signo + dice que el 3 es negativo). Se indica multiplicación al haber números seguidos de otros. Así se tiene la operación $(1-1/3) \times (1-1/3) \times (1-1/3)$ igual a $8/27$. *Bha* es la abreviación de *bhaga*, que significa *parte*, indicando que el número anterior es un denominador. Así se tiene $(32 \div 8/27 = 108)$.

Según Gheverghese (2011) el punto también se utilizó para el cero. Llama la atención sobre lo sugerente que es un mismo símbolo para representar una cantidad desconocida y un número. Escribe:

The use of the same symbol to represent both an unknown quantity and a numeral is interesting. At the time the dot indicated an empty place, as its Sanskrit name shows: shunya means “empty,” or “void”¹⁴.

En este manuscrito apareció el cero en distintas partes. A continuación se muestra una tabla con representaciones de este número en el manuscrito.

Tabla 1. Inscripciones del cero en el manuscrito Bakhshali

Símbolo	Número
	4000
	500000000

El cuarto cero del número inferior es un círculo, el resto son puntos (Mukherjee, 1977).

5.4. Brahmagupta

Brahmagupta (aprox. 598 – 670) fue un astrónomo de gran tradición en la India. Su obra fue difundida en los siglos posteriores y comentada por importantes astrónomos y matemáticos de la India y del mundo árabe-musulmán. Vivió en Ujjain y fue el encargado del observatorio astronómico que allí se encontraba. Su obra más importante se titula *Brāhmasphuṭasiddhānta* (Doctrina de Brahma Correctamente Establecida), escrita en verso y cuenta con 25 capítulos donde trata temas de astronomía y en menor medida de matemáticas (Tabak, 2009). Sólo dos capítulos están dedicados a las matemáticas.

¹⁴El uso del mismo símbolo para representar al mismo tiempo, una cantidad desconocida y un número es interesante. Mientras el punto indicaba un espacio vacío, como su nombre en sánscrito muestra: shunya significa “vacío” o “nulo” [La traducción es mía]

*Brahmagupta holds a special place in the history of mathematics. (...), it was partly through a translation of his Brahma Sphuta-siddhanta that the Islamic world, and then the West, became aware of Indian astronomy and mathematics. This was to have momentous consequences for the development of the two subjects*¹⁵(Gheverghese, 2011)

En esta obra se predican eclipses y las posiciones de los planetas, las fases de la Luna, entre otros. Fue un severo crítico de la escuela de Āryabhaṭa y realizó en sus textos numerosos comentarios al respecto. Brahmagupta no tuvo un símbolo para el cero pero lo llamó *khaal* igual que su criticado antecesor y otras veces *ākāsay sūnya* como Varahamihira.

Su trabajo contiene muchas reglas donde la mayoría no son probadas con todo el rigor matemático occidental, ilustrándose con ejemplos precisos y no generalizados¹⁶. Véase en Brahmagupta *la regla de la operación inversa*, cuyo principio se utiliza para despejar ecuaciones y resolverlas:

Multiplier must be made divisor; and divisor, multiplier; positive, negative and negative, positive; root (is to be put) for square; and square, for root; and first as converse for last”(Tabak, 2009)¹⁷

El signo que utilizó como incógnita lo llamó *yavat tavat*. Cuando Brahmagupta necesitó más de una variable, les dio el nombre de los colores abreviados *ca*, *ni*, *pi*, *pa*, *lo*(Kaplan, 1999).

Este pensador es el primer matemático reconocido en tratar el cero como un número en todo el sentido de la palabra aunque con una definición limitada. En el

¹⁵Brahmagupta ocupa un lugar especial en la historia de las matemáticas. (...), en parte, fue a través de una traducción de su Brahma Sphuta-siddhanta que el mundo islámico y Occidente, conoció la astronomía y matemática de la India. Esto habría de tener importantes consecuencias para el desarrollo de ambos saberes.” [La traducción es mía]

¹⁶En la última parte se planteará una discusión alrededor de las demostraciones en Occidente y la India

¹⁷El multiplicador debe hacerse divisor; y el divisor, multiplicador; positivo, negativo y negativo, positivo; raíz (se pone) por cuadrado; y cuadrado, por raíz, y primero como opuesto del último. [La traducción es mía]

capítulo 12, titulado *Ganita* (Cálculos aritméticos) nos da un acercamiento a las reglas aritméticas del cero y los números negativos, que no habían sido considerados por ninguna otra civilización (Gheverghese, 2011). Es por esto que el trabajo de Brahmagupta constituye uno de los avances matemáticos más importantes, pues completó el edificio del sistema decimal. A partir de allí, en el siglo VII d.C la matemática avanzaría a pasos veloces.

Brahmagupta da las siguientes reglas para la suma con cero como la conocemos hoy $0 + (-a) = -a$; $a + 0 = a$; $0 + 0 = 0$

The sum of zero and a negative number is negative, the sum of a positive number and zero is positive, the sum of zero and zero is zero¹⁸.

En cuanto a la resta dice que $0 - (-a) = a$; $0 - a = -a$; $-a - 0 = -a$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0$

A negative number subtracted from zero is positive, a positive number subtracted from zero is negative, zero subtracted from a negative number is negative, zero subtracted from a positive number is positive, zero subtracted from zero is zero¹⁹

Brahmagupta también enuncia la regla de la multiplicación, donde afirma que un número multiplicado por cero es cero. Luego pasa a hablar de la división de un número positivo o negativo con cero como denominador. Por último dice que cero dividido por cero tiene como resultado cero.

Positive or negative numbers when divided by zero is a fraction the zero as denominator. Zero divided by negative or positive numbers is either zero or is

¹⁸La suma del cero y un número negativo es negativo, la suma de un número positivo y el cero es positivo, la suma del cero y cero es cero. [La traducción es mía]

¹⁹Un número negativo sustraído del cero es positivo, un número positivo sustraído del cero es negativo, cero sustraído de un número negativo es negativo, cero sustraído de un número positivo es positivo, cero sustraído del cero es cero. [La traducción es mía]

*expressed as a fraction with zero as numerator and the finite quantity as denominator. Zero divided by zero is zero*²⁰

Correctamente afirma que cero dividido por un número negativo o positivo es cero (0) o simplemente (0/n). Pero tiene dificultades al hablar de n dividido cero, por lo que pide dejarla operación enunciada $n/0$ (con el cero como denominador), tal vez para evadir los problemas que traía consigo realizar esta operación. En cuanto a la división entre ceros (0/0) Brahmagupta afirma que tiene como resultado cero, sin embargo hoy en día es considerado una indeterminación que no ha sido posible definir (Namakando, 2004).

Con Brahmagupta el cero entra a definirse en términos de relaciones aritméticas, como un número de características propias, esto le abre el camino al cero para que se continúe ampliando su relación con otras operaciones y números, adquiriendo cada vez más importancia en la estructura de la matemática de la India.

5.5. Mahāvīra

Mahāvīra (aprox. 800 – 870) conocido como Mahaviracharya fue uno de los matemáticos más célebres en el siglo IX d.C. No era hindú, su religión era el jainismo, una minoría religiosa en la India. Tampoco fue astrónomo sino que se dedicó al tratamiento ‘*puro*’ de las matemáticas. Se reconoce su libro *Ganita Sara Samgraha* como el primer texto de la India en tratar las matemáticas separadas de la astronomía y en reconocer su importancia para el estudio de los astros. Algunos autores afirman que su obra fue inspirada en el texto de Brahmagupta, *Brāhmasphuṭasiddhānta* al cual hace múltiples comentarios. Mahāvīra era de la

²⁰Números positivos o negativos cuando se dividen por cero dan como resultado una fracción con el cero como denominador ($n/0$). Cero dividido por un número positivo o negativo es cero o se expresa como una fracción con el cero como su nominador y la cantidad finita (n) como su denominador (0/n). [La traducción es mía]

región sur donde se difundió ampliamente el trabajo de Brahmagupta; pero estando lejos de la región norte y occidental de la India, lugares en los que se dieron las escuelas matemáticas más importantes (Jain, 1977).

Mahāvīra al igual que Brahmagupta escribe su texto en verso y entrega numerosas reglas y ejemplos sin llevar a cabo pruebas matemáticas generales, mostrando una importante habilidad en el manejo del sistema de numeración hindú. Su utilización y presentación de métodos aritméticos no se distancia mucho en la manera como se enseña actualmente.

Construyó problemas en donde la respuesta se podía leer igual de izquierda a derecha que viceversa como un palíndromo; un ejemplo es la solución de la multiplicación $14287143 \times 7 = 100010001$. También trabajó identidades matemáticas como $a^3 = a(a+b)(a-b) + b^2(a-b) + b^3$ con el fin de facilitar los cálculos y problemas geométricos. Se preocupó por problemas indeterminados con múltiple solución y por números largos. Mahāvīra al igual que la tradición hindú le dio gran importancia al lenguaje poético, con lo que expresaba sus ejercicios matemáticos. Se tiene el siguiente ejemplo de su texto *Ganita Sara Samgraha* (Tabak, 2009)

One night in spring, a certain young lady was lovingly happy with her husband on the floor of a big mansion, white like the moon, situated in a pleasure garden full of trees heavy with flowers and fruits. The whole place was resonant with the sweet sounds of parrots, cuckoos, and bees intoxicated with the honey from the flowers in the garden. In the course of a "love quarrel" between the couple, the lady's necklace came undone and the pearls got scattered all around. One-third of the pearls reached the maidservant who was sitting nearby; one-sixth fell on the mattress; one-half of what remained (and one-half of what remained thereafter and again one-half of what remained thereafter and so on, counting six times in all)

*were scattered everywhere. On the broken necklace, there remained 1,161 pearls. Oh my love, tell me quickly the total number of pearls on the necklace*²¹.

La respuesta es 148.608 perlas (Gheverghese, 2011), un número de perlas bastante grande. La percepción de realidad de esta cultura no se puede desligar del asunto religioso, donde conviven muchos mitos que amplían la realidad material. La matemática hindú no sólo se aplicó a la realidad física por medio de la astronomía y los problemas de canje mercantil, sino que se estudió en su aplicación más abstracta, lo cual permitió visualizar otros aspectos, que como se dijo, no dejaba a un lado la experiencia religiosa. El aspecto filosófico, religioso y espiritual de la India le daba, al parecer, más amplitud a las definiciones matemáticas, distinto a lo que pasó con otras tradiciones como la pitagórica, por ejemplo, que insistían en fundar su matemática en los números racionales y esto limitó las definiciones.

Todo ello, tal vez, permitió que los matemáticos de la India de aquella época, consideraran la posibilidad de existencia de los números negativos, el cero, las raíces negativas y las operaciones aritméticas con el cero como se vio con Brahmagupta y autores posteriores; algo que ninguna otra cultura había logrado. Fibonacci en el siglo XIII tendrá problemas en aceptar los números negativos que conoció en sus viajes al Norte de África.

Respecto a la importancia de la obra de Mahāvīra y sus influencias, Gheverghese (2011) afirma que el autor puede ser visto como quien sintetizó y desarrolló el trabajo de sus predecesores.

²¹Una noche de primavera, cierta jovencita estaba amorosamente feliz con su esposo en el suelo de una gran mansión, blanca como la Luna, situada en un placentero jardín lleno de árboles con muchas flores y frutas. Todo el lugar resonaba con el dulce sonido de los loros, los cucos y las abejas intoxicadas con la miel de las flores del jardín. En el curso de una “disputa amorosa” entre la pareja, el collar de la dama se reventó y las perlas se esparcieron al alrededor. Un tercio de las perlas alcanzó a la empleada quien estaba sentada cerca; un sexto cayeron en la cama; la mitad de lo que quedó (y la mitad de lo que queda a partir de ahí y nuevamente la mitad de lo que queda y así sucesivamente) se esparció por toda parte. En el collar roto quedaron 1 161 perlas. Oh mi amor, dime pronto el total de perlas del collar. [La traducción es mía]

Mahāvīra's contribution may be looked at in two ways. Ganita-sara-sangraha may be seen as the culmination of Jaina work on mathematics (indeed it is the only substantial treatise on Jaina mathematics that we have). Alternatively, Mahavira can be seen as summarizing and extending the mathematical content of the works of his predecessors such as Aryabhata, Bhaskara I, and Brahmagupta²² (Gheverghese, 2011).

Mahāvīra llama los diez números del sistema decimal *Samkhyā*. Con estos diez números es capaz de expresar cualquier otro número de la misma manera como nosotros lo hacemos hoy. En el primer capítulo de su texto explica las cuatro operaciones fundamentales con el cero y afirma:

A number multiplied by zero is zero, and that (number) remains unchanged when it is divided by, combined with (or) diminished by zero. Multiplication and other operations in relation to zero give rise to zero; and in the operation of addition, the zero becomes the same as what is added to it²³ (Jain, 1977).

Cuando Mahāvīra dice que “un número (...) permanece sin cambio cuando se divide por (...) cero” está claramente dando una definición incorrecta de la división de un número por cero al igual que lo hizo previamente Brahmagupta siglos antes. Será Bhāskara II quien solucionará este problema.

5.6. Bhāskara II

Bhāskara II (aprox. 1114-1185) conocido también como Bhāskarāchārya, nació en la parte sur de la India al igual que Mahāvīra. Es uno de los matemáticos más

²²Las contribuciones de Mahavira pueden ser vistas de dos maneras. Ganita-sara-sangraha puede ser visto como la culminación de la obra matemática jain (vale aclarar es el único gran tratado de la matemática Jain). Alternativamente, Mahavira puede ser visto como que recogió y extendió el contenido matemático hallado en sus predecesores tales como Aryabhata, Bhaskara I, y Brahmagupta. [La traducción es mía]

²³Un número multiplicado por cero es cero, y ese (número) permanece sin cambio cuando se divide por, combina con (o) se reduce a cero. La multiplicación y otras operaciones en relación al cero da como resultado el cero; y en operaciones de suma, el cero se vuelve el mismo que el valor que se le suma [La traducción es mía]

influyentes de la India y de la historia. Se mudará para Ujjain ciudad ubicada al noroeste donde será el director del observatorio astronómico que Brahmagupta había dirigido. Escribió el primer trabajo sistemático en el uso del sistema decimal (Sridhar, 2014). Fue autor de textos sobre astronomía y matemáticas; uno de ellos, el *Siddhāntaśiromaṇi*, el cual se divide en cuatro partes: *Līlāvātī*, *Bījagaṇita* (álgebra), *Golādhyāya* (sobre el globo celestial), y *Grahagaṇitādhyāya* (matemática de los planetas), donde las dos primeras están dedicadas a matemáticas y las otras a astronomía. En sus años avanzados escribirá *Karanakutuhala*, un texto astronómico corto (Puttaswamy, 2012). Al igual que la tradición matemática hindú, Bhāskara II escribe sus textos en forma poética, mostrando un excelente manejo de las técnicas de la época (Balasubramanian, 2012). Un ejemplo de un verso es el siguiente

Praise of Lord Gaṇeśa

प्रीतिं भक्तजनस्य यो जनयते विघ्नं विनिघ्नन्
 स्मृतस्तं वृन्दारकवृन्दवन्दितपदं नत्वा मतंगाननम्।
 पाटीं सद्गणितस्य वच्मि चतुरप्रीतिप्रदां प्रस्फुटाम्
 संक्षिप्ताक्षरकोमलामलपदैर्लालित्यलीलावतीम्॥ I ॥

[First] I offer my salutations to the elephant-faced Lord who creates love in His devotees, by remembering whom all obstacles are destroyed and whose feet are revered by the community of gods. Here I give methods of slate mathematics – Līlāvātī- which is loved by discriminating people because of its clarity, brevity as well as its literary flavor²⁴(Bhāskarācārya, 2001).

Respecto al tema poético en Bhāskara II, Filliozat (2014) presenta en la *International Conference on the 900th Birth Anniversary of Bhāskarācārya* una

²⁴Ofrezco mis saludos al Señor cara de elefante quien crea amor en Sus devotos, recordando a quien, todos los obstáculos son destruidos y de quien los pies son adorados por la comunidad de dioses. Aquí entrego métodos de matemática de pizarrón – Lilavati- el cual es querido por gente entendida por su claridad, brevedad, así como también por su sabor literario. [La traducción es mía]

ponencia sobre el aspecto poético en Bhāskarācārya, donde realiza un análisis de los estilos utilizados en los textos del astrónomo hindú y pone una pregunta sobre la mesa ¿La inspiración poética está en el origen de ciertas ideas científicas? Dejemos que sea él mismo quien lo cuente:

We can differentiate two styles in the four parts of the Siddhāntaśiromaṇi, Līlāvātī, Bījagaṇita, Grahagaṇitādhyāya and Golādhyāya. There is an appropriate style for the expression of the mathematical facts, which can be called sūtra style. There is another style for the examples, which we will call udāharaṇa style. The latter is characterised by its freedom from the conciseness of the gaṇitaśāstra, giving space for extra matter and wide scope to imagination. There, we find the famous poetical problems implicating themes of Sanskrit poetry, the bee on the lotus suggesting the śṛṅgāra-rasa, the feats of Arjuna bringing vīra-rasa etc. The sūtra style aims at clarity. It obeys the śāstric habit of conciseness, without excess to preserve clarity. It is not devoid of literary qualities, musicality of well-mastered prosody and choice vocabulary, with a pleasant use of bhūtasamkhyā-s and numerous alliterations (...)²⁵.

El dominio matemático de Bhāskara II se puede observar en su álgebra, donde muestra métodos para resolver ecuaciones lineales, cuadráticas e indeterminadas. Es de notar que el famoso matemático europeo Pierre de Fermat propuso la ecuación cuadrática $61x^2+1=y^2$ como un problema a resolver en 1657 (Selin, 2008). Su solución ya había sido dada antes por Bhāskara II, utilizando un método modificado de Brahmagupta.

²⁵Podemos diferenciar dos estilos en cuatro partes del Siddhantasiromani, Lilavati, Bijaganita, Grahaganitadhaya and Goladhyaya. Hay un estilo apropiado para la expresión de enunciados matemáticos, la cual puede llamarse estilo Sutra. Hay otro estilo para los ejemplos, el cual llamaremos estilo udaharana. Este último se caracteriza por su libertad respecto a lo conciso del ganitasastra, dándole espacio a material extra y un gran alcance a la imaginación. Allí encontramos los famosos problemas poéticos que trataba la poesía sánscrita, la abeja en la flor de loto sugiriendo la srngara-rasa, las hazañas de Arjuna trayendo vira-rasa etc. El estilo Sutra apunta a la claridad. Obedece al hábito de síntesis śāstric (textos brahmánicos que tratan sobre conocimiento técnico proveniente de una autoridad reconocida) sin excederse para preservar la claridad. No está desprovisto de cualidades literarias, y posee una bien dominada musicalidad en la prosodia y un vocabulario selecto, con un placentero uso de bhūtasamkhyā-s y numerosas aliteraciones (...)
[La traducción es mía]

El texto *Līlāvātī* dedicado a la aritmética, es visto como la primera parte del *Siddhāntaśiromaṇi*. Tuvo mucha difusión y numerosos comentarios, haciéndose traducciones en muchas lenguas de la India, y en idioma Persa en el siglo XVI y XVII. En esta obra se dan métodos para sumar, restar, multiplicar y dividir. La sección XV lleva como título *Eight rules concerning zero*. Las reglas número XLVI y XLVII dicen (Bhāskarācārya, 2001):

योगे खं क्षेपसमं वर्गादौ खं खभाजितो राशिः ।
खहरः स्यात्खगुणः खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ॥ XLVI ॥

शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तदा राशिः ।
अविकृत एव ज्ञेयस्तथैव खेनोनितश्च युतः ॥ XLVII ॥

If zero is added to a number, the result is the same number; the square etc. (i.e., square, square-root, cube, cube-root) of zero is zero; any (non-zero) number divided by zero is khahara, i.e., infinite; the product of a number and zero is zero²⁶.

Utilizando notación moderna. Para $a \neq 0$; $a \pm 0 = a$; $0^2 = 0$; $\sqrt{0} = 0$; $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{0} = 0$; $a \div 0 = \frac{a}{0} = khahara (\infty)$; $a \times 0 = 0$

La división $\frac{a}{0} = \infty$ aunque Bhāskara no lo exprese, podría ser entendida utilizando el concepto moderno de límite, de la siguiente forma $1/n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow 0$. Esto es, $1/n$ tiende a infinito cuando n tiende a cero. Lo que significa que $1/n$ no es igual a infinito cuando n es igual a cero, sino que $1/n$ va hacia el infinito cuando n se aproxima tanto como sea posible al cero (recuérdese que entre 0 y 1 hay infinitos números reales, por lo que habría infinitas maneras de acercarse al cero) o dicho de otra forma, cuando n es un número tan pequeño que sea casi cero. Para hacer una demostración puntual de lo anterior, divídase el 1 por un número que cada vez se acerque más y más a cero (sobre 0.0001, luego 0.0000001, 0.0000000000000001

²⁶ Si el cero se le suma a un número, el resultado es el mismo número; el cuadrado etc. (cuadrado, raíz cuadrada, cubo, raíz cúbica) de cero es cero; cualquier número (diferente de cero) dividido por cero es khahara, esto es, infinito; el producto de un número y cero es cero. [La traducción es mía]

y así sucesivamente) y se tendrán como resultados números más y más grandes, que se acercan a infinito o *tienden* a él.

Es de aclarar que el símbolo de infinito (∞) como se conoce hoy, no se utilizaba en la India de aquel tiempo. Aquí se usa con la intención de traducir el concepto de *khahara* que Bhaskara definirá con sus palabras como infinito haciendo una analogía a los dioses, como se muestra a continuación:

**अस्मिन्विकारः खहरे न राशावपि प्रविष्टेष्वपि निःसृतेषु ।
बहुष्वपि स्याल्लयसृष्टिकालेऽनन्तेऽध्युते भूतगणेषु यद्वत् ।।**

There is no change in infinite (khahara) figure if something is added to or subtracted from the same. It is like: there is no change in infinite Visnu (Almighty) due to dissolution or creation of abounding living beings²⁷.

Es decir que $khahara \pm n = khahara$, de otra forma $\infty \pm n = \infty$. Piénsese de la siguiente manera, si se tiene una cantidad infinitamente grande y le agrego una parte muy pequeña o muy grande (n), la cantidad anterior seguirá siendo infinitamente grande; del mismo modo que un dios infinito seguirá siendo igual de infinito si se le agregan o sustraen cosas: “*no hay cambio en el infinito Visnu (Todopoderoso) debido a la disolución o creación de abundantes seres vivos*”.

Aquí se nota fuertemente la influencia del pensamiento religioso en la ciencia hindú, que le sirve para definir conceptos matemáticos. Como comentario a este asunto, que no se quisiera dejar pasar, en Europa siglos después se intentará conceptualizar a Dios en categorías matemáticas de infinito.

²⁷ No hay cambio en la infinita (khahara) figura si algo se le agrega o sustrae de la misma. Es algo así como: no hay cambio en el infinito Visnu (Todopoderoso) debido a la disolución o creación de abundantes seres vivos. [La traducción es mía]

Descartes en su tercera meditación *De Dieu; qu'il existe*, utiliza el concepto de infinito aunque ya en una dimensión filosófica pero apoyándose en la noción matemática de éste para relacionarlo a una idea de Dios al igual que Bhaskara II lo hizo siglos antes cuando habló de *khahara*. G. Bruno propondrá un universo infinito, contradiciendo de este modo al dogma aristotélico de un universo limitado. Escribe Descartes en la meditación mencionada en 1641:

Además, aquella (idea) por la cual concibo un Dios soberano, eterno, infinito, inmutable, omnisciente, todopoderoso y Creador universal de todas las cosas que hay fuera de él; aquella, digo, tiene ciertamente en sí más realidad objetiva, que aquellas mediante las cuales me son representadas las sustancias finitas (Descartes, 2011)

Spinoza por otra parte en la definición VI de la primera parte de su *Ética*, habla de un Dios como un ente absolutamente infinito:

Por Dios entiendo un ser absolutamente infinito, esto es, una substancia que consta de infinitos atributos, cada uno de los cuales expresa una esencia eterna e infinita. (Spinoza, 1677)

En la India, al parecer, el concepto de infinito se aplicó desde la idea de un dios infinito, a las matemáticas. Por otro lado, Descartes y Spinoza, pareciera que aplican el concepto de infinito ya de manera inversa, de las matemáticas a la idea de Dios. Es sabido que Descartes y Spinoza fueron racionalistas que aplicaron categorías matemáticas y geométricas a la filosofía y con ellas propusieron nuevas maneras de pensar el concepto de verdad, Dios, ciencia y filosofía.

Continuando con Bhaskara II, luego procede a definir la división por cero cuando el dividendo es multiplicado a su vez, por otro cero.

One should maintain the form of multiplicand and multiplier zero in rest of the operations (until the final operation is reached). This is because if a number is multiplied by zero and divided by zero then the result is the (former) number²⁸

Aquí lo que se trata de decir es lo siguiente:

Cuando la operación para $a \neq 0$ es de la forma $(a \times 0) \div 0$ no se debe multiplicar $a \times 0$, como piden las reglas para el cero entregadas por Brahmagupta, pues quedaría la operación $0 \div 0$ lo que sería una indeterminación. Se debería escribir, dice Bhāskara II de la forma $\frac{a \times 0}{0}$ y mantenerse hasta que todas las operaciones se hallan realizado para tener que $\frac{a \times 0}{0} = a$ “Si un número es multiplicado por cero y dividido por cero entonces el resultado es el primer número”

Esta operación se puede explicar mediante el concepto moderno de límite. A continuación un ejemplo que entrega Bhaskara II y que nos sirve para ilustrar el punto:

A certain number is multiplied by zero and added to half of result. If the sum so obtained is first multiplied by 3 and then divided by 0, the result is 63. Find the original number. It is obtained by ‘reverse process’²⁹

En terminología moderna lo anterior se podría expresar de la siguiente forma, siendo m el valor preguntado y n el que tiende a cero (en Bhaskara n es igual a cero):

²⁸Uno debería mantener la forma del multiplicando y multiplicador cero en el resto de las operaciones (hasta que la última operación se haya realizado). Esto se debe a que si un número es multiplicado por cero y dividido por cero el resultado es el (primer) número. [La traducción es mía]

²⁹Cierto número es multiplicado por cero y se le suma la mitad del resultado. Si la suma así obtenida, primero se multiplica por 3 y luego se divide por cero, el resultado es 63. Encuentre el número original. Se obtiene por medio de la técnica de ‘proceso inverso’

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\left(m \times n + \frac{1}{2}m \times n\right) \times 3}{n} = 63$$

El resultado del *límite* es $m=14$; resultado que también ofrece Bhaskara II utilizando su propio método (Bhāskarācārya, 2001).

En los desarrollos de este matemático vemos toda una tradición que a través de los años se ha ido moldeando, recogiendo aportes de diversas culturas como se ha visto a lo largo de este estudio. Hasta aquí se le ha dado una mirada al cero como un número que representa la nada, el vacío, influidos quizá por las nociones actuales que tenemos de este número. Pero las aproximaciones a Bhaskara respecto a la división sobre el cero nos llevan a acercarnos a la idea lo infinitamente pequeño como posibilidad del cero. En los límites se hace claro este asunto cuando se expresa, no que n es igual a infinito ($n=0$), sino que *tiende* a él ($n \rightarrow 0$); o si se quiere, n es tan pequeño que es casi 0. En el siguiente apartado se darán algunas ideas alrededor de la relación del infinito y el cero.

La tradición matemática de la India, pues, realizó múltiples descubrimientos y avances que llevaron al sistema decimal de posición hindú a un punto alto de desarrollo que permitió avances simultáneos en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. Es de notarse que cuando aparece el cero como concepto en Brahmagupta y Bhaskara II, la astronomía estaba ya muy avanzada. Por esto se argumenta que el cero no fue indispensable en un primer momento. Sin embargo, más tarde se hizo necesaria su aparición para continuar el camino de desarrollos como se vio en las concepciones del infinito, a las que se llegó con el cero.

6. LO INFINITAMENTE PEQUEÑO Y LO INFINITAMENTE GRANDE

Revisemos algunas aplicaciones del concepto de infinito por parte de Zenón (aprox 490 a. C.) en Grecia, que del mismo modo que Bhaskara II nos llevan a

pensar en los límites. La influencia de todos estos conceptos y tradiciones irán dando forma a distintas posturas que se pueden rastrear hasta nuestros tiempos como lo es esta idea de límite, que derivará en fundamento del cálculo diferencial y se aplicará fuertemente en las ciencias físicas.

El presocrático Zenón, discípulo de Parménides, nos propone una aplicación del infinito en la enunciación de sus célebres paradojas que nos llegan a través de otros autores. En ellas apunta a retar las tesis de la divisibilidad del movimiento. Una de estas paradojas dice que si se arreglara una carrera en línea recta entre Aquiles y una tortuga, y se le diera a ésta última cierta ventaja al inicio, Aquiles nunca podría pasarla. Al intentar alcanzar la tortuga, ella se desplazaría al menos, alguna distancia (a pesar de su lentitud); luego Aquiles intentará nuevamente alcanzar la tortuga, pero esta se habrá movido nuevamente, repitiéndose esta situación al infinito; de este modo, nunca Aquiles la podrá pasar (figura 2). Téngase en cuenta que los movimientos se dividen en infinitas partes, así como es posible dividir las infinitas cantidades que hay entre dos números (para el conjunto de números reales).

Del mismo modo, Zenón propone el problema de un hombre que camina hacia un muro que nunca podrá alcanzar si divide su caminar en sucesivas mitades, es decir, primero camina la mitad de la distancia, luego la mitad de lo que queda, seguido de la mitad de lo que quedó y así hasta el infinito sin que toque nunca el muro pues siempre será posible encontrar una distancia para dividir (figura 1).

Estos problemas ilustran situaciones donde el concepto de límite puede ser utilizado para comprender fenómenos físicos que se dan en un espacio y tiempo (movimiento, cambio del espacio con respecto al tiempo). Del mismo modo, puede mirarse esta problemática como un acercamiento al concepto de cero. Ilustremos la situación.



Figura 1. Paradoja de Zenón. Hombre se dirige a muro con sucesivas divisiones
(Stewart, 2008)

Teniendo en cuenta la figura, se ve que la infinita suma de las divisiones mostradas (cada vez se acercan más a cero como es posible), es igual a la distancia total a recorrer hasta el muro. Por ello puedo decir que la suma de las cantidades es igual a 1 (la unidad, la distancia). Al expresarlo con notación actual, se tiene:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

La paradoja de Zenón estaría insinuando que es imposible sumar cantidades infinitas para obtener un número (alcanzar la distancia completa) y que por ello es imposible hablar de división del movimiento.

La tesis de Parménides se centraba en la unidad, y rechazaba el cambio. Zenón representante de esta escuela, propone las paradojas para mostrar que el argumento por lo plural no era posible para hablar de una cosa que todos reconocemos como Una, dígame la distancia. Si existen muchas cosas, entonces esas cosas serán infinitamente pequeñas e infinitamente grandes al mismo tiempo; si el movimiento es divisible, entonces se sigue que nada se mueve, como es el caso de los problemas recién enunciados; cuando intentamos dividir el movimiento llegamos a una paradoja como se mostró (Huggett, 2010).

El argumento de Zenón negaría que entre el número 0 y 1, (en el conjunto de los números reales), hay infinitas cantidades ¿cómo dividir la unidad, lo indivisible?; Cuando se enuncia cualquier rango de números, estamos implícitamente refiriéndonos a infinitas cantidades. Otro caso es al hablar de un

número decimal como 0.333... (1/3), que se puede expresar como una sucesión de

sumas infinitas
$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10,000} + \dots = \frac{1}{3}$$

Desde luego, Zenón no aceptaría este argumento, pero a nosotros nos sirve para llegar al cero cuyo rastro nos trajo aquí y nos llevó al concepto de límite. Hablar de una cantidad infinitamente pequeña es hablar de una cantidad que es casi cero, según se puede notar más arriba a partir de la demostración que hace Bhaskara II para mostrar empíricamente que 1 dividido cero es infinito; el trato implícito que le da allí al cero es de cantidad infinitamente pequeña, tan pequeña como cero.

En el problema de la competencia entre Aquiles y la tortuga, se presenta en esencia el mismo asunto pero esta vez comparando dos distancias, una que comienza en a_1 y otra en t_1 como se observa en la siguiente figura.

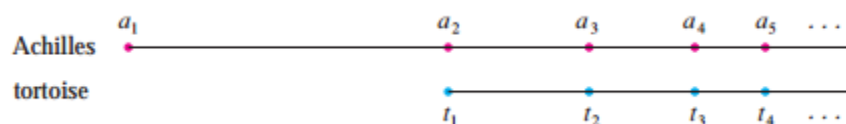


Figura 2. Paradoja de Zenón. Aquiles y la tortuga.

(Stewart, 2008)

Una secuencia similar a la tratada anteriormente nos permite acercarnos a este asunto. En la competencia es la tortuga la que pone el ritmo, por lo que las divisiones de la distancias se pueden contar como cantidad de divisiones y no por su tamaño, como en el caso del muro que siempre se divide en mitades. Así, se puede describir la secuencia de Aquiles y la tortuga como

conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$, que a su vez se puede denotar $a_n = \frac{1}{n}$.

Al poner el conjunto de números de la secuencia en un gráfico de dispersión se obtiene la figura 3 de la izquierda. Al graficar la función $1/n$ se tiene la figura de la derecha

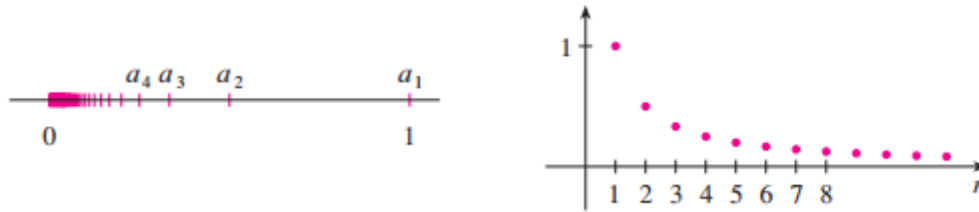


Figura 3. Dispersión de las posiciones (a). Gráfica de la $1/n$ (b)
(Stewart, 2008)

En la gráfica de la izquierda vemos cómo todos los puntos se van acercando a cero a medida que crece la secuencia. En la gráfica derecha, el eje horizontal representa los valores de n , que crecen al infinito y el eje vertical, representa los valores de $1/n$, los cuales se acercan cada vez más a cero a medida que n aumenta. De lo anterior podemos decir que el límite de $1/n$ (la función matemática que puede caracterizar el movimiento descrito en el problema de Zenón), cuando n tiende a infinito es cero. Esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Resultado inverso al de Bhaskara II, cuando, al contrario, para la misma función, implícitamente analiza a n tendiendo a cero (tan infinitamente pequeño como sea posible), obteniendo como resultado infinito³⁰. Aclárese que a toda función se le puede calcular su límite, por lo que no siempre se da el caso ilustrado. Por ejemplo el límite de n^2 cuando n tiende a infinito es igual a infinito. Pero esta situación nos sirve para ilustrar lo que se viene hablando

Algunos fundamentos del concepto de cero, pensado como lo infinitamente pequeño, y el límite, se pueden rastrear como vemos, en la tradición desde los tiempos presocráticos con Zenón. Bhaskara II tiempo después en la India, tendrá, como se vio, un acercamiento más moderno, con un cero conceptualizado en

³⁰La enunciación de estos problemas matemáticos con límites, se hace usando conceptos y notación moderna.

número y con unas relaciones establecidas en el sistema numérico. De todo esto se desprenderán luego ideas como la derivada y la integral, de las que se seguirá tratando un poco.

El concepto matemático de infinito y de límite, yace a la base del cálculo infinitesimal descubierto simultáneamente por Newton y Leibniz entre los siglos XVII y XVIII. Claro que esta afirmación es algo problemática pues ambos desarrollaron versiones distintas del cálculo, al punto que si ambas visiones se comparan, múltiples problemas resultarían. Tampoco hicieron un Cálculo de las Funciones sino de lo que llamaron 'cantidades' con las que tuvieron un acercamiento geométrico muy influido por la tradición de aquel tiempo. Newton hablará de la influencia de la '*Geometry of the Anciens*' en sus desarrollos. En la actualidad es fundamental la noción de cálculo de funciones. El método general de aproximación a diversa gama de problemas es lo que constituye el aporte principal de ambos pensadores en el cálculo de hoy, profundamente ampliado con los nuevos desarrollos que luego vinieron. (Guicciardini, 2003)

El cálculo infinitesimal a menudo es entendido como lo que compone al cálculo diferencial (derivadas) y el integral (integrales). El primero permite caracterizar procesos naturales que consideren cambios de tasa, como la velocidad (variación de la *posición* respecto al *tiempo*), la aceleración (variación de la *velocidad* respecto al *tiempo*), fuerza (variación del *momentum* respecto al *tiempo*) entre otros. Matemáticamente hablando se da como un problema de tangentes que aquí no se trata.

Respecto al cálculo integral es la operación inversa del diferencial, conocido también como antiderivada. Sus problemas aparecen en el ámbito del cálculo de áreas y volúmenes, fundamental para muchas ciencias como la física, las probabilidades y la estadística. Los principios para realizar cálculos se basan en la misma idea de lo infinitamente pequeño y grande; de hecho, una integral se puede definir como una suma infinitamente grande que agrupa lo infinitamente pequeño.

De lo que se trata es de aproximar la totalidad de un área a partir de la suma infinita de pequeñas áreas. Esta es una idea que ya los egipcios y griegos trabajaron para calcular áreas de fácil aproximación pero aquí adquiere un nivel de complejidad más alto, teniendo en cuenta curvas de diversa geometría. Es un método general que funciona para cualquier curva que cumpla los preceptos. La relación matemática del cálculo diferencial y el integral como inversos, se da por medio del llamado teorema fundamental del cálculo.

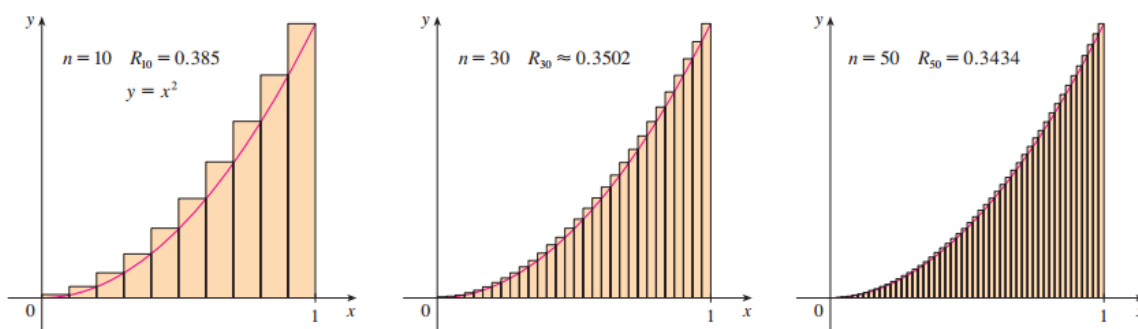


Figura 4. Aproximación de un área con rectángulos
(Stewart, 2008)

En la figura anterior se puede ver cómo, entre más pequeños los rectángulos, más se aproxima la suma de ellos al valor del área bajo la curva. Esta técnica de aproximación de curvas fue una práctica común en las matemáticas del siglo XVII (Guicciardini, 2003). La notación actual utilizada es la de Leibniz, que describe la integral (de x) como $\int x \, dx$, donde el primer signo es una S alargada haciendo alusión a suma; ' x ' es la función que se pretende integrar y dx es una parte infinitamente pequeña que sumada al infinito da como resultado el área bajo la curva.

De este modo podemos decir que $\int x$ es lo infinitamente grande, mientras dx , es lo infinitamente pequeño ¿Estaría de acuerdo Zenón al respecto?

Aquí nuevamente nos enfrentamos a la idea del cero como lo infinitamente pequeño y vemos su aplicación. Esta idea del cálculo infinitesimal requirió con necesidad el concepto del cero y su relación con el infinito para abrirse camino y posteriormente aplicarse a las ciencias físicas con indudable eficacia.

Ahora retomemos el cero en la India, y veamos cómo se pudo dar la evolución de su símbolo.

7. SUNYA

A continuación se muestran inscripciones del cero como punto o círculo pequeño en diferentes manuscritos, lo que diría que en la India existía un consenso aproximado para simbolizar al cero. En la tabla se muestra el símbolo, el número en notación actual y el manuscrito donde aparece.

Tabla 2. Inscripciones de Sunya en la India

Símbolo	Número	Manuscrito
	100 101 170	<i>Atharvaveda (previo a 500 A.C)</i>
	606 (Śaka) 60 (Śaka)	<i>Malay inscription (684 A.D)</i>
	608 (Śaka)	<i>Malay inscription (686 A.D)</i>
	60	<i>Shahpur Stone image Inscription (672 A.D)</i>
	605 Saka	<i>Khmera Inscription (683 A.D)</i>

Mukherjee (1977) propone dos hipótesis a partir de las cuales explica el porqué se simbolizó *sunya* de esta manera. Ofrece una razón espiritual o metafísica y otra física o atómica.

Para la razón espiritual argumenta que *Sunya* es la ausencia de todo, la ausencia de toda cualidad. Esto representa en Brahma, dios creador, que Él no está guiado por ninguna de las cualidades o constituyentes de la naturaleza, *Sattva* (de la naturaleza del placer, es luz), *Raja* (de la naturaleza del dolor, es movible y estimulante) y *Tama* (de la naturaleza de la indiferencia, es pesado y abarcador). Del mismo modo Brahma es la fuente de todas las cualidades de la energía, potencia y fuerza y permea cada cosa viviente y no viviente de este mundo.

De un modo similar *śūnyase* identifica con la ausencia cuando se coloca independientemente pero representa abundancia y plenitud cuando se pone dentro del sistema numérico decimal. Se sabe que ceros a la derecha aumenta el valor de un número. Así, el símbolo para *śūnyase* identificaría con el de Brahma, siguiendo su concepción de ausencia y abundancia. En el ritual espiritual de concentración, se comienza por fijar la mirada en un punto negro que representa el brillo de Brahma. Este punto para el autor, podría ser *śūnya*. A continuación se muestran dos formas para la meditación. La tercera representa la luz que sale del fondo negro como resultado de la meditación.

Tabla 3. Formas de meditación Brahma.

Inscripciones	Manuscrito
●	<i>Shahpur Stone image Inscription (672 A.D)</i>
●	<i>Khemera inscription (683 A.D)</i>

En cuanto a la razón física este autor afirma que la referencia se encuentra en un pasaje del romance sanscrito *Vasavadatta* escrito por Subandhu (aprox. 400 d.c.) citado previamente en la sección *El cero en la India*:

And at the time of the rising of the Moon with its blackness of night, bowing low, as it were, with folded hands under the guise of closing blue lotuses, immediately the stars shone forth... like zero dots (shunya-bindu) because of the nullity of metempsychosis scattered in the sky as if on the ink-blue skin rug of the Creator who reckoneth the sum total with a bit of the moon for chalk³¹."

La doble representación del cero como ausencia y abundancia se observa en los planetas pues estos se entendían como una combinación de átomos. Luego, la ausencia del cero está guiada por la ausencia inherente en la insignificancia o la pequeñez de un átomo. Por esta razón, dice el autor, se hace una analogía de *śūnya* con la forma que se puede apreciar de los planetas en la distancia.

Ambos argumentos, espiritual y físico pudieron haber contribuido en la aparición del cero como símbolo circular. En la India existe una fuerte tradición en meditación, además que como se vio, fueron ellos dedicados observadores de los astros. De estas dos posturas, una espiritual y otra astronómica, es posible haber tomado el símbolo y concepto del cero actual, teniendo en cuenta que sobre este punto hay muchas opiniones encontradas.

8. CONSIDERACIONES SOBRE LA MATEMÁTICA OCCIDENTAL E HINDÚ

³¹En el momento en que salía la Luna y la noche se hacía menos oscura, era como si las estrellas, con los brazos cruzados como lotos azules aún cerrados, hubieran comenzado a su vez a brillar como ceros (shunya-bindu) en el firmamento, diseminadas en el espacio por la vacuidad del Samsara, dispersas en el azul oscuro que recubre la piel del creador quien ha calculado su número sirviéndose de la Luna como tiza. (Traducción: Crespo, 2003)

La matemática occidental históricamente ha tenido una postura distinta a la tradición de la India. Los occidentales han perseguido soluciones universales para los problemas matemáticos, esto es, que sirven para todos los casos, mientras los hindúes no buscaban universalidad sino que consideraban soluciones a problemas específicos a través de procedimientos empíricos y por ello no siempre llevaron a cabo demostraciones formales, como se le conoce en la actualidad ni fue esa su prioridad.

Las matemáticas occidentales después de asumir los avances de la India y el mundo musulmán, se han difundido a lo largo y ancho del mundo. La prueba lógica no-empírica, se ha constituido en su base fundamental. En matemáticas formales, por mostrar un ejemplo, no es aceptable demostrar $2+2=4$ usando 4 palitos como en el preescolar; en matemática hindú sí se tuvo en cuenta lo empírico. Para demostrarlo en ´rigor` occidental se debe realizar todo un procedimiento lógico deductivo al estilo de la geometría euclidiana; de hecho, Russell en su *Principia mathematica* se gasta varias páginas demostrando axiomáticamente por qué $1+1=2$ utilizando lógica simbólica.

Por otra parte, de acuerdo a Raju (2006) la matemática fue hecha aceptable por los cristianos y se le retiró conscientemente la relación que tenía con el alma y la espiritualidad, por razones de celo doctrinal. Platón en la República, por ejemplo, propone la enseñanza de las matemáticas por sus efectos benéficos para el alma más que por los prácticos; la geometría y la simetría de sus formas perfectas, le sirven a Platón para proponer la idea de vicio en las almas, lo cual es producto de una desviación de la forma pura que debería mantener el alma (la virtud). Proclus, considerado uno de los últimos filósofos clásicos, en su comentario a *Los Elementos*, afirma que la verdadera función de la matemática es volver la atención del estudiante hacía sí mismo, hacia su alma, para hacerlo darse cuenta de su unidad universal, de su individualidad (*oness*, en inglés) (Raju, 2006). Se argumenta que se le quitó a la matemática todo atributo místico como el que tuvieron los pitagóricos, comunidad mística basada en su relación con los números

y las formas, además que se asume superior su fundamentación sobre la lógica, e inferior la que se basa en la experiencia.

Las fuentes griegas fueron consideradas heréticas en el mundo cristiano y sólo a través de una reinterpretación de éstas, a la luz de la doctrina católica, resultaron tiempo después aceptables, nos habla este autor³². Recuérdese que Aristóteles fue rechazado pero bajo las lecturas cristianas de Santo Tomás de Aquino se comenzó a aceptar. También la noción espiritual que le dieron los pitagóricos y otros filósofos griegos a la matemática fue considerada herética. No se eligió la ruta de la verdad empírica para la matemática sino la lógica, pues en la demostración experimental no cabría Dios mientras que en la prueba lógica sí. Al respecto de la considerada superioridad de la lógica aristotélica, Raju escribe:

*There are an infinity of possible logics, but the rational theologians of the Crusading church wrongly declared two valued "Aristotelian" logic as universal. This is factually false: the Buddhist 4-fold logic of catuskoti and the Jain logic of syadavada are NOT two-valued. Thus teaching that 2-valued logic is universal, through math, amounts to teaching a religious bias against Buddhists and Jains*³³(Raju, Petition to teach religiously neutral mathematics in public).

A pesar de lo anterior, no se puede desconocer que en la matemática de tradición hindú hay una importante influencia religiosa, aunque tal vez más espontánea según este autor. Muchas de sus categorías son tomadas directamente de cultos espirituales como *sunya* para expresar el cero. La poesía también fue importantísima en su desarrollo como se vio. La ciencia no aparece separada de la

³²Tal vez sea un comentario exagerado de parte de Raju. Es claro que no todos los textos difundidos en la Edad Media tuvieron sesgo cristiano manipulado, pero también se reconoce que la institucionalidad del Vaticano hizo todo lo posible por construir un saber a conveniencia para justificar sus dogmas. Véase la condena a G. Bruno y Galileo.

³³Hay una infinidad de posibles lógicas, pero los teólogos racionalistas de la Iglesia en tiempos de Cruzadas, erróneamente declararon a la lógica aristotélica de dos valores (verdadero o falso), como universal. Esto es objetivamente falso: La lógica budista de cuatro valores de catuskoi y la lógica jain de syadavada no son de dos valores. De este modo, enseñar que la lógica de dos valores es universal, a través de las matemáticas, se convierte en enseñar sesgadamente algo en contra de los budistas y jains. [La traducción es mía]

cultura, la moral y la religión, ésta es una manifestación más del pensamiento que se cultiva para dar respuesta a problemas culturales históricos. Tal vez la palabra sesgo religioso es apropiada en algunas partes, pero no se debe caer en el error de reducir todo lo occidental a esta postura. Al parecer Raju comete ese error, pero en términos generales su denuncia tiene significativos argumentos que abren una ruta de estudio importante para abordar las matemáticas de manera más universal.

Algunos autores reconocen que la matemática hindú fue de enorme importancia en los progresos actuales, pero frecuentemente se le señala de carecer rigor y universalidad, pues no lleva siempre a cabo demostraciones formales que se cumplan para todos los casos. Además de esto afirman que en la India se apoyaban en lo empírico, como ya se ha dicho, y esto para los logicistas es no tener rigor. Lo anterior hace que en ocasiones se juzgue la matemática de la India como inferior, pero según se podría concluir de los argumentos entregados por Raju, un juicio tal no es apropiado porque desconoce otras lógicas, como las que se dieron entre los budistas y jains con significativos resultados.

REFERENCIAS

- Abbas, S. (2003). Varahamihira, a great Iranian astronomer. *Iran Chamber society*.
- Aristóteles. (s.f.). *Libro I. Metafísica*.
- Balasubramanian, K. S. (2012). Bhāskarācārya as a Poet. *International conference on the 900th birth anniversary of Bhāskarācārya*, (pág. 8).
- Banerjee, G. N. (2012). *Hellenism in Ancient India*. BoD - Books on demand.
- Bhāskarācārya. (2001). *Līlāvātī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition*. Motilal Banarsidass.
- Boyer, C. (1944). Zero: The Symbol, the Concept, the Number. *National Mathematics Magazine Vol. 18, No. 8*, 323-330.

- Crespo, C. (2003). La representación de la ausencia por medio de una presencia: El cero. *Universidad de Buenos Aires*.
- Datta, B. (1926). Early Literary Evidence of the use of the Zero in India . *The American Mathematical Monthly*, Vol. 33, No. 9, 449-454.
- Descartes, r. (2011). *Descartes. Estudio introductorio de Cirilo Flórez Miguel*. Madrid: Gredos.
- Filliozat, P.-S. (2014). The poetical face of the mathematical and astronomical works of Bhāskarācārya. *International Conference on the 900th Birth Anniversary of Bhāskarācārya*, (pág. 7).
- Gheverghese, G. (2008). A Brief History of Zero. *Iranian Journal for the History of Science*, 37-48.
- Gheverghese, G. (2011). *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
- Guicciardini, N. (2003). Newton's Method and Leibniz's Calculus. En H. N. Jahnke, *A History of Analysis* (pág. 74). USA: American Mathematical Society.
- Hockey, T., & al., e. (2007). *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*,. New York: Springer.
- Huggett, N. (Winter 2010 Edition). Zeno's Paradoxes. *he Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/paradox-zeno/>.
- Jain, B. S. (1977). On the Ganita-Sara-Samgraha of Mahavira (c. 850 A.D.). *Indian Journal of History of Sci*, 17-32.
- Kaplan, R. (1999). *The nothing that is: a natural history of zero*. New York: Oxford University Press.
- Kirk , G. S., Raven , J. E., & Schonfield , M. (1983). *The Presocratic Philosophers, A Critical History with Selection of Texts*. Cambridge University Press.
- Miller, G. A. (1903). Some Fundamental Discoveries in Mathematics. *Science, New Series*, Vol. 17, No. 430 , 496-499.
- Mukherjee, R. N. (1977). Background to the discovery of the symbol for zero. *Indian Journal of history of science*, 224-231.
- Namakando, C. (2004). *Zeropsis I*. Fultus Corporation.

- Neugebauer, O. (2012). *A History of Ancient Mathematical Astronomy*. . Springer Science & business Media.
- Pingree, D. (1963). Astronomy and Astrology in India and Iran . *Isis*, Vol. 54, No. 2, 229-246.
- Puttaswamy, T. K. (2012). *Mathematical Achievements of Pre-Modern Indian Mathematicians*. Newnes.
- Raju, C. K. (2006). The religious roots of mathematics. *Theory, Culture & Society*, 95-97.
- Raju, C. K. (s.f.). Petition to teach religiously neutral mathematics in public.
- Ross, M. (2008). *From the Banks of the Euphrates: Studies in Honor of Alice Louise Slotsky*. Eisenbrauns.
- Russell, B. (1972). *History of western philosophy. Book three. Modern philosophy* .
- Selin, H. (2008). *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer.
- Sepúlveda, A. (1995). *Historia de la física: desde los griegos hasta nuestros días*. Medellín: Cooperativa de Profesores de la Universidad de Antioquia, Fondo Editorial Cooperativo.
- Spinoza, B. (1677). *Ética* (Tercera (2011) ed.). Madrid: Alianza.
- Sridhar, S. (2014). A note on leading mathematician Bhaskara II of 12th century. *Intenational Journal of innovative technology and research. Volume No.2, Issue No. 2*, 788 - 792.
- Stewart, J. (2008). *Calculus. Early transcendentals*. USA: Thomson Learning.
- Tabak, J. (2009). *Algebra: Sets, Symbols, and the Language of Thought*. Infobase Publishing.
- Teresi, D. (2002). *Lost discoveries : the ancient roots of modern science—from the Babylonians to the Maya*. New York: Simon and Schuster.
- Tomasini, M. C. (2003). *El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas*. Universidad de Palermo.

