

Introducción al Cálculo de Variaciones Aplicado al Control Óptimo: Guía
Metodológica de Aprendizaje



Carlos Arturo Jiménez Oliveros

Universidad Pontificia Bolivariana
Escuela de ingeniería y Administración
Facultad de Ingeniería Electrónica
Bucaramanga
2012

Introducción al Cálculo de Variaciones Aplicado al Control Óptimo: Guía
Metodológica de Aprendizaje



Carlos Arturo Jiménez Oliveros

Proyecto de Grado para optar por el título de:
Ingeniero Electrónico

Director del Proyecto:
Ing. Edgar Barrios Urueña
Ingeniero Electricista
MSc Ing. Eléctrica

Universidad Pontificia Bolivariana
Escuela de ingeniería y Administración
Facultad de Ingeniería Electrónica
Bucaramanga
2012

NOTA DE ACEPTACION:

Presidente del Jurado

Jurado

Jurado

AGRADECIMIENTOS:

En la finalización de una de las etapas más importantes de mi vida, es para mí un placer agradecerle a las personas que fueron partícipes de una manera u otra de este hecho tan importante como lo es la culminación de mis estudios universitarios.

En primer lugar, quiero agradecer a Dios quien es nuestro creador por la protección del señor y las fuerzas para no desfallecer, también agradecer a mis padres por todos los esfuerzos que hicieron para poder estudiar y por el apoyo ya que ellos siempre han estado a mi lado en las buenas y en las malas, en segundo lugar agradecer a mi hermana y a mi novia por las palabras de aliento y confianza para seguir adelante.

No puedo dejar de agradecer al Doctor Edgar Barrios por su guía y apoyo en la realización de este proyecto ya que fue un trabajo en conjunto y de muchas horas de estudio.

CONTENIDO

1. RESUMEN GENERAL DE TRABAJO DE GRADO.....	7
2. INTRODUCCION	11
3. OBJETIVOS	13
3.1 Objetivo General.....	13
3.2 Objetivos Específicos.....	13
4. METODOLOGIA	14
5. MARCO TEORICO	15
5.1 Control Óptimo.....	15
5.2 Máximos y Mínimos	15
5.3 Cálculo de Variaciones	17
5.2.1 Problema de Euler Lagrange	18
5.4 MAPLE.....	19
6. DESARROLLO DEL PROYECTO.....	20
6.1 PROBLEMA DE PUNTO FINAL FIJO.....	20
6.1.1 Variación suave.....	22
6.1.2 Variación fuerte.	23
6.1.3 Primera condición necesaria	24
6.2 PROBLEMAS EN LOS QUE EL PUNTO FINAL NO SE HA FIJADO	31
6.2.1 Formas Especiales de la Condición de Transversalidad.....	34
6.3 VERIFICACIÓN DE LAS CURVAS DE MINIMIZACIÓN.....	38
6.4 PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS	48
6.5 CONDICIONES SUFICIENTES.....	53
6.5.1 Campos de extrémals	54
6.6 INTEGRAL INVARIANTE DE HILBERT	58
7. CONCLUSIONES	62
8. RECOMENDACIONES	64
9. BIBLIOGRAFIA	65
10. ANEXOS	66
10.1 Solucionario de Ejercicios Propuestos.....	66
10.2 Tutorial de MAPLE.....	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Representación de máximos y mínimos en una función con una sola variable.....	16
Figura 1.2	Curvas que unen dos puntos.....	21
Figura 1.3	Variación suave.....	23
Figura 1.4	Variación fuerte.....	24
Figura 1.5	Variación suave con sólo un punto extremo fijo.....	32
Figura 1.6	$x(t_1)$ fijo.....	35
Figura 1.7	t_1 fijo.....	36
Figura 1.8	Variaciones de tipo suaves.....	42
Figura 1.9	Variaciones suaves de tipo (u).....	43
Figura 1.10	Variaciones suaves de tipo (iii).....	44
Figura 1.11	Dos curvas de minimización con esquinas.....	47
Figura 1.12	Campo de extrémals $x = t + l$	55
Figura 1.13	Campo de lo extrémals $x = l - \frac{4}{t^2}$	57
Figura 1.14	C es una trayectoria de la integral invariante de Hilbert's.....	58
Figura 1.15	Diagrama Introducción a Maple.....	94
Figura 1.16	Hoja de Trabajo de Maple.....	95
Figura 1.17	Opciones de la Barra de Menú	96
Figura 1.18	Barra de Aplicaciones.....	97
Figura 1.19	Grafico de una Integral.....	98
Figura 1.20	Grafico en Línea Punteada.....	98
Figura 1.21	Ventana Para Modificar Rango de Grafica.....	99
Figura 1.22	Ventana "Solve DE interantively".....	100
Figura 1.23	Ventana "Edit Differential Equations".....	101
Figura 1.24	Ventana "Edit Conditions".....	101
Figura 1.25	Ventana "Solve symbolically".....	102

1. RESUMEN GENERAL DE TRABAJO DE GRADO

TITULO: Introducción al Cálculo de Variaciones aplicado al Control Óptimo: Guía Metodológica de Aprendizaje.
AUTOR: Carlos Arturo Jiménez Oliveros
FACULTAD: Facultad de Ingeniería Electrónica
DIRECTOR: Edgar Barrios Urueña

RESUMEN

El Cálculo de Variaciones es un método matemático que permite buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre un funcional. Tiene múltiples aplicaciones, entre ellas está el uso en control óptimo para hallar el controlador de un sistema de control que maximice o minimice una condición especificada.

En este Proyecto se desarrolla se estudia la metodología del Cálculo de Variaciones, se desarrollan ejercicios propuestos en algunos textos de la literatura técnica y se realiza una guía para facilitar la comprensión de los principios del Cálculo de Variaciones y su aplicación al Control Óptimo.

Se estudia el Cálculo de Variaciones aplicado al Control Óptimo, específicamente los temas “problema de punto final fijo” y “problema de punto final móvil”.

Se estudió la herramienta matemática Maple y se utilizó en el desarrollo de los ejercicios, para resolver ecuaciones matemáticas complejas; el uso de MAPLE facilitó la obtención de la expresión de Euler–Lagrange y la solución de ecuaciones diferenciales, pasos importantes para encontrar el extremal.

Una vez culminado el estudio de la teoría se difundió los resultados obtenidos presentando a la comunidad UPB-Bucaramanga en un seminario introductorio al Cálculo de Variaciones aplicado al Control Óptimo.

PALABRAS CLAVES: Control Óptimo, Cálculo de Variaciones, Extremal, Euler-Lagrange.

GENERAL ANALYSIS OF DEGREE PROYECT

TITLE: Introduction to the calculus of variations applied to Optimal Control: Learning Methodology Guide.

AUTHORS: Carlos Arturo Jiménez Oliveros

FACULTY: Electronic Engineering Faculty

DIRECTOR: Edgar Barrios Urueña

SUMMARY

The Calculus of Variations is a mathematical problem which consists in finding the maximum and minimum of defined continuous functions. On some functional space, there is an alternative method to find a controller in the conventional manner as is the bode diagram, root locus, or other usual methods of classical control.

According to the above guidance was developed to make the foundation for understanding the Calculus of Variations applied to optimal control which presents the theory and exercises in a didactic learning mode because the information found in books is very difficult to understand, the other difficulty is that these books are not easy to find.

This project studied the Calculus of Variations applied to optimal control, specifically the topics "problem of fixed final point" and problems in which the final point is mobile.

Maple tool was very useful in the solution of the exercises, to solve very large mathematical equations. And with the software the solution of differential equations was facilitated, and finding the Euler-Lagrange expression, important steps to find the extremal.

Once completed the study of the theory I released the results to the community of UPB Bucaramanga in an introductory seminar to the Calculus of Variations applied to the optimal control.

KEY WORDS: Optimal Control, Calculus of Variations, Extremal, Euler-Lagrange.

2. INTRODUCCION

En las aplicaciones de la ingeniería se presentan situaciones en donde es conveniente optimizar alguna condición del comportamiento de un sistema para conseguir un mejor funcionamiento o una mayor eficiencia.

El diseño o compensación de sistemas de control trabaja con los métodos convencionales del control clásico para diseñar un controlador por los métodos como son el diagrama de bode y lugar geométrico de las raíces entre otros. Estos métodos dan resultados aceptables en la aplicabilidad del control, sin embargo no se tiene certeza de obtener el mejor controlador.

Cuando se desea diseñar un controlador que dé el mejor comportamiento del sistema, dadas unas especificaciones, es necesario utilizar métodos de Control Optimo como lo son el Cálculo de Variaciones, la Programación Dinámica o el Principio de Pontryagin.

Este Proyecto toma la técnica del Cálculo de Variaciones y da las bases para desarrollar controladores óptimos de sistemas de control. Esta técnica para optimizar es muy poco utilizada en los niveles básicos de la ingeniería ya que la información generalmente se estudia en las aulas en cursos de postgrado.

El Cálculo de Variaciones es un método matemático que consiste en buscar funcionales continuos para maximizar o minimizar una acción de control en una variable para que el sistema controlado trabaje en la mejor manera posible para tener su mayor rendimiento.

Para el desarrollo de los ejercicios propuestos se utilizo el software Maple ya que es un programa para la solución de operaciones matemáticas complejas; nos hacía más fácil el desarrollo de estos, como las ecuaciones diferenciales y

ecuaciones de Euler-Lagrange pasos muy importantes para conseguir el extremal indicado para optimizar.

Para contribuir con el entendimiento de este método se realizó una guía introductoria al tema que cuenta con aspectos teóricos, teoremas y ejemplos y se realizó un seminario introductorio para explicar el Cálculo de Variaciones aplicado al Control Optimo.

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivo General

- Elaborar una Guía introductoria al Cálculo de Variaciones aplicado al Control Optimo mediante el estudio del tema, realización de ejercicios y su simulación en el computador.

3.2 Objetivos Específicos

- Recopilar y estudiar información sobre el Cálculo de Variaciones y su aplicación al Control Optimo dando una introducción a los temas: Problema de punto final fijo, Problemas en los que el punto final no se ha fijado y Problemas Isoperimétricos.
- Resolver en forma analítica problemas del Cálculo de Variaciones para verificar la parte teórica y a su vez dejar la solución correspondiente donde se explican el desarrollo de estos ejercicios.
- Desarrollar los ejercicios mediante una simulación y contrastar los resultados obtenidos en la solución analítica y así avanzar lo necesario para que el estudiante comprenda más brevemente el desarrollo de los temas.
- Elaborar la Guía introductoria de Cálculo de Variaciones aplicado al control óptimo.
- Divulgar la teoría del Cálculo de Variaciones aplicado al control óptimo realizando un seminario de introducción a la comunidad universitaria.

4. METODOLOGIA

La apropiación del conocimiento del Cálculo de Variaciones se hizo estudiando varios libros y revistas referentes al tema; como parte del estudio se resolvieron ejercicios propuestos en la literatura y su resultado se corroboró a través de simulación en el computador.

Recopilando la información obtenida de teoría, ejercicios y simulaciones se “desarrolló la Guía Introductoria del Cálculo de Variaciones para el entendimiento de la comunidad estudiantil.

Ya realizado lo anterior se difundió dentro de la comunidad universitaria del tema de Cálculo de Variaciones aplicado al Control Óptimo; esto se hizo presentando un seminario introductorio a la comunidad Bolivariana de Bucaramanga.

5. MARCO TEORICO

5.1 Control Óptimo

La teoría de Control Optimo es un conjunto de técnicas para determinar el control y las trayectorias de un sistema dinámico que minimiza un funcional sobre un intervalo de tiempo.

Un sistema dinámico es un modelo de la evolución temporal el espacio de estados de un sistema físico y se describe mediante ecuaciones diferenciales o en diferencia.

La formulación del control óptimo se basa en la utilización de variables de control que permiten maximizar o minimizar una función objetivo sujeta a restricciones o condiciones dadas.

Las variables de estado son utilizadas como instrumento en la optimización, estas serán medidas y usadas como una señal de control, cuando sea logrado esto, se conocerá la trayectoria óptima de las variables de estado, a partir de la relación que las une (la ecuación).

5.2 Máximos y Mínimos

Mínimo fuerte: Un punto extremo x_0 de una función $f(x_0)$ define un mínimo de la función si $f(x_0 + h) > f(x_0)$, donde x_0 es cualquier punto de la función y donde h en valor absoluto es suficientemente pequeña.

Máximo fuerte: Un punto extremo x_0 de una función $f(x_0)$ define un máximo de la función si $f(x_0 + h) < f(x_0)$, donde x_0 es cualquier punto de la función y donde h en valor absoluto es suficientemente pequeña.

Una función puede contener varios máximos y mínimos, identificados por los puntos extremos de la función. En la siguiente figura se puede observar esto, los puntos x_1, x_2 y x_6 son máximos, de la figura notamos que $f(x_6)$ es el mayor que $f(x_1)$ y $f(x_3)$, a este punto se le conoce como máximo global de la función y a los restantes como máximos locales. Lo mismo se puede ver para los mínimos, en los que también existe un mínimo global $f(x_2)$ y un mínimo local $f(x_4)$. Como es de lógico, solo puede existir un solo global y posiblemente varios locales.

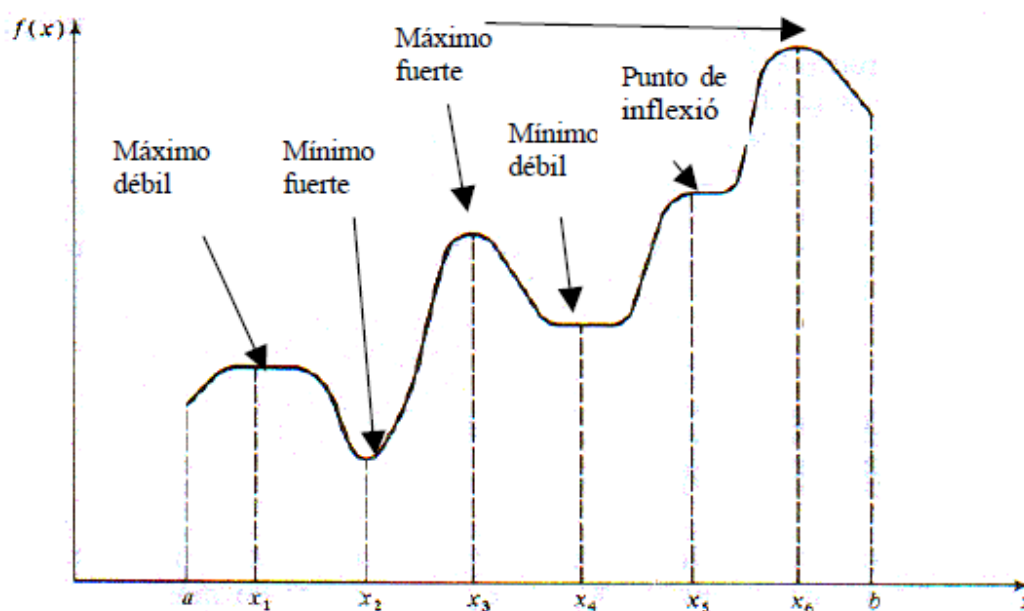


Figura 1.1 Representación de máximos y mínimos en una función con una sola variable

Una condición necesaria pero no suficiente para que x_0 sea un punto extremo, es que para una función con más de una variable, el gradiente $\Delta f(x_0) = 0$. Si es cierto esto entonces x_0 será conocido como punto estacionario.

Una condición suficiente para que un punto estacionario sea extremo es que la matriz Hessiana H obtenida en x_0 del sistema de ecuaciones sea positiva cuando x_0 es un punto extremo de mínimo. Y negativa cuando x_0 es un punto extremo de máximo.

Un máximo débil implica un número finito de máximos alternativos (ver figura anterior) y se define como x_0 es un máximo débil, si $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. Un análisis similar es para los mínimos débiles.

Un punto de inflexión se encuentra cuando la evaluación del gradiente da cero y no es un extremo, esto es, se debe de cumplir la condición de la matriz Hessiana.

5.3 Cálculo de Variaciones

El Cálculo de Variaciones nace o surge en la antigua Grecia, pero se hizo su aparición en escena y se hizo importante en el desarrollo del cálculo del siglo XVIII.

El Cálculo de Variaciones o Cálculo Variacional es una rama clásica y fundamental de las matemáticas, se puede decir que el desarrollo de esta rama ha ido a la par con el desarrollo de los conceptos centrales del análisis matemático y sus aplicaciones.

El Cálculo de Variaciones es un problema matemático el cual consiste en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional, constituyen una generalización del cálculo básico de máximos y

mínimos de funcionales reales de una variable, en otras palabras, el Cálculo de Variaciones busca la optimización de problemas más allá del concepto clásico de máximo y mínimo.

El Cálculo de Variaciones es un método efectivo para encontrar soluciones a problemas de optimización en matemática, física y otras ciencias donde la matemática se aplica.

El primer problema relacionado con el Cálculo de Variaciones fue propuesto y resuelto por Newton en 1694 y se trataba de determinar la forma más aerodinámica posible de una superficie de revolución, es decir, la que presentara menor resistencia al movimiento.

El problema más conocido del Cálculo de Variaciones es el de la braquistócrona, el cual fue propuesto por Bernoulli en 1696 como reto a otros matemáticos de la época, y tanto Bernoulli como Newton, L'Hopital y Leibnitz encontraron la solución correcta, este problema así como el de la catenaria y el de las geodésicas del plano tuvieron gran importancia en su época.

5.2.1 Problema de Euler Lagrange

Los conceptos de máximo y de mínimo de extremo o extremal, en definitiva una expresión funcional, es algo corriente en el análisis matemático, y las condiciones por las que se verifica el extremo son en general de gran utilidad en la resolución de problemas.

Dados:

$$\dot{x}_i = f_i(x, m, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En forma más general:

$$\Phi_i(x, \dot{x}, m, t) = 0$$

Donde x es un vector $n \times 1$ y m es un vector $r \times 1$

Condiciones iniciales:

$$x_i(t_0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Función de criterio:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x, m, t) dt$$

Donde $f(x, m, t)$ es continua.

5.4 MAPLE

Maple es uno de los software especializados para las aplicaciones de las matemáticas, donde nos permite trabajar con diferentes variables como lo son las matrices, ecuaciones, entre otras como. Las matrices son datos (llamados elementos o entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. Este software nos permite trabajar todos estos datos y más por medio de comandos envíos en palabras escritas en inglés, minúsculas y sin espacios.

Los comandos deben ser muy claros además de estar bien escritos y diferenciados de otros para que cumplan la función designada. Este programa tiene incorporado todos los tipos de problemas y propiedades que maneja en toda la matemática y el álgebra lineal.

Maple es el software esencial para ingenieros, matemáticos y científicos en la actualidad. Así realizar un cálculo rápido, desarrollar hojas de diseño, enseñar conceptos fundamentales o producir modelos de simulación altamente sofisticados, el mejor motor de computación de Maple ofrece la profundidad y el desempeño necesarios para cualquier tipo de matemáticas

6. DESARROLLO DEL PROYECTO

A continuación se muestra una Guía para el Cálculo de Variaciones aplicado al Control Óptimo, específicamente los temas “problema de punto final fijo” y “problema en los que el punto final es móvil”.

Se realizaron los ejercicios propuestos para un mayor entendimiento de la parte teórica ya que estos son resueltos de una forma muy didáctica para llevar al estudiante al buen entendimiento de los ejercicios.

6.1 PROBLEMA DE PUNTO FINAL FIJO

El Cálculo de Variaciones se refiere a la optimización de funcionales. Hemos utilizado (x, y) para coordenadas de un punto en el plano $y = y(x)$ para representar la ecuación de una curva plana. Con el fin de tener una notación uniforme para el resto del libro vamos a cambiar la denominación de nuestras variables, dejando a t como variable independiente y a x como variable dependiente de modo que (t, x) representa un punto general $x = x(t)$ la ecuación de una curva.

El problema más simple que nos podemos plantear es el de encontrar, de todas las curvas que unen dos puntos fijos (ver figura 1.2), la ecuación de la curva que minimiza un funcional indicado. Sea (t_0, x_0) y (t_1, x_1) dos puntos fijos (extremos) y $x = x(t)$ una curva, razonablemente bien comportada, definida en $t_0 \leq t \leq t_1$ y que pasa por los puntos finales dados. El funcional será la integral de t_0 a t_1 de una función $f(t, x(t), dx/dt)$. Para nuestros propósitos se trata de una función de tres variables y se supone que es diferenciable respecto a cada variable tantas veces como se requiera. Por conveniencia usamos la notación $\dot{x}$ para (dx/dt) .

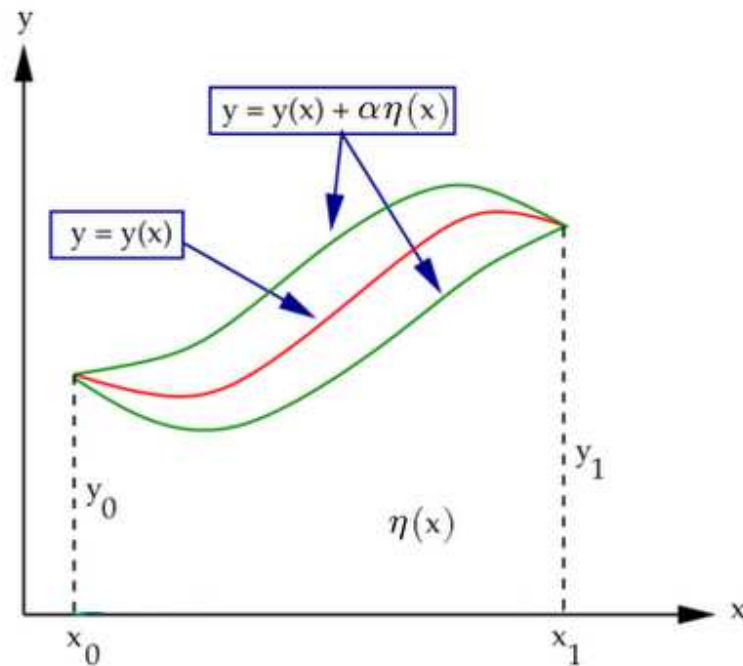


Figura 1.2 curvas que unen dos puntos

El problema puede proponerse como:

Minimizar

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \quad (1.1)$$

con $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Para mostrar que la curva $x = x^*(t)$ es una curva de minimización se necesita mostrar que:

$$J(y) \geq J(x^*) \quad (1.2)$$

para toda $y = y(t)$ continua que satisface las condiciones de los extremos con la igualdad cuando y y x^* coinciden. La condición (1.2) es necesaria y suficiente para que $x^*(t)$ sea la solución del Problema, pero no es útil; no sugiere una ayuda de como $x^*(t)$ se pudiese hallar y requeriría que cada candidata $y(t)$ fuese ensayada como posible $x^*(t)$. No se puede resolver el Problema usando (1.2) directamente, pero se puede deducir de ella información útil del comportamiento de las curvas de

minimización. Con el fin de avanzar dejamos a un lado, por el momento, el examen de las condiciones suficientes y nos concentramos en la derivación de las condiciones necesarias de (1.2). La ventaja de este enfoque es doble: en primer lugar, para probar necesidad, podemos examinar el comportamiento de las subclases de la clase continua $y(t)$; en segundo lugar, una condición necesaria que genera un método para construir una curva de minimización.

Por lo que deberíamos buscar minimizar la curva en el conjunto de partes diferenciables de las curvas (D_1) que unen los puntos extremos; estas curvas deben tenerse en cuenta en alguna fase de la teoría. Por ahora, para obtener una condición útil sin dificultad técnica, vamos a suponer que las $x(t)$ son dos veces diferenciable continuamente y que satisfacen $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$, estas curvas son llamadas admisibles. Así nuestro problema se convierte en el de encontrar, entre el conjunto de curvas dos veces diferenciables continuamente (C_2) que unen los puntos extremos dados, la curva que produce un mínimo local al funcional definido en (1.1). Si la curva que minimiza existe debe cumplirse (1.2) para todo $y(t)$ admisible y cercano a $x(t)$. Ahora tenemos que aclarar qué queremos decir cuando afirmamos que dos curvas están cerca una de otra: para esto definimos los conceptos de variaciones débiles y variaciones fuertes.

6.1.1 Variación suave.

Tenemos que $x^*(t)$ es una curva de minimización, $y(t)$ una curva admisible; si existen números pequeños ε_1 y ε_2 tales que

$$x^*(t) - y(t) < \varepsilon_1 \quad \text{y} \quad |\dot{x}^*(t) - \dot{y}(t)| < \varepsilon_2$$

para todo t en $[t_0, t_1]$ entonces $y(t)$ se dice que es una variación suave de $x^*(t)$. Note que para cualquier t se requiere que las funciones y sus derivadas estén cerca. Ver Figura (1.3).

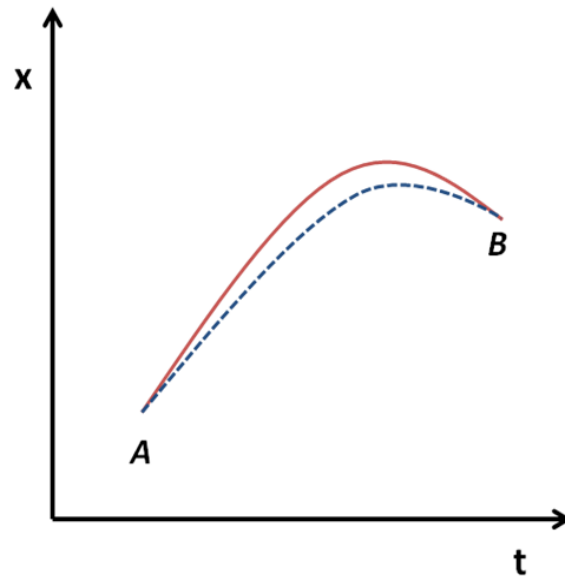


Figura 1.3 Variación suave

6.1.2 Variación fuerte.

Si existe un número pequeño ε tal que

$$|x^*(t) - y(t)| < \varepsilon$$

para todo t en $[t_0, t_1]$ entonces se dice que $y(t)$ es una variación fuerte de $x^*(t)$. Ver Figura (1.4). Note que sólo se requiere que los valores de las funciones estén cerca una de la otra para todo t y sus derivadas no necesitan estar cerca. Algunas variaciones fuertes también son suaves; las variaciones suaves son una subclase de la clase de variaciones fuertes.

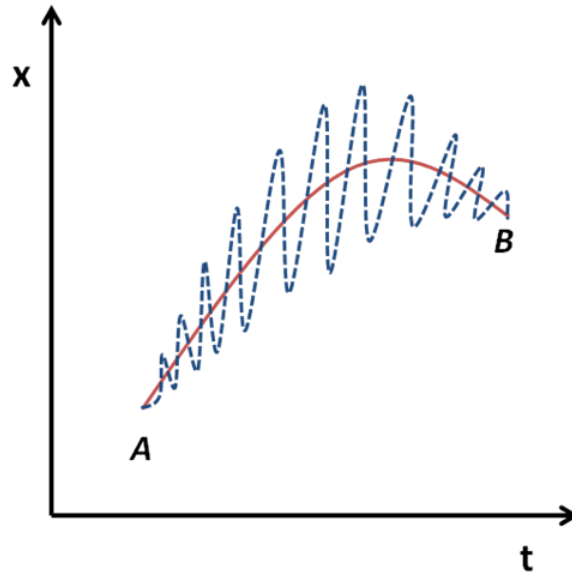


Figura 1.4 Variación fuerte

6.1.3 Primera condición necesaria

Las curvas cuyas ecuaciones son de la forma $x = x^*(t) + \varepsilon \cdot \eta(t)$ donde ε es una cantidad pequeña e independiente de x^* , η y t , son variaciones admisibles débiles ya que $\eta(t)$ es C_2 y $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$. La diferencia entre el valor de J calculado para una curva de variación admisible y su valor mínimo calculado para $x^*(t)$ se conoce como la variación de J y se denota por ΔJ , así

$$\Delta J = J(x^* + \varepsilon \cdot \eta) - J(x^*)$$

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, x^* + \varepsilon \cdot \eta, \dot{x}^* + \varepsilon \cdot \dot{\eta}) - f(t, x^*, \dot{x}^*) \right] dt$$

En t de $[t_0, t_1]$ expande $f(t, x^* + \varepsilon \cdot \eta, \dot{x}^* + \varepsilon \cdot \dot{\eta})$ en serie de Taylor en las variables $\varepsilon \eta$ y $\varepsilon \dot{\eta}$ alrededor de $(x^*(t), \dot{x}^*(t))$. Así todas las derivadas parciales de la expansión de f se evalúan en la curva de minimización. Cuando sustituimos en la definición de ΔJ obtenemos

$$\left. \begin{aligned}
&\Delta J = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + O(\varepsilon^3) \\
&\text{donde} \\
&V_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\eta \frac{df}{dx} + \dot{\eta} \frac{df}{d\dot{x}} \right) dt \\
&y \\
&V_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\eta^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2\eta \dot{\eta} \frac{d^2 f}{dx d\dot{x}} + \dot{\eta}^2 \frac{d^2 f}{d\dot{x}^2} \right) dt
\end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

las derivadas parciales se evalúan sobre la curva de minimización.

La integral V_1 es llamada primera variación de J porque εV_1 es el cambio de primer orden en J producido como consecuencia de la variación suave $x^* + \varepsilon \eta$. La integral V_2 es llamada segunda variación y contiene todos los términos del desenvolvimiento de ΔJ en derivadas parciales de segundo orden. Los términos restantes de la expansión de ΔJ , de grado 3 o mayor, se han reunidos en el término $O(\varepsilon^3)$ en (1.3).

Si x^* es la curva de minimización es necesario que $\Delta J > 0$ para toda $\eta(t)$ admisible. Así

$$\Delta J = \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + O(\varepsilon^3) \quad \text{para todo } \eta(t) \quad (1.4)$$

Ahora ε puede ser positiva o negativa; si dividimos por ε se obtiene dos desigualdades:

$$\left. \begin{aligned}
&V_1 + \varepsilon V_2 + O(\varepsilon^2) \geq 0 \quad \text{para } \varepsilon > 0 \\
&V_1 + \varepsilon V_2 + O(\varepsilon^2) \leq 0 \quad \text{para } \varepsilon < 0
\end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Con $\varepsilon \rightarrow \infty$ se tiene $V_1 \geq 0$ y $V_1 \leq 0$. Esto es, una condición necesaria para que en x^* haya minimización es que $V_1 = 0$ para todos los $\eta(t)$ admisibles. Expresando en una condición completa se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\eta \frac{df}{dx} + \dot{\eta} \frac{df}{d\dot{x}} \right) dt = 0 \quad (1.6)$$

para todo $\eta(t)$ admisible.

Podemos obtener un resultado más útil integrando por partes para eliminar el termino en $\dot{\eta}$.

Como

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta} \frac{df}{d\dot{x}} dt = \left[\eta \frac{df}{d\dot{x}} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{d\left(\frac{df}{d\dot{x}}\right)}{dt} dt$$

y $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ se puede reescribir (1.6) como

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta \left\{ \frac{df}{dx} - \frac{d\left(\frac{df}{d\dot{x}}\right)}{dx} \right\} dt = 0 \quad (1.7)$$

para todo η admisible.

Examinamos la ecuación (1.7), especialmente la expresión entre corchetes. Ambos términos se evalúan en la curva de minimización x^* lo que no implica variación de $\eta(t)$. Además, dado que x^* es C_2 , ambos términos son continuos. Así que la expresión entre los corchetes es una función continua de t que llamamos $g(t)$. La condición (1.7) dice que si $g(t)$ se obtiene de minimizar una curva, entonces, multiplicarlo por cualquier $r(t)$ admisible e integrando desde t_0 a t_1 debe dar cero. Uno está tentado a inferir que $g(t) = 0$ en cada punto en una curva de minimización.

Podemos demostrar que este es el caso mediante la construcción de una prueba por reducción al absurdo. Esto es, supongamos que nuestra inferencia es falsa, así que $g(f) \neq 0$ en algún punto en $[t_0, t_1]$ mientras que

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \cdot g(t) dt = 0$$

para todo t admisible.

Asumiendo que $g(t)$ es positiva en $t = c$, para $t_0 \leq t \leq t_1$. Como $g(t)$ es continuo será positivo en alguna vecindad $[\alpha, \beta]$ de $t = c$, donde $\alpha < c < \beta$. Ahora se escoge un $\eta(t)$ admisible positiva en $[\alpha, \beta]$ y cero en otro caso de $[t_0, t_1]$. Hay muchas $\eta(t)$; por ejemplo,

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (t - \alpha)^3 (\beta - t)^3 & \text{en} & \quad [\alpha, \beta] \\ \eta(t) &= 0 & \text{en otro caso en} & \quad [t_0, t_1] \end{aligned}$$

Para todo $\eta(t)$ se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \cdot g(t) dt > 0$$

Esta integral es cero para todo $\eta(t)$ admisible. Así $g(t)$ no puede ser positivo en $t = c$. Similarmente se puede probar que $g(t)$ no puede ser negativo en $t = c$. Por esto se debe tener $g(t) = 0$ en cada punto de $[t_0, t_1]$. Se tiene ahora una primera condición necesaria para un mínimo local suave. Se establece el resultado en el siguiente Teorema.

Teorema 1.1 Para que $x = x^*(t)$ sea solución, en la clase de funciones C_2 del problema (1.1) es necesario que

$$\frac{df}{dx} - \frac{d\left(\frac{df}{d\dot{x}}\right)}{dt} = 0 \quad (1.8)$$

en cada punto de $x = x^*(t)$.

Esta ecuación diferencial se denomina ecuación de Euler-Lagrange. Es también condición necesaria para máximo local. Por esta razón las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange son denominadas extrémals. Se nota que si se aumenta la clase de curvas admisibles para incluir las curvas (C_1)

diferenciables continuas, se halla que la ecuación de Euler-Lagrange debe satisfacerse a lo largo de la curva de minimización.

Ejemplo 1.1

Hallar el extremal de:

$$J(x) = \int_1^2 \dot{x}^2 t^3 dt \quad \text{dado que} \quad x(1) = 0, x(2) = 3.$$

Solución.

Se tiene $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $x^0 = 0$, $x^1 = 3$ y $f(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 t^3$.

La ecuación de Euler-Lagrange se obtuvo mediante MAPLE, para un mayor entendimiento en el anexo 10.2 se encuentra un tutorial para comprender la realización de esta parte.

$$\left[\begin{array}{l} > j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 t^3 \\ & j = \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 t^3 \\ > with(VariationalCalculus) \\ & [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ > EulerLagrange(j, t, y(t)) \\ & \left\{ -2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) t^3 - 6 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) t^2, 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) t^3 = K_1 \right\} \end{array} \right.$$

$$-2 \left(\frac{d}{dt} \dot{x} \right) \cdot t^3 - 6 \dot{x} t^2 = 0$$

Extremal:

$$x = \frac{k_1}{t^2} + l$$

Remplazando las condiciones iniciales:

$$x = 4 - \frac{4}{t^2}$$

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos de encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.1

Hallar el extremal para cada uno de los problemas siguientes:

$$1. \int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt \quad \text{con } x(1) = 2, \quad x(2) = 17.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 - 2x \sin t) dt \quad \text{con } x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 2.$$

$$3. \int_0^{\pi} (\dot{x} + 2x \sin t) dt \quad \text{con } x(0) = x(\pi) = 0.$$

Ejemplo 1.2

Minimizar:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt$$

para los puntos extremos fijos (t_0, x_0) , (t_1, x_1) .

Para hallar el extremal se necesita resolver la ecuación de Euler-Lagrange que para este problema es una ecuación no lineal difícil. (El lector podría escribirla y considerar resolverla). Sin embargo el integrando no depende explícitamente de t y en este caso es posible escribir la primera integral de la ecuación de Euler-Lagrange de la siguiente manera cuando es independiente de t .

$$f - \dot{x} \frac{df}{d\dot{x}} = cte \quad (1.9)$$

Para mostrar esto hacemos $f = f(x, \dot{x})$. Entonces

$$\frac{d \left(f - \dot{x} \frac{df}{d\dot{x}} \right)}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x} + \frac{df}{d\dot{x}} \ddot{x} - \ddot{x} \frac{df}{d\dot{x}} - \dot{x} \frac{d \left(\frac{df}{d\dot{x}} \right)}{dt}$$

como $\frac{df}{dt} = 0$,

$$\frac{d\left(f - \dot{x} \frac{df}{d\dot{x}}\right)}{dt} = \dot{x} \left(\frac{df}{dx} - \frac{d\left(\frac{df}{d\dot{x}}\right)}{dt} \right)$$

El extremal del lado derecho es cero satisfaciéndose la condición (1.9). Ahora se usa lo anterior en el problema de la brachistochrona. En un extremal se tiene

$$\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} - \frac{\dot{x}^2}{\sqrt{x(1+\dot{x}^2)}} = cte$$

que al simplificar da

$$x(1+\dot{x}^2) = cte \quad (1.10)$$

Esto lleva a una ecuación integrable de primer orden en x . Hay sin embargo, un procedimiento más elegante; se usa la sustitución $\dot{x} = \tan \chi$; entonces (1.10) es $x = c \cdot \cos^2 \chi$ obteniéndose x en términos del parámetro χ . Para hallar t en términos de χ se deriva la expresión para x y se usa $\dot{x} = \tan \chi$, entonces

$$\dot{x} = -2c \dot{\chi} \cos \chi \cdot \sin \chi = \tan \chi$$

donde

$$1 = -2c \dot{\chi} \cdot \cos^2 \chi = -c \dot{\chi} (1 + \cos 2\chi)$$

que integrando da $t + cte = -c(\chi + 1/2 \sin(2\chi))$ se puede escribir el extremal en términos del parámetro 2χ así: $x = k(1 + \cos 2\chi)$, $t = l - k(2\chi + \sin 2\chi)$ donde k y l son constantes determinadas por las condiciones finales. El lector reconocerá esto como la representación de una cicloide. (La trayectoria trazada por un punto en el borde de un disco cuando el disco se hace rodar a lo largo de una línea recta).

La sustitución $\dot{x} = \tan \chi$ es útil para problemas en los que $\sqrt{1+\dot{x}^2}$ es factor en el integrando de J . La sustitución tiene una interpretación geométrica; como $\dot{x}$ es la pendiente de la tangente de la curva, χ debe ser el ángulo que la tangente que forma con el eje t .

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos se encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.2

Hallar el extremal de los siguientes ejercicios:

1. $\int_0^2 \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \, dt$ con $x(0) = 0, x(2) = 2$.

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} \, dt$ con $x(0) = 0, x(1) = \sqrt{3}$.

6.2 PROBLEMAS EN LOS QUE EL PUNTO FINAL NO SE HA FIJADO

Para tener un mayor entendimiento del procedimiento a utilizar se propone el siguiente problema:

Minimizar:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) \, dt$$

Cuando $(t_0, x(t_0))$ es fijo pero $(t_1, x(t_1))$ se encuentra en la curva $x = c(t)$.

Sea $x^*(t)$ la curva de minimización y suponiendo que intercepta la curva tangente en $t = t_1$. Sea $y = x^*(t) + \varepsilon \eta(t)$ una variación suave que se inicia en $(t_0, x(t_0))$ y toca la curva tangente $x = c(t)$ en $t = t_1 + \Delta \tau$, donde $\Delta \tau$ es pequeño. Para una variación suave $\Delta \tau$ es $O(\varepsilon)$. La Figura 1.5 muestra una variación de este tipo.

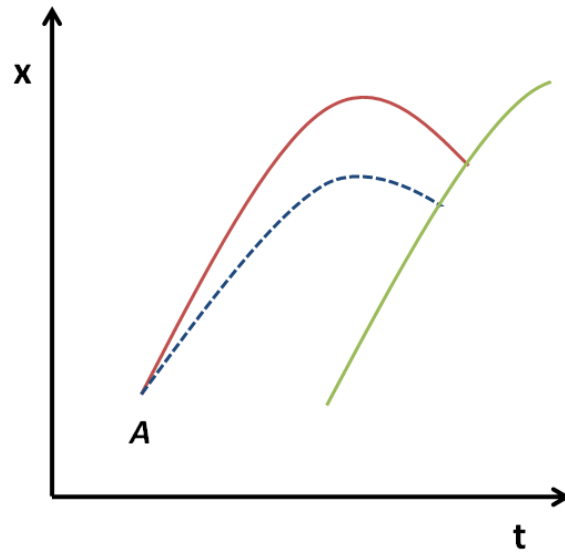


Figura 1.5 Variación suave con sólo un punto extremo fijo

Ahora

$$\begin{aligned} y(t_1 + \Delta\tau) &= x^*(t_1 + \Delta\tau) + \varepsilon\eta(t_1 + \Delta\tau) \\ y(t_1 + \Delta\tau) &= x^*(t_1) + \Delta\tau\dot{x}^*(t_1) + \varepsilon\eta(t_1) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

y

$$y(t_1 + \Delta\tau) = c(t_1 + \Delta\tau) = c(t_1) + \Delta\tau\dot{c}(t_1) + O(\varepsilon^2)$$

Así

$$x^*(t_1) + \Delta\tau\dot{x}^*(t_1) + \varepsilon\eta(t_1) = c(t_1) + \Delta\tau\dot{c}(t_1)$$

Entonces

$$\varepsilon\eta(t_1) = (\dot{c}(t_1) - \dot{x}^*(t_1))\Delta\tau \quad (1.11)$$

La variación de J es dada por

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1 + \Delta\tau} f(t, x^* + \varepsilon\eta, \dot{x}^* + \varepsilon\dot{\eta}) dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, \dot{x}^*) dt$$

Se toma la expansión de Taylor de la primera variación en $(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$ y se retiene sólo términos de orden ε . Como $x^*(t)$ es un extremal se usa en (1.11) para obtener

$$\Delta J = f(t_1)\Delta\tau + \varepsilon\eta(t_1)\frac{df}{d\dot{x}}(t_1) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Delta J = \Delta\tau \left\{ f(t_1) + (\dot{c}(t_1) - \dot{x}^*(t_1))\frac{df}{d\dot{x}}(t_1) \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (1.12)$$

Si el extremal minimiza J, entonces, por el mismo argumento que se usó para deducir la ecuación de Euler-Lagrange (visto en el ejemplo 1.2), la primera variación debe desaparecer y se tiene la condición necesaria

$$f(t_1) + (\dot{c}(t_1) - \dot{x}^*(t_1))\frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0 \quad (1.13)$$

en el punto final del extremal cuando el punto final no es fijo y sólo se requiere que esté en la curva dada $x=c(t)$. Es importante verificar que cada término de (1.13) sea evaluado en el tiempo t_1 ; esta es una ecuación algebraica que relaciona la pendiente del extremal y la pendiente $\dot{c}(t_1)$ en el punto en que se encuentran. La condición (1.13) es denominada condición de transversalidad. Se ha deducido para el caso en que el punto final del extremo derecho es fijo pero un resultado similar se puede derivar para cuando el punto final del lado izquierdo es el que está en la curva dada.

Ejemplo 1.3

Hallar el extremal de:

$$\int_1^T \dot{x}^2 t^3 dt$$

con $x(1) = n$, $T > 1$ finito y $x(T)$ esta en la curva $x = \frac{2}{t^2} - 3$.

Solución:

Para hallar el extremal se desarrolla el mismo procedimiento del ejemplo (1.1).

$$x = \frac{k}{t^2} + l$$

Con $l = -k$ dado que $x(1) = 0$. Así $x = k/t^2 - k$ y $\dot{x} = -2k/t^3$. La curva tangente es la dada en las condiciones iniciales $c(t) = 2/t^2 - 3$ se deriva esta función $\dot{c}(t) = -4/t^3$.

Se presentan dos incógnitas: la constante k y el valor de T ; se tiene dos condiciones utilizables para hallarlas: la condición de transversalidad y $x(T) = 2/T^2 - 3$. La condición de transversalidad (1.13) es:

$$f(t_1) + (\dot{c}(t_1) - \dot{x}^*(t_1)) \frac{df}{dx}(t_1) = 0$$

se transforma en:

$$\left(\frac{-2k}{T^3}\right)^2 T^3 + 2\left(\frac{-4}{T^3} + \frac{2k}{T^3}\right)\left(\frac{-2k}{T^3}\right) T^3 = 0$$

se igualan el extremal hallado con la condición inicial:

$$\frac{2}{T^2} - 3 = \frac{k}{T^2} - k$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas para hallar los valores correspondientes:

$$k = 4$$

$$T = \sqrt{2}$$

6.2.1 Formas Especiales de la Condición de Transversalidad

Si el problema a solucionar nos especifica los valores de t_1 o $x(t_1)$, mientras el valor del otro es completamente libre, entonces la condición (1.13) se simplifica. Así, si $x(t_1)$ es fijo y t es libre, la curva tangente es $x = c(t) = cte$ así que $\dot{c}(t) = 0$, entonces la nueva ecuación de transversalidad es:

$$f(t_1) - \dot{x}^*(t_1) \frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0 \quad \text{para } x(t_1) \text{ fijo} \quad (1.14)$$

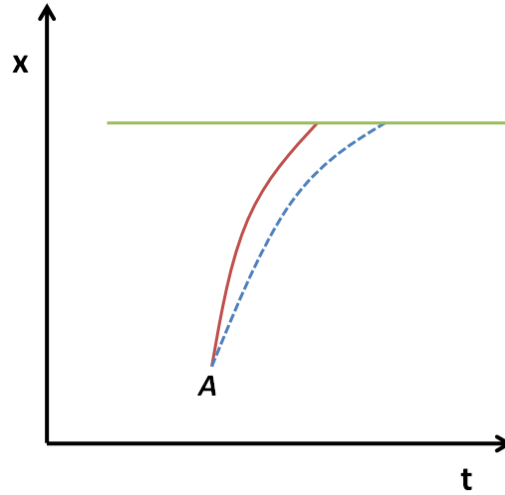


Figura 1.6 $x(t_1)$ fijo

Por otro lado, si t_1 es fijo y $x(t_1)$ es libre, la curva tangente es una recta perpendicular al eje t con pendiente $\dot{c}(t)$ infinito. Ahora, dado que $\dot{c}(t) \neq 0$, la condición (1.13) se modifica y se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\dot{c}(t_1)} \left(f(t_1) - \dot{x}^*(t_1) \cdot \frac{df}{d\dot{x}}(t_1) \right) + \frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0$$

que para $\dot{c}(t) \rightarrow \infty$ se reduce a:

$$\frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0 \quad \text{para } t_1 \text{ fijo} \quad (1.15)$$

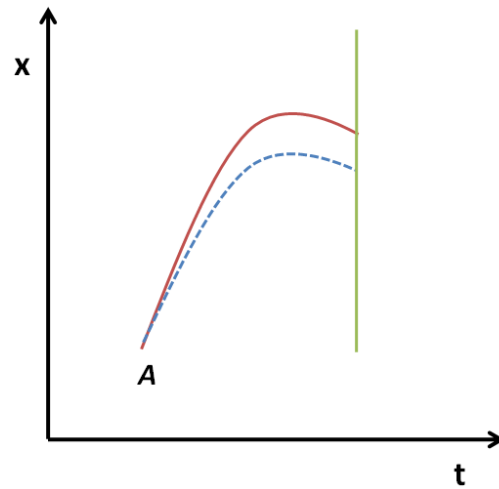


Figura 1.7 t_1 fijo

Ejemplo 1.4

Hallar el extremal de $J = \int_0^T (x^2 + \dot{x}^2) dt$ para los casos siguientes:

- (i) $x(0)=1, T=2$
- (ii) $x(0)=1, x(T)=2$
- (iii) $x(0)=0, x(T)=2$

Solución:

La ecuación de Euler-Lagrange se obtuvo mediante MAPLE; para un mayor entendimiento en el anexo 10.2 se encuentra un tutorial para comprender la realización de esta parte.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{l}
 > j := (y(t))^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \\
 > \text{with(VariationalCalculus)} \\
 > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t))
 \end{array} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad j := y(t)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\
 & \qquad \qquad \qquad \left\{ 2y(t) - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), y(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 = K_1 \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad 2x - 2 \left(\frac{d}{dt} \dot{x} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Extremal:

$$x = Ae^{-t} + Be^t$$

(i) Si remplazamos la condición inicial en el ejercicio $x(0)=1$ entonces nos resulta la primera ecuación $A+B=1$. Como $x(T)$ no se ha especificado y $T = 2$, la condición final apropiada para hallar las constantes del extremal es $\frac{df}{d\dot{x}} = 0$, que da $x(2)=0$, así que $B = Ae^4$.

El extremal es:

$$x = \cosh \frac{t-2}{\cosh 2} \text{ y } x(2) = \frac{1}{\cosh 2}$$

(ii) Si remplazamos la condición inicial dada $x(0)=1$ entonces $A+B=1$. Como T no se ha especificado y $x(T)=2$ la condición final apropiada para hallar las constantes del extremal es $f(T) - \dot{x}(T) \frac{df(T)}{d\dot{x}} = 0$, que da $AB=0$, entonces el extremal es $x = e^T$ o e^{-T} . Como $x(T)=2$ entonces $2 = e^T$ o $2 = e^{-T}$. El segundo no tiene solución positiva para T . Entonces el extremal es $x = e^T$ que corta $x = 2$ en $T = \ln 2$.

(iii) Si remplazamos la condición inicial dada en el ejercicio $x(0)=0$ entonces $A=-B$. Como se resolvió en (ii) la condición final da $AB=0$ y requiere que el extremal sea $x=0$. Este no intercepta en $x = 2$ para todo valor de T y entonces el problema no tiene extremal.

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos se encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.3

Hallar el extremal para cada uno de los siguientes puntos:

1. $\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) dt$ con $x(0); x(1)$ libre.

2. $\int_0^T \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt$ con $x(0)=1, x(T)=2+(t-1)^2$.

6.3 VERIFICACIÓN DE LAS CURVAS DE MINIMIZACIÓN

Volvemos a como determinar si el extremal que se ha encontrado es una curva de minimización. Si la curva minimiza J debe satisfacer la desigualdad (1.2).

Retomando el Ejemplo 1.1 y examinando el signo de $\Delta J = J[y] - J[x^*]$ donde

$y = y(t)$ es una curva C_1 que une los puntos extremos fijos y $x^* = 4 - \frac{4}{t^2}$ es extremal.

Tomando $y = 4 - \frac{4}{t^2} + \eta(t)$, donde $\eta(1) = \eta(2) = 0$ se puede calcular ΔJ directamente:

$$\Delta J = \int_1^2 \left(\frac{8}{t^3} + \dot{\eta} \right)^2 \cdot t^3 dt - \int_1^2 \left(\frac{8}{t^3} \right)^2 \cdot t^3 dt$$

$$\Delta J = \int_1^2 (16\dot{\eta} + \dot{\eta}^2 t^3) dt = [16\eta]_1^2 + \int_1^2 \dot{\eta}^2 t^3 dt$$

$$\Delta J = \int_1^2 \dot{\eta}^3 t^3 dt \quad \text{ya que} \quad \eta(1) = \eta(2) = 0$$

Así

$$\Delta J = \int_1^2 \dot{\eta}^2 t^3 dt \geq 0 \quad (1.16)$$

Note que no se ha supuesto que $\eta(t)$ y $\dot{\eta}(t)$ son pequeños. Así $J[y] - J[x^*] \geq 0$ para todo $y(t)$ que es C_1 y pasa por los puntos extremos; entonces el extremal minimiza J en la clase de curvas C_1 .

Considerando ahora que sucede si $\dot{\eta}(t)$ tiene número finito de discontinuidades en $[1,2]$ tal que $y(t)$ es continua con finito número de 'esquinas' en los que la pendiente es discontinua. Se separa el intervalo en un finito número de sub-intervalos en los que $\eta(t)$ es continua pero aún se tiene $\Delta J > 0$. Así el extremal también minimiza en la clase de curvas D_1 que unen los puntos extremos. Esto no es un resultado caprichoso sino un ejemplo de un caso general que puede ser envuelta en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 Si $x = x^*(t)$ es una curva de minimización en la clase de curvas C_1 entonces también es una curva de minimización en la clase más amplia de curvas D_1 .

Prueba. Suponiendo que el Teorema es falso tal que $x^*(t)$ minimiza en clase C_1 pero no en clase D_1 . Entonces existe $x = z(t)$ en D_1 tal que $J[z] < J[x^*]$. Como el integrando $f(t, x, \dot{x})$ de $J[x]$ es limitado en todo subintervalo de $[t_0, t_1]$, se puede construir, redondeando las esquinas, una curva $C_1 x = w(t)$ en la que el valor de $J[w]$ es cercano, tanto como se desee, a $J[z]$. Esto es, $|J[w] - J[z]| < \varepsilon$ para todo ε positivo.

La escogencia apropiada de ε permite deducir que $J[w] < J[x^*]$, contradiciendo el hecho de que x^* es minimizadora en C_1 . Tomando $\varepsilon = (J[x^*] - J[z])/2$ entonces $|J[w] - J[z]| < (J[x^*] - J[z])/2$ que implica que $J[w] < (J[x^*] + J[z])/2 = J[x^*] - \varepsilon$. Así una curva que minimiza en C_1 debe también minimizar en D_1 .

Ejemplo 1.5

Hallar la curva de minimización de $\int_0^2 (\dot{x} - 1)^2 x^2 dt$ con $x(0) = 0$ y $x(2) = \sqrt{3}$.

Solución:

El integrando es independiente de t por lo que se puede usar (1.9) para obtener la ecuación del extremal. Así $x^2(\dot{x}^2 - 1) = cte$ en un extremal; integrando se tiene

$$k + x^2 = (t + l)^2 \quad (1.17)$$

La condición final da $l = -1/4$ y $k = 1/16$ entonces el extremal es $x^2 = t^2 - t/2$. Cuando $0 < t < 1/2$ el lado derecho es negativo por lo cual hay un error. Una investigación más profunda muestra que el extremal es una hipérbola y que los dos puntos extremos dados no están en la misma rama. Así aparentemente no hay extremal. El integrando es siempre positivo, entonces, si se puede construir una curva para la cual $J = 0$, que da el mínimo valor. Considerando la siguiente curva:

$$\left. \begin{array}{ll} x = 0 & 0 \leq t \leq 2 - \sqrt{3} \\ x = t + \sqrt{3} - 2 & 2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

Es continua y diferenciable por sectores con una esquina en $t = 2 - \sqrt{3}$. Une los puntos extremos dados y a lo largo de él es $J = 0$; esta curva es la de minimización.

El ejemplo anterior es tal que es posible intentar adivinar qué tipo de curva podría ser la de minimización (se ve que se necesita una curva con $\dot{x}=1$ en una sección y $\dot{x}=0$ en la otra). Lo que se debe estudiar cuidadosamente son las condiciones para que una curva D_1 sea curva de minimización.

Teorema 1.3 Para que una curva D_1 sea de minimización en el problema de puntos extremos fijos es necesario que:

- (i) La ecuación de Euler-Lagrange se satisfaga entre las esquinas y entre una esquina y el punto extremo.
- (ii) $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ sea continua en una esquina.
- (iii) $f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ sea continua en una esquina.

Prueba: Sea $x^*(t)$ una curva D_1 que pasa por los puntos extremos fijos y minimiza $J[x]$. Para simplificar se supone que ella tiene una esquina en $t = \tau$, $t_0 \leq \tau \leq t_1$ la prueba para curvas con varias esquinas se construye fácilmente cuando los resultados para una esquina han sido establecidos. La curva de minimización puede entonces expresarse en la forma

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau \\ x_2(t), & \tau \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (1.19)$$

Donde $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ pero $\dot{x}_1(\tau) \neq \dot{x}_2(\tau)$. Note que como sólo se desea establecer las condiciones necesarias no es necesario considerar la variación más general de $x^*(t)$; con elegir variaciones especiales será suficiente.

(i) Considerando la clase de variaciones suaves

$$y = \begin{cases} x_1(t) & t_0 \leq t \leq \tau \\ x_2(t) + \varepsilon \eta(t) & \tau \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

donde $\eta(\tau) = \eta(t_1) = 0$ como se muestra en la Figura 1.8. Todas las curvas son iguales a $x^*(t)$ en $t_0 \leq t \leq \tau$. Así

$$\Delta J = \int_{\tau}^{t_1} f(t, x_2 + \varepsilon \eta, \dot{x}_2 + \varepsilon \dot{\eta}) dt - \int_{\tau}^{t_1} f(t, x_2, \dot{x}_2) dt$$

$$\int_{\tau}^{t_1} \left(\frac{df}{dx} \eta + \frac{df}{d\dot{x}} \dot{\eta} \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

donde las derivadas son evaluadas en $x^*(t)$. Se necesita, entonces, el mismo argumento usado en la prueba del Teorema 1.1 para deducir que la ecuación de Euler-Lagrange debe satisfacer en $x^*(t)$ en $\tau \leq t \leq t_1$.

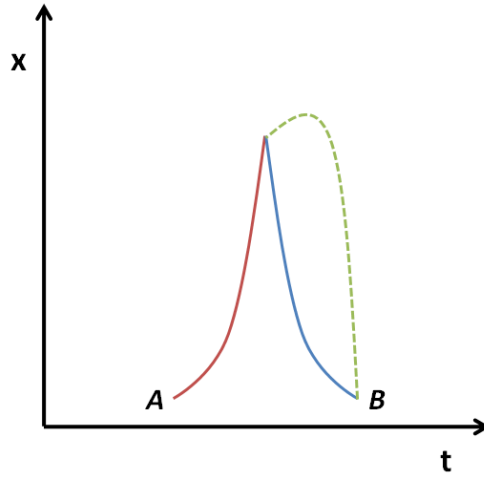


Figura 1.8 Variaciones de tipo suaves

(ii) Considerando variaciones suaves de la forma

$$f(x) = \begin{cases} x_1(t) + \varepsilon \eta_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau \\ x_2(t) + \varepsilon \eta_2(t), & \tau \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

Donde $\eta_1(t_0) = \eta_2(t_1) = 0$ y $\eta_1(\tau) = \eta_2(\tau)$ como muestra la Figura 1.9. Si las curvas tienen alguna discontinuidad la pendiente será en $t = \tau$.

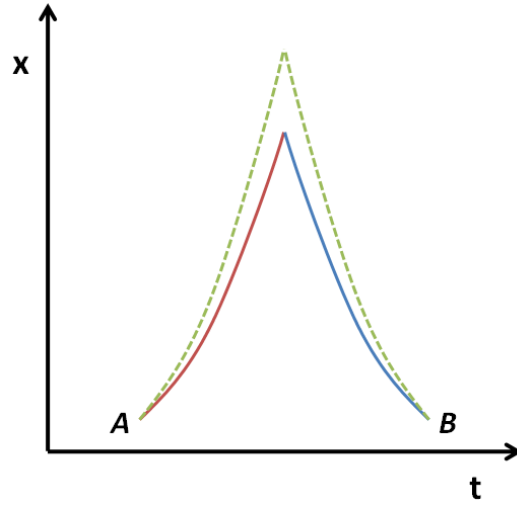


Figura 1.9 Variaciones suaves de tipo (u)

Ahora se calcula ΔJ recordando que la ecuación de Euler-Lagrange debe satisfacerse a lo largo de cada una de las dos secciones de $x^*(t)$ para obtener

$$\Delta J = \varepsilon \left[\eta_1 \frac{df}{d\dot{x}}(t, x_1, \dot{x}_1) \right]_{t_0}^{\tau} + \varepsilon \left[\eta_2 \frac{df}{d\dot{x}}(t, x_2, \dot{x}_2) \right]_{\tau}^{t_1} + O(\varepsilon^2) \quad (1.20)$$

Se requiere ahora que la primera variación se anule (tener en cuenta la desigualdad (1.5) y el argumento siguiente) de tal manera (1.20) lleva a

$$\frac{df}{d\dot{x}}(\tau, x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)) - \frac{df}{d\dot{x}}(\tau, x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)) = 0$$

ya que $\eta_1(t_0) = \eta_2(t_1) = 0$ y $\eta_1(\tau) = \eta_2(\tau)$. Así $\frac{df}{d\dot{x}}$ es continua en $t = \tau$ aunque $\dot{x}$ sea discontinua.

(iii) Considerando variaciones suaves

$$f(x) = \begin{cases} x_1(t), & t_0 \leq t \leq \tau' \\ x_2(t) + \varepsilon \eta(t), & \tau' \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

Donde $\eta(t_1) = 0$ y $\tau' = \tau + \Delta\tau$, donde $\Delta\tau$ es pequeña como muestra la Figura 1.10.

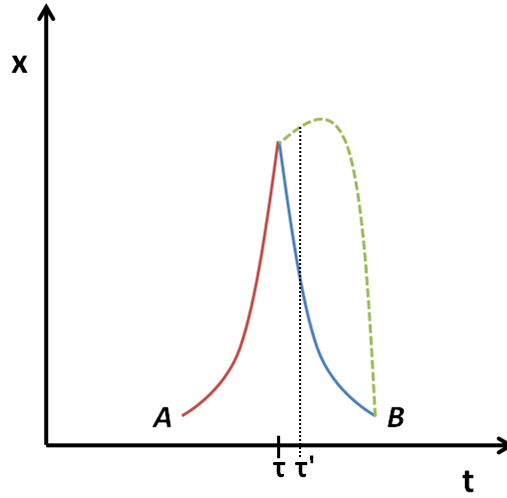


Figura 1.10 Variaciones suaves de tipo (iii)

Para construir este tipo de variación se tiene, simplemente que extender la curva $x = x_1(t)$ a distancia corta hacia $t = \tau$. Note que y debe ser continua en $t = \tau'$ así que $x_1(\tau') = x_2(\tau') + \varepsilon \eta(\tau')$ que para primer orden en ε da

$$(\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)) \Delta \tau = \eta \varepsilon(\tau) \quad (1.21)$$

Se calcula ΔJ y su parte lineal se iguale a cero. Así

$$\Delta \tau \left(f(\tau, x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)) \right) + \varepsilon \eta(\tau) \frac{df}{d\dot{x}}(\tau, x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)) = 0$$

Ahora se usa (1.21) y dado que $\frac{df}{d\dot{x}}$ es continua en $t = \tau$ para obtener la condición requerida

$$\begin{aligned} & f(\tau, x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)) - \dot{x}_1(\tau) \frac{df}{d\dot{x}}(\tau, x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)) \\ &= f(\tau, x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)) - \dot{x}_2(\tau) \frac{df}{d\dot{x}}(\tau, x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)) \end{aligned}$$

De acuerdo con lo realizado anteriormente retomamos el Ejemplo 1.5

Se observó que la curva definida por la ecuación (1.18) dio en J su menor valor posible, nominalmente cero. La solución general de la ecuación de Euler-Lagrange es una familia de curvas de dos parámetros (k y l , ver ecuación (1.17)); ninguna de ellas pasa por $(0,0)$ y $(2,\sqrt{3})$. Sin embargo hay otras dos soluciones: $x = cte$ y $x = 1$. Así la curva definida por la ecuación (1.18) es tal que la ecuación de Euler-Lagrange es satisfecha entre las esquinas. Las partes (ii) y (iii) del Teorema 1.3 (usualmente denominado 'condiciones de esquina') son también satisfechas por (1.18). Para verificar lo dicho anteriormente, llamemos p_1 y p_2 , respectivamente, la pendiente justo antes y después de la esquina (τ, λ) , $\lambda = x(\tau)$. De donde las condiciones de esquina requieren $2\lambda^2(p_1 - 1) = 2\lambda^2(p_2 - 1)$ y $\lambda^2(p_1 - 1)(p_1 - 3) = \lambda^2(p_2 - 1)(p_2 - 3)$. Ambas deben satisfacerse por $p_1 \neq p_2$ si $\lambda = 0$ pero no para otro caso. La curva de minimización D_1 debe consistir de una sección $x=0$ y otra sección $\dot{x}=1$ como se sospechaba.

Se reúnen los datos obtenidos anteriormente. La ecuación de Euler-Lagrange es crucial como curva de minimización en la que x es continua y debe satisfacerse en cada punto; las curvas de minimización con a finito número de puntos de discontinuidad de x satisfacen en cada punto excepto en los puntos de discontinuidad. El Teorema 1.2 dice que si hay una curva de minimización en C_1 entonces no se necesita mirar más profundamente porque no puede haber curvas D_1 que sean mejores. Si fuere necesario examinar curvas de minimización D_1 entonces el Teorema 1.3 debe satisfacerse y cuando esto se hace se necesitan más pruebas para estar seguros de que se tiene a curva de minimización; en el Ejemplo 1.5 se halló una curva D_1 que satisface el Teorema 1.3 y también por inspección se vio que $J \geq 0$. ya que la curva D_1 da a J el valor de cero esto indica que es una curva de minimización.

Debe aplicarse el Teorema 1.2 con cuidado; el exige que el extremal exista y sea minimizador en C_1 ; esto necesita una condición de suficiencia. Por el momento sólo se tiene es una condición muy amplia de que $\Delta J \geq 0$ para todo las

variaciones en C_1 . Se usó esta condición en el Ejemplo 1.5 porque el cálculo de ΔJ para $\eta(t)$ general fue obtenido fácilmente y llevó a una expresión cuyo signo no era ambiguo. Este no es un caso frecuente y es necesario tener una condición que sea más fácil de manejar.

Ejemplo 1.6

Minimizar

$$\int_0^2 \dot{x}^2 (1 - \dot{x})^2 dt \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \text{ y } x(2) = 1.$$

Solución.

La Ecuación de Euler-Lagrange es:

$$0 - \frac{d \left(2\dot{x}(1 - \dot{x})^2 - 2\dot{x}^2(1 - \dot{x}) \right)}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad \dot{x} = cte$$

entonces los extrémals son líneas rectas $x = kt + l$. (**Nota:** Cuando el integrando f de J es sólo función de x los extrémals son líneas rectas porque la ecuación de Euler-Lagrange es de la forma $g(\dot{x}) = cte$ para alguna función g que tiene soluciones $\dot{x} = cte$.) El extremal que cumple las condiciones extremas es $x = t/2$ pero este no minimiza en C_1 . (Para verificar lo dicho anteriormente se calcula ΔJ y se ratifica que no es positivo para todo $\eta(t)$.) Ahora se utiliza el Teorema 1.3 y se mira alguna curva de D_1 que minimice J . Cada sección debe ser una línea recta.

Las condiciones de esquina exigen que $\dot{x}(1 - \dot{x})(1 - 2\dot{x})$ y $\dot{x}^2(1 - \dot{x})(3\dot{x} - 1)$ sean continuas en una esquina. Si p_1, p_2 denotan las pendientes a cada lado de una discontinuidad se ve que los primeros valores que satisfacen las condiciones de esquina son $p_1 = 0, p_2 = 1$ o $p_1 = 1, p_2 = 0$. Todo lo que queda es ajustar las secciones para que la curve resultante pase por los puntos extremos. Hay muchas formas para que esto se haga. La Figura 1.11 muestra dos posibilidades.

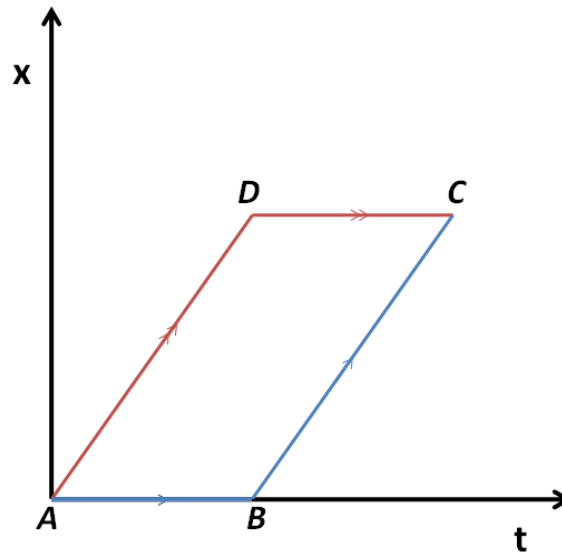


Figura 1.11 Dos curvas de minimización con esquinas

Ahora se necesita verificar si estas curvas minimizan J . El integrando de J es siempre positivo y el valor mínimo posible de J es cero. En alguna sección de las curvas D_1 se tiene algunas dadas por $x=0$ o $\dot{x}=1$; este es $J=0$ para estas curvas. Así se puede minimizar J pero la curva de minimización no es única.

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos de encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.4

1. Considerando una variación admisible $y = x^*(t) + \eta(t)$ donde $\eta(t)$ es C_1 y no necesariamente pequeño, mostrar que el extremal hallado en los ejercicios 1.1(1) y 1.1(3) son curvas de minimización.

2. Mostrar que $x = \frac{t}{2}$ es un extremal para:

$$\int_0^2 (\dot{x}^2 - 1)^2 dt$$

Con $x(0)=0$, $x(2)=1$. Calcular el correspondiente valor de J . Hallar una curva D_1 que satisfaga las condiciones del Teorema 1.3 y que da a J el valor cero. ¿Es esta curva única?

6.4 PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Se considera el problema de hallar una curva que minimiza un funcional dado mientras otro funcional asigna un valor. El nombre isoperimétrico es dado a esos problemas por razones históricas; el primero de estos problemas considerados fue el de hallar, de todas las curvas cerradas de igual longitud (es decir, de igual perímetro) la curva que maximiza el área cerrada.

Minimizar

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt$$

con $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ sujeto a la restricción integral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x, \dot{x}) dt = c$$

donde c es una constante dada.

Debido a nuestro conocimiento en problemas de optimización se introducen los multiplicadores de Lagrange λ y considerar el problema de minimizar

$$\int_{t_0}^{t_1} (f + \lambda g) dt$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange de este funcional nos dan extrémals generales que envuelven dos constantes arbitrarias y los multiplicadores λ de Lagrange como incógnitas. Puede hallarse las tres constantes desconocidas aplicando las condiciones extremas y la restricción $I = c$. Puede parecer sorprendente que un elemento tan simple como un multiplicador de Lagrange, introducido en problemas en R_n .

Teorema 1.4. Para que $x = x^*(t)$ sea solución del problema anterior (problema isoperimétrico) es necesario que sea extremal de

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(t, x, \dot{x}) + \lambda g(t, x, \dot{x})) dt$$

para cierta constante λ .

Prueba. Se toma las curvas admisibles como C_2 y considera variaciones suaves de la forma $y = x^*(t) + \varepsilon \sigma(t)$ donde ε es pequeño. Se está interesado sólo en las curvas que pasan por los puntos finales y satisfacen la restricción. Para construir una clase de variaciones suaves que satisfaga la restricción se escribe $\sigma(t)$ en la forma $\sigma(t) = \alpha \eta(t) + \beta \zeta(t)$ donde α, β son constantes y $\eta(t), \zeta(t)$ se anulan en los puntos finales. Las funciones $\eta(t)$ y $\zeta(t)$ son arbitrarias e independientes; no hay una constante k tal que $\eta(t) = k \zeta(t)$ para todo t . Ahora se toma un par η, ζ y se aplican a la restricción

$$I = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x^* + \varepsilon \sigma, \dot{x}^* + \varepsilon \dot{\sigma}) dt = c \quad (1.22)$$

Como I es constante su variación total $\Delta I = 0$, en particular, su primera variación debe ser cero

$$\int_{t_0}^{t_1} \left((\alpha \eta + \beta \zeta) \frac{dg}{dx} + (\alpha \dot{\eta} + \beta \dot{\zeta}) \frac{dg}{d\dot{x}} \right) dt = 0$$

donde las derivadas son evaluadas en la curva de minimización. Integrando por partes da

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha \eta + \beta \zeta) \left(\frac{dg}{dx} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dg}{d\dot{x}} \right) \right) dt = 0$$

Sea $L(h)$ denotado por:

$$\frac{dh}{dx} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dh}{d\dot{x}} \right)$$

así que se tiene

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha\eta + \beta\zeta) L(g) dt = 0 \quad (1.23)$$

Como x^* no es extremal de I , $L(g) \neq 0$, así para cada par de η, ζ las constantes α y β están relacionadas por (1.23). Ahora se considera ΔJ para esa variación. Como x^* es una curva de minimización, la primera variación debe ser cero, que después de integración por partes da

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha\eta + \beta\zeta) L(f) dt = 0 \quad (1.24)$$

donde α y β deben satisfacer (1.23). Eliminando α y β entre (1.23) y (1.24) da

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1} L(f) \eta dt}{\int_{t_0}^{t_1} L(g) \eta dt} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} L(f) \zeta dt}{\int_{t_0}^{t_1} L(g) \zeta dt}$$

para todo par independiente de funciones C_2 . Esto puede ser cierto sólo si ambos lados son iguales a una constante, por ejemplo digamos $-\lambda$. Por esto x^* debe ser tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} L(f + \lambda g) \eta dt = 0$$

para todo $\eta(t)$ admisible. Entonces el mismo argumento que se usó en la prueba del Teorema 1.1 lleva a la condición necesaria que

$$\frac{d}{dx}(f + \lambda g) - \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dx}(f + \lambda g) \right) = 0 \text{ en } x^*(t)$$

así que es un extremal de $\int_{t_0}^{t_1} (f + \lambda g) dt$

Ejemplo 1.7

Minimizar

$$J = \int_0^1 \dot{x}^2 dt \text{ con } x(0) = 2, x(1) = 4$$

Sujeto a la restricción $\int_0^1 x dt = 1$.

Solución:

El Teorema 1.4 nos dice que debemos hallar el extremal de la ecuación dada en el ejercicio, en nuestro caso $\int_0^1 (\dot{x}^2 + \lambda x) dt$. La ecuación de Euler-Lagrange es

$$\lambda - \frac{d(2\dot{x})}{dt} = 0 \text{ que tiene la solución } x = \frac{\lambda t^2}{4} + kt + l.$$

Las condiciones de los extremos se hallan remplazando las condiciones iniciales en la ecuación encontrada y dan

$$l = 2, k = 2 - \frac{\lambda}{4}.$$

Hallamos λ aplicando la restricción

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\lambda}{4} t^2 + \left(2 - \frac{\lambda}{4} \right) t + 2 \right\} dt = 1$$

Esto da $\lambda = 48$, así que el extremal requerido es

$$x = 12t^2 - 10t + 2$$

Ejemplo 1.8

Considere el problema de hallar, dentro del conjunto de curvas de longitud π que unen $(0,0)$ a $(2,0)$ la curva que tiene área máxima entre ella y el eje t . Esto es

$$\text{maximo } \int_0^2 x dt \text{ cuando } \int_0^2 \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt = \pi \text{ con } x(0) = x(2) = 0$$

Solución.

Introducir el multiplicador de Lagrange λ y obtener el extremal de $\int_0^2 (x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2}) dt$.

El integrando es independiente de t por lo que el extremal debe satisfacer

$$x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2} - \frac{\lambda \dot{x}^2}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = k$$

Haciendo $x = \tan \chi$ y siguiendo el método usado en el ejemplo 1.2 se llega a la representación paramétrica siguiente del extremal:

$$x = k - \lambda \cos \chi, \quad t = t + \lambda \sin \chi \quad (1.25)$$

Donde k y l son constantes. Los extrémales son círculos. Sean χ_0, χ_1 los valores de χ en $(0,0)$ y $(2,0)$ respectivamente. Las condiciones de los extremos dan

$$k = \lambda \cos \chi_0 = \lambda \cos \chi_1 \quad (1.26)$$

$$l = -\lambda \sin \chi_0 = 2 - \lambda \sin \chi_1 \quad (1.27)$$

La restricción requiere que $\int_0^2 \sec \chi dt = \pi$. Esto puede transformarse en una integral respecto de χ . Así

$$\int_{\chi_0}^{\chi_1} \lambda d\chi = \pi \quad \text{o} \quad \lambda(\chi_1 - \chi_0) = \pi \quad (1.28)$$

Ahora (1.26) implica que $\chi_0 = \pm \chi_1$ pero $\chi_0 = \chi_1$ es incompatible con la restricción de la ecuación (1.28), así que $\chi_0 = -\chi_1$ y (1.28) dan $\chi_1 = \chi_0 = \pi/2\lambda$. La ecuación (1.27) lleva a la ecuación transcendental para λ

$$\frac{1}{\lambda} = \sin\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)$$

Esta tiene sólo dos soluciones, $\lambda = \pm 1$. Escogiendo $\lambda = 1$ lleva a la solución que está en el cuarto cuadrante; la solución debe corresponder a $\lambda = -1$ para la que $\chi_1 = \chi_0 = \pi/2\lambda$, $k = 0$ y $l = 1$. Esto es la mitad superior del círculo con centro $(1,0)$ y que pasa por $(0,0)$ y $(2,0)$.

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos se encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicio 1.5

1. Hallar el extremal de $\int_0^2 \dot{x}^2 dt$ con $x(0) = 0$, $x(2) = 1$ sujeta a la restricción

$$\int_0^2 x dt = 2$$

6.5 CONDICIONES SUFICIENTES

Cuando se estudia el mínimo local de una función de con relación a una variable $g(x)$ primero se halla los puntos en los que la primera derivada es cero, $g'(x) = 0$; el resultado similar en el Cálculo de Variaciones es el anular la primera variación V_1 que lleva a la condición en la que la curva de minimización debe ser a solución de la ecuación de Euler-Lagrange. En la búsqueda del mínimo de $g(x)$ cuando se ha encontrado un punto $x = a$ para el que $g'(a) = 0$ entonces se examina el signo de la segunda derivada en $x = a$. Si $g''(a) > 0$ entonces $(x-a)$ da es un mínimo local; las condiciones $g'(a) = 0$ y $g''(a) > 0$ son suficientes para tener un mínimo en $x = a$. El resultado similar en el Cálculo de Variaciones involucra el signo de la segunda variación V_2 (ver la ecuación encontrada anteriormente (1.3)). V_2 es el coeficiente de ε^2 en el cálculo de ΔJ de una variación suave. Infortunadamente $V_1 = 0$ y $V_2 > 0$ no constituyen suficiente prueba de que se ha encontrado la curva de minimización, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9

Minimizar

$$\Delta J = \int_0^1 \frac{1}{\dot{x}} dt \quad x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Solución.

El extremal es $x = t$ y da $J = 1$. Para la variación suave $y = t + \varepsilon \eta$ con $\eta(0) = \eta(1) = 0$.

$$\Delta J = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon \dot{\eta})} - 1 \right) dt$$

$$\Delta J = \int_0^1 (\varepsilon \dot{x} + \varepsilon^2 x \eta^2 - \varepsilon^3 \eta^3 + \dots) dt$$

$$\Delta J = \varepsilon^2 \int_0^1 \dot{\eta}^2 dt + O(\varepsilon^3)$$

Ya que la segunda variación es positiva y se podría esperar que $x = t$ minimice J ; considerando la trayectoria

$$y = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -t + 2, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces

$$J[y] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dt = -\frac{1}{3}$$

Esta curva, que tiene una esquina en $t = \frac{1}{2}$ da J con un valor menor que 1. No es una curva de minimización D_1 porque las condiciones de la esquina no satisfacen el Teorema 1.3 para este caso. Es posible construir muchas curvas que unen (0,0) y (1,1) para las que $J < 1$. Así, aunque $V_2 > 0$, $x = t$ no es una verdadera curva de minimización.

El hecho de que el signo de V_2 no sea crucial para distinguir las curvas de minimización significa que se tiene que adoptar un método más sutil usando el concepto de campo de extrémals. Basaremos la investigación en esto y en la Integral de Hilbert.

6.5.1 Campos de extrémals

Para hallar las condiciones de suficiencia para mínimo se debe volver a la desigualdad (1.2). Se tiene que mostrar que

$$\Delta J = J[y] - J[x^*] > 0$$

para todas las curvas $y = y(t)$ que satisfacen las condiciones de los extremos. No se debe restringir a variaciones suaves y se debe incluir la posibilidad que $y(t)$ sea diferenciable por partes. Para tener una mayor claridad miramos el ejemplo 1.1, el cálculo de ΔJ dio una expresión que fácilmente se ve como positiva, aún para y en D_1 . El extremal fue ubicado como minimizador. Esto no es lo que se espera usualmente; ΔJ es, en general, la integral de una función muy complicada que envuelve tanto η y $\dot{\eta}$ y no es fácil establecer su signo para una escogencia general de η . Lo que se debe hacer es expresar ΔJ en una nueva forma; una forma cuyo signo es fácil de comprobar. Antes de intentar hacerlo se debe examinar un concepto que es fundamental en toda discusión de condiciones de suficiencia; es la idea de campo de extrémals. La solución general de la ecuación de Euler-Lagrange para un funcional donde depende de dos constantes arbitrarias; es una familia de curvas de dos parámetros. Usando las condiciones finales dadas se determina los dos parámetros y se obtiene el extremal requerido. Así en el Ejemplo 1.9 el extremal es $x = kt + l$ y los valores $k = 1$ y $l = 0$, da el extremal que pasa por $(0,0)$ y $(1,1)$. Se considera, ahora, la familia de extrémals de un parámetro $x = t + l$ mostrada en la Figura 1.12. Como $x = t$ es un miembro de esta familia de curvas que da la cobertura del plano; por cada punto pasa uno y sólo un miembro de la familia. Esto se conoce como un campo de extrémals

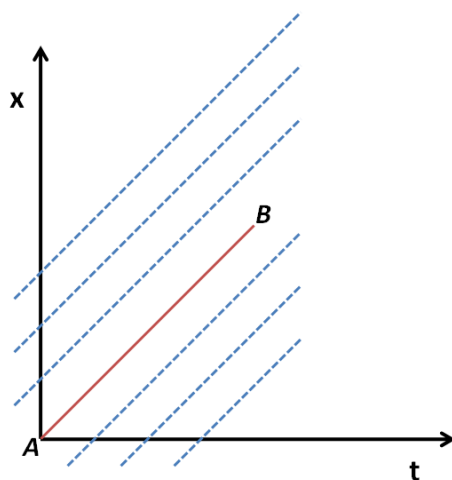


Figura 1.12 Campo de extrémals $x = t + l$

Como sólo un miembro de la familia pasa por cada punto hay un único valor para la pendiente $p(t, x)$ en cada punto. En este ejemplo simple $p(t, x) = 1$ en cualquier parte. Así asociada con este campo de extrémals hay una pendiente función $p(t, x)$, como es la pendiente de un extremal, satisface, para todo (t, x) , la identidad

$$\frac{df(t, x, p)}{dx} - \frac{d\left(\frac{df}{dp}(t, x, p)\right)}{dt} = 0 \quad (1.29)$$

En todo problema puede haber más de una familia de extrémals que forman un campo; por ejemplo en el problema considerado $x = kt$ es parte de la familia de un parámetro con $x = t$ como miembro. Este también cubre el plano excepto en el origen. Para esta familia $p(t, x) = x/t$, que es bien comportada excepto en el origen. Si se escoge un campo se debe escoger el más conveniente.

Ejemplo 1.10

Hallar un posible campo de extrémals para el Ejemplo 1.1

$$J(x) = \int_1^2 \dot{x}^2 t^3 dx \quad \text{dado que} \quad x(1) = 0, x(2) = 3.$$

Desarrollado anteriormente y verificar que la ecuación (1.29) satisface la pendiente correspondiente.

Solución.

La solución general de la ecuación de Euler-Lagrange es $x = k/t^2 + l$ y el extremal que satisface las condiciones reemplazando las condiciones iniciales es $x = 4 - 4/t^2$.

Una familia de extrémals de un parámetro que la contiene es $x = l - 4/t^2$.

Interesa el comportamiento de esta familia para $t > 1$. La Figura 1.13 muestra que la familia da un cubrimiento que incluye $x = 4 - 4/t^2$, osé que constituye un campo

con pendiente $p(t, x) = \frac{8}{t^3}$. Para verificar (1.29) tomamos $f(t, x, p) = p^2 t^3$, y se

calcula las derivadas envueltas. Ahora $\frac{df}{dx} = 0$ y $\frac{df}{dp} = 2pt^3$. Así (1.29) da

$$0 = \frac{d(2p^3)}{dt} = -\frac{d(16)}{dt} = 0 \quad \text{como se requiere}$$

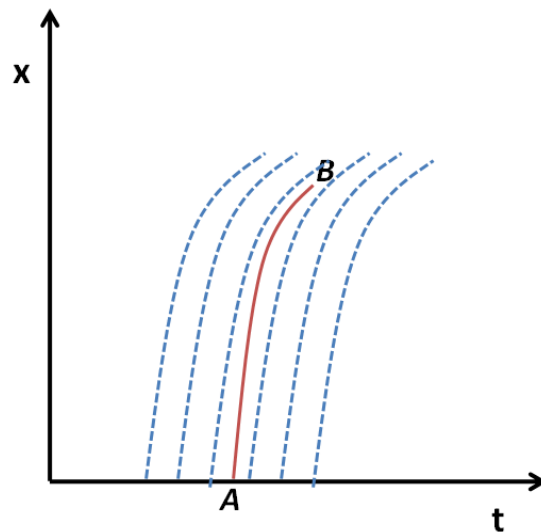


Figura 1.13 Campo de lo extrémals $x = l - \frac{4}{t^2}$.

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos de encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.6

Hallar un campo factible de extrémals para los problemas siguientes. En cada caso verificar que (1.29) es satisfecha por la pendiente correspondiente.

1. $\int_1^2 (\dot{x} + t^2 \dot{x}^2) dt$ con $x(1) = 0, x(2) = 1$.

2. $\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) dt$ con $x(0) = 0, x(2) = 2$.

6.6 INTEGRAL INVARIANTE DE HILBERT

En Figura 1.14 C^* es el extremal $x = x^*(t)$. Suponiendo que se ha encontrado un campo satisfactorio con pendiente $p(t, x)$. Sea C , $x = x(t)$ otra curva que une los puntos extremos y que está en la región cubierta por el campo. No se ponen otras restricciones que la siguiente integral definida a lo largo de él:

$$K[x] = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(t, x, p) + (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p) \right) dt \quad (1.30)$$

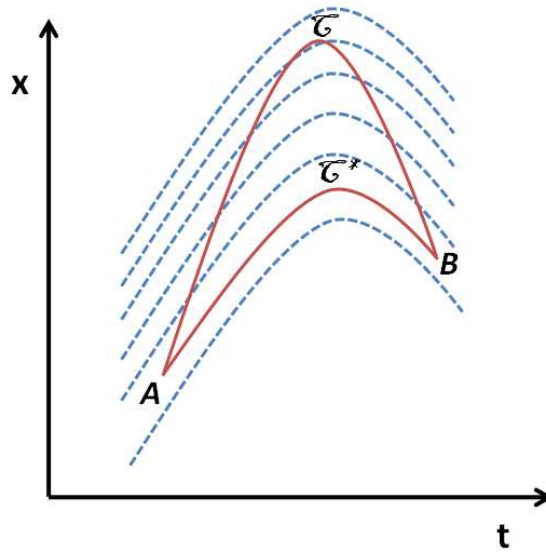


Figura 1.14 C es una trayectoria de la integral invariante de Hilbert's

Note que cuando C coincide con C^* , tal que $\dot{x} = p(t, x^*)$, la integral es $J[x^*]$.

Se puede expresar (1.30) como una integral de línea

$$\left. \begin{aligned} K[x] &= \int_C u dt + v dx \\ \text{donde} \\ u(t, x) &= f(t, x, p) - p \frac{df}{dp}(t, x, p), \quad v(t, x) = \frac{df}{dp}(t, x, p) \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Se puede notar que esta integral es invariante: no depende de la trayectoria C sino de los puntos extremos.

Para ver esto se debe demostrar que $\partial u/\partial x - \partial v/\partial t = 0$ en cada punto y esto se puede mostrar para reducir el requerimiento que la ecuación (1.29) se cumple en todos los puntos del campo, que es, por supuesto, el caso. Así la integral hallada anteriormente (1.30) es independiente de la trayectoria. Esto, junto con el hecho que $K[x^*] = J[x^*]$, permite expresar ΔJ en una nueva forma más útil

$$\Delta J = J[x] - J[x^*] = J[x] - K[x^*] = J[x] - K[x].$$

ambas integrales se evalúan a lo largo de C así que se pueden combinar:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(f(t, x, \dot{x}) - f(t, x, p) - (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p) \right) dt \quad (1.32)$$

En la ecuación anterior (1.32), $\dot{x}$ se refiere a la pendiente de C en (t, x) y p es la pendiente del campo en (t, x) . El integrando es usualmente denotado por $E(t, x, \dot{x}, p)$ y es denominada la función de exceso de Weierstrass. No se ha hecho aproximaciones en la deducción de la forma de ΔJ y las restricciones del comportamiento de la curva C no son estrictas; se requiere sólo que las integrales existan para la curva y que esté dentro de la región comprendida por el campo. Se puede ahora establecer una condición suficiente para que el extremal sea una curva de minimización.

Teorema 1.5 (Condición de Weierstrass). Para que el extremal sea un mínimo fuerte para $J[x]$ es suficiente que:

- (i) C^* sea un miembro del campo de extrémals.
- (ii) $E(t, x, \dot{x}, p) > 0$ para todos puntos (t, x) estén suficientemente cercanos a C^* y valores arbitrarios de $\dot{x}$.

Prueba. Si C^* es un miembro de una campo de extrémals, entonces para toda curva C que está enteramente en la región cubierta por el campo se puede escribir

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} E(t, x, \dot{x}, p) dt$$

Si la condición (ii) satisface entonces $\Delta J \geq 0$ para todo C suficientemente cercano de C^* . La pendiente de C en un t dado no necesita estar cerca de la pendiente de C^* en el valor de t , así C^* da para J un mínimo fuerte.

Note que esta teoría permite a C tener discontinuidades en su pendiente.

Ejemplo 1.11

Mostrar que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.

Minimizar

$$J = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt \quad \text{con } x(0) = 0 \text{ y } x(1) = 1.$$

Solución.

La ecuación de los extrémals es $x = kt + l$ ya que la función a minimizar no depende de t ni de x y las condiciones de los extremos se hallan resolviendo las condiciones iniciales y nos dan $k = 1$ y $l = 0$, así el extremal es $x = t$. Para aplicar la condición de Weierstrass vista en el Teorema 1.5 se necesita introducir $x = t$ en un campo de extrémals. Hay varias formas de hacerlo; por ejemplo la familia $x = t + l$ es un campo (con pendiente $p(t, x) = 1$ y entonces la familia es $x = kt$ (con pendiente $p(t, x) = \frac{x}{t}$). Ahora

$$E(t, x, \dot{x}, p) = f(t, x, \dot{x}) - f(t, x, p) - (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p)$$

dónde $p = p(t, x)$.

Para este problema

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} - \sqrt{1 + p^2} - p(\dot{x} - p) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \sqrt{1 + \dot{x}^2} - (1 + p\dot{x}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)$$

Se considera, ahora, un punto típico (t, x) en la región cubierta por el campo. En ese punto $p = p(t, x)$ tiene un valor numérico definido. Se necesita mostrar que $E > 0$ para todos posibles valores de x . Hay dos casos:

(i) $1 + p\dot{x} \leq 0$ entonces $E > 0$.

(ii) $1 + p\dot{x} > 0$. Se define por la expresión

$$G = \sqrt{1 + \dot{x}^2} + (1 + p\dot{x}) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)$$

Entonces $G > 0$ y cuando se calcula GE se halla que

$$GE = \frac{(p - \dot{x})^2}{(1 + p^2)} \geq 0$$

Por esto $E > 0$ cuando $1 + p\dot{x} > 0$.

Así el extremal satisface las condiciones del Teorema 1.5 y es una curva de minimización.

Ejercicios propuestos por el libro "Optimal Control and the Calculus of Variations" (Pinch Enid, 1993)

La solución de los ejercicios propuestos de encuentra en el Anexo 10.1.

Ejercicios 1.7

1. Mostrar que las condiciones del Teorema (1.5) son satisfechas para los problemas de los Ejercicios (1.6), tal que el extremal en cada caso es una curva de minimización fuerte.

2. Mostrar que el extremal $x = 2t$ de:

$$J[x] = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$$

no da un mínimo fuerte.

7. CONCLUSIONES

- Se elaboró una Guía introductoria de Cálculo de Variaciones aplicado al control óptimo para la comunidad estudiantil donde se muestra como encontrar un extremal de manera sencilla.
- Se estudió la información encontrada en varios libros sobre el Cálculo de Variaciones y su aplicación al Control Optimo.
- Los temas plasmados en la Guía dan la introducción necesaria para hallar controladores a través del Cálculo de Variaciones mediante temas como problemas de punto final o problemas isoperimétricos para verificar si los extrémals encontrados satisfacen las condiciones necesarias y así escoger el extremal indicado.
- Se resolvieron los ejercicios de forma analítica, problemas del Cálculo de Variaciones desarrollados paso a paso y con su respectiva explicación para dar a conocer al estudiantado que existen métodos alternativos para el desarrollo del Control Optimo.
- El software MAPLE es una herramienta que tiene la Universidad Pontificia Bolivariana y que pocos estudiantes conocen, debido a esto nos dimos a la tarea de investigar el manejo de este y desarrollar los ejercicios propuestos y demostrar que es muy fácil de manejar y muy útil para el desarrollo de operaciones matemáticas complejas muy frecuentes en el estudio de Ingeniería Electrónica.
- Se estudió un software llamado MAPLE que se utilizó para desarrollar los ejercicios propuestos ya que este programa maneja múltiples aplicaciones matemáticas y de optimización en control, una de ellas es el Cálculo de Variaciones quien nos hizo que el desarrollo de estos fuera más sencillo.

- Se divulgó la teoría del Cálculo de Variaciones aplicado al control óptimo realizando un seminario de introducción a la comunidad universitaria obteniendo el interés de muchos de los estudiantes por seguir avanzando en el tema.

8. RECOMENDACIONES

Es conveniente seguir trabajando en el desarrollo de controladores con Calculo de Variaciones aplicado al Control Optimo ya que están las bases suficientes para seguir trabajando e implementarlo como un método alternativo.

Se recomienda la difusión del software MAPLE ya que la Universidad Pontificia Bolivariana tiene los derechos de la licencia por lo cual se puede conseguir fácilmente y además facilita el desarrollo de operaciones matemáticas complejas muy usuales en el estudio de las ingenierías.

Es recomendable que la Universidad Pontificia Bolivariana adquiera textos que traten del Cálculo de Variaciones.

9. BIBLIOGRAFIA

- [1] Ogata K. Modern Control Engineering, 3th Ed. Prentice Hall. 1998
- [2] Ogata K. Discrete Time Control Systems, 2th Ed. Prentice Hall. 1996
- [3] Tou J.T. Modern Control Theory, 1th Ed. McGraw-Hill. 1964
- [4] Pinch Enid. Optimal Control and the Calculus of Variations, Oxford University Press. 1993
- [5] Fomin and Gelfand. Calculus of Variations, Richard A. Silverman. 1963

10. ANEXOS

10.1 Solucionario de Ejercicios Propuestos

Ejercicios 1.1

Hallar el extremal para cada uno de los problemas siguientes:

1. $\int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt$ con $x(1) = 2$, $x(2) = 17$.

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} > j := \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{t^3} \\ & j := \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{t^3} \\ > \text{with}(\text{VariationalCalculus}) \\ & [\text{ConjugateEquation}, \text{Convex}, \text{EulerLagrange}, \text{Jacobi}, \text{Weierstrass}] \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \left\{ -\frac{2\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right)}{t^3} + \frac{6\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)}{t^4}, \frac{2\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)}{t^3} = K_1 \right\} \end{array} \right. \\ & \frac{2\dot{x}}{t^3} = k \end{aligned}$$

Extremal:

$$x = \frac{1}{8}kt^4 + c \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 1; \quad x(1) = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}k + c &= 2 \\ c &= 2 - \frac{1}{8}k \end{aligned} \quad (2)$$

$$t_1 = 1; \quad x(2) = 17.$$

$$\frac{1}{8}16k + c = 17 \quad (3)$$

Remplazando 2 en 3:

$$17 = 2k + 1 - \frac{1}{8}k$$

$$k = \frac{128}{15}$$

Remplazando k en 2:

$$c = 1$$

Extremal hallado:

$$x = t^4 + 1$$

$$2. \int_0^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2 - 2x \sin t) dt \quad \text{con } x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 2.$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \text{> } j := \left(y(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 2 y(t) \cdot \sin(t) \right) \\ & \qquad \qquad \qquad j := y(t)^2 - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 - 2 y(t) \sin(t) \\ & \text{> } \text{with}(\text{VariationalCalculus}) \\ & \qquad \qquad \qquad [\text{ConjugateEquation}, \text{Convex}, \text{EulerLagrange}, \text{Jacobi}, \text{Weierstrass}] \\ & \text{> } \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \qquad \qquad \qquad \left\{ 2 y(t) - 2 \sin(t) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$2x - 2 \sin t + \frac{d}{dt} \dot{x} = 0$$

Extremal:

$$x = c_2 \sin(t) + c_1 \cos(t) - \frac{t}{2} \cos(t) \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; \quad x(0) = 1$$

$$1 = c_2 \sin(0) + c_1 \cos(0)$$

$$c_1 = 1$$

$$t_1 = \pi / 2; \quad x(\pi / 2) = 2$$

$$2 = c_2 \sin(\pi / 2) + \cos(\pi / 2) - \frac{\pi}{2} \cos(\pi / 2)$$

$$c_2 = 2$$

Extremal hallado:

$$x = 2 \sin(t) + \cos(t) - \frac{t}{2} \cos(t)$$

$$3. \int_0^\pi (\dot{x} + 2x \sin t) dt \quad \text{con } x(0) = x(\pi) = 0.$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \left(\left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + 2 y(t) \cdot \sin(t) \right) \\ & j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + 2 y(t) \sin(t) \\ > with(VariationalCalculus) \\ & [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ > EulerLagrange(j, t, y(t)) \\ & \left\{ 2 \sin(t) - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \right\} \end{array} \right.$$

$$2 \sin(t) - 2 \frac{d}{dt} \dot{x} = 0$$

Extremal:

$$x = -\sin(t) + c_1 t + c_2 \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; \quad x(0) = 0$$

$$0 = -\sin(0) + c_1(0) + c_2$$

$$c_2 = 0$$

$$t_1 = \pi; \quad x(\pi) = 0$$

$$0 = -\sin(\pi) + c_1(\pi) + (0)$$

$$c_1 = 0$$

Extremal hallado:

$$x = -\sin(t)$$

Ejercicios 1.2

Hallar el extremal de los siguientes ejercicios:

1. $\int_0^2 \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \, dt$ con $x(0) = 0$, $x(2) = 2$.

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \\ & j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} & \text{with(VariationalCalculus)} \\ & \quad [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \end{aligned} \right. \\ & \left[\begin{aligned} & \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \left\{ 1 - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) + y(t) + 1 \right) = K_1 \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$k = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} - \dot{x}(\dot{x} + x + 1)$$

Extremal:

$$x = k + \frac{1}{2} t^2 - t \cdot c + \frac{1}{2} c^2 \, dt \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; \, x(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= k + \frac{1}{2} c^2 \\ -c &= \sqrt{2k} \end{aligned} \quad (2)$$

$$t_1 = 2; \, x(2) = 2$$

$$2 = k + 2 - 2 \cdot \sqrt{2k} - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 2k$$

$$2 = k + 2 - 2 \cdot \sqrt{2k} - k$$

$$k = 0$$

Se reemplaza $K=0$ en (2):

$$c=0$$

Extremal hallado:

$$x = \frac{1}{2}t^2$$

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x} \quad \text{con } x(0)=0, x(1)=\sqrt{3}.$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} \text{> } j := \frac{\left(1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{y(t)} \\ \text{> } j := \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}}{y(t)} \\ \text{> } \text{with(VariationalCalculus)} \\ \text{[ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass]} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{> } \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}}{y(t)^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right)}{\left(1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2\right)^{3/2} y(t)} + \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} y(t)^2} \\ -\frac{\frac{d^2}{dt^2} y(t)}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} y(t)}, \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}}{y(t)} - \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} y(t)} = K_1 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$-\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x^2} + \frac{\dot{x}^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \dot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}} + \frac{\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2} \cdot x^2} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} \dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2} \cdot x} = 0$$

Extremal:

$$x = \sqrt{-t^2 - 2 \cdot c_1 \cdot t + 2 \cdot c_2} \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 0$$

$$0 = \sqrt{2 \cdot c_2}$$

$$c_2 = 0$$

$$t_1 = 1; x(1) = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{-(1) - 2 \cdot c_1}$$

$$c_1 = 2$$

Extremal hallado:

$$x = \sqrt{4 \cdot t - t^2}$$

Ejercicios 1.3

Hallar el extremal para cada uno de los siguientes puntos:

$$1. \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) dt \quad \text{con } x(0); x(1) \text{ libre.}$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \\ & \quad j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ & \quad [\text{ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass}] \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \quad \left\{ 1 - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) + y(t) + 1 \right) = K_1 \right\} \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} - \dot{x} \cdot (\dot{x} + x + 1) = k$$

Extremal:

$$x = k + \frac{1}{2} t^2 + t \cdot c + \frac{1}{2} c^2 \quad (1)$$

Se derivan el extremal encontrado (1) y la función f(t):

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\dot{x}} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) \\ \frac{df}{d\dot{x}} = (\dot{x} + x + 1) \end{aligned} \quad (2)$$

:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= \frac{d}{dt} \left(k + \frac{1}{2} t^2 + t \cdot c + \frac{1}{2} c^2 \right) \\ \dot{x}^* &= (t - c) \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizando la condición de transversalidad se halla la constante K:

$$\frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0$$

Se reemplaza (2) en la condición de transversalidad:

$$(\dot{x} + x + 1) = 0$$

Se reemplaza $\dot{x}$ por (3) y x por (1):

$$(t - c) + \left(k + \frac{1}{2}t^2 - t \cdot c + \frac{1}{2}c^2 \right) + 1 = 0 \quad (4)$$

$t = 0$ en (4)

$$k = c - \frac{1}{2}c^2 - 1 \quad (5)$$

$t = 1$ en (4)

$$k = 2 \cdot c - \frac{1}{2}c^2 - \frac{5}{2} \quad (6)$$

Se igualan (5) y (6) para hallar c:

$$c = \frac{3}{2}$$

En (5) se reemplaza $c = 3/2$ y hallamos k:

$$k = -\frac{5}{8}$$

Extremal hallado:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t$$

$$2. \int_0^T \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt \quad \text{con } x(0)=1, x(T)=2+(t-1)^2.$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{t^3} \\ & j = \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{t^3} \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ & [\text{ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass}] \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \left\{ -\frac{2\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right)}{t^3} + \frac{6\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)}{t^4}, \frac{2\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)}{t^3} = K_1 \right\} \end{array} \right]$$

$$k = \frac{2 \cdot \dot{x}}{t^3}$$

Extremal:

$$x = \frac{1}{8}k \cdot t^4 + c \quad (1)$$

Se derivan el extremal encontrado (1), la restricción dada en las condiciones iniciales y la función f(t):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{8}k \cdot t^4 + 1 \right] \\ \dot{x}^* &= \frac{1}{2}k \cdot t^3 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{d}{dt} [2 + (t-1)^2] \\ \dot{c}(t) &= 2t - 2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\dot{x}} \left[\frac{\dot{x}^3}{t^3} \right] \\ \frac{df}{d\dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{t^3}\end{aligned}\quad (4)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 1$$

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{8}k \cdot (0) + c \\ c &= 1\end{aligned}$$

Utilizando la condición de transversalidad se halla la constante K:

$$f(t_1) + [\dot{c}(t_1) - \dot{x}^*(t_1)] \frac{df}{d\dot{x}}(t_1) = 0$$

Se reemplaza (2), (3) y (4) en la condición de transversalidad:

$$\left(\frac{\dot{x}^2}{t^3} \right) + \left[(2t - 2) - \frac{1}{2}k \cdot t^3 \right] \cdot \frac{2\dot{x}}{t^3} = 0$$

Se reemplaza $\dot{x}$ por (2):

$$\frac{1}{4}k^2 \cdot t^3 + \left[(2t - 2) - \frac{1}{2}k \cdot t^3 \right] \cdot k = 0$$

$$\begin{aligned}2 - \frac{1}{4}k \cdot t^2 - \frac{2}{t} &= 0 \\ k &= \frac{8 \cdot (t - 1)}{t^3}\end{aligned}\quad (5)$$

Se igualan (1) y c(t) y se despeja k:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}k \cdot t^4 + 1 &= 2 + (t - 1)^2 \\ k &= \frac{8 \cdot (2 - t^2 - 2t)}{t^4}\end{aligned}\quad (6)$$

Se igualan (5) y (6) para hallar t:

$$t = 2$$

En (5) se reemplaza $t=2$ y hallamos k:

$$k = 1$$

Extremal hallado:

$$x = \frac{t^4}{8} + 1$$

Ejercicios 1.4

1. Considerando una variación admisible $y = x^*(t) + \eta(t)$ donde $\eta(t)$ es C_1 y no necesariamente pequeño, mostrar que el extremal hallado en los ejercicios 1.1(1) y 1.1(3) son curvas de minimización.

Para el ejercicio 1.1(1) se tiene $\int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt$ con $x(1) = 2$, $x(2) = 17$.

Extremal hallado en el ejercicio 1.1(1):

$$x = t^4 + 1$$

Se deriva el extremal encontrado:

$$\dot{x} = 4t^3 \quad (1)$$

Se debe verificar la siguiente condición $J[y] - J[x^*] \geq 0$ para saber si son curvas de minimización.

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{(\dot{x} + \dot{\eta})^2}{t^3} dt - \int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt$$

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{(\dot{x}^2 + 2\dot{\eta} \cdot \dot{x} + \dot{\eta}^2)}{t^3} dt - \int_1^2 \frac{\dot{x}^2}{t^3} dt$$

Simplificando:

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{\dot{\eta}^2 + 2\dot{\eta} \cdot \dot{x}}{t^3} dt$$

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{\dot{\eta}^2}{t^3} dt + \int_1^2 \frac{2\dot{\eta} \cdot \dot{x}}{t^3} dt$$

Desarrollamos las integrales y tenemos en cuenta la siguiente condición $\eta(1) = \eta(2) = 0$:

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{2\dot{x}}{t^3} \cdot \left(\frac{d\eta}{dt} \right) \cdot dt$$

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{2\dot{x}}{t^3} d\eta$$

Se reemplaza $\dot{x}$ por (1):

$$\Delta J = [8n]_1^2$$

$$\Delta J = 0$$

El extremal es una curva de minimización:

$$\Delta J = \int_1^2 \frac{\dot{n}^2}{t^2} dx \geq 0$$

Para el ejercicio 1.1(3) se tiene $\int_0^\pi (\dot{x}^2 + 2x \cdot \sin(t)) dt$ con $x(0) = x(\pi) = 0$.

Extremal hallado en el ejercicio 1.1(3):

$$x = -\sin(t)$$

Se deriva el extremal encontrado:

$$x = -\cos(t) \quad (1)$$

Se debe verificar la siguiente condición $J[y] - J[x^*] \geq 0$ para saber si son curvas de minimización.

$$\Delta J = \int_0^\pi \left((\dot{x} + \dot{n})^2 + 2 \cdot (x + n) \cdot \sin(t) \right) dt - \int_0^\pi (\dot{x}^2 + 2x \cdot \sin(t)) dt$$

$$\Delta J = \int_0^\pi \left((\dot{x}^2 + 2n\dot{x} + \dot{n}^2) + 2x \cdot \sin(t) + 2n \cdot \sin(t) \right) dt - \int_0^\pi (\dot{x}^2 + 2x \cdot \sin(t)) dt$$

Simplificando:

$$\Delta J = \int_0^\pi (2\dot{n} \cdot \dot{x} + \dot{n}^2 + 2n \cdot \sin(t)) dt$$

$$\Delta J = \int_0^\pi (2\dot{n} \cdot \dot{x}) dt + \int_0^\pi \dot{n}^2 dt + \int_0^\pi (2n \cdot \sin(t)) dt$$

Desarrollamos las integrales y tenemos en cuenta la siguiente condición $\eta(0) = \eta(\pi) = 0$:



$$\Delta J = \int_0^\pi 2\dot{n} \cdot \dot{x} \, dx$$

$$\Delta J = \int_0^\pi 2\dot{x} \cdot \left(\frac{dn}{dt} \right) \cdot dt$$

Se reemplaza $\dot{x}$ por (1):

$$\Delta J = \int_0^\pi -2 \cdot \sin(t) \, dn$$

$$\Delta J = 0$$

Segunda integral:



$$\Delta J = \int_0^\pi 2n \cdot \sin(t) \, dt$$

$$\Delta J = 0$$

El extremal es una curva de minimización:

$$\Delta J = \int_0^\pi \dot{n} \, dt$$

2. Mostrar que $x = t/2$ es un extremal para:

$$\int_0^2 (\dot{x}^2 - 1)^2 \, dt$$

Con $x(0)=0$, $x(2)=1$. Calcular el correspondiente valor de J. Hallar una curva D_1 que satisfaga las condiciones del Teorema 1.3 y que da a J el valor cero. ¿Es esta curva única?

➤ Se deriva el extremal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Se desarrolla la integral reemplazando (1) en f(t):

$$J = \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 dt$$

Valor de J:

$$J = \frac{9}{8}$$

➤ Verificar el teorema 1.3

$$\int_0^2 (\dot{x}^2 - 1)^2 dt = 0$$

Se reemplaza $\dot{x}$ por p y se igualan a cero:

$$(\dot{x}^2 - 1)^2 = 0$$

$$(p^2 - 1)^2 = 0$$

Los valores que satisfacen para que el extremal sea cero son:

$$p_1 = 1 \quad p_2 = -1$$

Ejercicio 1.5

1 Hallar el extremal de $\int_0^2 \dot{x}^2 dt$ con $x(0) = 0$, $x(2) = 1$ sujeta a la restricción

$$\int_0^2 x dt = 2$$

Se agrega λx a $f(t)$ para hallar el extremal:

$$\int_0^2 (f + \lambda x) dt$$

$$\int_0^2 (\dot{x}^2 + \lambda x) dt$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} \textcolor{red}{>} j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \lambda \cdot y(t) \\ \textcolor{red}{>} \text{with}(\textit{VariationalCalculus}) \\ \textcolor{red}{>} \textit{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \lambda \cdot y(t) \\ [\textit{ConjugateEquation}, \textit{Convex}, \textit{EulerLagrange}, \textit{Jacobi}, \textit{Weierstrass}] \\ \left\{ \lambda - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + \lambda y(t) = K_1 \right\} \end{array}$$

$$\lambda - 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \dot{x} \right) = 0$$

Extremal:

$$x = \frac{\lambda t^2}{4} + kt + l \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\lambda(0)}{4} + k \cdot (0) + l \\ l &= 0 \end{aligned}$$

$$t_1 = 2; x(2) = 1$$

$$1 = \frac{\lambda \cdot (2)^2}{4} + k \cdot (2)$$

$$k = \frac{(1-\lambda)}{2} \quad (2)$$

Se reemplaza (2) en (1):

$$x = \left[\frac{\lambda t^2}{4} + \frac{(1-\lambda)}{2} \cdot t \right] \quad (3)$$

Remplazamos (3) en la restricción dada en el ejercicio:

$$\int_0^2 \left[\frac{\lambda t^2}{4} + \frac{(1-\lambda)}{2} \cdot t \right] dt = 2$$

Resolviendo la integral hallamos λ :

$$\lambda = -3$$

Remplazamos el valor de λ en (2):

$$k = 2$$

Extremal hallado:

$$x = 2t - \left(\frac{3}{4} \right) \cdot t^2$$

Ejercicios 1.6

Hallar un campo factible de extrémals para los problemas siguientes. En cada caso verificar que (1.29) es satisfecha por la pendiente correspondiente.

$$1. \int_1^2 (\dot{x} + t^2 \dot{x}^2) dt \quad \text{con } x(1) = 0, x(2) = 1.$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + t^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} j := \frac{d}{dt} y(t) + t^2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \\ [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ \left\{ -4t \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - 2t^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), 1 + 2t^2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) = K_1 \right\} \\ -4t \cdot \dot{x} - 2t \cdot \left(\frac{d}{dt} \dot{x} \right) = 0 \end{array}$$

Campo de extrémals:

$$x = c - \frac{2}{t} \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 1; x(1) = 0$$

$$c = -2$$

Extremal hallado:

$$x = 2 - \left(\frac{2}{t} \right) \quad (2)$$

Verificamos que la ecuación (1.29) satisface la pendiente correspondiente.

$$\frac{df(t, x, p)}{dx} - \frac{d \left(\frac{df}{dp}(t, x, p) \right)}{dt} = 0$$

Derivamos (2):

$$\dot{x} = \frac{2}{t^2}$$

$$p = \frac{2}{t^2} \quad (3)$$

Se cambia la $\dot{x}$ por la p en la $f(t)$:

$$dt(t, x, p) = p + t^2 p^2$$

Derivamos:

$$\frac{df}{dx}(p + t^2 p^2) = 0$$

$$\frac{df}{dp}(p + t^2 p^2) = 1 + 2t^2 \cdot p$$

Remplazamos lo derivado anteriormente en la ecuación (1.29):

$$0 - \frac{d}{dt}(1 - 2t^2 \cdot p) = 0$$

Se remplaza (3) en la ecuación anterior y se debe cumplir la condición:

$$-\frac{d}{dt}\left(1 + 2t^2 \cdot \left(\frac{2}{t^2}\right)\right) = 0$$

$$-\frac{d}{dt}(5) = 0$$

$$2. \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) dt \quad \text{con } x(0) = 0, x(2) = 2.$$

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\ & j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ & [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \left\{ 1 - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) + y(t) + 1 \right) = K_1 \right\} \end{array} \right.$$

$$1 - \frac{d^2}{dt^2} x = 0$$

Extremal:

$$x = \frac{1}{2} t^2 + c_1 \cdot t + c_2 \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$t_0 = 2; x(2) = 2$$

$$2 = 2 + 2c_1$$

$$c_1 = 0$$

Extremal hallado:

$$x = \frac{1}{2} t^2 \quad (2)$$

Campo de extrémals:

$$x = \frac{1}{2} t^2 + k$$

Verificamos que la ecuación (1.29) satisface la pendiente correspondiente.

$$\frac{df(t, x, p)}{dx} - \frac{d\left(\frac{df}{dp}(t, x, p)\right)}{dt} = 0$$

Derivamos (2):

$$\dot{x} = t$$

$$p = t$$

Se cambia la $\dot{x}$ por la p en la $f(t)$:

$$f(t, x, p) = \frac{1}{2} p^2 + x \cdot p + x + p$$

Derivamos:

$$\frac{df}{dx} \left(\frac{1}{2} p^2 + x \cdot p + x + p \right) = p + 1$$

$$\frac{df}{dp} \left(\frac{1}{2} p^2 + x \cdot p + x + p \right) = p + x + 1$$

Remplazamos lo derivado anteriormente en la ecuación (1.29):

$$(p+1) - \frac{d}{dt}(p+x+1) = 0$$

Resolvemos la derivada y verificamos si cumple la condición:

$$(t+1) - (t+1) = 0$$

Ejercicios 1.7

1. Mostrar que las condiciones del Teorema 1.5 son satisfechas para los problemas de los Ejercicios (1.6), tal que el extremal en cada caso es una curva de minimización fuerte.

a. $\int_1^2 (\dot{x} + t^2 \dot{x}^2) dt$ con $x(1) = 0, x(2) = 1$.

Ecuación de Euler -Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > \text{f} := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + t^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + t^2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\ [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ \left\{ -2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) - 2t, 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + t^2 = K_1 \right\} \\ -4t \cdot \dot{x} - 2t \cdot \left(\frac{d}{dt} \dot{x} \right) = 0 \end{array}$$

Campo de extrémals:

$$x = c - \frac{2}{t} \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 1; x(1) = 0$$

$$c = -2$$

Extremal hallado:

$$x = 2 - \left(\frac{2}{t} \right) \quad (2)$$

Verificamos que el problema cumple las condiciones del teorema (1.5):

$$E(t, x, \dot{x}, p) > 0$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = f(t, x, \dot{x}) - f(t, x, p) - (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p) \quad (3)$$

Se cambia la $\dot{x}$ por la p en $f(t)$:

$$dt(t, x, p) = p + t^2 p^2$$

Derivamos:

$$\frac{df}{dx}(p + t^2 p^2) = 0$$

$$\frac{df}{dp}(p + t^2 p^2) = 1 + 2t^2 \cdot p$$

Remplazamos lo derivado anteriormente en la ecuación (3):

$$E(t, x, \dot{x}, p) = (\dot{x} + t^2 \dot{x}^2) - (p + t^2 p^2) - (\dot{x} - p)(1 + 2t^2 p)$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = t^2 \dot{x}^2 + t^2 p^2 - 2\dot{x} \cdot t^2 \cdot p$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = t^2 (p - \dot{x})^2$$

Se cumple la condición $E(t, x, \dot{x}, p) > 0$

b. $\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x \cdot \dot{x} + x + \dot{x} \right) dt$ con $x(0) = 0, x(2) = 2$.

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \\ & j := \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) \\ > \text{with(VariationalCalculus)} \\ & \text{[ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass]} \\ > \text{EulerLagrange}(j, t, y(t)) \\ & \left\{ 1 - \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 + y(t) \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) + \frac{d}{dt} y(t) - \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d}{dt} y(t) + y(t) + 1 \right) = K_1 \right\} \end{array} \right]$$

$$1 - \frac{d^2}{dt^2} x = 0$$

Extremal:

$$x = \frac{1}{2} t^2 + c_1 \cdot t + c_2 \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$t_0 = 2; x(2) = 2$$

$$2 = 2 + 2c_1$$

$$c_1 = 0$$

Extremal hallado:

$$x = \frac{1}{2}t^2 \quad (2)$$

Campo de extrémals:

$$x = \frac{1}{2}t^2 + k$$

Verificamos que el problema cumple las condiciones del teorema 1.5:

$$E(t, x, \dot{x}, p) > 0$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = f(t, x, \dot{x}) - f(t, x, p) - (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p) \quad (3)$$

Derivamos (2):

$$\dot{x} = t$$

$$p = t$$

Se cambia la $\dot{x}$ por la p en $f(t)$:

$$dt(t, x, p) = \frac{1}{2}p^2 + x \cdot p + x + p$$

Derivamos:

$$\frac{df}{dp} \left(\frac{1}{2} p^2 + x \cdot p + x + p \right) = p + x + 1$$

Remplazamos lo derivado anteriormente en la ecuación (3):

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x\dot{x} + x + \dot{x} \right) - \left(\frac{1}{2} p^2 + xp + x + p \right) - (\dot{x} - p)(p + x + 1)$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} p^2 - \dot{x}p$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \frac{1}{2} (p - \dot{x})^2$$

Se cumple la condición $E(t, x, \dot{x}, p) > 0$

2. Mostrar que el extremal $x = 2t$ de:

$$J[x] = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$$

no da un mínimo fuerte.

Ecuación de Euler Lagrange Maple:

$$\left[\begin{array}{l} > j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^3 \\ & j := \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^3 \\ > with(VariationalCalculus) \\ & [ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass] \\ > EulerLagrange(j, t, y(t)) \\ & \left\{ -6 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right), 3 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 = K_1, -2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^3 = K_2 \right\} \end{array} \right.$$

Extremal:

$$x = kt + l \quad (1)$$

Remplazando las condiciones iniciales en (1):

$$t_0 = 0; x(0) = 0$$

$$l = 0$$

$$t_1 = 1; x(1) = 2$$

$$k = 2$$

Extremal hallado:

$$x = 2t \quad (2)$$

Campo de extrémals:

$$x = 2t + l$$

Verificamos que el problema cumple las condiciones del teorema (1.5):

$$E(t, x, \dot{x}, p) > 0$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = f(t, x, \dot{x}) - f(t, x, p) - (\dot{x} - p) \frac{df}{dp}(t, x, p) \quad (3)$$

Derivamos (2):

$$\dot{x} = 2$$

$$p = 2$$

Se cambia la $\dot{x}$ por la p en $f(t)$:

$$f(t, x, p) = p^3$$

Derivamos:

$$\frac{df}{dp}(p^3) = 3p^2$$

Remplazamos lo derivado anteriormente en la ecuación (3):

$$E(t, x, \dot{x}, p) = (\dot{x}^3) - (p^3) - (\dot{x} - p)(3p^2)$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = \dot{x}^3 + 2p^3 - 3p^3 \dot{x}$$

$$E(t, x, \dot{x}, p) = (2p + \dot{x})(p - \dot{x})^2$$

No se cumple la condición $E(t, x, \dot{x}, p) > 0$

10.2 Tutorial de MAPLE

Este tutorial de Maple está diseñado para ayudarle a empezar con Maple, aprender acerca de las herramientas claves disponibles y lo lleva a través de una serie de problemas a que el estudiante maneje correctamente este software para el desarrollo de los ejercicios de Cálculo de Variaciones.

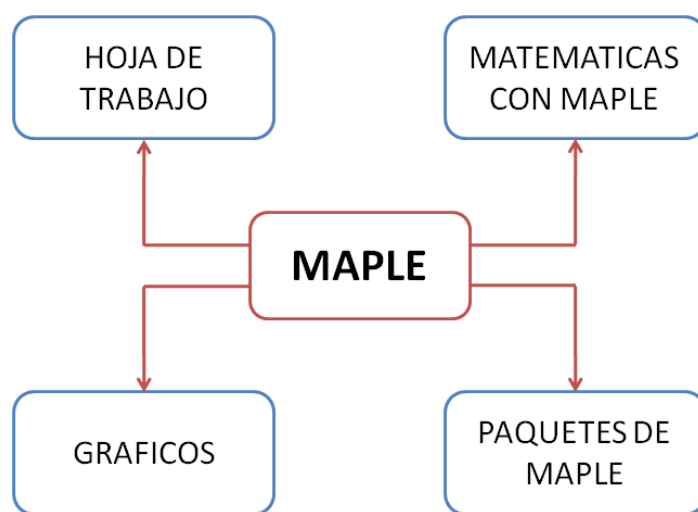


Figura 1.15 Diagrama Introducción a Maple

La hoja de trabajo de Maple

La interfaz gráfica de Maple permite realizar todas las operaciones de edición que cabría esperar de cualquier software moderno. Así, una vez que se abra el programa, aparece la ventana siguiente.

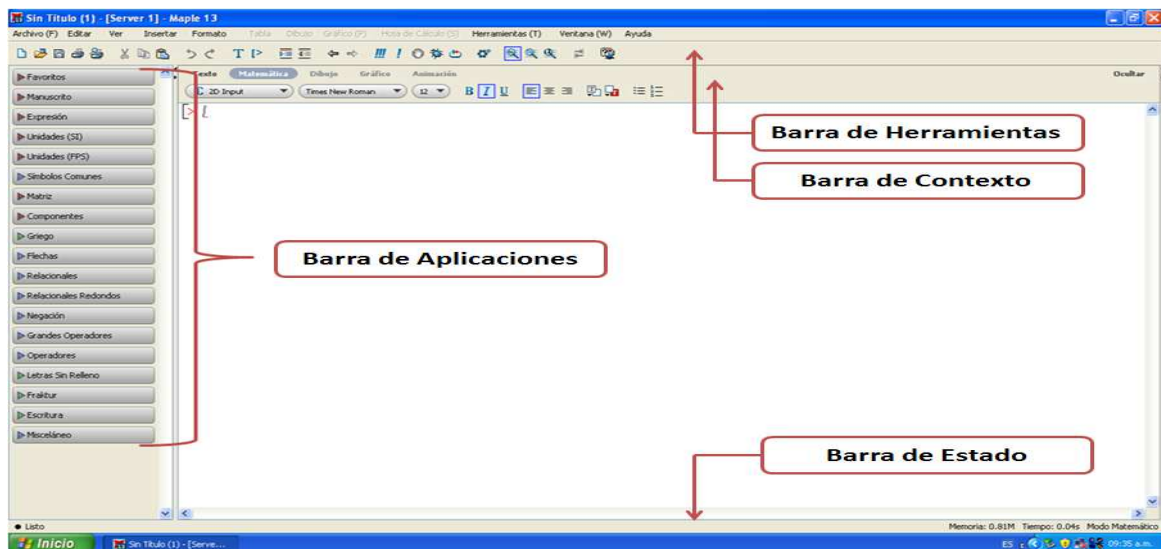


Figura 1.16 Hoja de Trabajo de Maple

En su parte superior está la barra de Menú, con menús tales como **File**(Archivo) o **Edit**(Edición), muy parecidos a los de cualquier otra aplicación con entorno gráfico. Inmediatamente debajo tenemos la barra de herramientas, que contiene botones para tareas comunes de edición y otras específicas de Maple algunas de las cuales comentaremos más adelante.

Al iniciar MAPLE se empieza con un documento en blanco, con menús y barras de herramientas en la parte superior y las paletas en el lado. En el cursor puede empezar a escribir una operación matemática y luego presione **[Enter]** para ver el resultado.

Ejemplo: Hacemos una operación básica tecleando "5-2". Presione **[Enter]** la respuesta aparece automáticamente.

```
[> 5 - 2
```

3

Ejemplo: Tecle "x^2+5-2". Note que tecleando "^" automáticamente se mueve a la posición de exponente. Para retirarse del exponente use la tecla "flecha derecha" **[→]**. Presione **[Enter]** para ver el resultado

$$\left[\begin{array}{l} > x^2 + 5 - 2 \\ & \end{array} \right. \quad x^2 + 3$$

Matemática con MAPLE

Usted puede usar menús de Maple para hacer una variedad amplia de operaciones matemáticas y otras operaciones.

Ejemplo: ponga el cursor en el último resultado y de clic derecho. El menú ofrece varias operaciones que usted puede hacer en la expresión a la vista. Para integrar esta expresión seleccione **Integrate** y luego **x**.

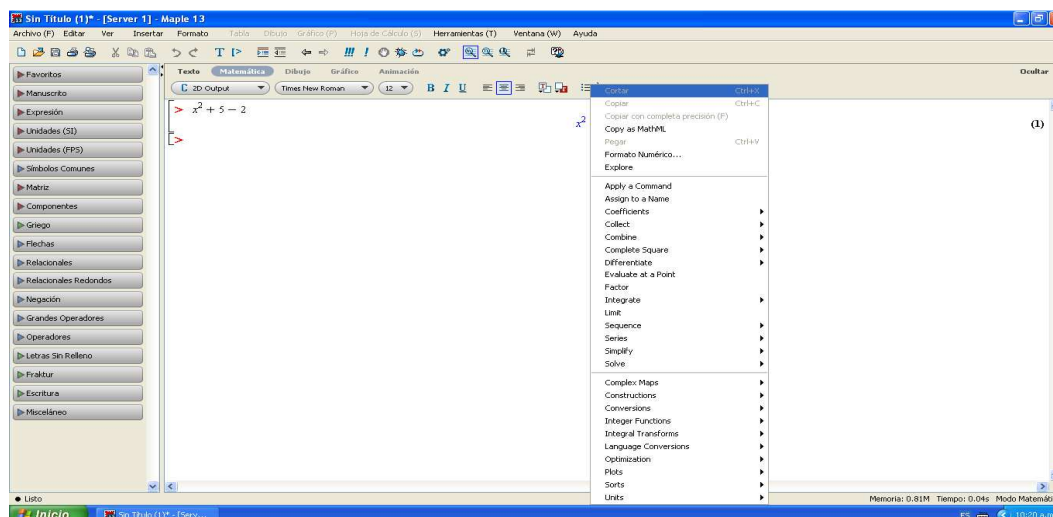


Figura 1.17 Opciones de la Barra de Menú

$$\left[\begin{array}{l} > x^2 + 5 - 2 \\ & \\ > \text{int}(\mathbf{(1)}, x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x^2 + 3 \\ \\ \frac{1}{3} x^3 + 3x \end{array}$$

La otra manera para realizar operaciones matemáticas es utilizando la barra aplicaciones donde se encuentran todas las operaciones necesarias.

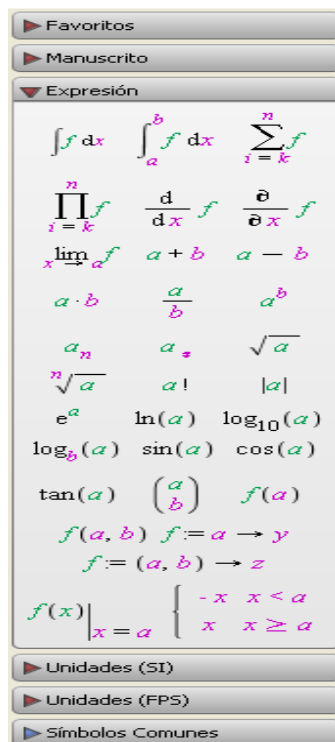


Figura 1.18 Barra de Aplicaciones

$$\left[\int x^2 + 5 - 2 \, dx \right]$$

$$\frac{1}{3} x^3 + 3 x$$

Gráficos:

Ejemplo: Para graficar el resultado de la integración de clic derecho en el resultado y luego seleccione **Plots> 2-D Plot**.

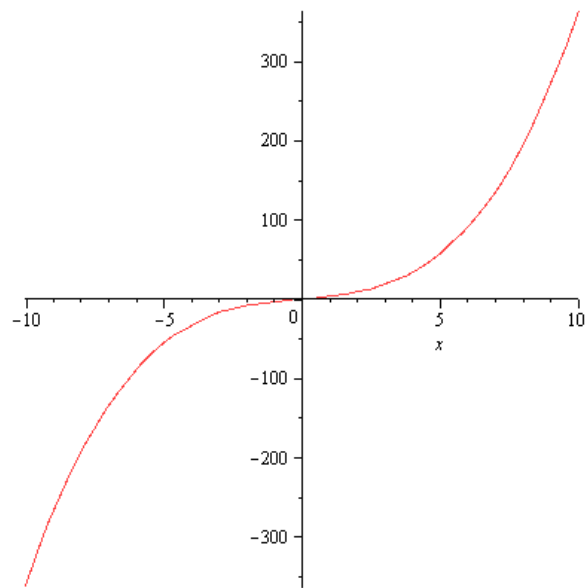


Figura 1.19 Grafico de una Integral

Una vez hecha la gráfica en Maple dando clic derecho sobre ella aparecen una cantidad de opciones para modificarla.

Ejemplo: Para modificarla gráfica anterior damos clic derecho en el resultado y luego seleccione **Línea>Punteada**.

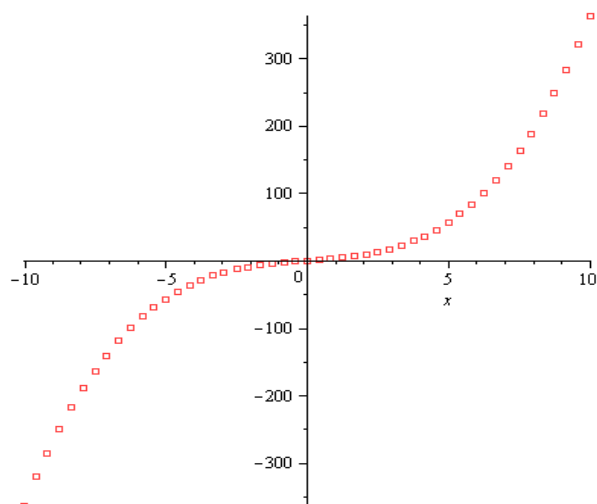


Figura 1.20 Grafico en Línea Punteada

Para escoger el rango de x en la grafica damos clic derecho sobre la función a graficar y vamos a la opción **Plots>PlotBuilder**, donde aparecerá una ventana para modificar el rango de x.

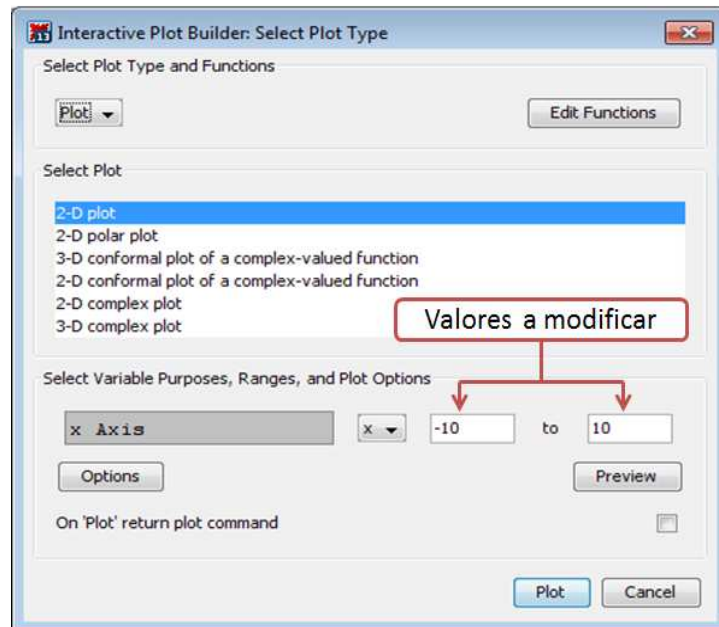


Figura 1.21 Ventana Para Modificar Rango de Grafica

EJEMPLO DE APLICACIÓN DE MAPLE AL CÁLCULO DE VARIACIONES

Hallar el extremal para el siguiente problema:

$$J(x) = \int_1^2 \dot{x}^2 t^3 dx \quad \text{dado que} \quad x(1) = 0, x(2) = 3.$$

Solución en Maple:

Declaramos la función “J” utilizando [:=] y la variable $\dot{x}$ se escribe $\frac{d}{dt}x(t)$ ya que en Maple no reconoce la expresión $\dot{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} > j := \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 t^3 \end{array} \right. \quad j = \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 t^3 \quad (1)$$

Una vez realizado lo anterior llamamos el comando de Cálculo de Variaciones y presionando “**Enter**” aparecen las acciones que se pueden realizar.

`> with(VariationalCalculus)`
`[ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass]` (2)

Como se muestra en la imagen anterior aparecen las opciones de “Euler-Lagrange, Weierstrass, Jacobi, ect”.

El siguiente paso es llamar la opción a realizar, en nuestro caso será “Euler-Lagrange” y declaramos las variables utilizadas.

`> EulerLagrange(j, t, x(t))`

$$\left[-2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) t^3 - 6 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) t^2, 2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) t^3 = K_1 \right]$$
 (3)

Ya realizado esto damos clic derecho sobre la respuesta y nos vamos a la opción “**Solve DE interantly**” y aparecerá una ventana donde se puede escoger la ecuación indicada de Euler-Lagrange, encontrar el extremal y remplazar las condiciones iniciales.

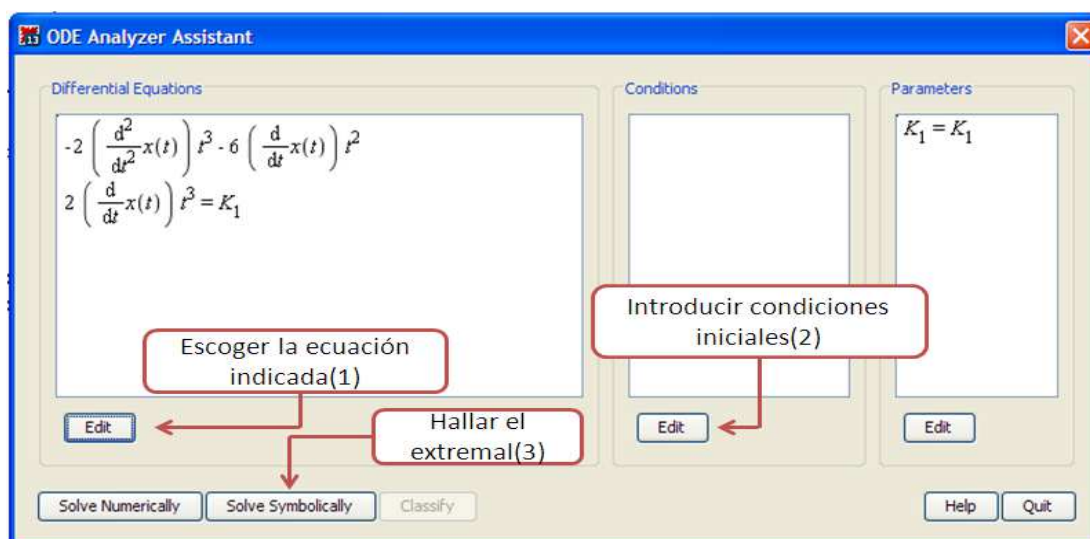


Figura 1.22 Ventana “Solve DE interantly”

Damos clic en uno para escoger la ecuación que nos sirve y la otra la eliminamos, una vez realizado esto damos clic en “Done”.

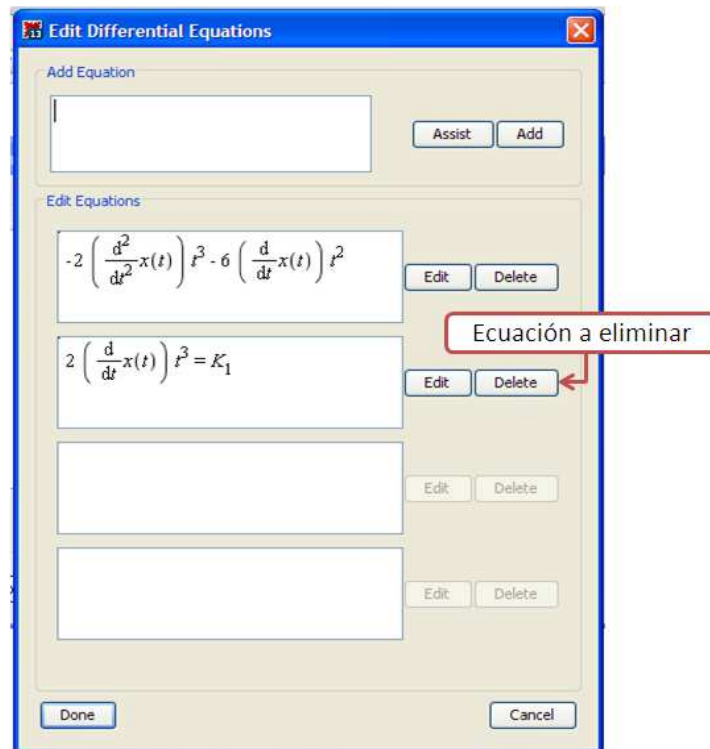


Figura 1.23 Ventana “Edit Differential Equations”

Se introducen las condiciones iniciales en la siguiente ventana y damos “enter” en “DONE”.

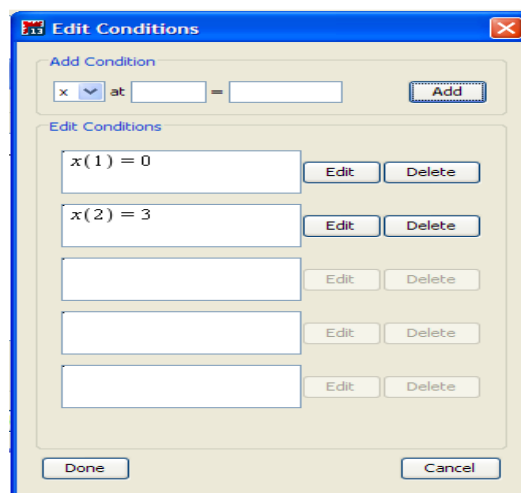


Figura 1.24 Ventana “Edit Conditions”

Una vez introducido las condiciones iniciales damos clic en “**Solve symbolically**” en donde aparecerá una ventada donde haciendo clic en “**solve**” aparecerá el extremal que queríamos hallar.

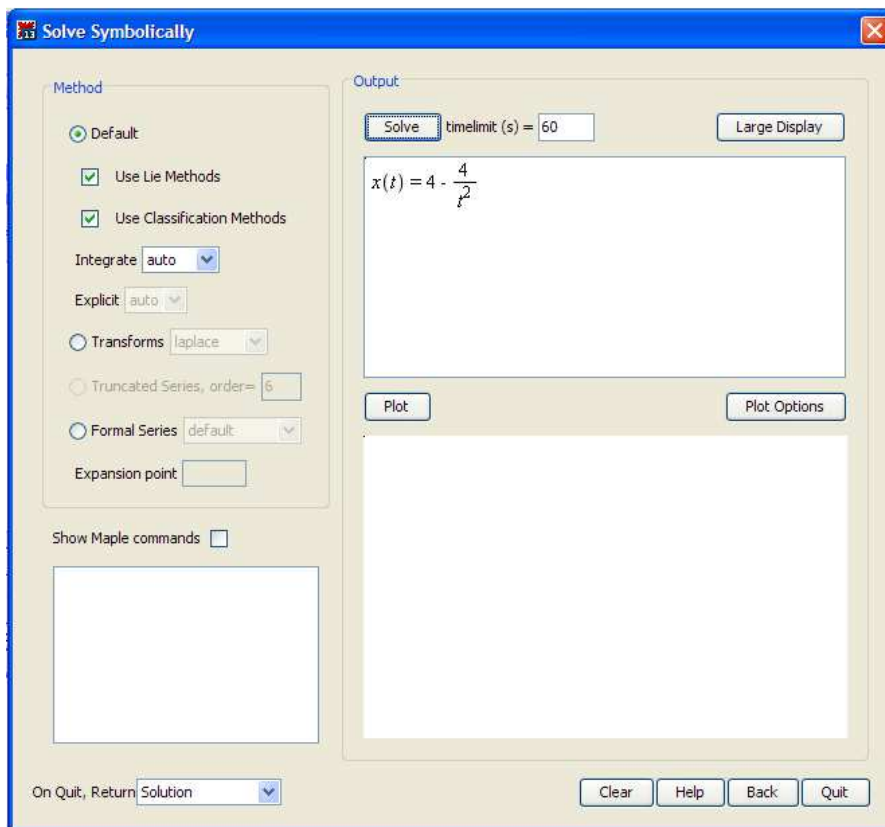


Figura 1.25 Ventana “Solve symbolically”