

COMPETENCIA COMUNICATIVA DE LA MATEMÁTICA: UN ENFOQUE PARA LA
MODELACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA

LINA MARCELA GÓMEZ QUINTERO

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍAS
CENTRO DE CIENCIA BÁSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MEDELLÍN
2018

COMPETENCIA COMUNICATIVA DE LA MATEMÁTICA: UN ENFOQUE PARA LA
MODELACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA

LINA MARCELA GÓMEZ QUINTERO

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ciencias Naturales y Matemática

Director

GUILLERMO LEÓN LÓPEZ FLÓREZ

Magíster

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

CENTRO DE CIENCIA BÁSICA

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2018

Medellín, 3 de agosto de 2018

**COMPETENCIA COMUNICATIVA DE LA MATEMÁTICA: UN
ENFOQUE PARA LA MODELACIÓN DE SITUACIONES
PROBLEMA**

“Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad” Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

Firma



cc. 11282110796

A mi familia en pleno:

Mi madre, Luz Mery, quien me ha dado todo.

Mi padre, Rubén Darío, quien en vida me amó.

Mis hermanas, Cristina y Carolina, que siempre me acompañaron.

Mis sobrinos, Mariana y Martín, los amores de mi vida.

Mis buenos amigos: Johanny, Fabián, Sara, Andrés, Lucas y Juan.

Last but not least, to monsieur Lemarque. Merci beaucoup!

AGRADECIMIENTOS

La autora agradece a su Director, el profesor Magíster Guillermo León López Flórez, docente del Centro de Ciencia Básica adscrito a la Escuela de Ingenierías, quien apoyó de manera permanente el desarrollo del trabajo, revisando en detalle la calidad del mismo, y ofreciendo opciones para avanzar constantemente.

También expresa su agradecimiento al profesor Magíster Juan Diego Martínez Marín, Coordinador de la Especialización en Enseñanza del Inglés adscrita al Centro de Lenguas, por su acompañamiento en la revisión de las metodologías y enfoques para la enseñanza de otras lenguas que soportaron este trabajo.

Finalmente, agradece a la profesora Magíster María Luz Aída Sabogal Tamayo, Coordinadora del programa de Maestría en Ciencias Naturales y Matemática, y al profesor Doctor Diego Alejandro Muñoz Durango, Coordinador de Trabajos de Grado de la misma, por su apoyo permanente en la formulación y ejecución de este trabajo de grado.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	13
1. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE.....	15
1.1. MÉTODOS Y ENFOQUES PARA EL APRENDIZAJE DE SEGUNDAS LENGUAS	17
1.2. METODOLOGÍA.....	22
1.2.1. Fase 1 – Revisión	22
1.2.2. Fase 2 – Propuesta	22
1.2.3. Fase 3 – Ajuste.....	23
2. ENFOQUE DE REFERENCIA PARA LA DEFINICIÓN DEL SISTEMA.....	24
2.1. ENFOQUE COGNITIVO (<i>COGNITIVE APPROACH</i>)	24
2.1.1. Generalidades	24
2.1.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional	26
2.1.3. Relación epistemológica con la matemática	27
2.2. ENFOQUE COMUNICATIVO (<i>COMMUNICATIVE APPROACH</i>)	29
2.2.1. Generalidades	30
2.2.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional	31
2.2.3. Relación epistemológica con la matemática	32
2.3. ENFOQUE DE ENSEÑANZA DEL LENGUAJE BASADO EN LA COMPETENCIA (<i>COMPETENCY-BASED LANGUAGE TEACHING</i>)	34
2.3.1. Generalidades	34
2.3.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional	35
2.3.3. Relación epistemológica con la matemática	37
3. CORRELACIONES MATEMÁTICO- LINGÜÍSTICAS PARA EL APRENDIZAJE ESCOLAR PRIMARIO	39

3.1.	ARGUMENTO INICIAL	39
3.2.	MODELO PROPUESTO	40
3.2.1.	Ciclo de conexión objeto – representación – concepto	41
3.2.2.	Ciclo de estructuración semiótica	49
3.2.3.	Ciclo de interpretación	61
3.2.4.	Ciclo de producción	64
3.2.5.	Ciclo de procesamiento	70
4.	PROTOCOLO GENERAL DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA.....	74
4.1.	FUNDAMENTO INICIAL PARA EL DISEÑO DEL PROGRAMA DE APRENDIZAJE. TAXONOMÍA REVISADA DE BLOOM.....	75
4.2.	CONSTRUCCIÓN DE SESIÓN DE APRENDIZAJE DESDE EL MODELO PROPUESTO.....	76
	CONCLUSIONES	84
	RECOMENDACIONES	86
	BIBLIOGRAFÍA.....	87

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1. Relación entre los sentidos y la razón en la epistemología kantiana (tomado de Radford, 2004; citado por D'Amore, 2006)
- Figura 2. Modelo de competencias en el aprendizaje matemático (Niss y Højgaard, 2011)
- Figura 3. Modelo propuesto – Estructura general
- Figura 4. Ciclo de conexión objeto–representación–concepto
- Figura 5. Ciclo de estructuración semiótica: conformación del macro concepto
- Figura 6. Situación II – Ejemplo de tarjeta con objeto o sistema a representar (representación gráfica y palabras prohibidas)
- Figura 7. Situación III – Ejemplo de representación gráfica para el registro del “enfrentamiento” de bloques, indicando arreglos iniciales y resultados finales
- Figura 8. Ciclo de estructuración semiótica: conformación del sistema semiótico
- Figura 9. Composiciones gráficas para la identificación de patrones gráficos a partir del coloreado.
- Figura 10. Sistemas alfanuméricos empleados para la codificación de mensajes y la identificación de patrones alfanuméricos y geométricos.
- Figura 11. Textos discontinuos en la comunicación de estructuras diádicas y triádicas (Duval, 1999) – Mapa mental para el recuento de los procesos asociados a la factorización de polinomios
- Figura 12. Ciclo de interpretación
- Figura 13. Comparación de objetos y sistemas – Antes y después
- Figura 14. Ciclo de producción
- Figura 15. Lista de chequeo para la solución de problemas (basada en el Ciclo de Solución de Problemas de Polya) – Muestra de un problema asignado para evaluación
- Figura 16. Lista de chequeo para la solución de problemas (basada en el Ciclo de Solución de Problemas de Polya) – Muestra de un problema asignado para evaluación: representación gráfica del problema
- Figura 17. Muestra de un problema asignado para evaluación: plan para hallar área del sendero
- Figura 18. Muestra de un problema asignado para evaluación: plan para hallar ancho del sendero
- Figura 19. Ciclo de procesamiento
- Figura 20. Modelo propuesto – Integración de ciclos
- Figura 21. Competencia comunicativa matemática como subconjunto de la Competencia comunicativa
- Figura 22. Modelo matricial de la Taxonomía Revisada de Bloom para los Objetivos del Aprendizaje (2012)
- Figura 23. Matriz integradora de la Taxonomía revisada de Bloom a cada grado de escolaridad, según los ciclos del modelo propuesto

GLOSARIO

CÓDIGO: conjunto de signos y símbolos que se agrupan para conformar mensajes con sentido; es parte indispensable en un proceso de comunicación (Frías Conde, 2000)

COMPETENCIA: se define generalmente como “el saber en contexto”. Según Tobón (2006), la competencia puede ser abordada desde múltiples escenarios sociales; las más reconocidas en el contexto educativo corresponden a los escenarios de la competencia como capacitación (“se refiere al grado en el cual las personas estén preparadas para desempeñar determinados oficios”), como idoneidad (“se refiere al calificativo de apto o no apto con respecto al desempeño en un puesto de trabajo”) y como requisitos para desempeñar un puesto de trabajo (“se refiere a las habilidades, capacidades, destrezas, conocimientos, valores y actitudes que un candidato a un determinado puesto de trabajo debe tener para poder ser vinculado a una empresa”).

COMPETENCIA MATEMÁTICA: según el informe PISA/OCDE, “alfabetización o competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano” (Rico, 2005)

COMUNICACIÓN: escuetamente, se define como la transmisión de información de un punto a otro, empleando para ello un lenguaje o código específico. Es una característica fundamental de la especie humana (Linerós Quintero, s.p.i.). Según Frías Conde (2000), corresponde a hacer a los otros partícipes de lo que pensamos, sentimos y/o deseamos.

COMUNICACIÓN MATEMÁTICA: puede definirse como la transmisión de información de un punto a otro, empleando para ello el lenguaje matemático.

CONCEPTO: según Kant, “Un concepto completo es aquel [que cuenta] con una cantidad suficiente de predicados claros para que el concepto sea enteramente distinto, y los predicados [así] indicados son primarios u originales en el sentido de que no se derivan de otros predicados incluidos en la definición” (White Beck, 2012). Desde la Lingüística, corresponde al significado de un determinado signo (Fing, s.p.i.)

CONCEPTO MATEMÁTICO: estructura de conocimiento dotada de significado (Fernández-Plaza et al., 2016)

DEFINICIÓN: “Definir, según Kant, es el medio para presentar el concepto completo de una cosa dentro de sus límites y en su carácter primario u original” (White Beck, 2012).

ESTRUCTURA DIÁDICA: estructura de significancia en la que todo significado corresponde simplemente a la denotación explícitamente definida de cada objeto.

Comprende las notaciones simbólicas, los lenguajes naturales y los diagramas (Duval, 1999)

ESTRUCTURA TRIÁDICA: estructura de significancia en la que todo significado es independiente de la denotación explícitamente definida de cada objeto, por lo que la importancia radica en su interrelación. Incluye tanto el lenguaje natural como las representaciones de figuras en 2D y 3D (Duval, 1999)

LENGUAJE: *“Un lenguaje se puede definir de diferentes formas: desde el punto de vista funcional lingüístico se define como una función que expresa pensamientos y comunicaciones entre la gente. Esta función puede realizarse mediante signos escritos (escritura) o mediante señales y vocales (voz). Desde un punto de vista formal se define como un conjunto de frases, que generalmente es infinito y se forma con combinaciones de elementos tomados de un conjunto (usualmente infinito) llamado alfabeto, respetando un conjunto de reglas de formación (sintácticas o gramaticales) y de sentido (semánticas). Además de las características fundamentales del lenguaje debe considerarse que sea funcional, es decir, el lenguaje debe permitirnos expresar nuestras ideas. El lenguaje será bueno en la medida en que sea fácil de leer, fácil de entender y fácil de modificar. Lo mismo ocurre en los lenguajes formales (Sethi, 1992). Podemos distinguir entre dos clases de lenguajes: los lenguajes naturales (inglés, alemán, español, etc.) y lenguajes formales (matemático, lógico, programable etc.)”* (Cortez Vásquez, Vega Huerta y Pariona Quispe, 2009)

MACROCONCEPTO: colección de conceptos interrelacionados que conforman una representación lingüística de un sistema dado, dentro de cierto marco de referencia.

OBJETO: de acuerdo con Blumer (1969, ed. 1982; citado por D’Amore, 2006): un objeto es *“cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo”*.

OBJETO MATEMÁTICO: se refiere a todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas. de acuerdo con D’Amore (2006), existe un consenso respecto del carácter cultural y social del objeto matemático: *“Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” y que el “significado” de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (D’Amore & Godino, 2006, p. 14).”*

PROTOPROCESO: estructura de pensamiento de carácter intuitivo, en la que es posible seguir una instrucción y/o resolver una tarea simple (Rodríguez Carmona, 2017).

PROBLEMA: ausencia de algún elemento o interacción entre elementos, que corresponde a un sistema conocido.

REPRESENTACIÓN: en Lingüística, corresponde al significante de un signo determinado (Fing, s.p.i.), lo cual es a su vez la imagen mental que hay de un objeto durante la construcción de su concepto. Las representaciones pueden ser orgánicas o semióticas; mientras las representaciones orgánicas o físicas se producen de manera “natural”, mediante la acción orgánica del objeto de estudio, las representaciones semióticas pueden definirse como imágenes o descripciones sobre el mundo externo, producidas de manera intencional, las cuales facilitan el razonamiento matemático gracias al acceso perceptual que se genera (Duval, 1999).

SIGNO: de acuerdo con Saussure (citado por Frías Conde, 2000), *“es una codificación, una abstracción de un elemento real que tiene representación en la mente y bajo la apariencia de representación se transmite.”* Eco (1973), por su parte, afirma que se trata de un *“proceso mediante el cual un concepto (o un objeto) se representa por medio de una imagen acústica (como las «palabras» y sim.). A veces, cualquier componente menor del proceso precedente.”*

SISTEMA SEMIÓTICO: colección de conceptos y macroconceptos interrelacionados que conforman una representación lingüística de un contexto dado, de una representación de la realidad: *“se dice que se establece entre dos objetos matemáticos [...] una función semiótica cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, uno de ellos se pone en el lugar del otro o uno es usado por otro. (D’Amore & Godino, 2006, p. 30).”*

RESUMEN

Se presentan los resultados alcanzados durante la obtención de un sistema codificación–decodificación de doble vía que permiten el establecimiento directo de la relación entre el lenguaje convencional y el lenguaje matemático, mediante la revisión y adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, con miras a su implementación en la consolidación de pensamiento crítico para la solución de problemas.

El análisis comparativo de los métodos de enseñanza de las segundas lenguas, con las características del lenguaje matemático que se enseña a cada nivel educativo, mostró que es necesario desarrollar un sistema integrador de varios enfoques y métodos, fundamentado en un mecanismo de enseñanza y aprendizaje multicíclico que priorice la consolidación del sistema semiótico matemático para garantizar la interpretación y comprensión adecuadas de cualquier situación cotidiana que requiera ser descrita en términos matemáticos. Así, este resultado se estima afectado por aspectos socioculturales que involucran los aprendizajes previos y presentes en otras áreas tales como Lengua Castellana, Educación Artística, etc., así como las características del aprendizaje asociado al entorno primario, es decir, aquél de mayor impacto en la primera infancia.

PALABRAS CLAVE: lenguaje matemático, signo, significado, código, segunda lengua, sistema codificación–decodificación de doble vía, métodos de enseñanza y aprendizaje

INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe un interés especial por las profesiones enfocadas en las Ciencias Exactas y Naturales, así como en el amplio manejo del lenguaje matemático para la modelación de sistemas y predicción de comportamientos asociados a ciertos grupos de estudio. Considerando el marcado interés generado en este aspecto, se presta una gran atención a la capacitación y entrenamiento, formal y no formal, que promueva la consolidación de habilidades y competencias en torno al dominio y aplicación certeras del saber científico y matemático. Así las cosas, se hace menester desarrollar, además de habilidades, afinidades con estos lenguajes desde el terreno de la Educación Básica, para facilitar la inmersión del individuo en este mundo lleno de datos y patrones. Hay una gran dificultad: la brecha entre el saber específico de los estudiantes y el dominio básico de las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las perspectivas de los docentes, las instituciones y las familias en torno a lo rígido y difícil que es el acercamiento al lenguaje matemático, y, en consecuencia, al científico.

Por tal razón, y partiendo del principio de que los lenguajes matemático y científico pueden considerarse segundas lenguas, que se cristalizan a través de procesos de "traducción" desde la observación y el dominio de la lengua materna, se buscó establecer un sistema de adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por Freudenthal y los ciclos de solución de problemas propuestos por G. Polya, para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica Primaria (1° a 5°). Se espera que este sistema favorezca, a través de su estructura, la interpretación de situaciones problema en estos primeros años, a la luz del código matemático formal, promoviendo los procesos de razonamiento inductivo para la predicción del comportamiento de diferentes variables adscritas a un sistema de interés para su análisis dimensional y estructural.

Tal desarrollo se llevó a cabo en tres etapas: Revisión (enfoque cualitativo), Propuesta y Ajuste. A lo largo de las mismas, se analizaron los aspectos comunes entre los métodos y enfoques más relevantes para la enseñanza y el aprendizaje de una segunda lengua, y las posturas establecidas desde el estado del arte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Perspectivas cognitivas como las de Duval (1999, 2006), D'Amore (2003, 2006), comulgaron con los modelos de aprendizaje explicados por Wearne y Hilbert (1988), las relaciones lingüísticas enfocadas a la comunicación matemática discutidas por Schleppegrell (2007) y el sentido del número propuesto por Dehaene (1997), para a su vez relacionarse con los principios chomskianos que cita Brown (2001) y las premisas de Oxford (1989) respecto de la influencia del enfoque comunicativo en la adquisición efectiva del lenguaje.

A través de las etapas del proyecto, se estableció un modelo para la adquisición del lenguaje matemático y su posterior procesamiento en la solución de problemas, siendo éste constituido por cinco ciclos de aprendizaje, en el cual se considera la influencia de agentes externos en el proceso de adquisición y consolidación conceptual, y de igual manera se admite la conformación de sistemas semióticos como elemento indispensable para la interpretación de situaciones problema, las cuales constituyen el insumo para el replanteamiento de las estructuras semióticas empleadas en la matematización de contextos más complejos.

El modelo propuesto, dada su coherencia con los trabajos de Kuhl (2004) y los de Wearne y Hiebert (1988), se presenta adecuado para el diseño de programas de formación basados en competencias, mediante mallas curriculares y procesos académicos transversales que conciben el conocimiento como una construcción dependiente del lenguaje y sus códigos. Por ello, se definió un protocolo de implementación del mismo a partir de la Taxonomía de Bloom en su versión revisada (Anderson, Krathwohl & Bloom, 2001), en el que se propone una distribución de los ciclos correspondientes al modelo formulado en función de los grados de escolaridad establecidos en el sistema educativo nacional, empleando la taxonomía ya mencionada como sustrato para el establecimiento de los indicadores de desempeño que permiten la evaluación de la competencia de forma consecuente con un proceso sólido de aprendizaje.

Como posterior etapa de este trabajo, se propone la puesta a prueba del modelo a través del correspondiente protocolo; esto implica la adaptación del mismo a las mallas curriculares y procesos académicos, para llevar a cabo una transición gradual a una estructura educativa coherente con el proceso de adquisición lingüística, y su posterior aplicación a la construcción y comunicación de conocimiento.

1. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

“La matemática es el lenguaje con el que Dios escribió el Universo”

Galileo Galilei

La formación para el desarrollo del pensamiento matemático parte de la concepción acerca del mismo. Muchos debates se han desarrollado en torno a la naturaleza de la matemática, tratando de determinar si fue descubierta o inventada, si se trata de una creación de la mente humana, o si es obra de la Naturaleza; se ha difundido hasta ahora que la matemática es ambas cosas, esto es, una creación de la mente humana a partir de los arreglos y patrones que se encuentran en la Naturaleza, muchos de los cuales se conocen como Leyes Universales. Desde esta perspectiva, puede considerarse la matemática como un sistema lingüístico dedicado a la reconstrucción y al modelamiento de los patrones que se encuentran en la Naturaleza, y que permiten la predicción de futuros fenómenos; el análisis matemático, entonces, se transforma en un asunto de “traducción”, en el que operadores, símbolos, propiedades, comunican detalles de situaciones que modelan y reconstruyen sistemas observados en nuestra Naturaleza y en muchas otras posibles (Hofstadter, 1979):

“... trata acerca de significado y símbolos, códigos e isomorfismos, conexiones y analogías; en breve, acerca de correspondencias, exactas e inexactas, entre diferentes sistemas en todos los niveles imaginables. Ésta es ciertamente la esencia de la traducción”

Clara Lee se adhiere a este pensamiento, y enuncia que una de las características de la matemática es que se expresa a través de un sistema de símbolos cuyos significados sintetizan, de una u otra manera, las propiedades de un sistema basado en cantidades, sean éstas constantes o variables, respecto de cómo serían expresadas a través de un lenguaje natural (Lee, 2009):

“Puesto que la forma específica en que se expresan las matemáticas se asemeja bastante a una lengua diferente con muchas de las características de una lengua natural¹, es razonable examinar si enseñar matemáticas como si fuera una segunda lengua extranjera puede o no ayudar a los alumnos a superar algunas de las barreras de aprendizaje que aparecen al utilizar el registro matemático. Aprender un idioma extranjero requiere que los alumnos dominen las palabras, la gramática y la sintaxis de la lengua, así como tener

¹ A lo largo de este trabajo se empleará el término *lenguaje* en lugar de *lengua*, con el propósito de abordar los mecanismos de adquisición y desarrollo del mismo, los códigos asociados a tal proceso, y de igual forma considerar tanto las funciones de recepción (escucha y lectura) como las de producción (escritura y discurso).

alguna noción de la cultura que utiliza el lenguaje para expresar ciertas ideas y conceptos. Es necesario aprender el idioma matemático para poder expresar las ideas y concepciones que forman su disciplina, y al aprender la lengua los alumnos empiezan a familiarizarse con la cultura”.

Así las cosas, la matemática asume el matiz de una segunda lengua, la cual depende de la inmersión en escenarios propicios para la observación, a fin de formular preguntas que propendan por la adquisición de nuevos conceptos, y que ayuden a realizar una lectura lógica de carácter inductivo, con el fin de desarrollar categorías cognitivas que conlleven a la conformación de un verdadero aprendizaje significativo, el cual se transforma posteriormente en un conocimiento previo formal necesario en la interacción con fenómenos más complejos. Diferentes proyectos de investigación y disertaciones muestran gran relación entre el uso de la lengua como herramienta para el aprendizaje matemático (Ávila Meléndez, 2013; Borges Ripoll, s.p.i; García Quiroga et al., 2015), considerando que el lenguaje es la primera herramienta de representación de la realidad, y, por tanto, a ella se debe referir cualquier iniciativa de enseñanza. Teniendo en cuenta lo anterior, es importante afirmar que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática debe guardar una estrecha relación con los aprendizajes lingüístico y científico, ya que éstos fortalecen la observación del entorno, la interpretación de los fenómenos adscritos a él, y la comunicación de lo observado con el fin de asegurar su comprensión.

Puede observarse fácilmente que, en muchas ocasiones, se suele confundir la idea matemática con la representación de esa idea. En los primeros años se le ofrece al niño, en primer lugar, el símbolo, dibujo, signo o representación cualquiera sobre el concepto en cuestión, haciendo que el sujeto intente comprender el significado de lo que se ha representado. Estas experiencias son perturbadoras para el desarrollo del pensamiento lógico - matemático, pues se ha demostrado suficientemente que el símbolo o el nombre convencional es el punto de llegada y no el punto de partida, por lo que, en primer lugar, se debe trabajar sobre la comprensión del concepto, propiedades y relaciones. Al respecto, *Schleppegrell* manifiesta la importancia del lenguaje cotidiano como medio propicio para establecer equivalencias conceptuales preliminares que introduzcan el lenguaje matemático formal, puesto que existen estructuras lingüísticas en común con el lenguaje matemático empleado para la definición de situaciones de interés (*Schleppegrell*, 2007).

El tema se ha visto ampliamente difundido en círculos de carácter académico e investigativo, e incluso se han determinado espacios exclusivos para la discusión de las características semióticas y semiológicas del lenguaje matemático. En Alemania, *Sträßer* ha retratado las dos líneas empleadas para la investigación semiótica en las Matemáticas: la primera se relaciona con el uso de categorías semióticas para estudiar la comunicación matemática basada en Internet, en donde se produce el intercambio espontáneo de lenguaje ordinario y signos matemáticos; la segunda tiene que ver con el empleo de la Semiótica como un recurso de alto nivel para la comprensión del mundo de los objetos, en donde el pensamiento abductivo y el razonamiento diagramático son imprescindibles para

la conformación de redes de conocimiento (Sträßer, 2004). Estas redes son de crucial importancia en la consolidación de categorías conceptuales, que sustentan la formación de hipótesis y modelos preliminares para la explicación de fenómenos y la predicción de resultados bajo condiciones dadas.

Considerando las características de la educación matemática tradicional, que se destaca por su rigidez y principal enfoque en el dominio algorítmico, se han planteado diversas estrategias para la consecución de verdaderas habilidades asociadas a la consolidación de un pensamiento matemático, y dentro de las más aceptadas en la actualidad se encuentra la matematización. El concepto de matematización fue desarrollado por *Freudenthal* (Freudenthal, 1973 – citado por Menon, 2015), uno de los pioneros en la investigación alrededor de la formación matemática; durante sus investigaciones, se encargó de mostrar que la aproximación al aprendizaje de la matemática, formulada a través del método deductivo que se trabajaba mediante los axiomas de Peano, correspondía a un caso de inversión antdidáctica, y que el proceso realmente didáctico era opuesto diametralmente, esto es, afín con un enfoque inductivo. Así, el modelo algorítmico, en sí mismo una aplicación del método deductivo, no favorece los procesos de adquisición del lenguaje matemático, como sí lo haría un método que permita la comunicación directa con el fenómeno a abordar, y con el registro histórico de situaciones similares susceptibles de modelación.

La matematización tiene como uno de sus pilares, el uso de aplicaciones para el aprendizaje de la matemática (De Lange, 1996), y como método de aprendizaje, se ve influenciada, evidentemente, por las características de los modelos instruccionales con los cuales entra en comunicación. Dichos principios, agrupados dentro del término didactización, establecen las pautas para el desarrollo de un ambiente de aprendizaje específico, lo cual potencia en mayor o menor medida la consolidación de los procesos cognitivos alrededor del razonamiento lógico – lingüístico–matemático. Así las cosas, el ambiente bajo el cual el lenguaje matemático es introducido y desarrollado, tiene una gran injerencia en el resultado final, que corresponde al uso adecuado y aplicado de éste en la representación y manipulación de variables para el análisis de una situación real de estudio.

1.1. MÉTODOS Y ENFOQUES PARA EL APRENDIZAJE DE SEGUNDAS LENGUAS

Diversas aproximaciones, enfoques y métodos se han desarrollado con el fin de asegurar el aprendizaje de segundas lenguas, y todos estos métodos surgen de diversas concepciones alrededor de cómo el ser humano aprende un lenguaje natural. Así las cosas, se puede revisar la posibilidad de desarrollar un método que, bajo la misma luz, promueva un aprendizaje profundo, sólido y significativo del lenguaje matemático. Ante esto, Brown presentó en 2001 una revisión histórica de la enseñanza del lenguaje, reseñando los distintos métodos y enfoques alrededor de las lenguas extranjeras (Brown, 2001). Esta lista, cuyo resumen comparativo se encuentra en la Tabla 1, incluye, entre otros:

- Enfoque tradicional (*Classical Approach, or Grammar-Translation Method*)
- Enfoque Natural o Método Directo (*Direct Method*)
- Método Audiolingüístico (*Audiolingual Method*)
- Respuesta Física Total (*Total Physical Response*)
- Aprendizaje de Códigos Cognitivos (*Cognitive Code Learning*)
- Aprendizaje del Lenguaje Comunitario (*Community Language Learning*)

Cada uno de estos métodos comprende una concepción del aprendizaje que se basa en la primera lengua, o lenguaje natural. Con esto, se puede afirmar que el aprendizaje de una segunda lengua involucra el manejo de códigos que se ven potenciados de una u otra forma por la interacción con el mundo físico y la comunidad que domina dicho lenguaje. No obstante, a sabiendas de que no es común el lenguaje matemático para la comunicación natural, por múltiples razones, para la adquisición del lenguaje matemático es menester un sistema que promueva la codificación del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, lo cual permitirá vincular los métodos de enseñanza de lenguas extranjeras y las herramientas lingüísticas que tanto se potencian a diario, con los procesos de enseñanza y aprendizaje de un lenguaje universal. Dentro de estos métodos, considerando los principios del Aprendizaje Activo (Andersen, 1995) y los previamente citados trabajos de Freudenthal y Polya, el uso integrado de los enfoques cognitivo, comunicativo y basado en la competencia – los cuales involucran los métodos de Aprendizaje de Códigos Cognitivos, Respuesta Física Total y Aprendizaje del Lenguaje Comunitario – se muestra como una opción de impacto considerable para la adquisición de estructuras conceptuales más sólidas que faciliten el aprendizaje matemático, dada su relación con la creación de estructuras y patrones asociados a representaciones mentales basadas en la manipulación concreta del contexto, y con el establecimiento de códigos y estructuras semióticas sólidas a través de la superposición de representaciones mentales.



Tabla 1. Cuadro comparativo de métodos para la enseñanza de segundas lenguas (Brown, 2001)

	Theory of Language	Theory of Learning	Objectives	Syllabus	Activity Types	Learner Roles	Teacher Roles	Materials Roles
Audiolingual	Language is a system of rule-governed structures hierarchically arranged.	Habit formation; skills are learned more effectively if oral precedes written; analogy, not analysis.	Control of structures of sound, form, and order; mastery over symbols of the language; goal: native – speaker mastery.	Graded syllabus of phonology, morphology and syntax. Contrastive analysis.	Dialogues and drills, repetition and memorization, pattern practice.	Organisms that can be directed by skilled training technique to produce correct responses.	Central and active teacher – dominated method. Provides model, controls direction and pace.	Primarily teacher – oriented. Tapes and visuals, language lab often used.
Total Physical Response	Basically a structuralist, grammar-based view of language.	L2 learning is the same as L1 learning; comprehension before production is “imprinted” through carrying out commands (right – brain functioning); reduction of stress.	Teach oral proficiency to produce learners who can communicate uninhibitedly and intelligibly with native speakers.	Sentence-based syllabus with grammatical and lexical criteria being primary, but focus on meaning, not form.	Imperative drills to elicit physical actions.	Listener and performer, little influence over the content of learning.	Active and direct role; “the director of a stage play” with students as actors.	No basic text; materials and media have an important role later. Initially voice, action, and gestures are sufficient.
The Silent Way	Each language is composed of elements that give it a unique rhythm and spirit. Functional vocabulary and core structure are key to the spirit of the language	Processes of learning a second language are fundamentally different from L1 learning. L2 learning is an intellectual, cognitive process. Surrender to the music of the language, silent awareness then active trial.	Near-native fluency, correct pronunciation, basic practical knowledge of the grammar of the L2. Learner learns <i>how</i> to learn a language.	Basically structural lessons planned around grammatical items and related vocabulary. Items are introduced according to their grammatical complexity.	Learner responses to commands, questions, and visual cues. Activities encourage and shape oral responses without grammatical explanation or modeling by teacher.	Learning is a process of personal growth. Learners are responsible for their own learning and must develop independence, autonomy, and responsibility.	Teachers must (a) teach (b) test (c) get out of the way. Remain impassive. Resist temptation to model, remodel, assist, direct, exhort.	Unique materials: colored rods, color-coded pronunciation and vocabulary charts.



Community Language Learning	Language is more than a system for communication. It involves whole person, culture, educational, developmental communicative processes.	Learning involves the whole person. It is a social process of growth from childlike dependence to self-direction and independence.	No specific objectives. Near-native mastery is the goal.	No set syllabus. Course progression is topic-based; learners provide the topics. Syllabus emerges from learners' intention and the teacher's reformulations.	Combination of innovative and conventional. Translation, group work, recording, transcription, reflection and observation, listening, free conversation.	Learners are members of a community. Learning is not viewed as an individual accomplishment, but something that is achieved collaboratively.	Counseling/parental analogy. Teacher provides a safe environment in which students can learn and grow.	No textbook, which would inhibit growth. Materials are developed as course progresses.
The Natural Approach	The essence of language is meaning. Vocabulary, not grammar, is the heart of language.	There are two ways of L2 language development: "acquisition" – a natural subconscious process, and "learning" – a conscious process. Learning cannot lead to acquisition.	Designed to give beginners and intermediate learners basic communicative skills. Four broad areas; basic personal communicative skills (oral/written); academic learning skills (oral/written).	Based on selection of communicative activities and topics derived from learner needs.	Activities allowing comprehensible input, about things in the here-and-now. Focus on meaning, not form.	Should not try to learn language in the usual sense, but should try to lose themselves in activities involving meaningful communication.	The teacher is the primary source of comprehensible input. Must create positive low-anxiety climate. Must choose and orchestrate a rich mixture of classroom activities.	Materials come from realia rather than textbooks. Primary aim is to promote comprehension and communication.
Suggestopedia	Rather conventional, although memorization of whole meaningful texts is recommended.	Learning occurs through suggestion, when learners are in a deeply relaxed state. Baroque music is used to induce this state.	To deliver advanced conversational competence quickly. Learners are required to master prodigious lists of vocabulary pairs, although the goal is understanding, not memorization.	Ten unit courses consisting of 1,200-word dialogues graded by vocabulary and grammar.	Initiatives, question and answer, role-play, listening exercises under deep relaxation.	Must maintain a passive state and allow the materials to work on them (rather than vice versa).	To create situations in which the learner is most suggestible and present material in a way most likely to encourage positive reception and retention. Must exude authority and confidence.	Consists of texts, tapes, classroom fixtures, and music. Texts should have force, literary quality, and interesting characters.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

$\int_a^b f(x) dx$

MAESTRÍA

Ciencias Naturales y Matemática

Communicative Language	Language is a system for the expression of meaning, primary function – interaction and communication.	Activities involving real communication; carrying out meaningful tasks; and using language which is meaningful to the learner promote learning.	Objectives will reflect the needs of the learner; they will include functional skills as well as linguistic objectives.	Will include some/all of the following: structures, functions, notions, themes, tasks. Ordering will be guided by learner needs.	Engage learners in communication, involve processes such as information sharing, negotiation of meaning, and interaction.	Learner as negotiator, interactor, giving as well as taking.	Facilitator of the communication process, participants' tasks, and texts; needs analyst, counselor, process manager.	Primary role in promoting communicative language use; task-based materials; authentic.
------------------------	---	---	---	--	---	--	--	--



1.2. METODOLOGÍA

La metodología para el desarrollo de este trabajo se basó en la observación de características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores. Con el mismo, se puede delimitar el conjunto de elementos necesarios para el trabajo académico escolar básico, dentro de la perspectiva de la comunicación matemática.

Así, se definieron tres fases preliminares:

1.2.1. Fase 1 – Revisión

Es posible calificar esta fase de la investigación como una exploración de tipo cualitativo, en la que el proceso de diseño es de corte documental. Dentro de esta perspectiva, las actividades desarrolladas se enuncian a continuación:

- Revisión del estado de la técnica
 - Estudio de los modelos relevantes
 - Identificación de las características de los modelos estudiados.
 - Campos de aplicación de los modelos estudiados
 - Aporte de cada modelo
- Revisión de modelos aplicados encontrados en el estado de la técnica
 - Estudio de los modelos aplicados
 - Identificación de características
 - Aporte de los modelos al desempeño
- Revisión de características tales como:
 - Modos de aprendizaje o de acceso al conocimiento
 - Manejo de la información
 - Transferencia de conocimiento
 - Transformación del conocimiento

1.2.2. Fase 2 – Propuesta

Durante esta fase, se practicó un enfoque cualitativo correlacional, en donde las características del enfoque de referencia establecido fueron plasmadas en el proceso constructivo del sistema codificación–decodificación de doble vía, considerando los



vínculos de doble vía entre las estructuras lingüísticas básicas y las características formales primarias de los objetos matemáticos que atañen a los niveles de educación básica.

En este orden de ideas, las actividades relacionadas con esta fase, fueron:

- Propuesta de un modelo
 - Comparación de las características y aportes a los modelos estudiados con las características identificadas
 - Selección o construcción del modelo a proponer que mejor logre adaptarse a las características y potencie los resultados del área.
 - Revisión modelo propuesto vs características de lo existente.
 - Revisión y calibración del modelo propuesto.
 - Validación del modelo.

1.2.3. Fase 3 – Ajuste

Esta última fase obedece al ajuste del modelo planteado, a partir de la revisión conceptual y estructural del mismo en función de las generalidades del enfoque propuesto.



2. ENFOQUE DE REFERENCIA PARA LA DEFINICIÓN DEL SISTEMA

Desde la concepción de la matemática como una lengua adicional (véase 1. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE), puede considerarse el uso de enfoques y métodos para el aprendizaje de otras lenguas, como fundamento para la creación del sistema de interés. Dentro de los mismos, hay tres que llaman la atención por sus planteamientos epistemológicos y efectos reportados en los procesos de aprendizaje, de manera individual y colectiva, a saber:

2.1. ENFOQUE COGNITIVO (COGNITIVE APPROACH)

Brown (2001) resume este enfoque como una combinación entre el método de traducción gramatical (*grammar-translation method*) y el método audiolingüe (*audiolingual method*), que propende por el entendimiento de la estructura lingüística del idioma de interés mediante estrategias afines al razonamiento deductivo. Surgió durante la revolución chomskiana, en la que se promulgó un “conocimiento profundo” de la naturaleza del lenguaje, haciendo consciente el aprendizaje de la gramática y reconociendo el papel de los procesos de abstracción por encima de la habituación (Richards y Rodgers, 2002).

2.1.1. Generalidades

En la década de los 60, se planteó este método como alternativa al predominante método audiolingüe, considerando el término *cognitivo* para denominar el ejercicio consciente de organizar material para una construcción curricular basada en la gramática, a la vez que se impulsa un aprendizaje fundamentado en el uso y la práctica significativos del lenguaje (Richards y Rodgers, 2002). Si bien en su momento no tuvo el impacto esperado, las investigaciones realizadas a partir de los años 70 permitieron profundizar en la validez de este enfoque para orientar las investigaciones venideras en materia tecnológica, como es el caso del actualmente célebre *Machine Learning*.



El enfoque cognitivo se fundamenta, de acuerdo con Chastain y Woerdehoff (1968), en tres estrategias:

- El uso de ejercicios diseñados para el entendimiento gramatical de los conceptos que están siendo presentados.
- La explicación deductiva de la gramática, previa al ejercicio con el uso de la estructura de interés. La práctica de todas las competencias lingüísticas desde el principio del período formativo.

Desde una perspectiva psicológica, Grossberg (1980) asegura que la codificación es un proceso cerebral que asegura la evolución, puesto que permite establecer respuestas basadas en patrones. Este esquema es respaldado por Simon y Newell (1971), quienes recogieron la información disponible a su tiempo para el establecimiento de teorías asociadas a la solución de problemas por parte de la mente humana, y delinearon una definición propia de este proceso, en el que se requiere un lenguaje para el procesamiento de la información, así como un sistema de interpretación de los datos de entrada. Su trabajo ha tenido notable influencia en las investigaciones que se desarrollaran en torno a la creación de inteligencia artificial.

Desde la lingüística, se han llevado a cabo diversas investigaciones alrededor de la validación del enfoque cognitivo, la mayor parte de éstas en los años 90; las mismas, desde distintos procedimientos, enfatizan en la importancia de la conciencia sobre las estructuras y reglas inherentes al proceso de aprendizaje de la lengua. Goh (2000) emplea para su investigación, el marco cognitivo propuesto por Anderson (1995) para la comprensión lingüística, el cual descompone el proceso de comprensión en tres fases: percepción (*perception*), análisis (*parsing*) y utilización (*utilization*). Su trabajo se enfocó en los procesos de escucha de la lengua adicional de interés – inglés –, en donde hizo evidente revisión de estrategias metacognitivas para la revisión de las dificultades en el aprendizaje desde la perspectiva individual, visualizando las restricciones del aprendizaje con el propósito de mejorar la competencia y la eficiencia en el proceso.



2.1.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional

Desde su planteamiento, se sugirió que el enfoque cognitivo traería consigo un aprendizaje más consistente de la segunda lengua objetivo, considerando la conciencia desarrollada alrededor de las reglas que rigen su estructura y consecuente funcionamiento. De acuerdo con Brown (2001), su incursión en la dinámica pedagógica de la lengua se considera una reacción ante las estrategias conductistas del método audiolingüe, aunque curiosamente tiene elementos del método de traducción. En todo caso, se han desarrollado múltiples investigaciones que han respaldado el efecto de la conciencia del aprendiz en cómo funciona la lengua de interés, sobre la efectividad y sostenibilidad de ese nuevo conocimiento.

Chastain y Woerdehoff (1968) aseguran que este enfoque cumple con su objetivo de desarrollar el entendimiento de las reglas que atañen a la gramática del lenguaje de interés – en este caso, español. Su investigación comparativa respecto del método audiolingüe permitió encontrar que, si bien los niveles obtenidos de comunicación oral en la lengua de interés no presentaron diferencias significativas, sí las hubo a la hora de analizar variaciones en las habilidades de lectura, escritura y escucha. Estos resultados fueron consistentes con los obtenidos por Goh (2000) en cuanto a la influencia de la revisión consciente del estudiante sobre el mejoramiento de sus habilidades para la escucha de la lengua de interés.

Como se ha mencionado previamente, el enfoque cognitivo incluye entre sus principios, la práctica consciente y autónoma de la habilidad que se busca adquirir, con el sustrato del entendimiento estructural que rige el concepto y/o sistema de interés, y bajo situaciones que exigen la solución de problemas y la consecución de tareas *dentro del oficio o arte en proceso de aprendizaje, y considerando el contexto social*. Con esto en mente, se han sugerido diversas metodologías para la aplicación sistemática del enfoque para la adquisición de nuevas habilidades, tanto en aspectos generales como en áreas específicas del conocimiento.

Entre estos trabajos se encuentra el de Collins et al. (1988), el cual se concentró en el análisis del aprendizaje de oficios (*apprenticeship*) desde el enfoque cognitivo, en comparación con el enfoque tradicional; a lo largo de este documento pudo encontrarse que el enfoque cognitivo aplicado a esta



práctica, favorece los procesos de aprendizaje de lectura, escritura y matemáticas². Esta investigación mostró que el uso de los conocimientos conceptual y factual (o fáctico), enlazado a una experiencia guiada de aprendizaje (*learning-through-guided-experience*), guarda relación con un aprendizaje mucho más sólido en comparación con el enfoque tradicional, al involucrar procesos cognitivos y metacognitivos que demandan la revisión y el ajuste de estos saberes dentro de la práctica, la cual está ligada a su vez a múltiples contextos que requieren la aplicación significativa del conocimiento y/o la habilidad a desarrollar. En otras palabras, la base del aprendizaje lingüístico bajo el método cognitivo involucra la revisión permanente del contenido a la luz de la comprensión individual del sujeto, y con la influencia de un agente lingüístico externo – quien fuere su mentor o tutor en el proceso de aprendizaje – para el reconocimiento de una serie de patrones y símbolos que faciliten el posterior uso de la lengua en escenarios de mayor complejidad.

2.1.3. Relación epistemológica con la matemática

En múltiples trabajos se ha tenido en cuenta la importancia de identificar la manera en que la matemática es aprendida desde la primera infancia (Resnick, 1995), del mismo modo en que se ha buscado establecer un patrón de adquisición lingüística a estas edades (Kuhl, 2004). Ambas pesquisas han pretendido hallar el código que permite el ensamble conceptual alrededor de estímulos lingüísticos,

Desde la perspectiva matemática, se han encontrado reflexiones e investigaciones que postulan el aprendizaje del mismo (más precisamente, su saber), con la construcción de representaciones semióticas asociadas a objetos matemáticos, puesto que los mismos no corresponden a objetos físicos (D'Amore, 2006). Éste se apoya en las investigaciones de Radford et al. (2001; 2004) para afirmar que existe una generación de sentido en los objetos matemáticos y sus conceptos a través de la transformación semiótica

² Este trabajo corresponde a un reporte técnico realizado y publicado bajo la supervisión de BBN Laboratories Incorporated, en Arlington, Virginia (Estados Unidos). Los procesos lectoescritores descritos se relacionan con el aprendizaje del inglés como primera lengua.



que surge de la práctica compartida, ya que ésta permite la síntesis de varias representaciones del objeto, facilitando la comprensión confiable del mismo y estableciendo una referencia de objeto conocido, tal y como se formula en la epistemología kantiana (Figura 1). Más adelante, los trabajos de Radford (2008) y los de Presmeg et al. (2016) robustecerían estas premisas.

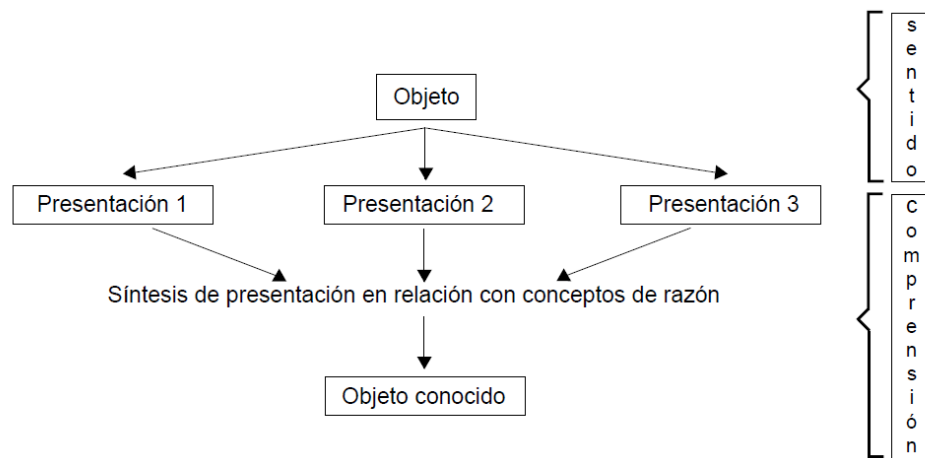


Figura 1. Relación entre los sentidos y la razón en la epistemología kantiana (tomado de Radford, 2004; citado por D'Amore, 2006)

Estas aseveraciones guardan relación con los trabajos previos de Wearne y Hiebert (1988), quienes presentaron un enfoque cognitivo para el aprendizaje matemático – particularmente orientado al aprendizaje de los números decimales – basado en cuatro procesos, a saber: conexión de símbolos individuales con referentes (*connecting process*), desarrollo de procedimientos para la manipulación simbólica (*developing process*), elaboración y rutinización de reglas asociadas a los símbolos (*elaboration and routinization process*), y uso de estos símbolos como referentes para un sistema abstracto más complejo (*abstracting process*). Mientras los dos procesos iniciales se encargan de dar significado a las estructuras y reglas, los otros dos promueven el uso de éstas (ahora realmente significativas) en contextos de mayor complejidad. Sus resultados demostraron que el aprendizaje sostenido por el proceso de elaboración y rutinización puede interferir con el entendimiento semántico, mientras que la implementación de



los dos procesos previos de conexión y desarrollo puede consolidar la adquisición y dominio de estructuras semánticas.

Las afirmaciones de Duval (1999) son coherentes con estos resultados, pues aseguran que la diferencia entre visión y visualización afecta significativamente la comprensión de los objetos matemáticos. Font, Godino y D'Amore (2007) manifestaron que en el aprendizaje de la matemática existe *“el problema del significado y la representación del conocimiento”*, dado que hay aspectos personales y culturales que permean el aprendizaje lingüístico y, por ende, el matemático; desde su posición, una visión onto-semiótica del aprendizaje de la matemática resuelve este problema, dado que considera aspectos antropológicos, semióticos y socioculturales para la revisión del aprendizaje matemático.

2.2. ENFOQUE COMUNICATIVO (*COMMUNICATIVE APPROACH*)

El enfoque comunicativo ha sido uno de los más famosos en los últimos años, gracias a su relación con la actividad lingüística cotidiana. Es el más reconocido y aceptado a nivel internacional, según Brown (2001), desde sus inicios en la década de los 70, al caracterizarse por priorizar la generación y transmisión de mensajes a grandes rasgos, sin detenerse necesariamente en la precisión de las estructuras gramaticales asociadas a las ideas que se busca difundir.

De acuerdo con Richards y Rodgers (2002), este enfoque, promovido por lingüistas tales como Candin y Widdowson, se fundamenta en las características sociales, culturales y pragmáticas del lenguaje, y busca el aprendizaje de una nueva lengua mediante la comunicación en contextos reales, dando un manejo fluido (mas no preciso) de la misma, y asegurando un desempeño suficiente en situaciones no controladas, como las del aula. En otras palabras, el aprendizaje orientado por este enfoque puede catalogarse como auténtico y significativo, gracias a la estrecha conexión que existe entre el proceso de aprendizaje y el contexto.



2.2.1. Generalidades

De acuerdo con Kuhl (2004), la actividad comunicativa a través del intercambio social tiene alta trascendencia en el aprendizaje de las regularidades relacionadas con el estímulo (entrada, *input*) lingüístico, definido éste como el conjunto de todas las formas lingüísticas (palabras, contextos, entre otros) a las que se ve expuesto el aprendiz durante la adquisición del lenguaje de interés:

“El hecho de que los infantes estén ‘preparados’ para aprender las regularidades del estímulo lingüístico cuando se involucran en intercambios sociales, pone al lenguaje en un marco neurobiológico que se asemeja al aprendizaje comunicativo en otras especies, similar al canto de los pájaros, y nos ayuda a abordar por qué los animales no humanos no avanzan hacia la formación del lenguaje”.³.

El enfoque comunicativo se ha posicionado en múltiples ambientes educativos por su injerencia en ambientes de aprendizaje colaborativos. Se considera, entonces, que la prioridad en el proceso de aprendizaje de la lengua debe estar en el uso adecuado de las cuatro habilidades comunicativas, a saber: escucha (*listening*), lectura (*reading*), escritura (*writing*) y habla (*speaking*). Para el desarrollo de estas habilidades de manera adecuada, se definen actividades prácticas rutinarias y no rutinarias, esto es, tareas de práctica para la revisión conceptual, y tareas de aplicación para el reconocimiento de patrones en contexto.

Es importante recordar que, bajo este enfoque, lo primordial es la transmisión de un mensaje o idea para el emisor, así como su claridad y entendimiento para el receptor. De este modo, la exactitud en los términos empleados y la

³ Fragmento original: “The fact that infants are ‘primed’ to learn the regularities of linguistic input when engaged in social exchanges puts language in a neurobiological framework that resembles communicative learning in other species, such as songbirds, and helps us to address why non-human animals do not advance further towards language”. Traducción de la autora.



precisión en la estructura pasan a un segundo plano, para dar cabida a la idea en bruto como herramienta comunicativa.

2.2.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional

Ha habido múltiples estudios alrededor de este enfoque, dado que ha sido considerado hasta ahora como uno de los más impactantes en términos de efectividad a la hora de adquisición de habilidades de comunicación oral en una nueva lengua. En palabras de Oxford, Lavine y Crookall (1989),

“El enfoque comunicativo incita implícitamente a los aprendices a tomar mayor responsabilidad en su propio aprendizaje y a usar una amplia gama de estrategias de aprendizaje del lenguaje. Las estrategias de aprendizaje del lenguaje son acciones, comportamientos, pasos, o técnicas – tales como la búsqueda de compañeros de conversación en la lengua de interés, o la automotivación para enfrentar una difícil tarea de esta lengua – usadas por los aprendices para mejorar el aprendizaje”⁴.

Así, es posible mencionar que algunos de los efectos generados en el estudiante a raíz del establecimiento de su proceso de aprendizaje desde el enfoque comunicativo, son bastante similares a los que se esperan desde el ya mencionado enfoque cognitivo. Esto permite sugerir la integración de ambos enfoques en un proceso de aprendizaje que favorezca procesos cognitivos diversos e incluyentes, y que a su vez estimule la conformación de procesos de pensamiento sólidos a través de hábitos de trabajo consciente y realimentado.

Bax (2003) describe la popularidad del enfoque comunicativo citando a Mitchell (1994), quien menciona que este enfoque es ampliamente acogido gracias a su versatilidad, pues facilita la corrección de las falencias o defectos surgidos del aprendizaje a través de otros métodos más

⁴ Fragmento original: “The communicative approach implicitly encourages learners to take greater responsibility for their own learning and to use a wide range of language learning strategies. Language learning strategies are actions, behaviors, steps, or techniques-such as seeking out target language conversation partners, or giving oneself encouragement to tackle a difficult language task-used by learners to enhance learning”. Traducción de la autora.



tradicionales, tales como el *Grammar–Translation Method* y el *Direct Method*⁵. Sin embargo, asegura que la aplicación de este método sin conocimiento de las bondades de los demás métodos, puede traer consigo una actitud de suficiencia que no permitirá la conexión con otros saberes y/o estrategias de aprendizaje; puede afirmarse entonces que, en otras palabras, cerrará la posibilidad de colaboración y revisión de saber – tanto conceptual como aplicado – en ambientes de aprendizaje colectivos, lo cual desfavorecerá la construcción de conocimiento referencial de manera comunitaria, y con esto, aún más dificultades para asegurar la comprensión conceptual y procedimental de manera generalizada y completa.

2.2.3. Relación epistemológica con la matemática

Una de las concepciones que a la fecha ha regido en ambientes educativos locales, ha sido el mantenimiento del silencio y la individualidad a la hora de aprender la matemática, tanto en el estudio de definiciones como en la aplicación de fórmulas a través de ejercicios propuestos, en lugar de dar una oportunidad a la colaboración efectiva en el marco de la comprensión de una situación dada; la observación ha permitido evidenciar que a la fecha se ha dado prioridad a la obtención de un producto terminado durante una sesión de aprendizaje, más que a la definición de procesos de pensamiento, hábitos y rutinas que promuevan la conformación de espacios y ambientes colaborativos, los cuales favorecen el aprendizaje significativo (Ausubel y Fitzgerald, 1961). En el marco de las bastante conocidas Competencias para el Siglo XXI, que están enmarcadas además dentro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible, se hace necesario el desarrollo de una mentalidad orientada al aprendizaje, la cual implica el lenguaje para la comunicación como herramienta para la construcción de conocimiento en comunidad (Gómez Quintero, 2017).

Esto hace relevante la afirmación de Lerman (2001), que reza:

⁵ Es posible establecer un símil entre estos dos métodos y la enseñanza tradicional algorítmica de la matemática, en la que la memorización de reglas y patrones está por encima de la creación del concepto, haciendo que la labor de razonamiento matemático se reduzca al uso de tablas y compendios de datos.



“En el aula de Matemáticas, las interacciones no deben ser vistas como ventanas en la mente, sino como contribuciones discursivas que pueden impulsar a otros a acrecentar su participación en el pensar/hablar matemático, en sus zonas de desarrollo próximo. La zona de desarrollo próximo de Vygotsky es tanto un marco para el análisis del aprendizaje como una metáfora para la interacción hacia el aprendizaje”.⁶

Siendo así, el enfoque comunicativo guarda relación con el aprendizaje de la matemática en tanto asegura la verificación conceptual asociada a la solución de situaciones que involucran su notación y lenguaje. Indica, entonces, la necesidad de favorecer la colaboración durante las etapas de aplicación conceptual, con el fin de garantizar la revisión del trasfondo que tiene la adquisición de términos referenciales en cada estudiante y así evaluar y realimentar de manera pertinente y confiable los procesos de pensamiento individuales y grupales.

Una práctica que fomenta esta consolidación de conocimiento en comunidad es el pensamiento en voz alta durante la resolución de problemas, la cual es empleada en el modelo educativo de Singapur dentro del aprendizaje metacognitivo de la matemática (MEN, s.p.i.). A lo largo de este documento, la articulación discursiva se convierte en complemento de la línea de razonamiento, promoviendo la revisión de las estructuras semióticas que subyacen a los planteamientos realizados para la interpretación y solución de problemas⁷.

⁶ Fragmento original: *“In the mathematics classroom, interactions should not be seen as windows on the mind but as discursive contributions that may pull others forward into their increasing participation in mathematical speaking/thinking, in their zones of proximal development. Vygotsky’s zone of proximal development is both a framework for the analysis of learning and a metaphor for the learning interaction”*. Traducción de la autora.

⁷ Los problemas referidos en este párrafo son, preferentemente, no rutinarios, dado que involucran una mayor carga cognitiva y demandan una revisión más exhaustiva de la línea de razonamiento para la definición del modelo de solución. No obstante, puede ser empleado en la solución de problemas rutinarios para afianzar la creación de hábitos de trabajo en el aula.



2.3. ENFOQUE DE ENSEÑANZA DEL LENGUAJE BASADO EN LA COMPETENCIA (COMPETENCY-BASED LANGUAGE TEACHING)

Este enfoque es considerado la base del modelo educativo en diferentes países, incluido Colombia (MEN, 2011). Es notorio el interés de establecer dinámicas de aprendizaje basadas en competencias, atendiendo a las características de la sociedad actual, y por supuesto, a las condiciones culturales bajo las cuales cada individuo y comunidad deba desenvolverse bajo el marco de una situación a resolver, sea pregunta, problema o proyecto. El aprendizaje lingüístico no se escapa a esta necesidad, puesto que su uso depende notablemente de las necesidades impuestas por el medio.

2.3.1. Generalidades

De acuerdo con Richards y Rodgers (2002), el enfoque de enseñanza basado en la competencia se diferencia de los otros enfoques en que se centra en el resultado final del proceso, más que en la entrada del mismo; esto significa que en el proceso de aprendizaje se puede emplear todo saber disponible para la resolución de las cuestiones propuestas, puesto que el foco estará puesto en la ejecución de las estrategias para el cumplimiento de un reto de aprendizaje.

Dos de los puntos de mayor énfasis en la educación actual, corresponden a la facilidad para la comunicación con pares de cualquier parte del mundo, en aras de la creación de contenidos que construyan conocimiento cada vez más pertinente, y de la solución de necesidades puntuales que puedan ser aprovechadas por varias comunidades; y la afinidad y vinculación a carreras que promuevan el desarrollo científico y tecnológico (Castro Alonso et al., 2015), puesto que se conciben como la clave para el desarrollo sostenible de las comunidades.

De esta manera se han concebido diversos enfoques y métodos basados en competencias, entre los cuales se destaca el enfoque interdisciplinario STEAM, el cual busca el aprendizaje científico y tecnológico empleando el razonamiento matemático, el pensamiento de ingeniería y las artes como herramientas. Este enfoque educativo se fundamenta en gran medida en la discusión, cada vez más amplia, acerca de cómo las características culturales, hábitos y costumbres impactan en el éxito de una estrategia,



método o modelo educativo (Milani, 2008; Gjorgjeva, 2011; Albu, 2013; Bykova, 2013; Kartashova, 2015; citados por Ge, Ifenthaler y Spector, 2015), siendo notablemente acogido en múltiples países, como Alemania, España, Estados Unidos (Martínez, 2017) y Canadá, en donde es posible encontrar múltiples centros y laboratorios para el desarrollo de productos mediante robótica educativa y similares; paradigmas significativos y casos de impacto se han visto en países asiáticos y africanos, tales como Korea, Japón, Singapur, y Egipto (El-Deghaidy, 2017).

2.3.2. Efecto en los procesos de aprendizaje de una lengua adicional

Su preeminencia creciente con el tiempo es explicada de forma precisa por Kern y Warschauer (2000):

“El foco de la instrucción se ha ampliado desde la enseñanza de estructuras gramaticales discretas para acoger a la habilidad comunicativa. La autoexpresión creativa se ha valorado por encima de la recitación de diálogos memorizados. La negociación de significado ha tomado precedencia sobre la práctica de rutinas estructurales. La comprensión ha tomado una nueva importancia, y proveer estímulos comprensibles se ha convertido en un imperativo pedagógico común. La cultura ha recibido un renovado interés y énfasis, incluso si muchos docentes siguen inseguros respecto de cómo enseñarla de la mejor manera. Los libros de texto de lengua han empezado a distinguir entre formas de lenguaje hablado y escrito, e incorporado comúnmente textos auténticos (tales como publicidad y elementos cotidianos) a lo largo de textos literarios”⁸

⁸ Fragmento original: ““The focus of instruction has broadened from the teaching of discrete grammatical structures to the fostering of communicative ability. Creative self – expression has come to be valued over recitation of memorized dialogues. Negotiation of meaning has come to take precedence over structural drill practice. Comprehension has taken on new importance, and providing comprehensible input has become a common pedagogical imperative. Culture has received renewed interest and emphasis, even if many teachers remain unsure how best to teach it. Language textbooks have begun to distinguish spoken and written language forms, and commonly incorporate authentic texts (such as advertisements and realia) alongside literary texts””. Traducción de la autora.



Se resalta que este enfoque aplica de manera significativa al aprendizaje lingüístico en adultos⁹, y se basa en el desempeño demostrado en el desarrollo de ciertas tareas establecidas para definir el nivel de dominio del lenguaje según el objetivo propuesto al inicio del proceso de aprendizaje (Gorgner y Crandall, 1982; citados por Richards y Rodgers, 2002). Al respecto, Siegal (1996) afirma que hablar bien una lengua implica que ésta sea usada de acuerdo con el contexto, alineándose con lo expresado por Bax (2003)¹⁰ sobre la necesidad de trabajar un Enfoque Contextual para involucrar las condiciones del entorno en la conformación de un ambiente de aprendizaje efectivo:

“Además, ¿cuáles son las restricciones y recursos de las interacciones del día a día en las que un aprendiz participa, en las que tanto se limita y extiende su conocimiento de una segunda lengua? Para la teoría de adquisición de una segunda lengua, no pueden ignorarse la importancia de la ‘negociación’ en las conversaciones como un paso hacia la adquisición de la segunda lengua (L2), el significado de la identidad del aprendiz en las interacciones y su lugar en las mismas (guiadas por las convenciones sociales), simplemente porque toda persona involucrada en una interacción social está en pos de su ‘cara’ (Goffman 1967). Mientras se construye una ‘cara’ dentro de una interacción, los aprendices podrían experimentar conflictos relacionados con la propiedad sociolingüística en sus L2. Adicionalmente, la preocupación con su ‘cara’ fomenta una preocupación de ser sociolingüísticamente apropiados incluso a pensar de que el desarrollo básico de la L2 pueda no estar en un nivel avanzado”¹¹

⁹ Es posible afirmar que este método se aplica principalmente en el aprendizaje de adultos, porque se presume que éstos cuentan con las bases gramaticales necesarias para la comprensión y producción de contenido en la lengua de interés.

¹⁰ Debe recordarse que Siegal (1996) enfoca sus afirmaciones en el aprendiz, mientras Bax (2003) se basa en el docente y su actitud respecto de los diversos métodos y enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de la lengua.

¹¹ Fragmento original: “Moreover, what are the constraints and resources of the day-to-day interactions that a learner participates in that both limit and extend her/his knowledge of a second language? For second language acquisition theory, noting the importance of ‘negotiation’ within conversations as a step towards L2 acquisition, the significance of the learner’s identity within interactions and her/his place within those interactions (guided by societal conventions) cannot be ignored Just as any person involved in social interaction, language learners are



2.3.3. Relación epistemológica con la matemática

El aprendizaje matemático basado en competencias surge de la necesidad de recuperar la conciencia individual y colectiva de la utilidad de la matemática en la vida cotidiana, esto es, recordar la relevancia de la matemática (Niss, 2003). En este sentido, la formulación de problemas y preguntas orientadoras para la revisión de conceptos enlazados con la situación de interés, punto fundamental de la matematización (Freudenthal, 1973 – citado por Menon, 2015; Gómez Quintero, 2017; Polya, 1965) se posiciona como estrategia de alta efectividad.

Para sustentar lo anterior, se cita el siguiente extracto del compendio realizado por Niss y Højgaard (2011) en el cual definen la competencia matemática; la misma es ilustrada a través del diagrama presentado en la Figura 2.

“Traducido en términos matemáticos, esto significa que la competencia matemática abarca el tener conocimiento, entender, hacer, usar y tener una opinión acerca de las matemáticas y la actividad matemática en una variedad de contextos en donde éstas juegan o pueden jugar un papel. Esto obviamente implica la presencia de una variedad de conocimientos factuales y procedimentales y habilidades concretas en el campo matemático, pero estos prerrequisitos no son suficientes en sí mismos para contar con una competencia matemática.”¹²

concerned with their 'face' (Goffman 1967). While constructing a 'face' within an interaction, learners might experience conflict concerning sociolinguistic appropriateness in their L2. In addition, concern with 'face' fosters a concern to be sociolinguistically appropriate even though basic L2 development may not be at an advanced level”. Traducción de la autora

¹² Fragmento original: “Translated into mathematical terms, this means that mathematical competence comprises having knowledge of, understanding, doing, using and having an opinion about mathematics and mathematical activity in a variety of contexts where mathematics plays or can play a role. This obviously implies the presence of a variety of factual and procedural knowledge and concrete skills within the mathematical field, but these prerequisites are not sufficient in themselves to account for mathematical competence.” Traducción de la autora.

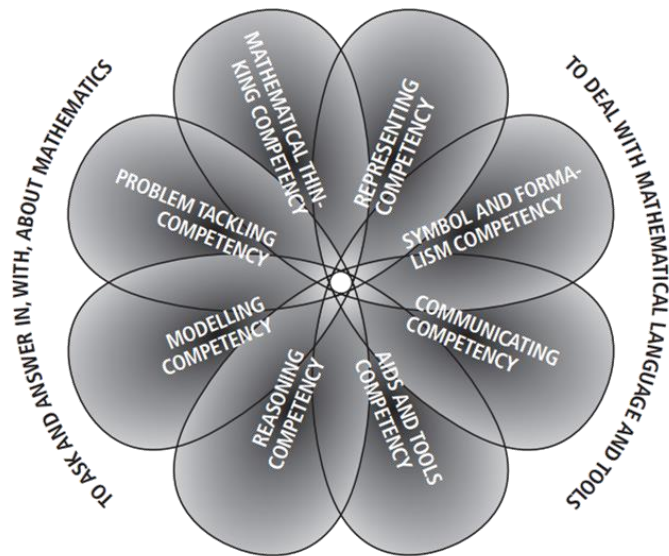


Figura 2. Modelo de competencias en el aprendizaje matemático (Niss y Højgaard, 2011)

Es necesario resaltar que dichas competencias están redactadas a partir del término *lenguaje matemático* (*mathematical language*), y describen aspectos que abarcan definiciones dadas por Duval (1999, 2006) y D'Amore (2006), en relación con las etapas de creación de objetos matemáticos y su respectivo sentido, con su visualización y construcción del concepto. Estos aspectos incluyen: representación, modelación, símbolos y formalismos, uso de ayudas y herramientas.

Por otro lado, de acuerdo con las investigaciones de Geary (2004), las cuales se soportan en las de Dehaene et al. (1999), el enfoque de enseñanza y aprendizaje por competencias aplicado a la matemática permite una revisión diagnóstica de dificultades en el aprendizaje matemático – numérico y aritmético, según se reportó en el estudio – puesto que son un primer paso para entender completamente el sustrato cognitivo de la competencia matemática, así como las dificultades de aprendizaje asociadas a la misma.



3. CORRELACIONES MATEMÁTICO- LINGÜÍSTICAS PARA EL APRENDIZAJE ESCOLAR PRIMARIO

Lightbown y Halter (1993; citados por Swain y Lapkin, 1995) mencionaron la importante distinción que Cook (1991) hizo entre la decodificación (*decoding*) y la ruptura del código (*code breaking*): mientras el primer proceso está en el entendimiento de lo que una determinada oración quiere decir, el segundo consiste en el descubrimiento de los sistemas lingüísticos que permiten tal significado en dicho contexto.

Este documento concibe que, para que el aprendizaje matemático se lleve a cabo de forma efectiva y sostenible, el proceso de ruptura de código debe anteceder al proceso de decodificación, para poder asegurar una lectura completa de cualquier situación problema dada (rutinaria o no rutinaria) a la luz del lenguaje matemático. Bajo esta visión, se formuló un modelo integrador de enfoques que considera la presencia de factores externos y una estructura cíclica a partir de la permanente realimentación de cada proceso.

3.1. ARGUMENTO INICIAL

El aprendizaje lingüístico parte de la interpretación de símbolos y patrones (orales y escritos) que se asocian a una labor comunicativa, establecida en comunidad. El primer acercamiento del infante a la lengua materna, se da a través de la comunicación oral, la gestualización y la manipulación de objetos concretos; durante esta manipulación, se hace visible el desarrollo de un sentido del número (Dehaene, 1997), a partir del cual empieza a consolidarse un protopensamiento matemático desde la identificación de cantidades. Cuando esta experiencia se une a la conciencia propioceptiva y posicional en un espacio tridimensional, el sentido numérico adquiere un nuevo significado, puesto que se conforma una nueva estructura para la interpretación del número y la cantidad.

El proceso de aprendizaje de la matemática requiere, a medida que se establece una conciencia numérico-espacial, la definición de convenciones y marcos de referencia para la construcción de un mensaje teóricamente unívoco. En otras palabras, se hace menester un sistema de traducción sobre el que se sintetizan observaciones respecto de las relaciones numéricas evidenciadas en términos de cantidades y localizaciones.



3.2. MODELO PROPUESTO

Los enfoques y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de otras lenguas, tienen como base el lenguaje natural, y se enfocan en la configuración de patrones y esquemas lingüísticos mediante la necesidad de comunicar ideas en la lengua objeto de estudio. Recordando el trabajo de Wearne y Hiebert (1988), pueden adaptarse las prácticas de los diferentes enfoques a diferentes ciclos del aprendizaje matemático, a saber (Figura 3).

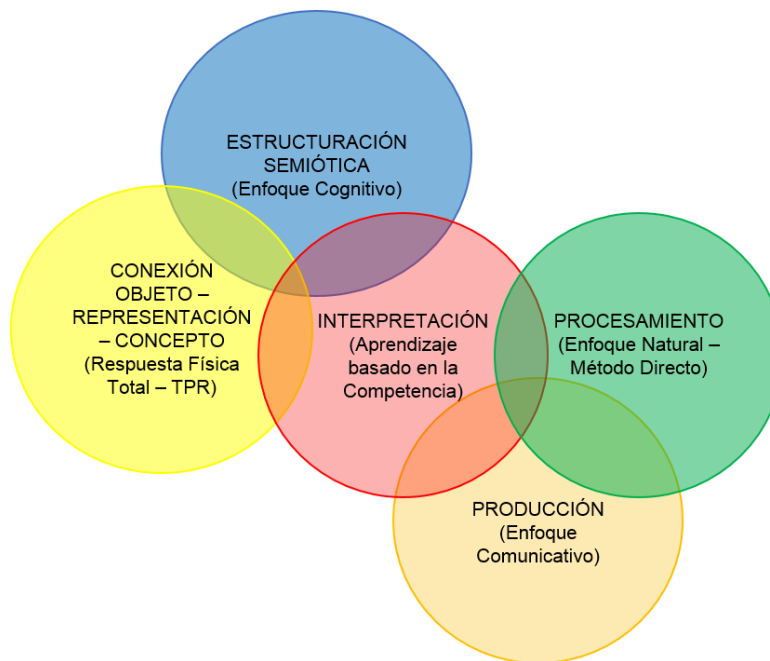


Figura 3. Modelo propuesto – Estructura general

El modelo propuesto comprende cinco fases o estaciones representadas como procesos cíclicos, con intersecciones en tareas de verificación y control que regulan la continuidad y



solidez del proceso de enseñanza y aprendizaje, condiciones que son entendidas desde la concatenación conceptual y procedimental durante el proceso formativo, así como desde la correspondencia y aplicación en la solución de situaciones problema, tanto rutinarias como no rutinarias, a través de estrategias de modelación fundamentadas en la experiencia previa.

Los ciclos que constituyen el modelo, son:

3.2.1. Ciclo de conexión objeto – representación – concepto

La interacción con el objeto/categoría de interés determina la conformación de un vínculo sólido entre el objeto, su representación mental y su representación semiótica (Duval, 1999; D'Amore, 2007). Así las cosas, se hace necesaria la interacción permanente con objetos y ubicaciones, promoviendo su manipulación y orientando la creación precategorial mediante el uso de nombres, acciones y sinónimos. En palabras del profesor Rodríguez (2017), enunciando protoprocesos que favorezcan la asociación conceptual con la manipulación concreta y el desempeño motriz (Andersen, 1995).

La generación de protoprocesos está basada en la identificación de términos que señalan acciones en tiempo y espacio, esto es, la identificación verbal adscrita a la evaluación de objetos en el entorno de interés que constituye el marco de referencia sobre el cual se desenvuelve el individuo. Por tanto, se requiere determinar una secuencia que favorezca la caracterización del objeto en el contexto referencial.

La propuesta para este ciclo inicial de enseñanza y aprendizaje, se muestra en la Figura 4.

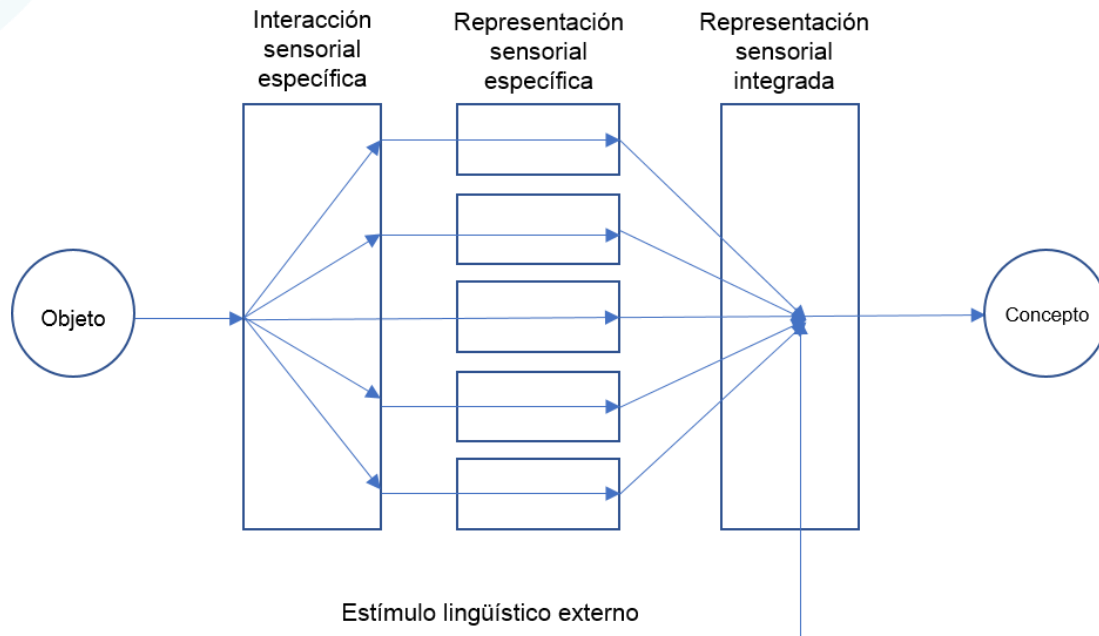


Figura 4. Ciclo de conexión objeto–representación–concepto

El modelo plantea un primer ciclo de tres etapas para la conformación del concepto a partir del objeto de interés con el que el ser humano en su infancia interactúa: en primera instancia, la relación entre el objeto y el individuo en labor de aprendizaje comienza con una interacción sensorial, mediada por la acción de cinco sentidos – vista, tacto, oído, olfato y gusto – que actúan como filtros de atributos sobre el objeto y establecen una descripción específica del mismo. Con esta descripción, el individuo crea una representación del objeto de interés para cada una de las descripciones realizadas a partir de la interacción sensorial específica inmediatamente anterior; el conjunto de atributos descubierto por cada sentido mediador, promueve la construcción de un modelo mental que responde a las características encontradas en dicho proceso interactivo¹³.

¹³ Es importante mencionar que el nivel de detalle y precisión del modelo está estrechamente ligado al tipo de interacción sostenida con el objeto de interés, la cual implica parámetros tales como el tiempo de exposición al objeto, estímulos externos simultáneos, secuencia de la interacción sensorial específica, entre otros.



Posteriormente, estos modelos específicos son superpuestos para la conformación de un modelo representativo sensorial integrado, que favorezca el entendimiento simultáneo de los atributos hallados durante la interacción sensorial inicial. Es a través de esta representación integrada del objeto que se configura el *concepto* del mismo, entendido éste como su nominación a través de la reunión de sus atributos en el contexto de un marco de referencia dado¹⁴.

Además, se reconoce la influencia de un agente lingüístico externo que enriquece el proceso de construcción del concepto mediante la asignación de una palabra como referente sonoro para evocación del modelo; dicha palabra se arraiga en el pensamiento del individuo a través de la repetición durante la sesión interactiva, favoreciendo la creación de registro memorístico.

Furner, Yahya y Duffy (2005) formulan 20 maneras de enseñar matemática de una manera inclusiva, y entre estas alternativas plantean el uso del enfoque TPR – *Total Physical Response* – como herramienta de importancia. Dado el uso de instrucciones y comandos acompañados de acciones ilustrativas o modeladoras de dichas indicaciones, sugieren su uso en la ilustración de problemas matemáticos de cara a la solución de problemas; este enfoque orienta además el diseño de actividades de interacción con objetos y entornos, haciendo que la comprensión del concepto se lleve a cabo de forma, en cierta medida, inmersiva. Se considera, adicionalmente, viable para la apreciación inicial de figuras geométricas, la introducción a ciertos signos matemáticos y, muy especialmente, el reconocimiento de direcciones y puntos cardinales, así como desplazamientos y rotaciones; más adelante, puede emplearse en el seguimiento de instrucciones que involucran ejercicios de sinonimia y antonimia a la par con el uso de manipulativos y otros objetos del entorno.

Recursos que se encuentran vigentes en las aulas preescolares, como canciones y rondas, tienen una poderosa influencia en el aprendizaje de estos conceptos espaciales, al comprender comandos sencillos y directos, los cuales pueden ser fácilmente representados a través del cuerpo, e imitados por los estudiantes. La introducción gradual de objetos varios, tanto cotidianos como otros manipulativos, promoverá la interacción multisensorial ya mencionada, y la correspondiente

¹⁴ El marco de referencia, es decir, el ambiente en el cual se desenvuelven el individuo y el objeto de estudio, puede definirse como el primer concepto desarrollado y adquirido de manera natural, por inmersión.



comparación entre dichos objetos para la definición de características comunes y diferenciadores, que redundarán en categorías conceptuales posteriores¹⁵. Estos dos tipos de ejercicios traen consigo el desarrollo de la orientación y la visualización espacial referidas por McGee (1979; citado por Bishop, 2008), los cuales favorecen significativamente el pensamiento matemático en etapas ulteriores.

Existen múltiples ejemplos de ejercicios que permiten fortalecer la orientación espacial de los estudiantes, para el posterior desarrollo de su visualización espacial, lo cual conlleva al fomento del conocido pensamiento espacial. Entre ellos, las rutinas de movimiento guiadas y acompañadas por comandos hablados apoyan los procesos de adquisición de términos precisos ligados a partes específicas del cuerpo y desplazamientos básicos; la siguiente canción es una buena muestra de este tipo de recursos, pues es modelada con el cuerpo a través del movimiento de pies y manos, saltos hacia adelante y hacia atrás:

*“Izquier, izquier,
Deré, deré,
Adelante, atrás,
Un, dos, tres”*

Las sesiones de educación física y deportiva, por su parte, contribuyen notablemente al desarrollo de estas habilidades físicas que se requieren para un completo dominio del espacio (Kirk y Macdonald, 1998), considerando que hay un fuerte componente de imitación y repetición (Keller, 1890), tanto de movimientos como de nombres y comandos, que ayuda a crear estructuras mentales simples (Oakley, 2014), necesarias en el desarrollo de la memoria, la ejecución de tareas simples y composición de tareas más complejas¹⁶: el trabajo de Trudeau y Shepard (2008) apoyó las investigaciones alrededor de la influencia positiva de la educación física, la actividad física en el mejoramiento del desempeño académico, asegurando

¹⁵ De acuerdo con el modelo propuesto para este ciclo, el estímulo externo suministrado por la repetición de palabras de manera paralela a la interacción con el objeto, promueve la imitación por parte del estudiante (Keller, 1890), apalancando el reconocimiento y asociación de vocablos con las representaciones construidas a lo largo de las sesiones interactivas.

¹⁶ En ese sentido, las sesiones de aprendizaje relacionadas con este ciclo, demandan una estrecha conexión con los planes desarrollados para el desarrollo físico y motor de los estudiantes.



incluso que la reducción de las horas asignadas a la educación física en el programa educativo regular, con el propósito de reubicarlas en otras asignaturas “más relevantes”, no garantiza en modo alguno el éxito en éstas, sino que contribuye al detrimento en la salud de los estudiantes¹⁷.

La siguiente actividad corresponde a una propuesta de cómo emplear la actividad física – no necesariamente intensa – en el desarrollo del concepto de sistemas de numeración, particularmente el sistema decimal¹⁸:

El docente muestra a los estudiantes una determinada cantidad de objetos¹⁹, que deben ser empacados para enviarse a una misión especial, por ejemplo, donativos para una comunidad vulnerable. Las personas a cargo del envío – dice el docente – deben empacar y transportar los objetos ese mismo día, y necesitan ayuda para terminar a tiempo su labor, por lo cual recurren al grupo. Para lograrlo, se cuenta con bolsas y cajas; de acuerdo con las condiciones de empaque, es necesario que en cada bolsa haya 10 objetos, y que en cada caja haya 10 bolsas. Tanto cajas como bolsas deben ser selladas tan pronto el tope se cumple, o sea, cuando se cumple la cuota de 10.

Los estudiantes se disponen en equipos ordenados para empacar, unos en bolsas y los otros en cajas, asegurándose de sellar tan pronto empacan. El

¹⁷ De hecho, los autores sugieren que la preocupación de los padres debería enfocarse más en el tiempo que los estudiantes destinan a la televisión y los videojuegos por sobre la actividad física y deportiva, pues éste incide significativamente en el rendimiento escolar. Incluso, mencionan estudios en los que relacionan el tiempo dedicado a la actividad física y al deporte, con el tiempo destinado a la lectura. Estos resultados guardan relación con las premisas de Oakley (2014) alrededor de la creación de hábitos de aprendizaje.

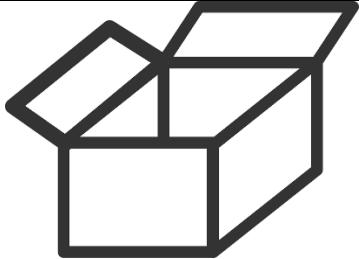
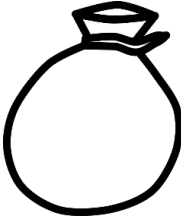
¹⁸ Esta actividad ha sido tomada y adaptada del Proyecto Numerario, realizado por la Universidad de Antioquia (2011). Puede ser adaptada para el aprendizaje del sistema de numeración binario, del sexagesimal, y de otros sistemas de numeración posicionales.

¹⁹ Pueden ser objetos idénticos o diferentes, con el propósito de revisar el concepto de relación número–cantidad, así como su independencia de la forma del objeto. Lo importante es que se trate de elementos fácilmente manipulables por los estudiantes.



registro²⁰ final se llevará a cabo en una tabla como la que sigue (Tabla 2); para el ejemplo, el objeto empacado son canicas.

Tabla 2. Ejemplo de tabla sugerida para el registro de cajas, bolsas y canicas empacadas, por equipo

 CAJAS	 BOLSAS	 CANICAS
1	4	3

Al final, el docente solicita a cada equipo la información correspondiente a las bolsas y cajas empacadas, con lo que se totalizan las cantidades de objetos, bolsas y cajas, mediante la unión de cajas, bolsas y objetos sueltos; si se logran cantidades iguales o superiores a 10, se procede empacando hasta que no sea posible llenar otra caja y/u otra bolsa.

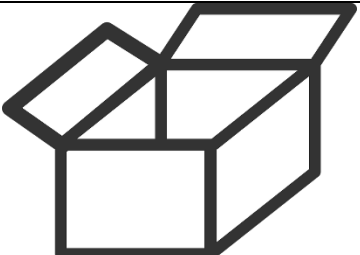
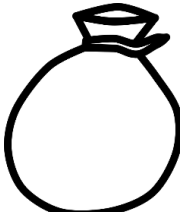
El registro se lleva a cabo de manera colectiva, con el apoyo del docente, empleando un formato similar al que se muestra en la Tabla 3. Los valores obtenidos por los estudiantes, previamente verificados, son reportados, así como

²⁰ Se sugiere este registro cuando ya se haya efectuado este proceso de empaque en varias oportunidades, y los estudiantes hayan tenido alguna relación con el reconocimiento, lectura y escritura de los dígitos.



el valor obtenido al finalizar el conteo de los empaques reunidos entre todos los grupos.

Tabla 3. Ejemplo de tabla sugerida para el registro total de cajas, bolsas y canicas empacadas

	 CAJAS	 BOLSAS	 CANICAS
Equipo 1	1	4	3
Equipo 2	2	0	1
Equipo 3	1	1	4
Equipo 4	2	0	2
TOTAL	6	5	0



Con esta información, los estudiantes pueden responder preguntas alrededor de la cantidad total de bolsas y de objetos sueltos al final de la jornada de empaque, así como respecto de la manera en que se organizaron dichas cantidades para que las cifras se “organizaran” de tal modo.

Además, las rutinas de movimiento en el espacio, coordinadas a través de la danza, la música y el teatro, acompañan el proceso propioceptivo y de orientación espacial, al promover el uso del cuerpo en su totalidad para la creación de coreografías que involucren traslaciones, rotaciones y compases, enlazados éstos con el objetivo de recrear escenarios, pensamientos y emociones (Watson, 2005). Las coreografías pueden involucrar secuencias simples de dos pasos, presentados a través de un coreógrafo guía, del mismo modo en que pueden incluir secuencias de varios pasos que requieran movimientos simultáneos de brazos, piernas, cabeza y demás, todo esto sumado a la sincronización con determinados ritmos; aquí se ven introducidos conceptos tales como: patrón, traslación, rotación, simultaneidad, desfase, y otros (Andersen, 1995).

Recordando la inferencia del referente lingüístico, es importante agregar que, durante este ciclo, la narración contribuye a la conformación de relaciones semánticas preliminares, así como al afianzamiento de constructos mentales para la posterior interpretación de escenarios sugeridos y la subsecuente solución de problemas (Casey, Kersh y Mercer Young, 2004). La lectura de relatos cortos, con mímica y/o actuación en las etapas iniciales, acompaña la transición del pensamiento concreto a uno más abstracto, en cuanto a la introducción paulatina a la creación de escenarios que permitan la visualización del relato²¹.

Más adelante, es posible desarrollar sesiones de aprendizaje con instrucciones no modeladas, pero con la introducción de un referente que permita inducir la tarea a desarrollar y/o el problema a resolver. Un ejemplo es la interacción con espejos de cuerpo entero, seguida de actividades en parejas simulando el comportamiento de un espejo: se asigna a cada estudiante un número o un rol (*sujeto* y *espejo*, por

²¹ Esta característica transicional de la narración, le hace también un recurso de gran valor en el ciclo de estructuración semiótica (ver 3.2.2. Ciclo de estructuración semiótica).



ejemplo), y se imparten indicaciones modeladas a todo el grupo. en cuanto al movimiento de pies, manos, cabeza, ojos, entre otros, del estudiante que ha asumido el rol de *sujeto*; el estudiante con el rol de *espejo* deberá responder como tal, es decir, moviendo las extremidades y partes del cuerpo opuestas a las requeridas en la indicación, con el propósito de simular el efecto de un espejo²². En este tipo de actividades, se introducen elementos del siguiente ciclo, como se verá a continuación.

3.2.2. Ciclo de estructuración semiótica

Con la verificación de los protoprocesos en el análisis numérico y espacial²³, es posible definir la estructura semántica de una oración en términos matemáticos, esto es, identificando las características de la oración – sujetos, verbos, complementos – y vinculando los correspondientes símbolos²⁴ que asegurarán la representación semiótica para la correcta formulación del enunciado. Se puede afirmar que, en este momento, puede introducirse el lenguaje simbólico para la expresión de vocablos diversos y su relación, tanto en términos lingüísticos generales como específicos matemáticos.

Para que esto sea posible, es indispensable analizar y determinar relaciones entre conceptos, los cuales han sido construidos en paralelo, es decir, no de manera necesariamente secuencial; en esta tarea, se desarrollan procesos analíticos y sintéticos que establecen nodos de atributos (Figura 5), en cuyo seno se generan nuevas lecturas de cada concepto en un formato que podría llamarse *matricial*. Así,

²² Es importante dejar claro que este ejercicio es de un nivel intermedio – alto, lo cual significa que requiere ejercicios previos de propiocepción y desplazamiento, en los que cada estudiante adquiera una mayor conciencia de su cuerpo y de la forma en que interactúa con sus alrededores.

²³ Los protoprocesos, en este caso, dan cuenta de instrucciones precisas y directas, relacionadas con desplazamientos y manipulación de objetos con miras a la modificación de la distribución de los mismos. Si bien éstos ya involucran términos asociados a comandos, no necesariamente han desarrollado los términos formales adecuados para la identificación del proceso matemático en sí.

²⁴ Debe tenerse en cuenta que el origen de los símbolos es, a su vez, producto de una conexión objeto – representación. Por esto, se hace importante la labor de presentar los símbolos a través de su origen y significado, para asegurar su cohesión y coherencia en los enunciados a formular.

se logra la creación de un *macroconcepto*, una estructura más compleja conformada por conceptos ya construidos mediante el ciclo anterior.

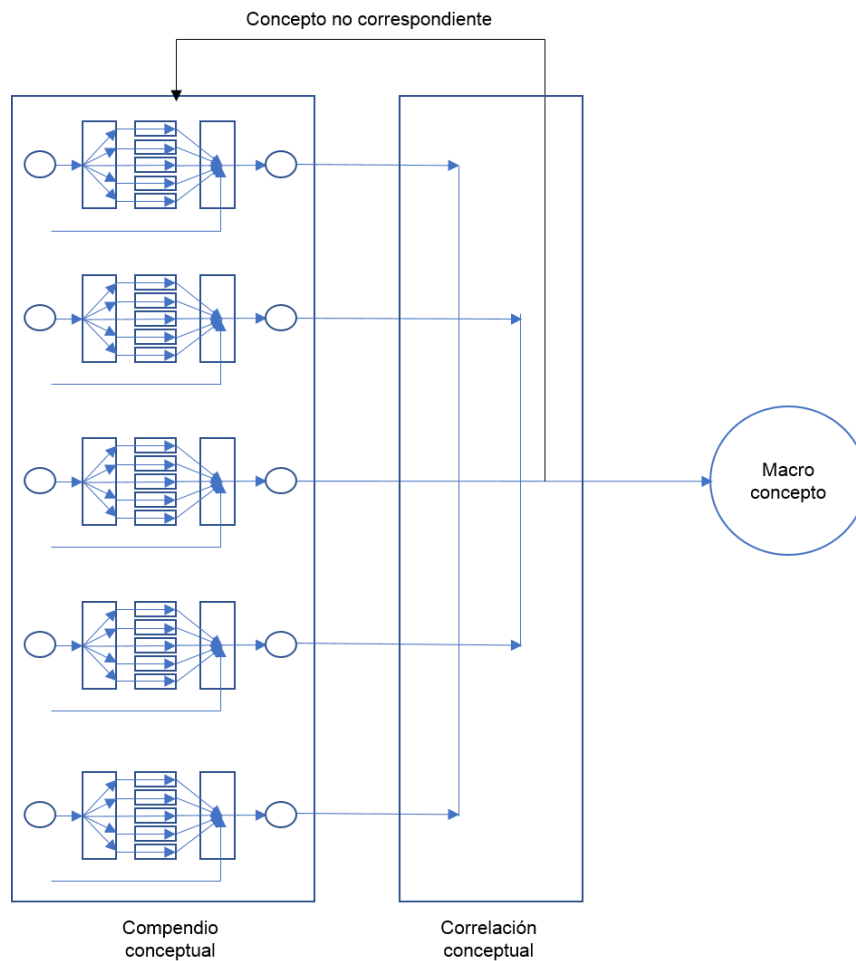


Figura 5. Ciclo de estructuración semiótica: conformación del macro concepto

El compendio conceptual puede catalogarse como una tarea de listado, comprendida en los primeros peldaños de la taxonomía revisada de Bloom (véase 4.1. FUNDAMENTO INICIAL PARA EL DISEÑO DEL PROGRAMA DE APRENDIZAJE. TAXONOMÍA REVISADA DE BLOOM), por lo que algunas de las actividades que promueven su desarrollo, consisten en la creación de listas de



objetos y características – color, forma en tres vistas, sabor, sonido, textura, olor – de los mismos; éstas ayudan a descubrir diversos patrones morfológicos y sus relaciones con el uso de los diversos utensilios que se hayan destinado a este trabajo²⁵.

El siguiente modelo ilustra una actividad en la que es posible visualizar el proceso de compendio conceptual

El docente llega al aula con una caja cargada de objetos varios, los cuales incluyen: sólidos y polígonos en plástico y madera, perfiles de letras y dibujos que encajan en tapetes de espuma, lápices, colores, pelotas de hule, y más. La historia que contextualiza el reto está en que los objetos están mezclados porque estuvieron en una convención (feria, fiesta o cualquier suceso), y para volver a sus lugares, deben reunirse con sus familias. El reto para los estudiantes es, identificar a los miembros de cada familia, y organizar a todos los objetos en las mismas. Finalmente, tan pronto éstos sean completamente identificados, pueden asignarles un nombre.

Se invita a los estudiantes a trabajar conformando equipos, con el fin de finalizar la tarea más rápidamente y comprobar, entre todos, la pertenencia de los objetos a cada familia. Se aclara que hay familias que están emparentadas, así, hay familias que forman una familia más grande. Pueden usar lápiz y papel para representar sus ideas de las familias y planear cómo resolver el reto más rápidamente. El docente estará visitando los diferentes equipos para preguntar acerca de sus hallazgos, y sólo puede hacer preguntas para guiar el proceso ayudando a encontrar pistas.

Al finalizar, todo el grupo decidirá cuál es la familia más grande y cuál la más pequeña, cómo reconocieron a cada uno de sus miembros y en qué momentos se hizo necesaria alguna clase de consenso. Determinarán la totalidad de objetos, y la cantidad asociada a cada familia. El registro se llevará a cabo de manera general con la ayuda del docente.

Debe considerarse que el dibujo constituye un recurso de amplia influencia en este tipo de procesos, al promover la transición de la representación integrada del objeto

²⁵ Estas actividades permiten introducir conceptos básicos relacionados con la teoría de conjuntos.



a la creación de una representación compartida, que puede ser sometida a socialización y refinamiento a través de las representaciones de sus pares, en un proceso intersubjetivo (Lerman, 1996).

A continuación, se presenta otra actividad de clase asociada a este proceso:

El docente marca varios lugares en los alrededores del aula con un distintivo, y propone a los estudiantes, distribuidos por equipos y también con un distintivo asignado, encontrar dichos sitios, iniciando en el aula; cada equipo deberá encontrar el lugar con su respectivo distintivo. Tan pronto esto ocurra, los estudiantes regresarán al aula y, en los mismos equipos iniciales, decidirán cuál es la mejor ruta para llegar al sitio desde el aula; plasmarán su ruta en una hoja de papel, estimando la cantidad de pasos que necesitarán para llegar allí. Cuando el docente lo indique, los estudiantes le entregarán sus dibujos.

El docente, posteriormente, entregará cada dibujo a un equipo diferente, con la instrucción de que lo use como mapa para llegar al lugar establecido. En este punto, no puede haber intercambio de información entre los equipos, sino sólo al interior de cada uno. Cuando lo encuentren, regresarán al aula y evaluarán la utilidad del mapa recibido para encontrar el punto de interés, así como la estimación de los pasos necesarios para llegar al sitio.

En el cierre de la actividad, el docente proyecta sobre el tablero un mapa del área, en el cual están señalados los distintivos y el aula como punto de salida. Con los estudiantes, se discute acerca de cuáles pudieron ser las mejores rutas para llegar a cada punto distintivo, marcando dichas rutas con marcadores sobre la proyección; después, se compararán con las diseñadas al inicio, y se plantearán las conclusiones del ejercicio.

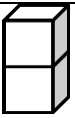
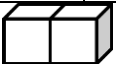
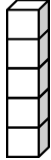
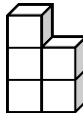
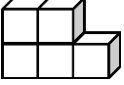
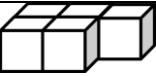
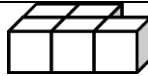
Los retos de construcción con piezas y bloques, además, ayudan a fortalecer procesos de comunicación mediante sinonimia, simetría, analogía y afines. Éstos pueden comunicar desarrollo en el proceso lingüístico, así como en el proceso de visualización espacial, que favorece en amplia medida el razonamiento numérico. A continuación, se muestran varias situaciones de aula en las que éstos se ven involucrados:



Situación I²⁶

Los estudiantes cuentan con varios bloques en sus respectivos puestos de trabajo. El docente se prepara para dar una serie de instrucciones colectivas, las cuales debe seguir cada estudiante de manera individual; dichas instrucciones involucran determinados resultados en la disposición final de los bloques (Tabla 4), cuya obtención será verificada con los estudiantes a través de la observación y el diálogo sobre el proceso²⁷.

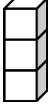
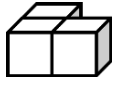
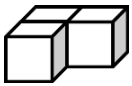
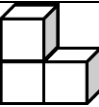
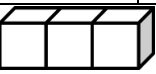
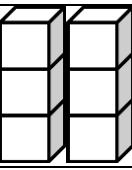
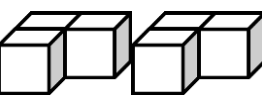
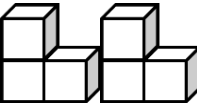
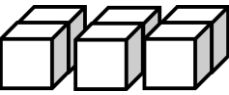
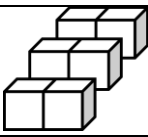
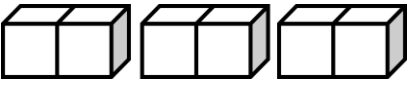
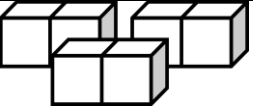
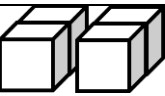
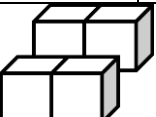
Tabla 4. Ejercicio de construcción dirigida con bloques – Algunos resultados posibles

INSTRUCCIÓN	RESULTADO POSIBLE	
Pon un bloque sobre la mesa		
Agrega un bloque		
		
Añade tres		
		
		

²⁶ Esta situación ha sido tomada y adaptada del taller dirigido por el profesor Hugo Rodríguez Carmona en el 8° Congreso Estatal de la Enseñanza de las Matemáticas, llevado a cabo en la ciudad de Puebla (México), del 13 al 14 de octubre de 2017.

²⁷ En caso de que se encuentre una disposición diferente a las posibles, el paso a seguir es revisar con el estudiante el proceso que le llevó a dicha solución, con el fin de evaluar alguna particularidad en el proceso, así como con el propósito de completar y refinar la rúbrica de verificación.



Remueve dos		
		
		
Duplica el resultado a la derecha		
		
		
Reparte en tres grupos iguales		
		
Elimina dos bloques		
		

El propósito de esta actividad es la verificación de protoprocesos aritméticos de adición, sustracción, producto y cociente, mediante el uso de sinónimos en las instrucciones, así como a través de su relación con la conformación de arreglos de objetos en el espacio.



Situación II²⁸

Los estudiantes se organizan en parejas, cada uno con una libreta y un lápiz, dándose mutuamente la espalda. El reto para cada estudiante consiste en representar gráficamente un determinado objeto o sistema, siguiendo la descripción brindada por su par, quien a su vez debe cumplir con ciertas condiciones para su relato. Con esto en mente, el docente entregará a cada uno un conjunto de tarjetas (de 3 a 5 tarjetas por estudiante), cada una de las cuales contiene una ilustración correspondiente a la representación de un determinado objeto o sistema, y una lista de palabras prohibidas que no podrán ser usadas en la descripción. Un estudiante inicia con su descripción mientras el otro representa gráficamente dicho objeto o sistema en la libreta según lo que escucha. Al finalizar, comparan el resultado con el original, y alternan los roles, hasta que terminen sus tarjetas.

Un ejemplo de la tarjeta básica por estudiante, se encuentra en la Figura 6.

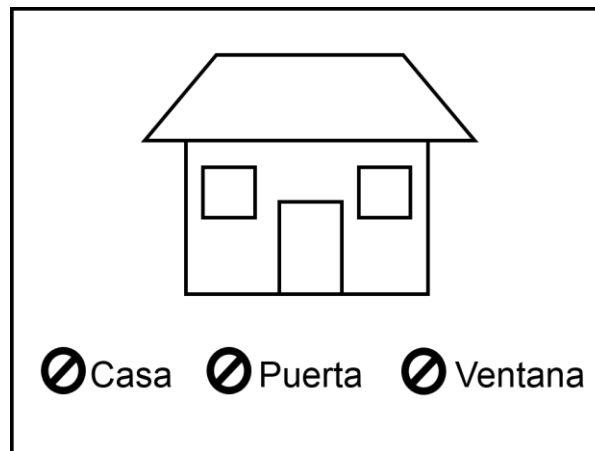


Figura 6. Situación II – Ejemplo de tarjeta con objeto o sistema a representar (representación gráfica y palabras prohibidas)

²⁸ Esta situación ha sido tomada y adaptada del curso *Cambridge International Examinations Professional Development course in Cambridge Primary Mathematics*, dirigido por el profesor Paul Debenham, realizado en Medellín (Colombia), durante el mes de enero de 2014.



El propósito de esta actividad es la verificación de protoprocesos geométricos relacionados con el reconocimiento de formas básicas, posiciones relativas, mediante el uso de sinónimos en las instrucciones, y evitando el uso de referentes cotidianos para llevar a cabo una labor de conceptualización más desafiante y cercana a los conceptos formales.

Situación III²⁹

Los estudiantes cuentan con varios bloques de dos colores diferentes, simulando dos equipos; estos grupos de bloques se encuentran a ambos lados de una línea recta que divide el espacio de trabajo en dos. El docente cuenta con dos bolsas con fichas o balotas marcadas con los números del 0 al 9, una para cada equipo, con el fin de dar a conocer la cantidad de bloques que serán ubicados justo frente a la línea, a cada lado. Al recibir la señal, los estudiantes enfrentarán ambos grupos de bloques, y determinarán cuáles cruzarán la línea, ya sean los del primer o los del segundo equipo.

Para cada caso, los estudiantes registrarán en sus libretas el esquema de la situación, mostrando al inicio cuántos bloques de cada color fueron destinados al enfrentamiento, y cuántos atravesaron la línea límite. Un ejemplo de la representación solicitada, se presenta en la Figura 7.

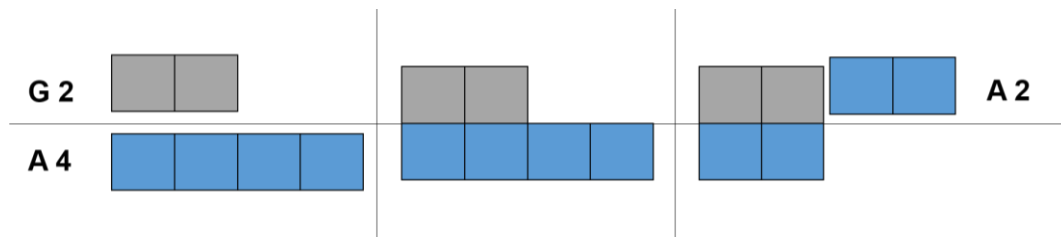


Figura 7. Situación III – Ejemplo de representación gráfica para el registro del “enfrentamiento” de bloques, indicando arreglos iniciales y resultados finales

²⁹ Esta situación ha sido tomada y adaptada del taller dirigido por el profesor Hugo Rodríguez Carmona en el 8° Congreso Estatal de la Enseñanza de las Matemáticas, llevado a cabo en la ciudad de Puebla (México), del 13 al 14 de octubre de 2017.



El propósito de esta actividad es la creación y afianzamiento de estructuras triádicas mediante la construcción de analogías entre variaciones geométricas – representadas en traslaciones, en este caso – y variaciones aritméticas; se concibe esta actividad como una forma de proponer la similitud entre el desplazamiento de los bloques en el plano y la sustracción de números enteros.

Posterior a este proceso, y siguiendo un esquema similar, los macro conceptos que han sido concebidos en paralelo se reúnen y someten a un tratamiento *matricial* para formar los nodos de conceptos que aseguran la superposición de los mismos en múltiples dimensiones (Figura 8) constituyendo lo que se conoce como *sistema semiótico*, el cual contiene toda la información relacionada con un contexto específico y los objetos que en él interactúan³⁰.

Este ciclo, en suma, recoge la información que será empleada posteriormente en la comprensión y redefinición de situaciones en contextos diversos, bajo la construcción de estructuras triádicas (Duval, 1999) – sugiriéndose el posterior planteamiento de las multiádicas – que conllevan a la conformación y consolidación de sistemas de equivalencias desde varias perspectivas.

³⁰ El ciclo anterior, Conexión objeto – representación – concepto, involucra al ambiente como concepto adquirido en las primeras etapas de interacción del individuo, sin un dominio de la técnica para tal fin. Esta información se adquiere inicialmente de forma básica, y se refina conforme se hace frecuente – incluso habitual – el desenvolvimiento en ese medio. De tal manera, el sistema semiótico cuenta con un marco espacio-temporal dinámico, en el cual se depuran las interacciones entre atributos y conceptos, refinando los nodos que permiten la formulación de características compartidas, equivalencias y analogías.

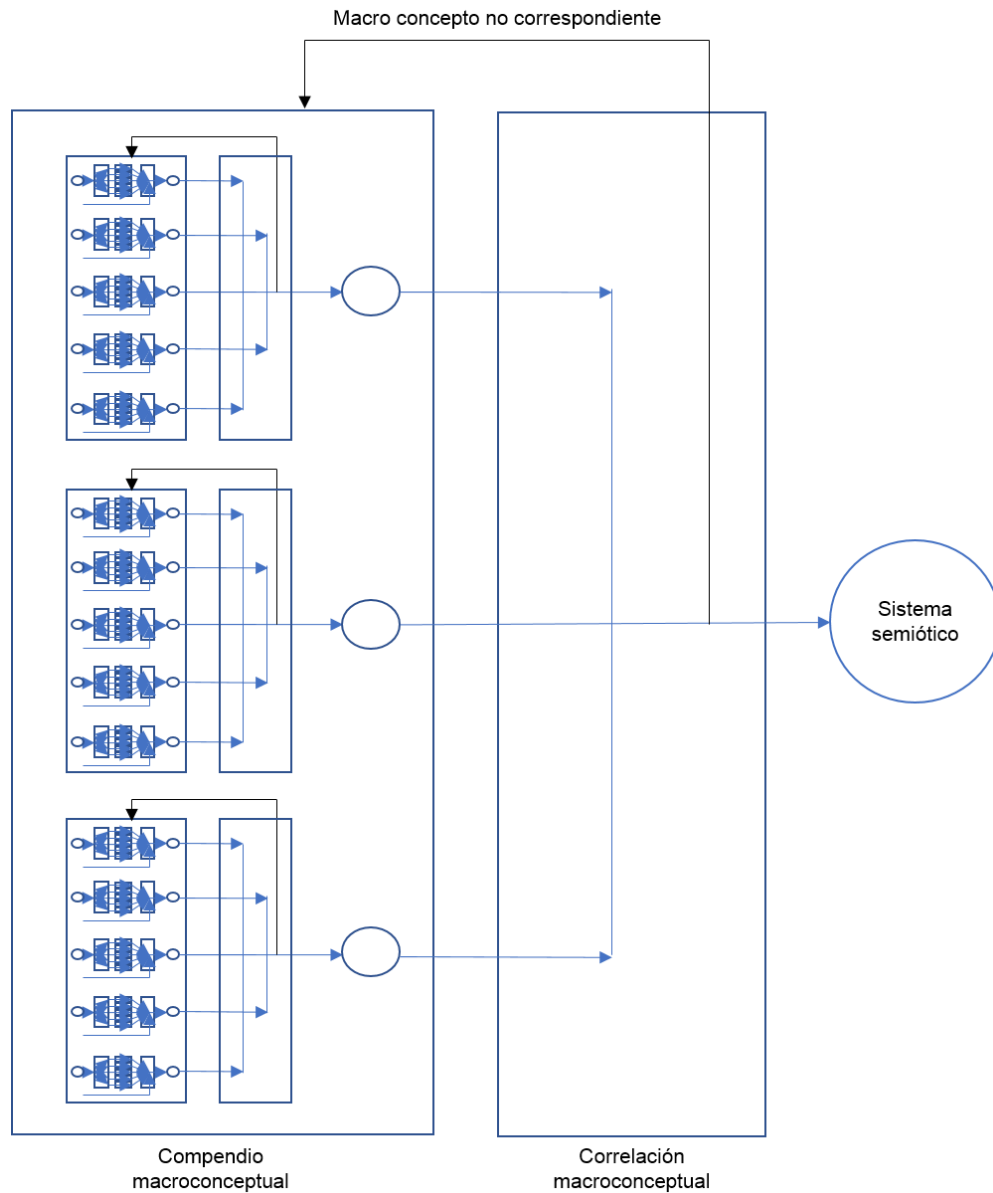


Figura 8. Ciclo de estructuración semiótica: conformación del sistema semiótico



Este ciclo, en suma, recoge la información que será empleada posteriormente en la comprensión y redefinición de situaciones en contextos diversos, bajo la construcción de estructuras triádicas (Duval, 1999) – sugiriéndose el posterior planteamiento de las multiádicas – que conllevan a la conformación y consolidación de sistemas de equivalencias desde varias perspectivas.

Dentro de las actividades que facilitan el desarrollo de este sistema semiótico, están los análisis de patrones, tanto numéricos como geométricos, así como la revisión de referentes gráficos, escritos, aritméticos, entre otros, para proponer modelos de representación y solución. Asimismo, las actividades en donde se buscan similitudes y diferencias, al igual que el uso de analogías para establecer patrones en diversos contextos, permitiendo determinar los conceptos y macroconceptos al interior de un determinado sistema.

Actividades como el coloreado de *doodles*, mandalas y similares, facilitan la identificación de un patrón gráfico (Figura 9), mientras los mensajes codificados – inicialmente con símbolos para la traducción, y más adelante guiados por una estructura textual familiar y cotidiana, como una agenda o lista – permiten el reconocimiento de patrones alfanuméricos y geométricos; en este último caso, se pueden emplear sistemas de codificación basados en símbolos y caracteres alfanuméricos (Figura 10).



Figura 9. Composiciones gráficas para la identificación de patrones gráficos a partir del coloreado³¹.

³¹ La complejidad de la figura favorece la apreciación de diversos patrones gráficos, los cuales serán más sofisticados a medida que las imágenes involucren configuraciones menos evidentes y predecibles.

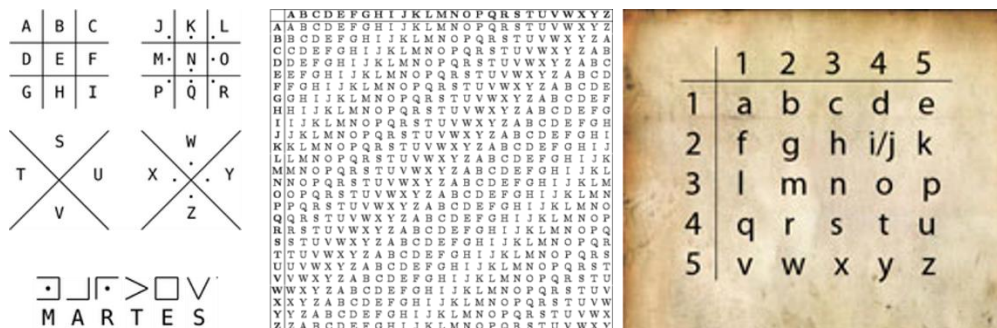


Figura 10. Sistemas alfanuméricos empleados para la codificación de mensajes y la identificación de patrones alfanuméricos y geométricos.

En etapas posteriores, es posible proponer textos continuos y discontinuos para la socialización de conceptos y macroconceptos, evidenciándose a su vez las representaciones y estructuras diádicas y triádicas establecidas durante la abstracción de los mismos (Figura 11)

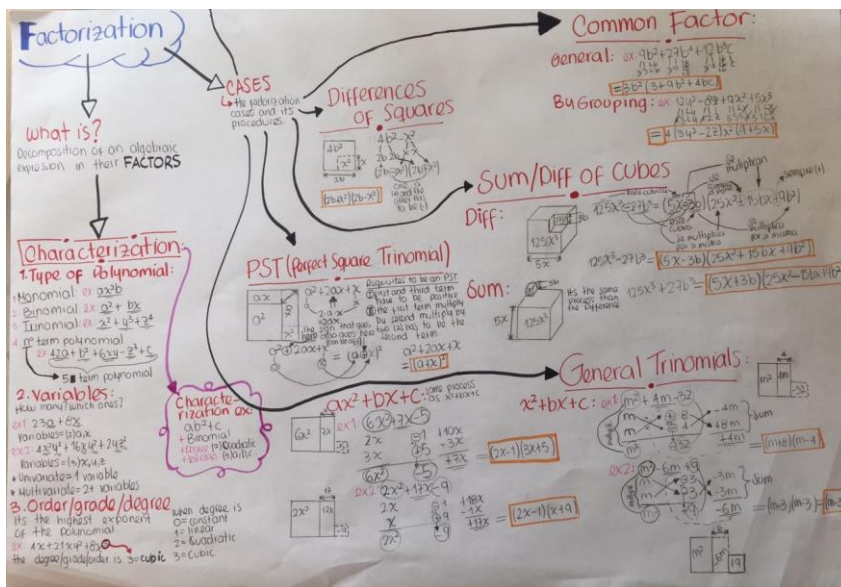


Figura 11. Textos discontinuos en la comunicación de estructuras diádicas y triádicas (Duval, 1999) – Mapa mental para el recuento de los procesos asociados a la factorización de polinomios

3.2.3. Ciclo de interpretación

Con la revisión de código semiótico, se analiza la configuración de la oración planteada, es decir, se reconoce la estructura en enunciados matemáticos con el fin de identificar los procesos asociados a los mismos, develando la representación del sistema que se intentaba describir (Figura 12).

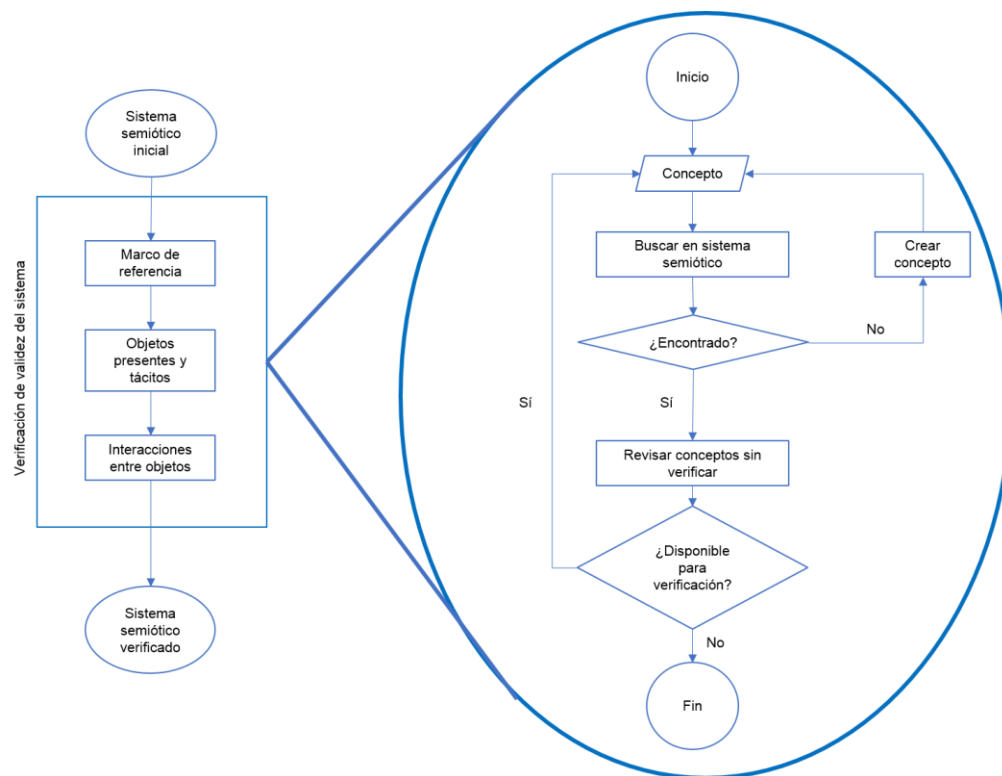


Figura 12. Ciclo de interpretación

En el contexto del ciclo de interpretación, pueden concebirse los procesos de matematización vertical y horizontal de Freudenthal (Menon, 2005), los cuales se ven respaldados además por las aseveraciones de Monsalve (1994, 1996) en las que sostiene que uno de los principales problemas (si no es la principal dificultad) en la resolución de problemas matemáticos consiste en la comprensión incompleta

de los enunciados lingüístico–matemáticos que formulan los problemas a resolver. Es en esta instancia en la que todo contexto que involucre una situación de interés para el estudio, verifica la completitud de sus parámetros y atributos, a fin de establecer si puede haber una descripción completa, o si es necesario buscar esta información.

La siguiente situación de aula permitirá ilustrar este punto:

Se presenta a los estudiantes un par de imágenes que representan el antes y el después de un objeto o sistema dado; un posible par de imágenes es presentado en la Figura 13³². Se busca establecer similitudes y diferencias entre ambas imágenes, para proceder con una revisión grupal del contexto.

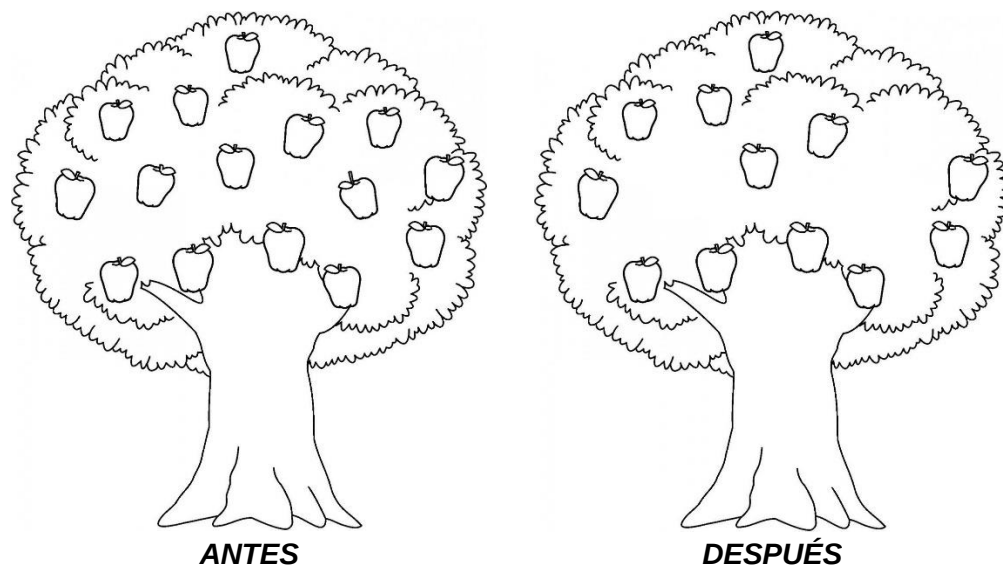


Figura 13. Comparación de objetos y sistemas – Antes y después

³² La complejidad de las imágenes empleadas en este ejercicio, incrementará progresivamente y de acuerdo con la evaluación que el docente realice.



Al describir ambas imágenes por separado, se formulan preguntas orientadoras para el reconocimiento del entorno y de las características del objeto o sistema expuesto³³, como sigue:

- *¿Cuál es el nombre más común de este objeto? ¿Tiene algún otro nombre?*
- *¿Dónde es posible localizarlo comúnmente?*
- *¿Dónde no es fácil de ubicar?*
- *¿Qué se puede encontrar fácilmente a su alrededor?*
- *¿Cómo se llama el espacio en el que se puede hallar este árbol?*
- *¿Qué similitudes hay entre la figura de **ANTES** y la de **DESPUÉS**?*
- *¿Qué diferencias hay entre la figura de **ANTES** y la de **DESPUÉS**?*
- *¿Con cuántas diferentes palabras es posible describir lo ocurrido entre ambas imágenes?*
- *¿Qué pudo generar esta diferencia? ¿Cuántas posibles situaciones pudieron ocasionar este cambio?*

*Posteriormente, se propone reflexionar y discutir acerca de cuáles tendrían que ser las condiciones para que lo anterior ocurriera a la inversa, es decir, con cuales la imagen de **DESPUÉS** aparecería en el lugar de la de **ANTES**, y viceversa. El objetivo de esta actividad es la verificación de las relaciones conceptuales y macroconceptuales desarrolladas por el estudiante para la construcción de modelos mentales que se asocien a escenarios cotidianos.*

Los estudiantes deben llevar a cabo un registro juicioso de la actividad en sus bitácoras de aprendizaje³⁴, para documentar su proceso reflexivo con miras a posteriores análisis. Este registro se hará cada vez más detallado y preciso a medida que los sistemas estudiados se hagan más complejos.

³³ En atención a la adquisición de vocabulario para los procesos posteriores de solución de problemas (véase 3.2.4. Ciclo de producción), las situaciones comparativas deben buscar la mayor conexión posible con los sistemas y entornos estudiados en otros cursos, a fin de reconectar saberes. Se pretende, en un futuro próximo, integrar el currículo de tal modo que conforme una verdadera red para el desarrollo del pensamiento sistémico.

³⁴ El registro desarrollado por los estudiantes durante las sesiones de aprendizaje debe promover la construcción conceptual, macroconceptual y semiótica individual, y al mismo tiempo establecer una estructura semiótica para la comunicación matemática posterior.

3.2.4. Ciclo de producción

Considerando el análisis previo de estructuras “gramaticales” construidas bajo condiciones dadas, se propone la utilización de estas referencias semióticas para la construcción de oraciones que describan sistemas correspondientes con el contexto local. Para la construcción de dichas oraciones, se requiere la intervención del docente en cuanto concierne a la orientación por medio de preguntas (Figura 14).

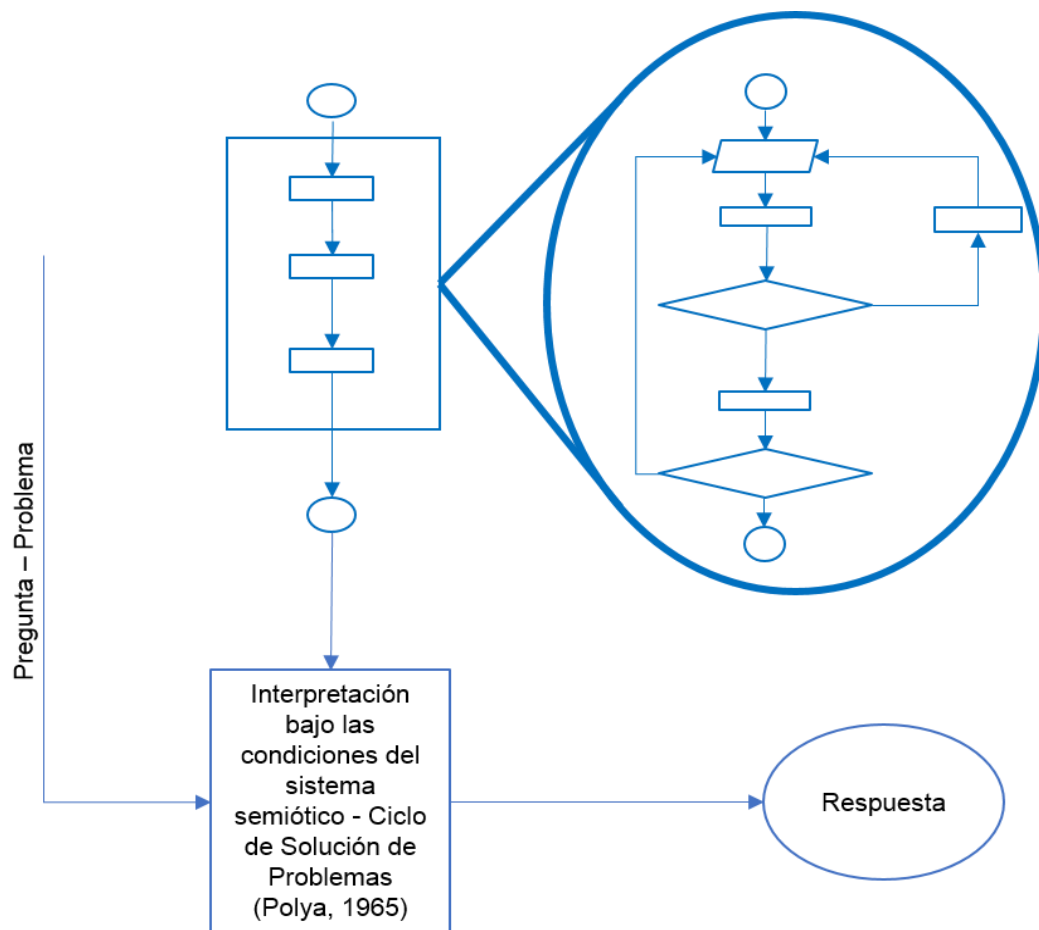


Figura 14. Ciclo de producción



Ahora bien, en esta instancia tienen lugar las diversas estrategias para la solución de problemas; una de las más reconocidas y aplicadas corresponde al Ciclo de Solución de Problemas de Polya (1965), el cual comprende fases de traducción y realimentación. Se han realizado diferentes implementaciones de este ciclo, entre las cuales se encuentra la Lista de Chequeo para la Solución de Problemas, propuesta en la Figura 15; ésta da cuenta del nivel en el que los ciclos iniciales del modelo formulado se han desarrollado, pues parte del reconocimiento del sistema para poder hallar aquella variable desconocida o elemento faltante.

1. ENTENDER ☐ Problema reescrito. ☐ Representación gráfica	
2. IDENTIFICAR ☐ Datos disponibles ☐ Datos faltantes ☐ Pregunta	Se requiere construir un sendero peatonal alrededor de un jardín de 12 metros de ancho por 16 metros de largo. El área total que debe cubrirse es de 285 metros cuadrados. ¿Cuál debe ser el ancho del sendero?
3. PLANEAR ☐ Estado inicial ☐ Estado final ☐ Pasos necesarios ☐ Recursos por paso	Escriba la oración de respuesta aquí:
4. APLICAR ☐ Plan ejecutado paso a paso ☐ Resultados resaltados	
5. EVALUAR ☐ Signos ☐ Magnitudes ☐ Unidades	
6. COMUNICAR ☐ Oración de respuesta	

Figura 15. Lista de chequeo para la solución de problemas (basada en el Ciclo de Solución de Problemas de Polya) – Muestra de un problema asignado para evaluación



Para el problema planteado en la muestra anterior, se aplicarán los pasos de la lista a continuación, mostrando una de las posibles soluciones:

ENTENDER

Problema reescrito

Hay un jardín rectangular, de ancho igual a 12 metros y largo igual a 16 metros, el cual requiere un sendero peatonal a su alrededor. El área total, es decir, incluyendo sendero y jardín, debe ser igual a 285 metros cuadrados. Hallar el ancho necesario de este sendero para cumplir con la condición anterior.

Representación gráfica (Figura 16)

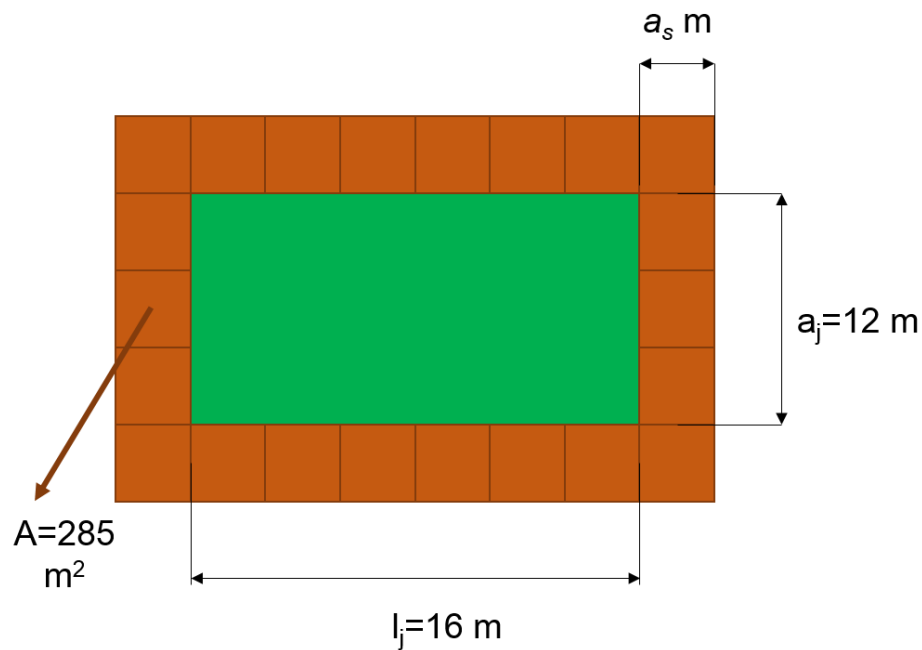


Figura 16. Lista de chequeo para la solución de problemas (basada en el Ciclo de Solución de Problemas de Polya) – Muestra de un problema asignado para evaluación: representación gráfica del problema



IDENTIFICAR

Información disponible:

- ancho del jardín (a_j) = 12 m
- largo del jardín (l_j) = 16 m
- área total (A) = 285 m²

Información no disponible:

- área del jardín (A_j)
- área del sendero (A_s)

Pregunta

¿Cuál es el ancho del sendero (a_s)?

PLANEAR

Para poder encontrar el ancho requerido en el sendero, a_s , es necesario conocer la superficie que dicho sendero cubre; el sendero cubre aquella parte del área total que no está cubierta por el jardín, o sea, la diferencia entre el área total y el área del jardín (Figura 17).

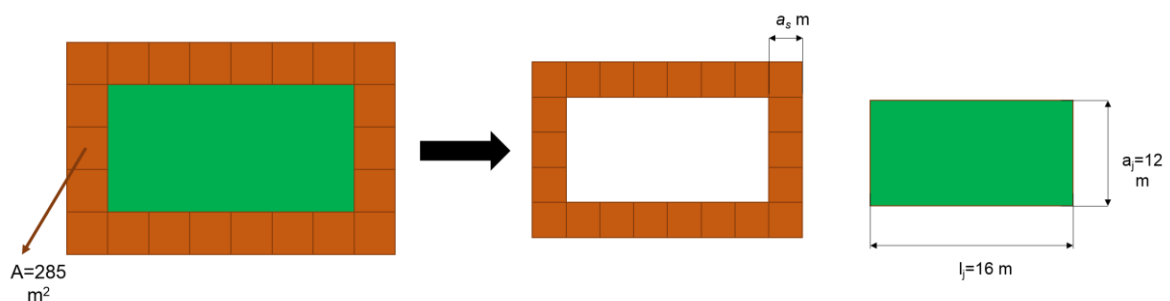


Figura 17. Muestra de un problema asignado para evaluación: plan para hallar área del sendero



Con ello, puede “desdoblarse” el sendero, para encontrar la relación entre la superficie cubierta por el mismo, y el ancho necesario para tal fin. De este modo, se puede mostrar el rectángulo equivalente a esta área, que cuenta con un ancho igual a a_s , y una longitud l_s que es función de a_s (Figura 18).

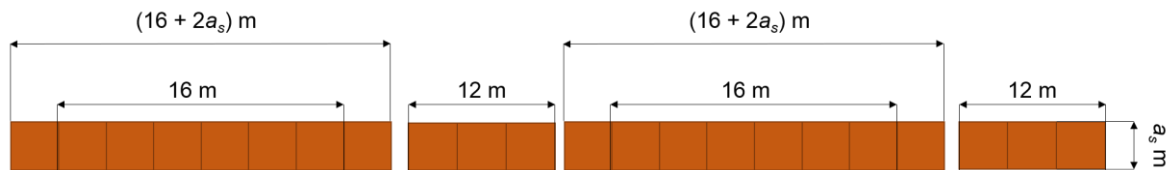


Figura 18. Muestra de un problema asignado para evaluación: plan para hallar ancho del sendero

Expresando esto en pasos:

- Paso 1: hallar $A_j = a_j(l_j)$
- Paso 2: hallar $A_s = A - A_j$
- Paso 3: expresar A_s en términos de a_s
- Paso 3: hallar a_s

APLICAR

La aplicación del plan implica la inclusión de la información disponible en cada uno de los pasos formulados, como sigue:

Expresando esto en pasos:

- Paso 1: $A_j = a_j(l_j) = (12\text{ m})(16\text{ m}) = 192\text{ m}^2$
- Paso 2: hallar $A_s = A - A_j = 285\text{ m}^2 - 192\text{ m}^2 = 93\text{ m}^2$
- Paso 3: expresar A_s en términos de a_s

Puesto que el rectángulo equivalente fue mostrado en la Figura 18, se puede expresar:



$$\begin{aligned}A_s &= a_s(l_s) = a_s(16 + 2a_s + 12 + 16 + 2a_s + 12) \\A_s &= a_s(l_s) = a_s(56 + 4a_s) = 93 \\56a_s + 4a_s^2 &= 93 \\4a_s^2 + 56a_s - 93 &= 0\end{aligned}$$

- Paso 3: hallar a_s

Se ha encontrado una expresión matemática que relaciona la superficie total con el ancho del sendero, que corresponde a una ecuación cuadrática, así que es posible encontrar dos soluciones numéricas para el enunciado³⁵. Éstas son:

$$\begin{aligned}a_{s,1} &= -15.5 \text{ m} \\a_{s,2} &= 1.5 \text{ m}\end{aligned}$$

De ambas posibles respuestas, se elige la segunda opción porque corresponde a una cifra que puede medirse de forma tangible, es decir, es una cifra positiva.

EVALUAR

Es importante revisar la consistencia del resultado obtenido con la situación planteada, así que en primer lugar se reemplaza el valor logrado de a_s en la expresión para la superficie del rectángulo equivalente, a fin de comprobar su resultado en magnitud:

$$\begin{aligned}4a_s^2 + 56a_s - 93 &= 0 \\4(1.5)^2 + 56(1.5) - 93 &= 0\end{aligned}$$

³⁵ El reconocimiento de esta expresión como un trinomio cuadrático, o de segundo orden, así como de la cantidad de soluciones involucradas en su procesamiento, es consecuencia de la claridad y consistencia en la construcción del concepto de *expresión cuadrática*, *expresión de segundo grado* y sus diversas representaciones en otros pensamientos matemáticos, para la reafirmación de las estructuras triádicas que ayudan en su comprensión.



$$4(2.25) + 56(1.5) - 93 = 0$$

$$9 + 84 - 93 = 0$$

$$93 - 93 = 0$$

Puede comprobarse, además, que el análisis dimensional asociado a este proceso arroja resultados consistentes, es decir, todas las unidades son coherentes a lo largo del proceso de solución.

COMUNICAR

No basta solamente con los cálculos, sino con la respuesta formulada a la pregunta del enunciado original. Ésta remite la información obtenida a un contexto que le provee de sentido. Para el enunciado propuesto, la respuesta es:

El ancho del sendero debe ser de 1.5 m

Una muestra de los resultados obtenidos en la evaluación de una población específica de estudiantes, al aplicar esta lista de chequeo como instrumento de apoyo en la evaluación, se presenta en el Anexo 2.

3.2.5. Ciclo de procesamiento

Dada la competencia adquirida en el análisis y síntesis de oraciones matemáticas, se procede a continuación con la composición de enunciados matemáticos de mayor complejidad, los cuales involucran un uso marcado de sinónimos (equivalencias, igualdades e identidades). En este momento, pueden encontrarse sistemas semióticos triádicos, que demandarán a su vez la utilización de sistemas semióticos conectados, construyéndose así “traducciones” de múltiples etapas (Figura 19).

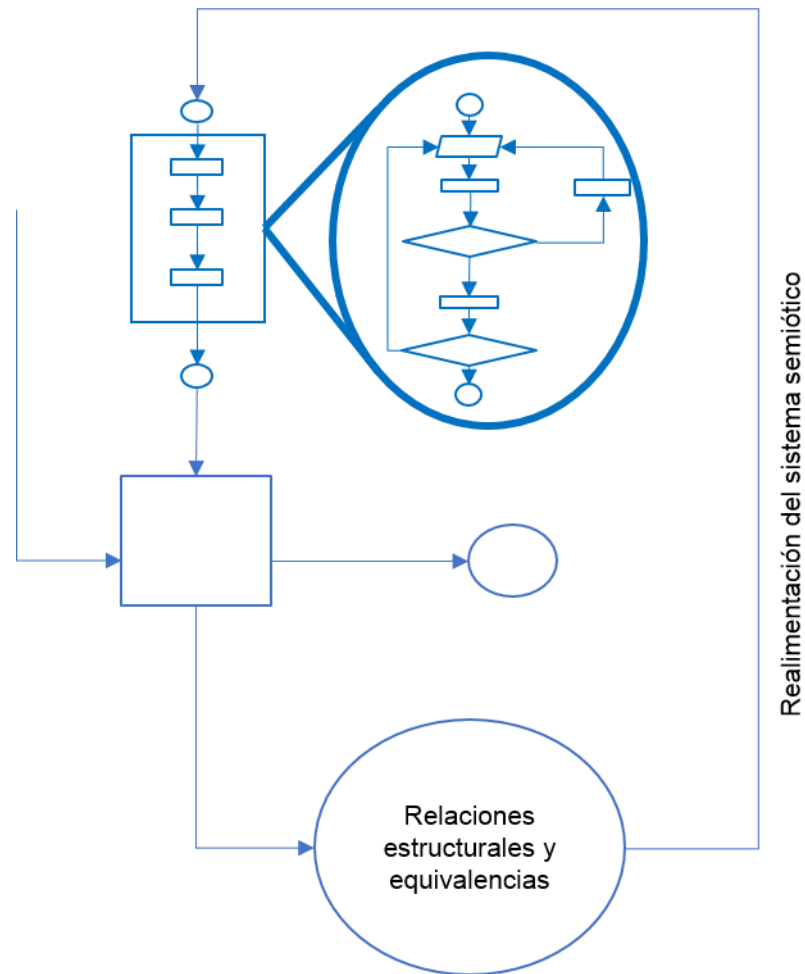


Figura 19. Ciclo de procesamiento

Las nuevas relaciones, establecidas en estas estructuras triádicas, son nueva entrada para el sistema semiótico construido en el segundo ciclo del modelo – Estructuración Semiótica – permitiendo que, dada cualquier situación problema, ésta pueda ser abordada desde expresiones matemáticas mucho más refinadas, las cuales evidencian un dominio mucho más completo del lenguaje matemático para la comunicación de razonamientos complejos.

La integración de estos cinco ciclos permite delinear un esquema como el que se muestra en la Figura 20. En el mismo se evidencia la influencia del sistema semiótico desarrollado

durante el proceso de aprendizaje, al ser la salida de las etapas iniciales, y el punto de partida para la producción posterior, así como el receptor de las nuevas estructuras concebidas y revisadas durante dicha producción.

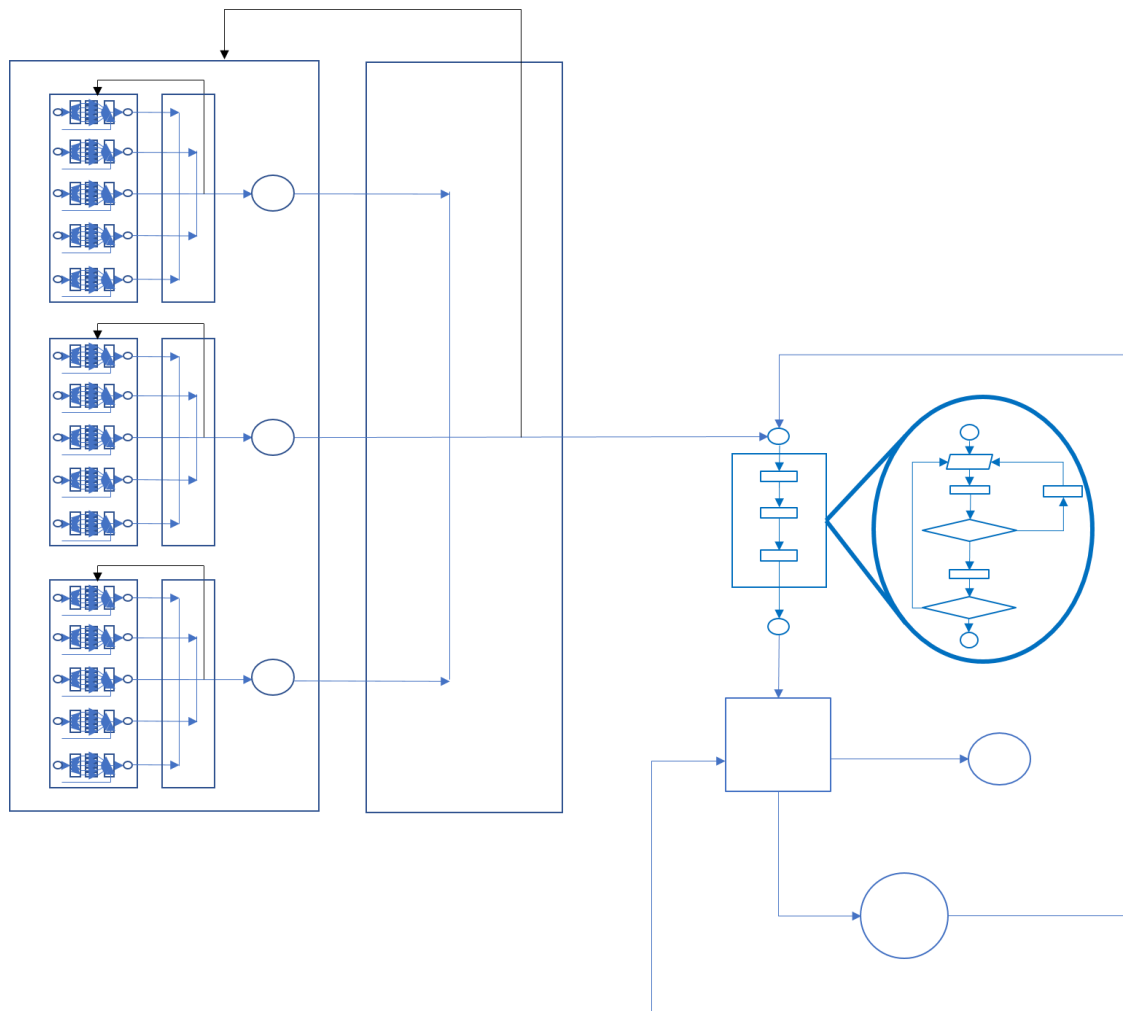


Figura 20. Modelo propuesto – Integración de ciclos

Con estos ciclos, es necesario hacer algunas precisiones:



- El núcleo del proceso se da en los ciclos de Estructuración Semiótica e Interpretación, dado que el Sistema Semiótico es su punto de conexión. Es allí en donde se verifica la completitud y consistencia de los conceptos de acuerdo con el marco de referencia de interés, y donde se crea la estructura de aprendizaje básica.
- El derrotero de implementación de estos ciclos no es lineal, menos unilateral, sino que pueden presentarse simultaneidades durante el proceso, significando esto que el final de una etapa puede darse durante o después del inicio de un ciclo posterior. En la misma línea de razonamiento, el proceso puede retornar a alguna etapa previa cuando la composición requerida presente dificultades en su ejecución e interpretación. Entonces, la composición matemática no puede llevarse a cabo completamente sin la cabal apropiación de los anteriores procedimientos.
- Se reconoce la influencia que tiene la adquisición sólida de conceptos en la interpretación de problemas y su posterior solución; es menester verificar que los conceptos y equivalencias que requieren un problema sean claros y completos, antes de buscar una respuesta consistente con las condiciones dadas. Por consiguiente, puesto que este proceso demanda una labor consciente de codificación – decodificación de doble vía, basada en estructuras semióticas fundamentadas a su vez en el aprendizaje lingüístico, el ejercicio de análisis/síntesis en textos desarrollados en la lengua materna es de vital importancia. Así, la enseñanza formal de la lengua materna adquiere un papel crucial.

4. PROTOCOLO GENERAL DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA

El modelo propuesto en el capítulo anterior está fundamentado en estudios alrededor de la adquisición lingüística y su incidencia en la estructuración de sistemas semióticos de mayor especialidad y susceptibles de conexión con diversos contextos, gracias a la exposición al entorno, a sus patrones y también permanentes cambios³⁶. El establecimiento de un proceso codificación-decodificación requiere, en sí, la aplicación de estrategias fundamentadas en cada enfoque cognitivo propuesto en el modelo anterior (Figura 21), para entablar una conexión sólida con el proceso de aprendizaje de la lengua materna dentro del marco del desarrollo propioceptivo y hacia el ensamble de pensamientos matemáticos más abstractos:

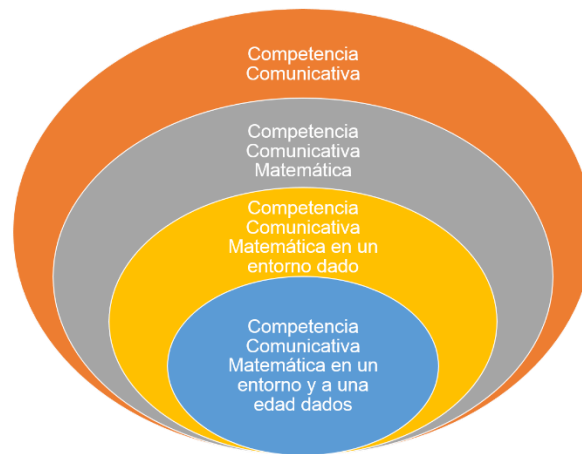


Figura 21. Competencia comunicativa matemática como subconjunto de la Competencia comunicativa

³⁶ Rivas Navarro (2008) describe en detalle los diversos modelos de aprendizaje, iniciando por el conductismo y el constructivismo, para luego introducirse en los mecanismos cognitivos en función de variables diversas, que incluyen los estímulos externos. Su libro *'PROCESOS COGNITIVOS Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO'* se decanta por una línea constructivista en la que formula las diversas etapas del razonamiento – percepción, representación, memoria, codificación, recuperación, y demás – desde una perspectiva enfocada en la respuesta cerebral a las variaciones del entorno y del discurso; asegura que los estímulos externos promueven el establecimiento de patrones y secuencias que el cerebro empieza a reconocer cada vez con mayor detalle y fluidez, asentando las respuestas y reacciones en situaciones que les involucran y permitiendo proponer estrategias de transformación de los alrededores, cada vez más complejas.



El proceso de codificación-decodificación de doble vía, debe incubarse al interior de este diagrama como elemento indisoluble del aprendizaje lingüístico inherente al desarrollo del individuo. En otras palabras, el desarrollo de este proceso depende significativamente de la evolución lingüística de cada individuo, tanto oral como escrita, puesto que la lengua materna es el primer sistema semiótico que facilitará la adquisición de otros desde un esquema de aprendizaje aditivo.

Siguiendo este razonamiento, y retomando el trabajo de Duval (1999), la codificación-decodificación de doble vía es la configuración de una estructura triádica, puesto que se requiere una conexión inicial entre el objeto, la representación y el concepto, que debe a su vez pasar por una etapa de traducción cuyo éxito depende de la constitución de una adecuada estructura lingüística de equivalencia entre ambos sistemas semióticos involucrados en el proceso de reinterpretación de la situación planteada en el análisis.

4.1. FUNDAMENTO INICIAL PARA EL DISEÑO DEL PROGRAMA DE APRENDIZAJE. TAXONOMÍA REVISADA DE BLOOM

El diseño del programa de aprendizaje a partir del modelo propuesto, demanda la formulación de indicadores de desempeño, alineados éstos con competencias a desarrollar de manera articulada con lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional – MEN, y lo propuesto por Bloom (1956), posteriormente revisado por Anderson y Krathwohl (2001), alrededor de objetivos de aprendizaje y competencias. Con ellos, es posible definir una estructura pedagógica y didáctica que se alinee con los mecanismos de adquisición y aprendizaje lingüísticos, haciendo del proceso de aprendizaje matemático un proceso mucho más sólido y coherente.

El profesor Rex Heer, de la Universidad del Estado de Iowa (2012), desarrolló un modelo matricial en el que se ilustra la Taxonomía Revisada de Bloom, a través de la interacción de las dos dimensiones que permiten la formulación de objetivos de aprendizaje: la Dimensión del Proceso Cognitivo (*The Cognitive Process Dimension*) y la Dimensión del Conocimiento (*The Knowledge Dimension*). Las celdas de esta matriz responden a los verbos que permiten la formulación de los objetivos de aprendizaje desde cada aspecto del proceso cognitivo (Recordar – Entender – Aplicar – Analizar – Evaluar – Crear) y de la

dimensión del conocimiento (Fáctico – Conceptual – Procedimental – Metacognitivo). Este modelo se presenta en la Figura 22.

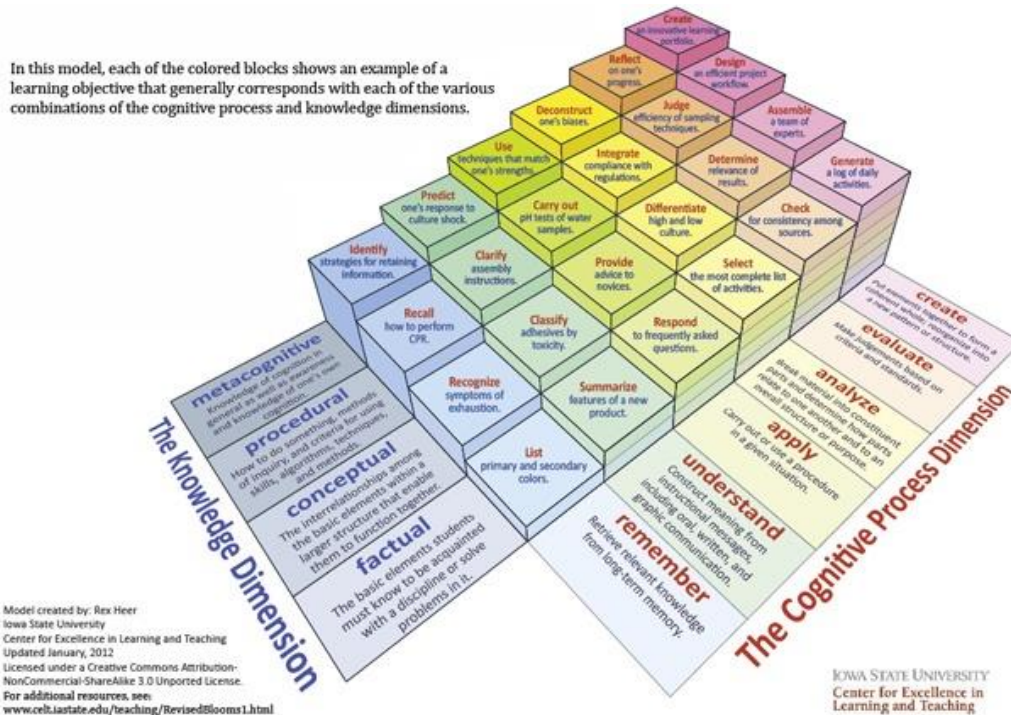


Figura 22. Modelo matricial de la Taxonomía Revisada de Bloom para los Objetivos del Aprendizaje (2012)

Como puede apreciarse, este modelo matricial permite el seguimiento del proceso de aprendizaje por objetivos (de ahora en adelante, indicadores de desempeño), puesto que se hace visible el planteamiento gradual de acciones que corresponden a evidencias del aprendizaje

4.2. PLAN DE IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

El proceso de implementación de cualquier modelo educativo, para su sostenibilidad en el tiempo, requiere validez de constructo, esto es, alineación con las políticas respectivas,



tanto públicas como institucionales. Considerando esto, éste implica la definición de varios pasos, a saber:

- Identificar los indicadores de desempeño para el ciclo escolar básico. En el caso de instituciones públicas, los lineamientos están dados por el Ministerio de Educación; para las instituciones privadas, existe el correspondiente Proyecto Educativo Institucional, el cual incluye el Perfil del Egresado, aspecto que indica cuál es el indicador de desempeño a alcanzar en el proceso de formación de cada estudiante, y el componente de Diseño Curricular, en el que se determina la ruta de formación para la consecución de dicho perfil.
- Definir los indicadores de desempeño para cada nivel escolar. Los niveles pueden variar en las instituciones privadas, pero en general, hay una división en cuatro niveles: preescolar, básica, media y superior. Las pruebas estatales SABER, por su parte, establecen una clasificación mediante la definición de cuatro umbrales, tres en educación básica y uno en media³⁷: 3°, 5°, 9° y 11°.
- Establecer los indicadores de desempeño para cada grado de escolaridad. De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional, el ciclo de educación básico se compone de doce grados – entre el preescolar y el grado undécimo – en los cuales se presume la adquisición de los conceptos, habilidades y competencias que se requieren en un próximo futuro educativo superior, laboral y social. Este punto es el más complicado de todo el ciclo escolar, dado que se hace necesaria la concatenación de competencias para asegurar el aprendizaje progresivo.

Ahora bien, la implementación del modelo planteado en este documento (véase 3.2. MODELO PROPUESTO) involucra el replanteamiento del esquema educativo de la institución que lo considere dentro de su modelo pedagógico, lo cual comprende la reescritura de perfiles, objetivos e indicadores para la evaluación de los procesos de aprendizaje individuales y grupales. Adicionalmente, la naturaleza misma del modelo exige que haya un carácter gradual en la adquisición de la competencia comunicativa matemática, lo cual demanda un incremento en los niveles de complejidad a modo de espiral, esto es, el abordaje de cada uno de los ámbitos de la dimensión del conocimiento desde todas las secciones que comprenden la dimensión cognitiva.

³⁷ En ocasiones, las pruebas incluyen al grado 7° como otro punto de chequeo, pero no es considerado un nivel oficial en ellas.



Para tal fin, se propuso una distribución de los cinco ciclos del modelo formulado en este trabajo, sobre el modelo matricial de Heer; esta distribución no sólo propone una distribución de los verbos sugeridos para el planteamiento de los indicadores de desempeño de cada grado, sino que además delinea el enfoque bajo el cual estos indicadores serán desarrollados durante el año escolar.

El esquema asociado a esta distribución se muestra en la Figura 23.

Metacognitivo	Noveno Grado		Décimo Grado		Undécimo Grado	
Procedimental	Sexto Grado		Séptimo Grado		Octavo Grado	
Conceptual	Tercer Grado		Cuarto Grado		Quinto Grado	
Factual	Preescolar		Primer Grado		Segundo Grado	
	Recordar	Entender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear

Figura 23. Matriz integradora de la Taxonomía revisada de Bloom a cada grado de escolaridad, según los ciclos del modelo propuesto³⁸

Con esto, se definen los siguientes lineamientos para la implementación del modelo:

- Redefinir el Perfil del Egresado a partir de las competencias propuestas en el último nivel de la taxonomía revisada de Bloom.
- Estructurar la competencia a alcanzar a lo largo del proceso de aprendizaje, de acuerdo con el nuevo Perfil del Egresado.
- Plantear la competencia a alcanzar en cada nivel educativo, de acuerdo con la distribución matricial presentada en la Figura 23.
- Reformular la competencia a alcanzar a lo largo de cada grado escolar.

³⁸ Los colores que figuran en esta matriz y que no figuran en el modelo propuesto (ver Figura 3), corresponden a etapas de transición entre un ciclo y otro.



- Desarrollar una pregunta detonante o problematizadora que contextualice la competencia. Dicha pregunta debe estar redactada desde el lenguaje del estudiante, es decir, formulada como una inquietud que atañe al estudiante, a fin de que sea auténtica y significativa. Un ejemplo de cómo redactar estas preguntas se presenta en el Anexo 6.
- Revisar, para cada competencia, los indicadores de desempeño que permitirán evaluar el desarrollo individual de cada estudiante. Estos indicadores deben permitir la demarcación de umbrales para el seguimiento preciso de la adquisición y fortalecimiento de la competencia en el estudiante.
- Conformar rúbricas que contengan la información correspondiente a los indicadores de desempeño previamente propuestos, para su utilización ulterior en el diseño de actividades de aprendizaje y evaluación.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE UNA SESIÓN DE APRENDIZAJE DESDE EL MODELO PROPUESTO

El diseño de una sesión de aprendizaje desde el modelo, como se ha mencionado, requiere la formulación de la competencia y los correspondientes indicadores de desempeño para cada nivel y grado escolar. Estos elementos son los directores en el diseño de una sesión de aprendizaje que favorezca el desarrollo de la competencia, y se encuentran contemplados en los documentos que soportan el enfoque de cada área; éstos se conocen generalmente como Planes de Área y Procesos Académicos. Dichos planes de área y procesos académicos deben demostrar la concatenación estructural del programa con los indicadores y competencias planteadas en el Proyecto Educativo Institucional. Sólo bajo su cobijo, es posible presentar una sesión de aprendizaje que trace una ruta de aprendizaje coherente y consistente. Por otro lado, y de acuerdo con la distribución de ciclos en el esquema educativo, previamente presentada en la Figura 23, se enfatiza en el desarrollo y fortalecimiento del proceso de cada ciclo, para los grados escolares que le cobijan; el diseño de las actividades de aprendizaje y evaluación, por ende, se enfoca en un ciclo particular, sin que esto implique hacer a un lado los ciclos previos.

Un par de ejemplos de cómo se puede estructurar una sesión de aprendizaje a partir del modelo formulado, se presentan en las Tabla 5 y 6. Las mismas contienen información básica para el diseño de una sesión de aprendizaje al interior de un proceso de planeación; se encuentran descripciones breves de las actividades para el aprendizaje y la evaluación,



alineadas con la competencia a desarrollar en el ciclo, y el objetivo de aprendizaje del período correspondiente para la valoración de dicha competencia.

Tabla 5. Esquema de diseño de una sesión de aprendizaje, de acuerdo con el modelo propuesto – Ciclo Conexión objeto – representación – concepto.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA Año XXXX	
COMPETENCIA GENERAL DE ÁREA	<u>Comunicación Matemática</u> Desarrollar y evaluar modelos matemáticos de situaciones dadas, relacionadas con magnitudes y variables diversas, para el análisis de su comportamiento bajo condiciones específicas.
CICLO DE FORMACIÓN Y COMPETENCIA ASOCIADA	<u>Conexión objeto – representación – concepto</u> Generar un modelo detallado del entorno circundante, a través de la interacción con los objetos que le rodean.
GRADO Y PERÍODO DE EVALUACIÓN	Preescolar – Período 2 (fecha inicio – fecha fin)
PREGUNTA DETONANTE	<i>¿Cómo puedo explicar a otros la manera en que percibo un objeto que observo y manipulo?</i>
PROBLEMA A RESOLVER	Descripción detallada de un objeto físico de interés.
COMPETENCIA GRADO	Caracterizar un objeto físico determinado en función de sus atributos físicos y su interacción con otros objetos y los alrededores próximos.
INDICADORES DE DESEMPEÑO	- Diferencia claramente objetos bidimensionales y tridimensionales. - Enlista las características físicas de un objeto dado, a través de categorías como: color, tamaño, textura, olor, sabor, número de caras, forma de caras, número de bordes. - Discute con sus compañeros las características de un objeto físico dado, empleando en su discurso términos específicos para la nominación de atributos.
OBJETIVO DE SESIÓN	Estructurar un vocabulario común para la descripción de objetos bidimensionales y tridimensionales dados.
REVISIÓN DE SABERES PREVIOS	- Preguntas abiertas a estudiantes para iniciar la clase, relacionadas éstas con objetos en el entorno, y la presentación personal del docente. En éstas, se introducen términos para representar color, tamaño y forma.
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	- Paseo por el aula y sus alrededores: los estudiantes deben recorrer un espacio dado, e interactuar con objetos y espacios varios, utilizando sus cinco sentidos. Llevarán a cabo este trabajo con el



	acompañamiento del docente, quien grabará la sesión (previa autorización) para efectos de revisión y evaluación.
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN	- Descripción entre pares: entrevista del docente a dos estudiantes, preguntando por los atributos de un objeto dado. - Dibujo de modelo: cada estudiante dibuja en una hoja, siguiendo las instrucciones del docente, una serie de objetos previamente elegidos por cada estudiante. En dicho dibujo, el estudiante debe observar el objeto de manera frontal, lateral y superior.
ANÁLISIS DEL PROCESO	El enfoque TPR asocia el aprendizaje de vocabulario y comandos básicos, con el seguimiento de instrucciones modeladas a través del movimiento y la interacción con el medio. La actividad propuesta, entonces, permite evaluar la adquisición del lenguaje necesario para describir los objetos según la interacción que se tenga con ellos, empleando la experiencia y el vocabulario actual de manera aditiva, esto es, como sustrato para la cimentación del trabajo. Se analizarán los siguientes criterios: - Descripción sensorial específica: en este punto se evalúa la nominación de colores (azul, rojo, amarillo), texturas (rugosa, lisa, suave, áspera), olores (agradable, desagradable, dulce, floral, frutal), sonidos (agudo, grave, seco, con eco, metálico), sabores (dulce, amargo, ácido, salado) - Orientación espacial y sistemas de referencia: se revisa el establecimiento de relaciones posicionales entre objetos para definir una ubicación específica en el espacio (a mi izquierda, encima de la mesa, delante de la silla). En un mayor nivel de detalle, pueden esperarse estimaciones y el uso de medidas estándar o no estándar (más o menos a tres pasos, a unos 20 centímetros, a cuatro brazos) - Perspectiva: en el dibujo, se evaluarán las proporciones en las diferentes medidas del objeto (relación entre largo, ancho y alto), el uso de sistemas de referencia para ubicar dicho objeto (dibujo de nivel y objetos circundantes).

Esta actividad, como se evidencia, está relacionada con el primer ciclo del modelo planteado, puesto que promueve la interacción multisensorial con objetos circundantes, y permite evidenciar las perspectivas que un estudiante tiene de los objetos estudiados a través del dibujo. Además, permite la creación de un vocabulario común para la comunicación matemática posterior, menester en los procesos de estructuración semiótica e interpretación.



Tabla 6. Esquema de diseño de una sesión de aprendizaje, de acuerdo con el modelo propuesto – Ciclo Interpretación.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA Año XXXX	
COMPETENCIA GENERAL DE ÁREA	<u>Comunicación Matemática</u> Desarrollar y evaluar modelos matemáticos de situaciones dadas, relacionadas con magnitudes y variables diversas, para el análisis de su comportamiento bajo condiciones específicas.
CICLO DE FORMACIÓN Y COMPETENCIA ASOCIADA	<u>Interpretación</u> Sintetizar la información sobre un sistema dado, sus componentes y la interacción de los mismos, en la comprensión de una situación determinada.
GRADO Y PERÍODO DE EVALUACIÓN	Quinto – Período 1 (fecha inicio – fecha fin)
PREGUNTA DETONANTE	<i>¿Cómo puedo encontrar más fácilmente objetos y datos para resolver un problema?</i>
PROBLEMA A RESOLVER	Recopilación de información para la búsqueda de determinados objetos.
COMPETENCIA GRADO	Determinar la relevancia de la información suministrada por una fuente dada para la posterior resolución de un problema.
INDICADORES DE DESEMPEÑO	- Clasifica objetos y sistemas de acuerdo con sus atributos. - Establece los criterios para clasificar un objeto o sistema en una categoría determinada. - Discute con sus compañeros las características de un objeto físico dado, empleando en su discurso términos específicos de la categoría a la que pertenecen.
OBJETIVO DE SESIÓN	Establecer las categorías en las que se puede encontrar información necesaria para encontrar y adquirir un bien dado.
REVISIÓN DE SABERES PREVIOS	- Preguntas abiertas a estudiantes para iniciar la clase, relacionadas éstas con objetos en el entorno, y la presentación personal del docente. En éstas, se introducen términos para representar color, tamaño y forma.
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	- Paseo por el aula y sus alrededores: los estudiantes deben recorrer un espacio dado, e interactuar con objetos y espacios varios, utilizando sus cinco sentidos. Llevarán a cabo este trabajo con el acompañamiento del docente, quien grabará la sesión (previa autorización) para efectos de revisión y evaluación.
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN	- Revisión entre pares: se agrupan los estudiantes por las personas favoritas elegidas (padre, madre, hermanos, mejores amigos), para



	comparar el tipo de regalos que les darían en una ocasión especial, y los sitios en donde los encontrarían. - Discusión grupal: en ésta, se revisan las distintas opciones para las respuestas asociadas a ítems dados, actualizando la lista de opciones y revisando los criterios para su selección
ANÁLISIS DEL PROCESO	El enfoque de aprendizaje basado en la competencia, tiene como prioridad el resultado sobre una instrucción u objetivo específico, por encima de la atención en la rigurosidad del proceso. De este modo, el diseño de las actividades propuestas responde a la obtención de una serie de respuestas esperadas a lo largo de un proceso de planeación y ejecución dado, asociado a la evaluación de un contexto específico. Se analizarán los siguientes criterios: - Sistema de referencia: en este punto se evalúa la presencia de los datos de entrada que determinan la consecuencia de las respuestas posteriores. - Definición de categorías: se determina la consistencia entre el dato de entrada con la categoría en la cual fue clasificado. - Selección de datos relevantes: se valoran los criterios propuestos para la selección de ciertos datos por encima de otros en la misma categoría. - Enumeración de datos: se revisa la descomposición de la categoría en datos relevantes según el criterio previo. - Estrategia de solución: se revisa la aplicación de la estrategia en un caso similar. - Evaluación de categorías: se evalúa cómo son identificadas las categorías de información como relevantes o no para la realización de una actividad.

Esta actividad, evidentemente relacionada con la aplicación cotidiana de la teoría de conjuntos, facilita la verificación de conceptos cotidianos aplicados en la gestión de la información, de modo tal que se hacen visibles las categorías conceptuales desarrolladas por el estudiante para la representación de su entorno y su comportamiento, como se pretende en la etapa de estructuración semiótica. En este sentido, la actividad ayuda a enriquecer el conocimiento de dicho entorno, suministrando un nuevo insumo para la búsqueda de información necesaria diariamente, lo cual también refina la representación que el estudiante tiene de sus alrededores.

Ahora, en una sesión de aprendizaje que involucre el desarrollo de todos los ciclos, con el propósito de establecer una evaluación general, puede considerarse un diseño como el sugerido en el Anexo 4. Ésta guarda el formato de un proyecto, a través del cual se involucran diversas tareas



CONCLUSIONES

- El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es, de acuerdo con el análisis efectuado, un proceso dinámico y al tiempo estructurado, que depende significativamente del desarrollo individual del lenguaje natural para la construcción de conocimiento auténtico (Ausubel y Fitzgerald, 1961).
- Puede afirmarse que la solución de problemas asociada a un determinado contexto (entendido éste como entorno, en el cual coexisten e interactúan objetos diversos), implica una confrontación de la realidad circundante con los modelos establecidos sobre ella, tanto mentales como intuitivos (D'Amore y Martini, 1997), incluyendo así los lenguajes que pueden emplearse para describir y reescribir cada problema.
- Los procesos de razonamiento matemático, al depender significativamente del desarrollo del lenguaje natural, pueden ser orientados y determinados de acuerdo con el fortalecimiento de las estructuras lingüísticas naturales, las cuales favorecerán la consolidación del pensamiento comunicativo matemático (Niss, 2003).
- El núcleo del proceso de aprendizaje, según el modelo propuesto, se da en las etapas de Estructuración Semiótica e Interpretación, dado que el Sistema Semiótico es su punto de conexión. Es allí en donde se verifica la completitud y consistencia de los conceptos de acuerdo con el marco de referencia de interés, y donde se crea la estructura de aprendizaje básica.
- El modelo propuesto es coherente con los enfoques establecidos en Oxford, Lavine y Crookall (1989), al igual que los presentados por Brown (2001), los referentes epistemológicos de D'Amore (2003, 2006), Duval (1999, 2006), Wearne y Hiebert (1988), los objetivos del aprendizaje de Bloom (1956, 2001), y los mecanismos de adquisición de la lengua de Kuhl (2004), al integrar diferentes métodos y enfoques para la enseñanza de otras lenguas, con la adquisición del lenguaje matemático y el desarrollo del lenguaje natural, y los objetivos de aprendizaje para la estructuración de sistemas de aprendizaje y evaluación coherentes.
- El derrotero de implementación de estos ciclos no es lineal, menos unilateral, sino que pueden presentarse simultaneidades durante el proceso, significando esto que el final de una etapa puede darse durante o después del inicio de una etapa posterior. En la misma línea de razonamiento, el proceso puede retornar a alguna etapa previa cuando la composición requerida presente dificultades en su ejecución



Universidad
Pontificia
Bolivariana

$\int_a^b f(x) dx$
MAESTRÍA
Ciencias Naturales y Matemática

e interpretación. Entonces, la composición matemática no puede llevarse a cabo completamente sin la cabal apropiación de los anteriores procedimientos.



RECOMENDACIONES

Este documento comprende un modelo de formación en Matemáticas que abarca la totalidad del ciclo educativo básico, es decir, desde Preescolar hasta el final de la Media Vocacional, y que promueve la integración de varios enfoques y métodos de enseñanza y aprendizaje de otras lenguas en la adquisición y consolidación del lenguaje matemático. Se sugieren las siguientes acciones para asegurar una implementación confiable:

- Asegurar la implementación gradual del modelo establecido con un equipo piloto de estudiantes, desde el grado Preescolar hasta el grado Undécimo³⁹. Dichos estudiantes pueden ser seleccionados desde la matrícula, previa autorización y compromiso expreso de los padres y/o acudientes.
- Poner en marcha el modelo en formato extracurricular, con el fin de revisar el efecto del modelo en el proceso de aprendizaje en comparación con el modelo regular institucional⁴⁰.
- Evaluar el efecto de las estrategias desarrolladas en el marco de cada ciclo del modelo, al finalizar el último grado que le corresponde a cada uno. Con esta información, se propondrán los ajustes necesarios y se determinarán las condiciones para la subsecuente transición al siguiente ciclo.
- Acoger el protocolo propuesto en el Capítulo 4. PROTOCOLO GENERAL DE UTILIZACIÓN DEL SISTEMA, para el diseño del plan de trabajo que seguirá el equipo piloto.

³⁹ En caso de que la institución cuente con un Aula de Apoyo, ésta puede definirse como el piloto de implementación. Así, se podrá comparar el impacto del modelo en los estudiantes que son atendidos por esta aula, en comparación con los que se encuentran en el programa regular.

⁴⁰ Teniendo en cuenta lo anterior, el Aula de Apoyo puede desarrollar el modelo propuesto siguiendo su horario habitual; puede haber modificaciones en el mismo, en caso de que se considere pertinente.



BIBLIOGRAFÍA

ANDERSEN, Hemming. Active Arithmetic. Recuperado de: http://www.waldorflibrary.org/books/3/view_bl/52/ebooks/56/active-arithmetic-ebook (Fecha de consulta: 20 de julio de 2017)

ANDERSON, L. W., KRATHWOHL, D. R., & BLOOM, B. S. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Allyn & Bacon.

AUSUBEL, David and FITZGERALD, Donald. Meaningful Learning and Retention: Intrapersonal Cognitive Variables. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/pdf/1168901.pdf> (Fecha de consulta: 12 de septiembre de 2017)

ÁVILA MELÉNDEZ, Luis Arturo. Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe – I CEMACYC. Noviembre de 2013.

BLOOM, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. New York: David McKay, 356, 1998-1999

BORGES RIPOLL, Manuel. Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo05.pdf> (Fecha de consulta: 5 de junio de 2016)

BROWN, Douglas. A methodical history of language teaching Recuperado de: <https://methodologyshumenextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-languauge-teaching.pdf> (Fecha de consulta: 7 de febrero de 2016)

CASEY, Beth, KERSH, Joanne E., MERCER YOUNG, Jessica. Storytelling sagas: an effective medium for teaching early childhood mathematics. Recuperado de: <https://sciencedirect.com/science/article/pii/S0885200604000134> (Fecha de consulta: 30 de junio de 2018)

CASTRO ALONSO, Juan C., AYRES, Paul, and PAAS, Fred. The Potential of Embodied Cognition to Improve STEAM Instructional Dynamic Visualization. En: Emerging Technologies for STEAM Education – Full STEAM Ahead. Recuperado de:



<http://www.springer.com/la/book/9783319025728> (Fecha de consulta: 10 de septiembre de 2017)

CORTEZ VÁSQUEZ, Augusto, VEGA HUERTA, Hugo, PARIONA QUISPE, Jaime. Procesamiento de lenguaje natural. Recuperado de: <http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/sistem/article/download/5923/5121> (Fecha de consulta: 20 de mayo de 2018)

D'AMORE B. (2003). The noetic in mathematics. Scientia Pedagogica Experimentalis. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82.

D'AMORE, B. Objetos, significados, relaciones matemáticas y sentido. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2161582.pdf> (Fecha de consulta: 1 de diciembre de 2017)

D'AMORE, Bruno y MARTINI, Berta. Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas N° 32, diciembre de 1997, pág. 26–42.

DE LANGE, Jan. International Handbook of Mathematics Education, Chapter 2: Using and Applying Mathematics in Education. Recuperado de: http://www.newbooks-services.de/MediaFiles/Texts/7/9780792335337_Excerpt_003.pdf (Fecha de consulta: 3 de julio de 2016)

DEHAENE, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics. Recuperado de: <http://backspaces.net/temp/Spring2010Seminar/The%20Number%20Sense.pdf> (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/pdf/25472062.pdf?casa_token=Llp__hxxk0P4AAAAA:WuZOCpx9HmamM5IJb8TpGVa_UpHyhAnZ8W-tfNy8CWVIFWLJVIZThHtq1gw4u6A3syM-p9Fp645BeR3jCSv8b8IYDiHmkT5F7gJ_XpunFOI7IlwsMjoD (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)

DUVAL, Raymond. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Recuperado de: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf> (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)



ECO, Umberto. Signo (1973). Recuperado de:
http://www.ddooss.org/libros/Umberto_Eco_Signo.pdf (Fecha de consulta: 15 de mayo de 2018)

EL-DEGHADY, Heba. STEAM Methods: a case from Egypt. En: Designing and Teaching the Secondary Science Methods Course. An International Perspective. Recuperado de:
<https://www.sensepublishers.com/catalogs/bookseries/other-books/designing-and-teaching-the-secondary-science-methods-course/> (Fecha de consulta: 5 de agosto de 2017).

FACULTAD DE INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA DE URUGUAY – FING. El signo lingüístico. Recuperado de:
https://www.fing.edu.uy/tecnoinf/mvd/cursos/coe/material/el_signo_linguistico.pdf (Fecha de consulta: 18 de mayo de 2018)

FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A. et al. Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/8863/1/Castro2016Significado.pdf> (Fecha de consulta: 20 de mayo de 2018)

FURNER, Joseph M., YAHYA, Noorchaya, DUFFY, Mary Lou. 20 Ways to Teach Mathematics: Strategies to Reach All Students. Recuperado de:
<http://wp.cune.org/jordanstirtz/files/2014/03/17997132.pdf> (Fecha de consulta: 15 de junio de 2018)

FRÍAS CONDE, Xavier. Introducción a la Lingüística (2000). Recuperado de:
<http://www.romaniaminor.org/ianua/sup/sup01.pdf> (Fecha de consulta: 17 de mayo de 2018)

GARCÍA QUIROGA, Bernardo, CORONADO, Arnulfo y GIRALDO OSPINA, Albeiro. Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas. Ed. Universidad de la Amazonía, primera edición (2015); 258 p.

GE, Xun, IFENTHALER, Dirk, SPECTOR, J. Michael. Emerging Technologies for STEAM Education – Full STEAM Ahead. Recuperado de:
<http://www.springer.com/la/book/9783319025728> (Fecha de consulta: 10 de septiembre de 2017)

GEARY, David C. Mathematics and Learning Disabilities. Recuperado de:
<http://web.missouri.edu/~gearyd/JLD04.pdf> (Fecha de consulta: 10 de febrero de 2018)



GÓMEZ QUINTERO, Lina Marcela. Cultura STEAM y la Educación para el Siglo XXI. Recuperado de: <http://www.santillana.com.co/rutamaestra/edicion-18/cultura-steam-y-la-educacion-para-el-siglo-xxi/> (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2017).

HOFSTADTER, Douglas. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007); 882 p.

KELLER, Helen. The Story of My Life. Recuperado de: http://cbseacademic.nic.in/web_material/doc/The%20Story%20of%20My%20Life,%20by%20Helen%20Keller.pdf (Fecha de consulta: 10 de junio de 2018)

KIRK, David and MACDONALD, Doune. Situated Learning in Physical Education. Recuperado de: https://researchgate.net/profile/David_Kirk20/publication/279897741_Situated_Learning_in_Physical_Education/links/58b69bf992851c471d441f40/Situated-Learning-in-Physical-Education.pdf (Fecha de consulta: 25 de junio de 2018)

KUHL, Patricia K. Early Language Acquisition: Cracking the speech code. En: Nature Reviews: Neuroscience. Volume 5, November 2004; p. 831–843.

LEE, Clara. El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. Ed. Morata, primera edición (2009); 208 p.

LERMAN, Stephen. Intersubjectivity in mathematics learning: a challenge to the radical constructivist paradigm? Recuperado de: https://jstor.org/stable/pdf/749597.pdf?casa_token=k3H9zcxwSZcAAAAA:AKLdSq6183Lg_g2thPWqGb8oHmgi8HQbhN9INJrWCLVXXFe8Ohq4CJeqGCyKCCbHeLPUKkX0p0hXuVtynDBbro3YWY70qFtTUIOVndUm3R5-xDUzl1c (Fecha de consulta: 29 de junio de 2018)

LERMAN, Stephen. Cultural, Discursive Psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of Mathematics. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Stephen_Lerman/publication/226945157_Cultural_Discursive_Psychology_A_Sociocultural_Approach_to_Studying_the_Teaching_and_Learning_of_Mathematics/links/02bfe512db5ef5a4e1000000/Cultural-Discursive-Psychology-A-Sociocultural-Approach-to-Studying-the-Teaching-and-Learning-of-Mathematics.pdf (Fecha de consulta: 21 de enero de 2018)



MARTÍNEZ, Jaime E. The Search for Method in STEAM Education. Recuperado de: <http://www.palgrave.com/la/book/9783319558219> (Fecha de consulta: 30 de noviembre de 2017)

MENON, Usha. Mathematization vertical and horizontal. Recuperado de: <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52> (Fecha de consulta: 3 de mayo de 2016)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – MEN. Enfoque de Competencias en la Educación: del conocimiento al uso y apropiación. Recuperado de: <https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/w3-article-275791.html> (Fecha de consulta: 10 de abril de 2018)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – MEN. Método Singapur para la Enseñanza de las Matemáticas. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/metodo_singapur.pdf (Fecha de consulta: 10 de marzo de 2018)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – MEN. Sistema para la Prevención y Atención de la Deserción en la Educación Superior – SPADIES. Recuperado de: https://spadies.mineduacion.gov.co/spadies/consultas_predefinidas.html?2 (Fecha de consulta: 10 de abril de 2017)

NISS, Mogens y HØJGAARD, Tomas. Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Recuperado de: http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/485web_b.pdf (Fecha de consulta: 24 de febrero de 2018)

NISS. Mogens. Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: the Danish KOM Project. Recuperado de: http://equipsice.uab.cat/file.php/28/Compet_Niss.pdf (Fecha de consulta: 01 de marzo de 2018)

OAKLEY, Barbara. A Mind for Numbers: How to Excel at Math and Science (Even If You Flunked Algebra). Ed. Tarcher/Penguin (2014), 306 p.

OECD. PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education. Recuperado de: <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm> (Fecha de consulta: 15 de abril de 2017)



OECD. Reporte PISA 2012 – Estudiantes de bajo rendimiento. Recuperado de: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf> (Fecha de consulta: septiembre 13 de 2016)

POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29lZzdxMnM/view?usp=drivesdk (Fecha de consulta: 9 de abril de 2016)

RICO, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA (pp. 21-40). Madrid: Editor

SCHLEPPEGRELL, Mary J. The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: a research review. Recuperado de: <https://studentportalen.uu.se/uusp-filearea-tool/download.action?nodeId=1058147&toolAttachmentId=203996> (Fecha de consulta: 5 de septiembre de 2016)

SIEGAL, Meryl. The Role of Learner Subjectivity in Second Language Sociolinguistic Competency: Western Women Learning Japanese. Recuperado de: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.112.2622&rep=rep1&type=pdf> (Fecha de consulta: 01 de marzo de 2018)

STRÄBER, Rudolf. Introduction: Semiotics in Mathematics Education Research. Recuperado de: <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm046a1.pdf> (Fecha de consulta: 6 de septiembre de 2016)

TOBÓN, Sergio. Formación basada en Competencias. Recuperado de: <https://www.uv.mx/psicologia/files/2015/07/Tobon-S.-Formacion-basada-en-competencias.pdf> (Fecha de consulta: 27 de abril de 2018)

TRUDEAU, François and SHEPARD, Roy J. Physical education, school physical activity, school sports and academic performance. Recuperado de: <https://ijbnpa.biomedcentral.com/track/pdf/10.1186/1479-5868-5-10> (Fecha de consulta: 20 de junio de 2018)

WARSCHAUER, Mark and KERN, Richard. Network-based Language Teaching. Recuperado de: <http://docshare01.docshare.tips/files/28513/285138413.pdf> (Fecha de consulta: 15 de abril de 2018)



WATSON, Anne. Dance and mathematics: engaging senses in learning. Recuperado de: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ717786.pdf> (Fecha de consulta: 30 de junio de 2018)

WEARNE, D. and HIEBERT, J. A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/749172?casa_token=7ZMJy8x9u1sAAAAA:4Oe5guMEPTEBM75ie7LsxsINvdVYqcNd-9XaCEoiADSA51VFJwDhYR1M5B3B55s4FGcqrn94thorPpPCLglyLg1TpKq3fo7OGSZNcc5T5KqyejkFFQIN&seq=1#page_scan_tab_contents (Fecha de consulta: 1 de febrero de 2018)

WHITE BECK, Lewis. La teoría kantiana de la definición. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1692-88572013000100008 (Fecha de consulta: 29 de mayo de 2018)



ANEXO 1. UNDERSTANDING THE STRUCTURE OF ENGLISH GRAMMAR⁴¹

By: Lina Marcela Gómez Quintero

Jorge Hugo Hincapié Zapata

We humans are social beings, no doubt: **interaction** is an important issue in our daily life. In ancient times, it helped us to preserve life through taking care of each other, and to achieve more and bigger goals as well, such as: using surrounding resources to make tools and weapons; developing strategies to hunt for food; choosing ways to move safely, altogether; settling groups of people, with animals and objects, looking for a place to stay; building safe shelters, where food could be also stored. And so on. **Collaboration** became a relevant skill to develop, so, it was necessary to create a tool to share all the information required in the understanding of given situations and ask for help if needed; that tool has been named **language**, and it has been used since, assuring the rise of remarkable insights that have affected our lifestyle today. **Communication** has been, therefore, essential for humanity as a need to evolve; that explains why its development has been considered a significant field of study.

It is regarded that we learn our mother tongue through direct interaction with our environment. Actually, it is more complex than only this: yes, interaction with the environment helps us to make a **connection** between each object and our body, which is useful to understand how stuff works, and leads to the creation of a sensorial representation of it. This interaction is also followed by a word, constantly repeated from our language learning mentors (usually parents and relatives), and this sticks into our minds, making us connect that word with a **meaning** given by the experience of the object we are manipulating. Then, we construct language through the representation we make from the interaction of an object, and the **concept** we acquired in the intervention of our mentors.

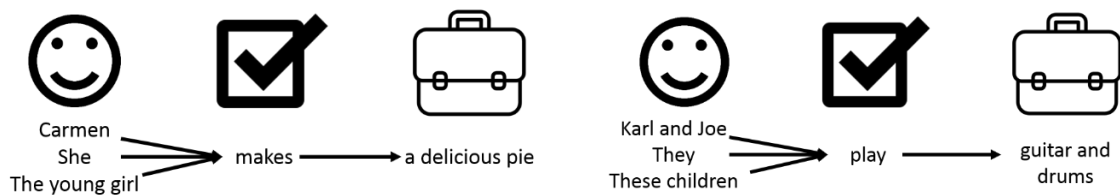
⁴¹Este documento fue escrito en el marco del curso de inglés para los estudiantes del grado noveno del Colegio de la UPB, sirviendo de referente para la labor de revisión gramatical. Reúne la descripción de los aspectos básicos de la gramática inglesa a través de iconos, y los envuelve en un relato que facilita la comprensión de algunos elementos que suelen generar confusión. Esta estrategia, conocida como *narración gráfica (graphic storytelling)* se fundamenta en los enfoques cognitivo y comunicativo para favorecer el aprendizaje, atrayendo elementos semióticos para el reconocimiento de patrones que influyen en el proceso comunicativo.



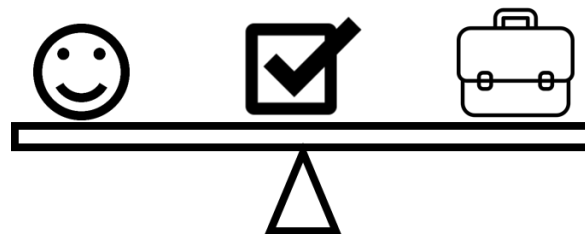
The simplest structure we use in any language to communicate is the **sentence**. It contains the information we need to report a coherent idea, to share our observations and descriptions in a full of sense way. According to our background, this basic sentence is made of three elements:



Every basic description is sustained by this basic structure. As every simple description is affirming the characteristics of the object/situation of interest, this structure is considered the basis of the **affirmative mode** of the sentences:



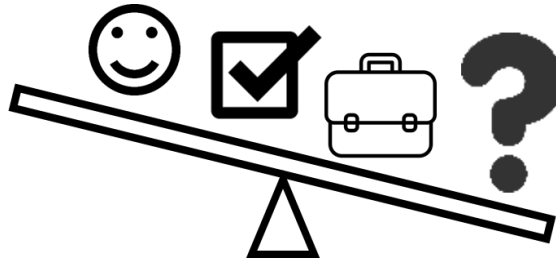
So far, so good. Affirmative sentences are very stable, very balanced. They support a significant amount of expressions used every day, every time.



However, what happens when I need to ask for information? That is, for sure, a different type of sentence, so, the original structure we previously defined must change. The most evident sign of having a **question sentence**, or **interrogative form** of the sentence, is, of

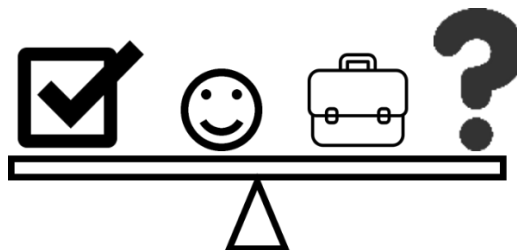


course, the question mark. Which one? This one! → ?. In any case, this mark is heavy enough to unbalance this marvelous, basic structure:



When this happens, our priority is to make this structure balanced again. Otherwise, how are we going to keep supporting our language background? There are two options to do so:

- Redistributing the load on the balance: this happens when one of the elements is heavy enough to compensate this additional load, or when any of these elements is free to move; so, we move this heavier object to the opposite edge of the balance. The heaviest verb we have to do that, which is also movable, is the verb **to be**. We move, then, the verb **to be** to the opposite edge to the balance:



- Adding another load, on the opposite edge: when all the elements are equally heavy, and they cannot move (they are fixed to their places), the intervention of an additional element is necessary. This new component of the sentence has come to **help** others to keep balanced, thus, it is named **auxiliary**.



SUBJECT

The "face" of the idea, the body of any action



VERB

The action developed by the subject.



COMPLEMENT

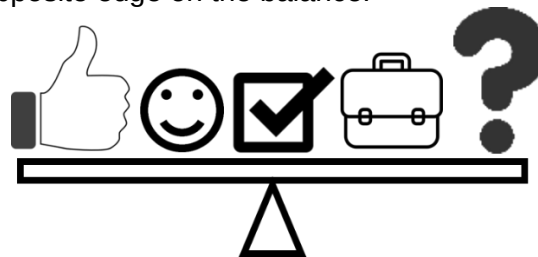
All issues around the verb.



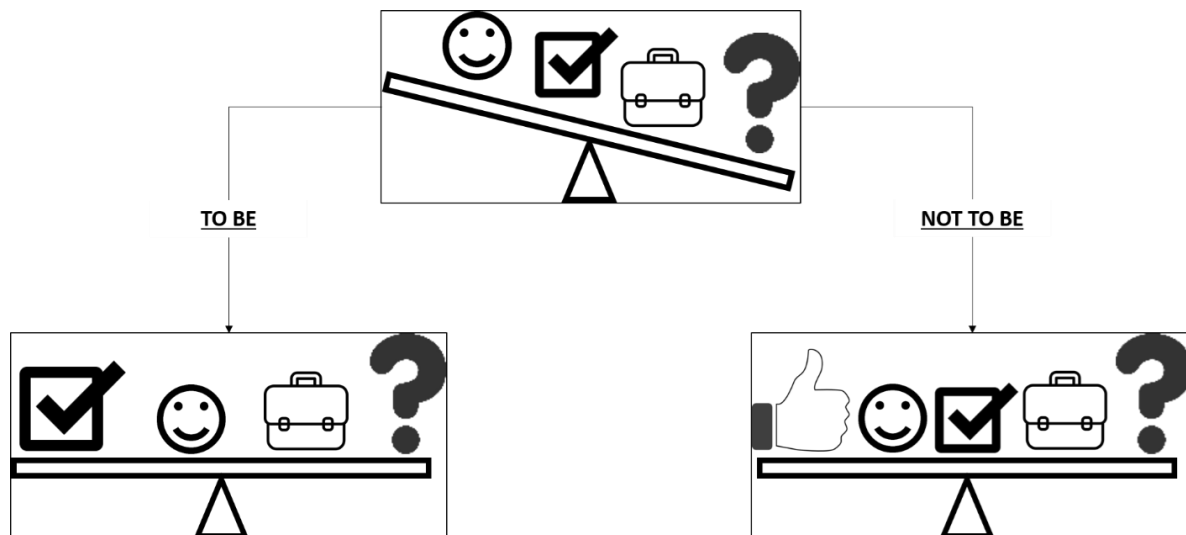
AUXILIARY

The nice guy which helps the sentence to keep balanced.

He gets, then, the opposite edge on the balance:



In other words, or better, in other symbols:



But wait! There are some questions, which are related to **circumstances**, such as location, time and others, all of these facts provided by the complement in the sentence; these circumstances could be found in the message through the **WH words**. Is it possible to



involve them into the interrogative sentence, without any risk of unbalance? The answer is **yes!** Every WH word is an occasional guest in the sentence, because it is only invited to join the interrogative sentence when circumstances are required. Therefore, it is a light contributor to the structure, whose weight will be dependent on the requested information: *who, what, when, where, how, why*. It is similar to the Mario Bros Question Box, in which every option was possible!



SUBJECT

The "face" of the idea, the body of any action.



VERB

The action developed by the subject.



COMPLEMENT

All issues around the verb.



AUXILIARY

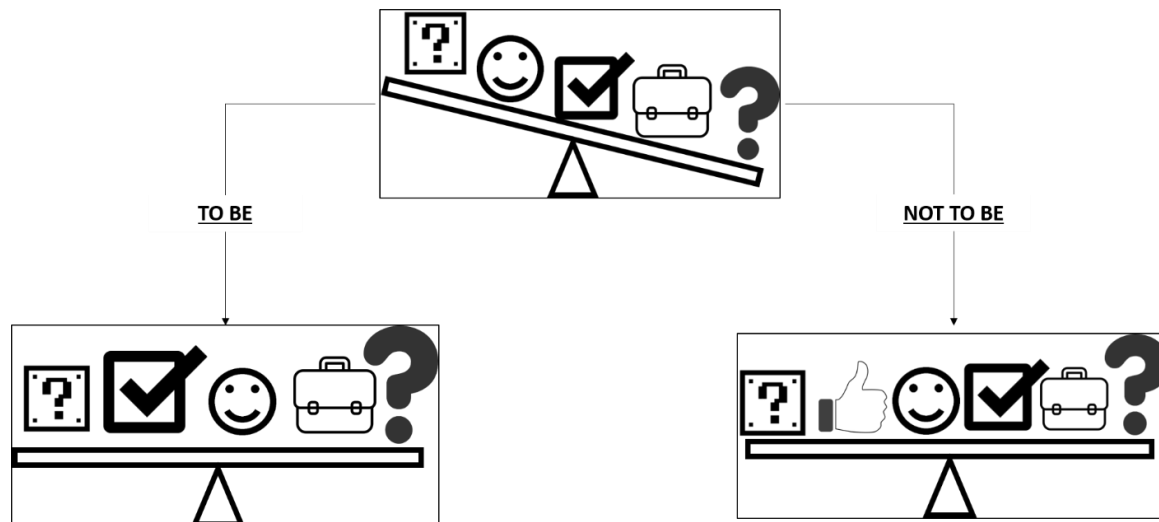
The nice guy which helps the sentence to keep balanced.



WH WORD

Guest in the sentence, appears when the question looks for circumstances.

Graphically speaking, it looks as follows:

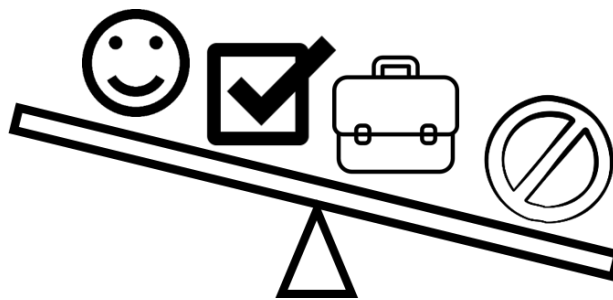


Finally, we have gotten the balance we have been looking for, and we have found the importance of verbs and their auxiliaries to keep a balanced structure in a sentence. Now

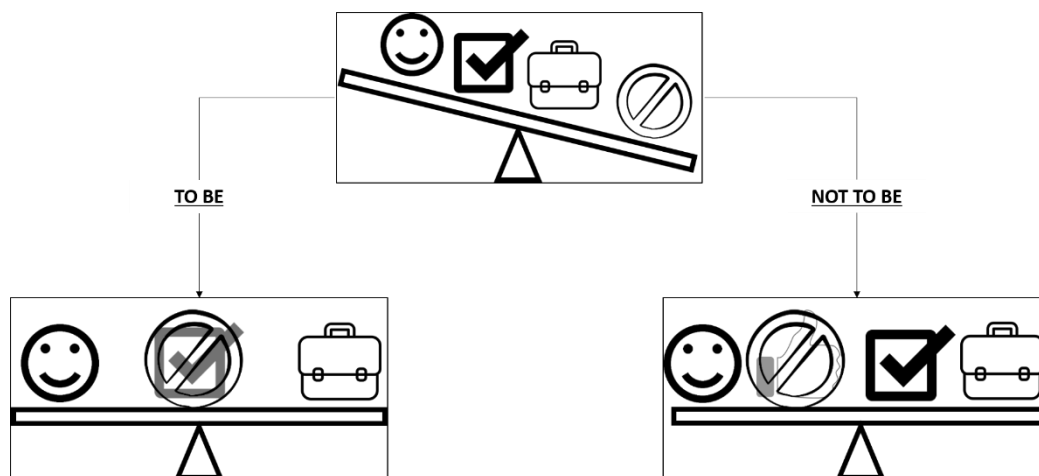


we know why and how to use these elements into the sentences to create a proper, understandable message. Something is, however, missing: sometimes, we need to give **opposite** information to the previously described, or to **refuse** any affirmation, it means, we need to show the **negative form** of the sentence we have used so far.

Since negative is changing the sense of the information we are giving, we could say that it is as powerful as the question mark to unbalance the sentence. What does it mean? It means that the negative presence in the sentence is making a completely different sentence!

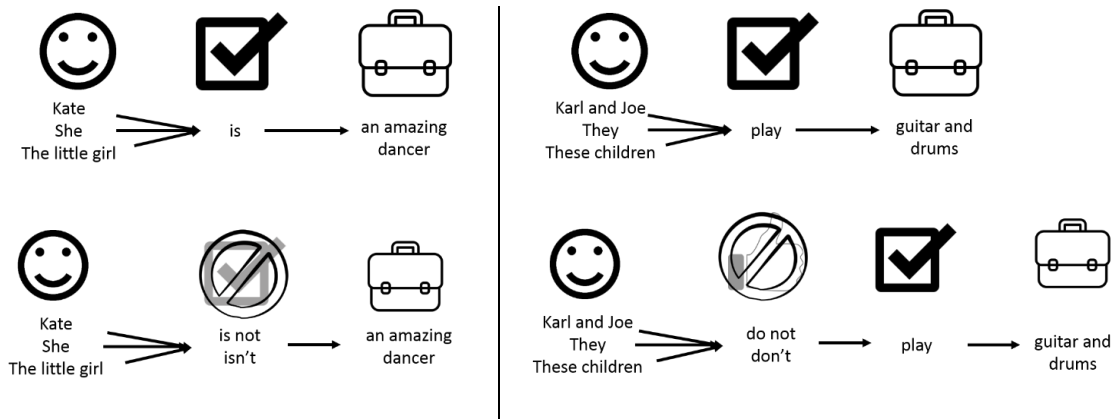


However, good news! Negative sentences have the same balance flow we have mentioned, they need to be rearranged or compensated with any extra component; the only difference is that the negative characteristic sticks onto the element we have used to rebalance the sentence (verb TO BE or auxiliary). So, we could use the same sketch to explain how it works, but showing how the component (a.k.a **particle**) is modified by the negative mark:





Now, how is this negative mark visible in the sentence? Because the particle of interest (verb TO BE or auxiliary) has the word **not** just next to it!





ANEXO 2. PROBLEM SOLVING CHECKLIST: RÚBRICA PRELIMINAR PARA LA REVISIÓN DE ESTRATEGIAS EMPLEADAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y CIENTÍFICOS COMO INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN EN EL NUEVO COLEGIO

Eje temático: Evaluación - ¿Sólo los resultados cuentan?

Lina Marcela Gómez Quintero⁴², Ildebrando Restrepo Hernández, Natalia María Orduz Romero, Lucas Vélez Vélez.

Resumen

El Pensamiento Sistémico, el Aprendizaje Significativo y la Escuela Nueva, son principios fundamentales en la construcción del Modelo Pedagógico de Formación en Conciencia, propio de nuestra institución educativa. Estos pilares promueven, entre otros mecanismos, la definición de estrategias didácticas y pedagógicas enfocadas en la solución de problemas y la formulación y ejecución de proyectos, particularmente en las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales.

El siguiente trabajo busca presentar los resultados preliminares alrededor de la construcción de una rúbrica para evaluar los procesos de pensamiento encaminados a la solución de problemas, paso previo a la formulación y ejecución de proyectos, de acuerdo con el proceso de solución de problemas propuesto por George Pólya; esta rúbrica inicial se ha enfocado en el trabajo de clase con los cursos de Matemáticas y Física (Español/English) de los grados Décimo y Undécimo. Se muestran los elementos básicos de la rúbrica, con los recursos correspondientes para la evaluación, y los criterios que se plantearon para integrar los niveles de ejecución del trabajo a la escala valorativa propuesta en nuestro sistema de evaluación institucional. Adicionalmente, se muestran las primeras rúbricas desarrolladas para la sistematización y comunicación del conocimiento generado a partir de la primera aproximación a la solución de proyectos, de acuerdo con los aspectos establecidos institucionalmente para la valoración del trabajo en equipo y la reflexión individual ante diversos escenarios de construcción conceptual fundamentados en centros de interés.

Estas rúbricas están implementándose hasta ahora, y por esto, los primeros resultados han mostrado dificultades por parte de los alumnos en cuanto a la

⁴² The New School – El Nuevo Colegio. Medellín, Colombia, Suramérica. Correo electrónico de contacto: marcela.gomez@thenewschool.edu.co



sistematización de sus estrategias para solucionar los problemas, del mismo modo respecto de la facilidad para la modelación de las situaciones planteadas; dichos hallazgos han guiado el rediseño curricular de las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales, el cual se encuentra actualmente en evaluación. No obstante, se han evidenciado ligeras mejoras en las estrategias de sistematización y planeación para la solución de los problemas planteados.

Introducción

Las competencias en solución de problemas y formulación de proyectos son parte inamovible en el conjunto de competencias que deben tener los habitantes del siglo XXI, y por lo mismo se han transformado en prioridad dentro de los programas académicos a nivel mundial. Son famosos los modelos educativos asiáticos y escandinavos, dada su destacada participación en las Pruebas PISA y TIMSS, las cuales se formulan con el fin de evaluar la capacidad de los estudiantes de Educación Básica y Media para resolver situaciones problemáticas. Las instituciones educativas latinoamericanas, en cambio, hemos mostrado pobres desempeños en las mismas, en particular Colombia, quien ha ostentado los últimos puestos; esto ha generado preocupación en el ámbito educativo, pues se identificó como parte importante del problema el enfoque algorítmico de la educación matemático-científica, que limita la capacidad interpretativa del estudiante ante situaciones para resolver, reduciendo drásticamente las competencias argumentativa y propositiva.

The New School – El Nuevo Colegio, es una institución educativa de inclusión, de carácter privado, cuyo modelo pedagógico de Formación en Conciencia está basado en tres pilares fundamentales: la *Escuela Nueva*, que considera la conformación de centros de trabajo a partir de los intereses de los estudiantes y sus ritmos individuales de aprendizaje, con el propósito de asegurar la experiencia que soporta un aprendizaje efectivo; el *Aprendizaje Significativo*, el cual promueve la consideración del estudiante como un individuo con conocimientos previos que puede emplear en la generación de nuevos saberes y en la formulación de estrategias para la solución de problemas; el *Pensamiento Sistémico* parte de la observación deliberada y persistente de las situaciones, seguida por procesos de indagación para la clarificación de hechos, la evaluación permanente y la reflexión sistémica.

Estos pilares entran en consonancia con las demandas establecidas por la sociedad del siglo XXI para sus nuevos ciudadanos, las cuales se plantean en las Competencias para el Siglo XXI, que corresponden a las competencias cognitivas y



a las comunicativas. Dicho de otro modo, se busca que los estudiantes que participarán activamente de este nuevo tiempo, estén preparados para solucionar problemas, trabajar en equipo, comunicar de manera oral y escrita sus ideas y procesos de desarrollo de soluciones, establecer debates enfocados en las situaciones a resolver y en sus potenciales impactos sobre la comunidad afectada y sus alrededores, entre otros. Este sistema de trabajo se apoya en dos sistemas de aprendizaje, siendo el primero la antesala al segundo: Aprendizaje Basado en Problemas, puesto que promueve el pensamiento contextual alrededor de una situación de interés, y Aprendizaje Basado en Proyectos, al establecer preguntas de investigación que resuelven problemas reales, o permiten modelar situaciones cotidianas para su potencial aplicación en nuevos escenarios, y que deben abordarse con planes que incluyen actividades a realizarse en el corto, mediano y largo plazo, seguimiento y retroalimentación a las mismas. Las características de esta actividad permiten el seguimiento confiable del proceso de aprendizaje de cada estudiante dentro de un contexto similar al real, revisando su experiencia de aprendizaje desde el registro de actividades y reflexiones sobre su desarrollo, la evaluación de la coherencia entre el plan de trabajo y la consecución de los logros establecidos al inicio, la pertinencia de los debates realizados en el equipo de trabajo (desde la calidad de los argumentos brindados, hasta las responsabilidades asignadas al final de estas discusiones), y la comunicación del proceso de solución de la pregunta planteada, de manera oral y/o escrita, apoyándose en el uso de tecnologías clásicas y alternativas. Así, es posible lograr de manera no tradicional, un aprendizaje basado en la solución de problemas, que permita la adquisición de conocimientos y competencias asociadas al pensamiento matemático, a su vez que permite la interacción con el medio mediante la observación cuidadosa de los fenómenos relacionados con el problema a resolver, y que conllevan a la conformación de estrategias de estudio según las etapas del método científico, de total relevancia en la enseñanza de las Ciencias, entre ellas la Física.

Se busca entonces presentar el diseño piloto de la rúbrica diseñada para implementar la Lista de Chequeo para la Solución de Problemas – *Problem Solving Checklist* – en los grados 10 y 11 de El Nuevo Colegio, para las asignaturas de Matemáticas y Física, en Español y Inglés, y los instrumentos preliminares para la sistematización del proceso reflexivo, que permiten preparar a los estudiantes para el desarrollo de proyectos de aula a partir de centros de interés. Se presentan los distintos elementos teóricos de carácter pedagógico – que incluyen la Zona de Desarrollo Próximo de Vigotsky, Método Científico, Método de Matematización de Pólya - y técnico – entre ellos el Ciclo de Shewhart (Ciclo PHVA) para la Calidad en Proyectos, la teoría Six Sigma, y el empleo de la Matriz DOFA para la planeación – que fueron considerados para la selección y diseño de los instrumentos empleados para la evaluación de cada proyecto, y con esto las rúbricas de cada una de las actividades evaluativas, enlazadas a las Competencias para el Siglo XXI.



Posteriormente, se muestran algunos de los resultados obtenidos por los estudiantes, respecto de la evaluación del proyecto en la consecución de los objetivos de las asignaturas, de las habilidades descubiertas y desarrolladas a lo largo del trabajo, y de las contribuciones de sus compañeros al trabajo final. Finalmente, se presentan algunas de las mejoras sugeridas para el plan de trabajo, con el fin de implementarlo en todos los años escolares.

Objetivos y Métodos

Como referencia, se plantearon los objetivos mostrados en la Figura 1.

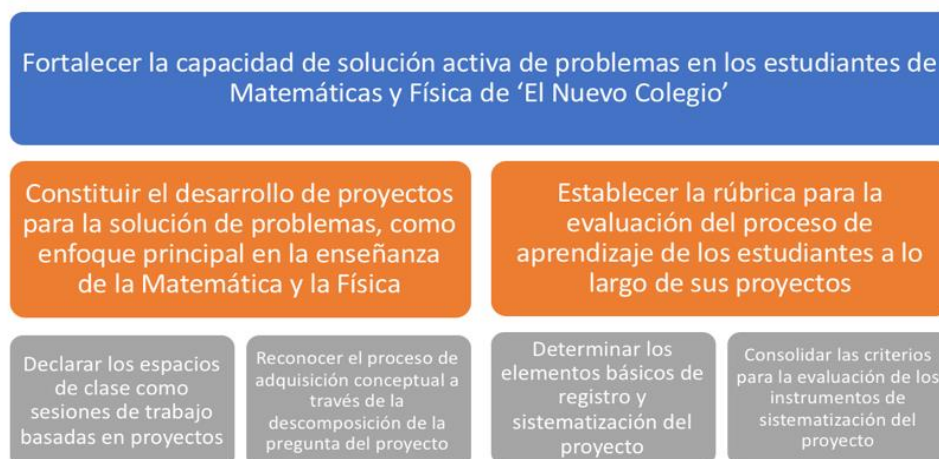


Figura 1. Objetivos del trabajo

Se tomaron como referencia, en primer lugar, las etapas determinadas por Pòlya para la solución de problemas, las cuales se fundamentan en los principios de matematización vertical y horizontal, propuestos por Freudenthal y desarrollados por Treffers. Dichas etapas se revisaron en conjunto con la secuencia determinada en el método científico, ampliamente difundido en Ciencias Naturales.

Resultados

La definición de la Lista de Chequeo para la Solución de Problemas – Problem Solving Checklist – involucra el desarrollo de ciertas tareas que guían el proceso de sistematización de la situación planteada. Dichas etapas, con sus respectivas tareas, se muestran en la Tabla 1.



Tabla 1. Lista de Chequeo para la Solución de Problemas – Etapas y tareas

	ETAPA	TAREA
1	Entender el problema (<i>Understanding</i>)	• Reescribir el problema con palabras propias. • Elaborar un dibujo/esquema que represente el problema. • Sistema de referencia • Dimensiones • Variables • Escala • Unidades • Cifras significativas • Notación
2	Identificar datos y pregunta (<i>Identifying</i>)	• Enlistar los datos disponibles. • Unidades • Enlistar los datos faltantes. • Unidades • Formular la pregunta que busca resolver el problema.
3	Plantear una estrategia (<i>Planning</i>)	• Definir inicio y final. • Establecer los pasos necesarios para resolver el problema. • Determinar el modelo/ecuación/principio a aplicar en cada paso.
4	Aplicar la estrategia (<i>Executing</i>)	• Emplear los datos disponibles en cada etapa de la solución (reemplazar variables por datos). • Utilizar los resultados de cada paso para resolver el siguiente.
5	Evaluar los resultados (<i>Evaluating</i>)	• Revisar que los resultados de cada etapa sean consistentes con los datos. • Unidades correspondientes a variables. • Magnitudes consistentes con operaciones. • Notación científica y cifras significativas.



		• Verificar que la situación sea coherente, tenga sentido.
6	Comunicar la solución (<i>Communicating</i>)	• Escribir la respuesta a la pregunta: • Variable solicitada. • Resultado obtenido. • Unidades.

Esta lista fue difundida entre toda la comunidad educativa (estudiantes, docentes de Área, docentes de otras áreas, directivos docentes), empleando para ello diferentes canales institucionales de comunicación, que incluyen la cartelera de Área, el correo electrónico, y las mismas aulas de clase a través de su respectiva ambientación. Posteriormente, se comunicó a través de la revista digital del colegio, ToNS Magazine, disponible a través del portal institucional.

Si bien esta lista constituye una guía procedimental, no muestra las condiciones necesarias para facilitar la solución del problema de tal manera que su interpretación sea clara y unívoca, y por consiguiente, no es adecuada en sí misma para la evaluación del proceso de solución de problemas, ni para su auto/co valoración, parte indispensable de nuestra estructura evaluativa. Esto conllevó a la creación de la rúbrica que se presenta en la Tabla 2.

Por otra parte, teniendo en cuenta la importancia del proceso reflexivo que ayuda al aprendizaje significativo, y que además relaciona los procesos de Aprendizaje Basado en Problemas con los de Aprendizaje Basado en Proyectos, se diseñaron varias rúbricas enfocadas en la sistematización del conocimiento y su correspondiente socialización. De esta manera, es posible determinar, con la ayuda del mismo estudiante, los cambios en su Zona de Desarrollo Próximo, concepto estudiado y difundido por Vigotsky.

Los elementos considerados en la evaluación de la sistematización del conocimiento a través de los proyectos de aula, se muestra en la Tabla 3, y una de las rúbricas desarrolladas para el curso en Inglés se muestra como referencia en la Tabla 4. Finalmente, la gráfica de resultados académicos obtenidos en los grados Décimo y Undécimo durante la implementación piloto de estas rúbricas en la formulación y ejecución de proyectos de aula, se presenta en la Figura 2.

Tabla 2. *Problem Solving Checklist* – Rúbrica de evaluación (Español)



Nombre del estudiante		Fecha	
Asignatura	Matemáticas – Física	Grado	
Indicador de logro	Ver indicadores de actividad evaluativa (esta rúbrica se incluye como anexo)		

La rúbrica a continuación se basa en el Ciclo de Solución de Problemas propuesto por Pólya, el cual se emplea en los procesos de enseñanza/aprendizaje para la solución de problemas en Matemáticas y Física. Se considera un puntaje de 100 % a un ejercicio. Si se asigna un puntaje diferente, los puntos de la rúbrica deberían ser proporcionales.

Paso	DS		DA		DB		DP			
	Excelente	%	Bueno	%	Regular	%	Deficiente	%	Nulo	%
1	El dibujo es claro y representa muy bien la situación propuesta.	15	El dibujo requiere una explicación adicional para ser comprendido.	10	El dibujo es confuso y requiere muchas explicaciones para ser comprendido.	7	El dibujo no representa la situación propuesta en el problema.	3	El dibujo no está.	0
2	El listado de datos es completo, no falta ningún dato implícito o explícito. Todos están con sus unidades en el mismo sistema de referencia. Está la(s) variable(s) que se tiene(n) que determinar.	15	El listado tiene alguna de las siguientes fallas: - falta algún dato. - las unidades no están todas en el mismo sistema. - falta(n) la(s) variable(s) a encontrar	10	El listado tiene dos de las siguientes fallas: - falta algún dato. - las unidades no están todas en el mismo sistema. - falta(n) la(s) variable(s) a encontrar.	7	El listado tiene las tres siguientes fallas: - falta algún dato. - las unidades no están todas en el mismo sistema. - falta(n) la(s) variable(s) a encontrar.	3	El listado no está.	0
3	Toda la información que puede ser ubicada en el dibujo está puesta de forma correcta.	10	Hay información que no está puesta, en forma correcta, en el dibujo	7	Hay información disponible que no está puesta en el dibujo.	5	Hay información mal puesta en el dibujo y, además, hay información no puesta en el dibujo.	2	La información disponible no está puesta en el dibujo	0
4 ¹	El modelo matemático presentado es el correcto. Lo mismo si es en plural.	10	Incluye modelos matemáticos no necesarios para la resolución del problema	7	Presenta modelos matemáticos cuya variable, que ha de encontrarse en el problema, ya está despejada. Si corresponde el caso	5	El modelo matemático que presenta no permite solucionar el problema.	2	No presenta modelo matemático.	0
5	Todo el procedimiento de solución del problema es correcto, si hay cálculos se incluyen todas las unidades de medida, en todos los pasos. Además tiene en cuenta las cifras significativas para los cálculos y resultados, expresando las magnitudes en notación científica cuando es necesario. La secuencia matemática es clara y precisa, no permite interpretaciones diferentes a la propuesta.	30	Se llega al resultado final de manera correcta, pero durante el desarrollo hay al menos uno de los siguientes errores: - falta una o más unidades de medida. - la secuencia matemática empleada es incompleta. - hay inconsistencia entre unidades de medida, no tuvo en cuenta las cifras significativas y la notación científica.	20	Si ocurre uno de los siguientes casos: 1) Se llega al resultado final correcto, pero no se trabaja con unidades de medida correspondientes, no realiza los cálculos con las debidas cifras significativas. 2) Algunos pasos de la secuencia utilizada no están debidamente justificados. 3) El desarrollo propuesto está correcto, pero hay algún error matemático simple en la parte final.	15	Hay errores en el uso de unidades de medida, cifras significativas, secuencia matemática y resultado final.	6	No se realizó este paso.	0
6	La presentación del resultado final, incluyendo su magnitud si corresponde, es totalmente consistente con lo solicitado en el problema y no ofrece interpretaciones subjetivas.	20	La presentación del resultado final, incluyendo su magnitud si corresponde, es correcta pero ofrece alguna opción de interpretación subjetiva.	14	La presentación del resultado final es correcta, pero no incluye la magnitud si ésta corresponde, y es subjetiva.	10	La presentación del resultado final no es consistente con lo solicitado en el problema. Hay errores de valor numérico y/o unidad de medida, si estos datos son necesarios	4	No se presenta el resultado final.	0
PORCENTAJE OBTENIDO										
CALIFICACIÓN										

¹ Se entenderá por modelo matemático general, al modelo, o ley, matemático principal referido al contenido a evaluar, y no a modelos que presentan una variable ya despejada. Si hay que despejar debe incluirse el procedimiento en la evaluación.

Tabla 3. Evaluación de la sistematización del proceso reflexivo



Nombre de la prueba	Term Project (Term Test)		
Asignatura	Mathematics – Physics	Periodo	Second
Nombre del Estudiante			
Grado	Eleventh AB	Calificación	Corrección
Docente	Lina Marcela Gómez Quintero	Fecha	
Indicadores			
➤ Analiza y determina el límite de una función cuando los valores tienden al infinito y crecen indeterminadamente. ➤ Examina el comportamiento de una función en un punto de discontinuidad ➤ Determina los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función ➤ Identifica la derivada de una función en un punto como la pendiente de una recta tangente. ➤ Muestra eficiencia en el razonamiento matemático ➤ Valora la equidad en el trabajo de equipo, asume con responsabilidad las normas acordadas y cumple con los materiales requeridos en la asignatura.		➤ Establece y describe claramente las diferencias entre ondas y oscilaciones. ➤ Conoce y aplica de forma apropiada las ecuaciones de movimientos oscilatorios y ondulatorios. ➤ Comprende los fenómenos asociados a la interacción entre ondas. ➤ Se informa para participar en debates relacionados con temas de interés general en Ciencias ➤ Valora la equidad en el trabajo de equipo, asume con responsabilidad las normas acordadas y cumple con los materiales requeridos en la asignatura.	

This document contains the rubrics used to evaluate the Term Project, corresponding to the follow up and the final test of the Term 2. This evaluation has the following submissions:

SUBMISSION	DESCRIPTION	WEIGHT ON THE OVERALL GRADE	ASSIGNED GRADE
Journey	Record of the developed activities, class to class.	25%	
Classwork	Time management, submission of advance reports. This is dependent on teacher's annotations and comments.	5%	
Report	Summary of the complete work on the project, according to the assigned template	25%	
Presentation	Presentation of the highlights of the project, with a consistent, clear and fluent speech.	25%	
Project Assessment #1	Analysis of the influence of the term project on the achievement of the course goal and indicators.	10%	
Project Assessment #2	Analysis of the performance of every student involved in the project. This work will be developed in class after the presentations and submission of the reports	10%	
OVERALL GRADE FOR THE TERM PROJECT		100%	

The rubrics for the evaluation of each submission are presented as follows:

Tabla 4. Evaluación de la sistematización del proceso reflexivo – Rúbrica de referencia: Journey (bitácora)

ACTIVITY		Term Project						
SUBMISSION		Journey (25%)						
GOAL OF THE ACTIVITY		To analyze a real-life phenomenon related to the topics of the term in Physics class, and the mathematical models used to explain it according to the topics of the term in Math class.						
GOAL OF THE SUBMISSION		To record the information collected in order to answer a real-life phenomenon related to the topics of the term in Physics class, and the mathematical models used to explain it according to the topics of the term in Math class.						
Assessment criteria	DS (43-50)	DA (37-42)	DB (30-37)	DP (10-29)	Max. Points	Weight	Assigne points	
Number of records	The journey is showing the records corresponding to all the class sessions assigned to the project, and contains detailed information about the activities realized out of the school	The journey is showing the records corresponding to all the class sessions assigned to the project, and contains information about some activities out of the school	The journey is showing the records corresponding to all the class sessions assigned to the project	The journey is not showing the records corresponding to all the class sessions assigned to the project	50	15%		
Components	All the required components (date, topic, tasks, people in charge, description, reflections and feedback) are in each record, and are fulfilling the indications about length and content	Most of the required components (date, topic, tasks, people in charge, description, reflections and feedback) are in each record, and are fulfilling the indications about length and content	Just some of the required components (date, topic, tasks, people in charge, description, reflections and feedback) are in each record, and are fulfilling the indications about length and content	Just some of the required components (date, topic, tasks, people in charge, description, reflections and feedback) are in each record, and are not fulfilling the indications about length and content	50	15%		
Reflections	The records contain personal comments of the student about the development of the activities and the progression on the achievement of the goals, as well as several possible aspects of influence on the final outcome	The records contain personal comments of the student about the development of the activities and the progression on the achievement of the goals, as well as a few possible aspects of influence on the final outcome	The records contain personal, brief comments of the student about the development of the activities and the progression on the achievement of the goals	The records do not contain any personal comment of the student about the development of the activities and the progression on the achievement of the goals	50	35%		
Feedback	The student's record is showing several suggestions to improve the results obtained in the corresponding work session, or to go further with the development of the project, and suggests how to do so	The student's record is showing several suggestions to improve the results obtained in the corresponding work session, or to go further with the development of the project	The student's record is showing one suggestion to improve the results obtained in the corresponding work session, or to go further with the development of the project	The student's record is not showing any suggestion to improve the results obtained in the corresponding work session, or to go further with the development of the project	50	35%		
TOTAL POINTS					200	100%		

[illegible]

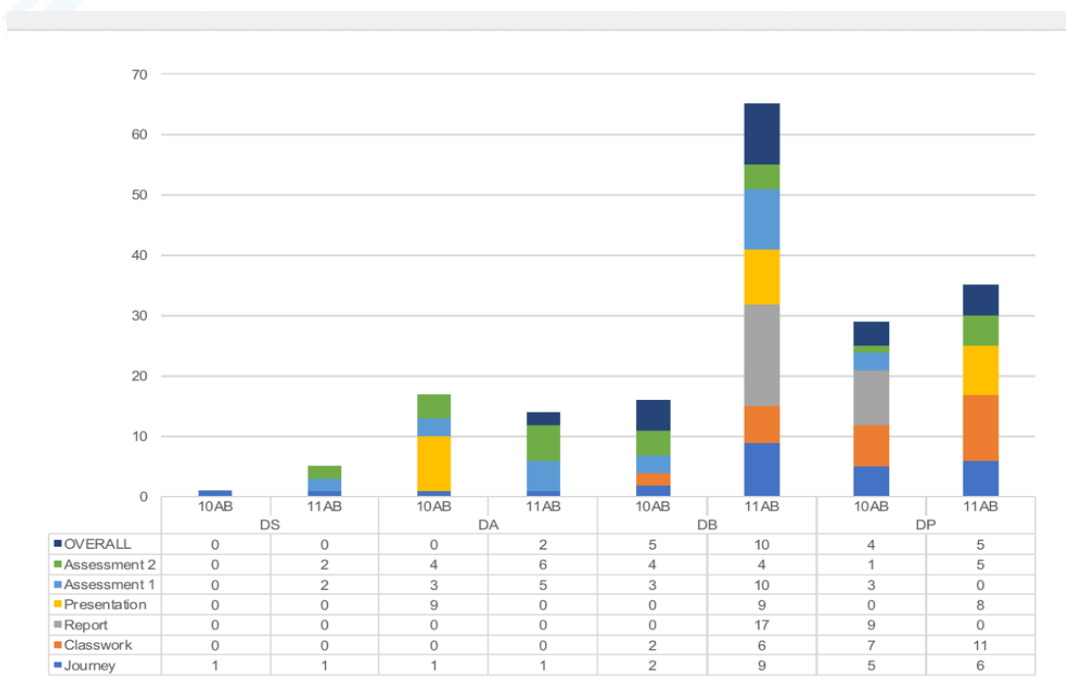


Figura 2. Implementación piloto de rúbricas para valoración de sistematización

Conclusiones

Las rúbricas desarrolladas muestran consistencia con los pilares institucionales para la formación, al promover la autonomía en la construcción del conocimiento, sin desconocer la estructura básica necesaria para la formación en hábitos básicos de procesamiento de información. Se puede afirmar que este trabajo permitió evidenciar la respuesta actual del estudiante ante situaciones relacionadas con la solución de problemas, de forma individual y grupal. El enlace de la matemática con otros conocimientos, así como con diversos contextos, promovió el uso de múltiples lenguajes en la comunicación del razonamiento matemático. Esto afectó positivamente el nivel de confianza de los estudiantes a la hora de expresar sus líneas de razonamiento para resolver problemas.

No obstante, los resultados obtenidos en la implementación piloto permitieron observar que el planteamiento académico de las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales no estaba considerando la preparación para este tipo de instrumentos y recursos, por lo cual el subsecuente rediseño curricular se enfocó en la promoción de competencias asociadas a la formulación y solución de problemas basados en la



observación detallada de las situaciones de interés, rutinarias o no rutinarias. Dichos planes de Área se encuentran en este momento en período de validación.

Es posible adecuar aún más las rúbricas al sistema de evaluación a través del uso de la escala evaluativa institucional, con el fin de asegurar inmediatamente el reconocimiento de esta valoración dentro del seguimiento académico del estudiante, sin necesidad de cálculos intermedios. Esto facilitaría en consecuencia, la comprensión de los aspectos valorativos asociados al instrumento, por parte de cualquier miembro de la comunidad educativa, previa presentación e inducción.

Se recomienda el uso de este trabajo como plan académico para todo el año, a fin de garantizar continuidad y fortalecimiento gradual de competencias encaminadas a la formulación y ejecución de proyectos de alto nivel. Es recomendable, también, que esta práctica se desarrolle de manera continua a lo largo de la vida escolar del estudiante, para asegurar el refinamiento de técnicas y procedimientos en el camino a la solución de un problema.

Referencias

- THE NEW SCHOOL – EL NUEVO COLEGIO. *Proyecto Educativo Institucional*
- POLYA, George. *Cómo plantear y resolver problemas*
- MARTÍNEZ RODRÍGUEZ, Margot y SOLANO ALVARADO, Alejandro. *Visualización como antesala de la resolución de problemas matemáticos*
- LABOY-RUSH, Diana. *Integrated STEM Education through Project-Based Learning*
- DÍAZ BARRIGA ARCEO, Frida y HERNÁNDEZ ROJAS, Gerardo. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*
- PÉREZ FERNÁNDEZ, F. Javier. *Matemáticas fuera de las Matemáticas*
- BERTHA, Christopher and CRAFT, Dominique. *How People Learn. A Cognitive Science Handbook for Beginning and Experienced Teachers.*
- GRIFFIN, Patrick and CARE, Esther. *Assessment and Teaching of 21st Century Skills* (MOOC in Coursera)
- OAKLEY, Barbara. *Learning How to Learn* (MOOC in Coursera)



ANEXO 3. EJEMPLO TALLER DE APLICACIÓN⁴³

Objetivo de aprendizaje: determina la relevancia de la información suministrada por una fuente dada para la posterior resolución de un problema.

Por favor, ten en cuenta las siguientes indicaciones:

- Este trabajo se desarrollará de manera individual. La revisión y valoraciones posteriores serán de carácter grupal.
- Este taller consta de ocho (8) preguntas. Por favor, lee con cuidado antes de responder.
- Junto con este taller, deben entregarse las hojas que evidencien el trabajo realizado (borradores, anotaciones, dibujos, etc.)
- El diseño de este taller permite sólo el uso del directorio telefónico como material de apoyo. Por tanto, no se debe manipular el celular durante su desarrollo.
- Para la realización del taller, sólo se cuenta con una (1) hora. Organiza y aprovecha bien tu tiempo para que puedas terminar sin problema.

1. Caminas por el barrio, pensando en algo que darle a tu persona favorita en su cumpleaños. Esa persona es tu _____. De repente, te detienes, abres los ojos y corres a casa. ¡Ya sabes qué darle! ¡Le darás _____!
2. Llegas a casa y no hay internet (¡rayos!), así que usas las Páginas Amarillas para buscar algún sitio en donde puedas encontrar ese regalo. ¿En qué sección podrías encontrar los sitios en donde podrías comprarlo? ¡Ah, claro! En la sección de _____. ¿Dónde está? ¿En qué páginas?

_____.

⁴³ Este taller ha sido tomado y adaptado del desarrollado para estudiantes de grado 4 del Colegio Gimnasio Los Pinares, durante el año lectivo 2014.



3. ¡Wow, qué montón de números!... ¿Cuántos hay en total? ¿_____, tal vez?
¡Son demasiados! OK, tal vez sea necesario elegir solo cinco. Pero, ¿cómo
elegirlos? ¡Claro! Se pueden elegir por _____.
4. Bueno, hay que escoger a las empresas en donde el regalo puede comprarse.
Hagamos la lista de estos sitios elegidos:
- a. _____ y el número telefónico es _____
 - b. _____ y el número telefónico es _____
 - c. _____ y el número telefónico es _____
 - d. _____ y el número telefónico es _____
 - e. _____ y el número telefónico es _____
5. ¡Perfecto! El regalo está listo. Y ahora, ¡la torta! ¿Dónde comprarla? Busquemos
otros cinco sitios:
- a. _____ y el número telefónico es _____
 - b. _____ y el número telefónico es _____
 - c. _____ y el número telefónico es _____
 - d. _____ y el número telefónico es _____
 - e. _____ y el número telefónico es _____
6. Ya, sin problema. Ahora, ¿qué asuntos pendientes hay para hoy...? ¡Ay, no! Hoy
vienen tus amigos a la casa, y acordaron que tú pedirías el domicilio. Así que, de
Nuevo las Páginas Amarillas. ¡Ah! Ellos hablaron acerca de pedir pizza... ¿Pero
dónde? A ver... ¡Listo! Pidamos en _____
7. Vale. ¿Qué sigue? Oh-oh... Debes averiguar el libro del Plan Lector, porque no lo
compraste a tiempo en la librería y ya no hay. Hay que llamar a los siguientes sitios:
- a. Panamericana
 - b. Simsalabim
 - c. Books & Books
 - d. Librería Nacional
 - e. Librería Científica

¿A qué sección pertenecen estos lugares? ¡Obvio! _____



Universidad
Pontificia
Bolivariana

8. ¿Y será que allí también puedes encontrar la chaqueta impermeable que necesitas para el viaje a Bogotá? _____ ¿Por qué?



ANEXO 4. ESQUEMA DE DISEÑO DE UNA SESIÓN DE APRENDIZAJE, DE ACUERDO CON EL MODELO
PROPUESTO – INTEGRACIÓN DE CICLOS

Competencia de área	Comunicación Matemática - Desarrollar y evaluar modelos matemáticos de situaciones dadas, relacionadas con magnitudes y variables diversas, para el análisis de su comportamiento bajo condiciones específicas.							
Reto orientador	Establecer un plan de reutilización de residuos cotidianos escolares con miras a la generación de productos aprovechables en las aulas de clase					Grados a evaluar	Bachillerato (Sexto a Undécimo)	
CICLO	PREGUNTA PROBLEMATIZADORA	COMPETENCIA	ACTIVIDAD	OBJETIVO DE APRENDIZAJE	REQUISITOS E INSUMOS	DESCRIPCIÓN	EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE	OBSERVACIONES
<i>Conexión objeto - representación - concepto</i>	¿Qué características tienen los residuos reutilizables que producimos día a día, que podamos aprovechar en la creación de materiales y objetos de uso escolar diario?	Generar un lenguaje común para la comunicación de las características de los objetos asociados a un entorno dado	Taller eco-aulas - Fase I: caracterización	Caracterizar un residuo cotidiano escolar, estableciendo sus propiedades físicas, estéticas, morfológicas y mecánicas, con miras a su utilización en productos aprovechables en las aulas de clase.	Listado de residuos cotidianos escolares que puedan ser reutilizados (para esto, se tiene en cuenta la información recibida acerca de los procesos de reducción, reutilización y reciclaje)	Luego de una revisión grupal del listado de residuos cotidianos escolares, se definirán categorías para agrupar residuos de naturaleza similar; con esta información, se establecerán equipos de trabajo, cada uno de los cuales elegirá una categoría de residuos para caracterizar. En el proceso de caracterización, los estudiantes llevarán a cabo mediciones y observaciones de formas, tamaños, texturas, colores,	Ficha técnica del residuo reutilizable escolar. Bitácora de trabajo.	El formato básico de ficha técnica que reciben los estudiantes, requiere isométricos, fotos, dimensiones y tablas para la recolección de información asociada a las propiedades que se consideran de interés para el reto.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

fx dx
a MAESTRÍA
Ciencias Naturales y Matemática

						y otros, así como recogerán también información de bases de datos relacionadas. Con ello, prepararán la ficha técnica correspondiente a su categoría, siguiendo las indicaciones dadas en el formato asignado.		
Estructuración semiótica	¿Cómo puede configurarse un producto funcional y sostenible para uso cotidiano en el colegio, a partir de los residuos reutilizables generados a diario?	Seleccionar las características más relevantes de un objeto o conjunto determinado, para la conformación de un sistema de interés	Taller eco-aulas - Fase II: diseño preliminar	Proponer al menos tres alternativas de producto funcional y sostenible, de uso diario en el colegio, para el aprovechamiento de un residuo cotidiano escolar caracterizado previamente.	Ficha técnica del residuo reutilizable escolar. Bitácora de trabajo.	Los equipos podrán elegir entre las categorías dadas para diseñar su producto: mobiliario, material didáctico, insumos para el aula, herramientas. Con dichas categorías de diseño, cada equipo revisará las condiciones actuales del colegio y su comunidad, a fin de identificar las necesidades que deben ser resueltas. En la elección de una necesidad a resolver, los estudiantes deben presentar una caracterización de la comunidad, sobre la cual	Reporte de caracterización de la comunidad. Reporte de presentación de diseños preliminares. Bitácora de trabajo.	Esta actividad implica desarrollo de tareas que involucran visualización espacial, estimación de cantidades y dimensiones, análisis de sistemas y subsistemas, razones y proporciones, entre otros.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

fx dx
a MAESTRÍA
+ • • •
Ciencias Naturales y Matemática

						basarán sus primeras propuestas de diseño.		
Interpretación	¿Qué debe considerarse para elegir la mejor alternativa a la hora de desarrollar un producto funcional y sostenible con residuos reutilizables generados diariamente en el colegio?	Ensamblar completamente un sistema determinado, empleando la información disponible acerca de su estructura y funcionamiento	Taller eco-aulas - Fase III: diseño detallado	Desarrollar el diseño detallado del producto funcional y sostenible elegido para su uso diario en el colegio, a partir de un residuo cotidiano escolar caracterizado previamente.	Reporte de caracterización de la comunidad. Reporte de presentación de diseños preliminares. Bitácora de trabajo.	Las alternativas propuestas para el diseño serán evaluadas, con la orientación del docente, a través de una matriz de selección cuyos criterios serán seleccionados y ponderados en función de la caracterización anterior; de esta matriz se debe obtener un único resultado. Este resultado será diseñado en detalle, esto es, involucrando cantidades, dimensiones, insumos para el procesamiento y ensamble de las piezas que hacen parte del producto, etc.	Matriz de selección de alternativas. Reporte de presentación de diseño detallado. Bitácora de trabajo.	En esta actividad, la verificación de medidas de tendencia central y dispersión toma gran protagonismo, del mismo modo en que lo hacen los desarrollos gráficos en dos y tres dimensiones para visualizar el detalle, interno y externo, del producto desde sus subsistemas.



Producción	¿Cómo se puede producir de manera sistemática un producto funcional y sostenible con residuos reutilizables generados diariamente en el colegio, el cual ha sido previamente diseñado?	Diseñar sistemas a partir de la interacción de componentes diversos, involucrando varias variables en su funcionamiento	Taller eco-aulas - Fase IV: proceso productivo	Diseñar el proceso productivo para la fabricación sistemática del producto funcional y sostenible previamente diseñado.	Matriz de selección de alternativas. Reporte de presentación de diseño detallado. Bitácora de trabajo.	Con la información detallada del producto, se establece una línea productiva que permita obtener un producto final funcional y sostenible. Dicha línea cuenta con una ruta crítica, la cual establece tiempos de producción y posibles retrasos; cantidades de materiales e insumos para un solo producto, al igual que su correspondiente disponibilidad y rotación; herramientas necesarias para la producción, y procedimientos para la verificación de la calidad en el producto.	Reporte de diseño del proceso productivo, según indicaciones previas. Bitácora de trabajo.	Aquí, los conceptos asociados a la probabilidad se revisten de notable relevancia, así como se logra mayor complejidad en las tareas de razonamiento estratégico, análisis de múltiples variables, y demás.
Procesamiento	¿Cómo puede establecerse una dinámica de utilización de los residuos, que a la vez permita a nuestra comunidad educativa disminuir sus gastos educativos?	Crear modelos matemáticos para la predicción del comportamiento de variables dadas bajo condiciones de interés	Taller eco-aulas - Fase V: proyección	Crear un modelo matemático para predecir el comportamiento de la fabricación y utilización del producto funcional y sostenible previamente diseñado, en función de la cantidad de residuos reutilizables generados.	Reporte de diseño del proceso productivo, según indicaciones previas. Bitácora de trabajo.	A partir de la información suministrada por el reporte del proceso productivo, se compararán las cantidades necesarias para la fabricación de un producto y su correspondiente disponibilidad, con la caracterización	Plan de reutilización de residuos cotidianos escolares: compendio de reportes generados a lo largo del proceso, incluyendo el proceso productivo generado, el modelo	Los modelos generados para la proyección de la labor productiva, involucran análisis gráfico como planteamiento de expresiones matemáticas diversas, cuya complejidad se verá afectada por el nivel de detalle y revisión adoptado en las



Universidad
Pontificia
Bolivariana

$\int_a^b f(x) dx$

MAESTRÍA

Ciencias Naturales y Matemática

						de la comunidad y la infraestructura que recibirá dichos productos. Se planteará un modelo matemático que permita predecir el volumen producido por mes o año (según se haya acordado), y el comportamiento de dicho producto en función de la oferta de materia prima, sus características y otros aspectos asociados a la manufactura (disponibilidad y capacitación de personal productivo, contingencias con materiales e insumos, entre otros).	matemático para predecir el comportamiento en producción y el subsecuente análisis de riesgos.	actividades anteriores.
--	--	--	--	--	--	--	--	-------------------------



ANEXO 5. I ENCUENTRO ACADÉMICO MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA UPB MEDELLÍN - PÓSTER



COMPETENCIA COMUNICATIVA DE LA MATEMÁTICA: ENFOQUE PARA MODELACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA

Lina Marcela Gómez Quintero, Guillermo León López Flórez
Escuela de Ingenierías. Universidad Pontificia Bolivariana

Introducción

Existe un interés especial por las profesiones enfocadas en las Ciencias Exactas y Naturales, así como en el amplio manejo del lenguaje matemático para la modelación de sistemas y predicción de comportamientos asociados a ciertos grupos de estudio. Considerando el marcado interés generado en este aspecto, se presta una gran atención a la capacitación y entrenamiento, formal y no formal, que promueva la consolidación de habilidades y competencias en torno al dominio y aplicación certeras del saber científico y matemático. Así las cosas, se hace menester desarrollar, además de habilidades, afinidades con estos lenguajes desde el terreno de la Educación Básica, para facilitar la inmersión del individuo en este mundo lleno de datos y patrones. Pero hay una gran dificultad: la brecha entre estudiantes y las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las instituciones y las familias en torno a lo rígido y difícil que es el acercamiento al lenguaje matemático, y, en consecuencia, al científico.

Se busca establecer un sistema de adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza/aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por Freudenthal y los ciclos de solución de problemas propuestos por G. Polya, para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica Primaria (1° a 5°) en El Nuevo Colegio de la ciudad de Medellín. Se espera que este sistema favorezca, a través de su estructura, la interpretación de situaciones problema en estos primeros años, a la luz del código matemático formal, promoviendo los procesos de razonamiento inductivo para la predicción del comportamiento de diferentes variables adscritas a un sistema de interés.

Objetivos

Este trabajo plantea como objetivo general la propuesta de un sistema de codificación-decodificación para la traducción de problemas a términos matemáticos, basado en los métodos de enseñanza/aprendizaje de segundas lenguas, con miras a su implementación en procesos de modelación y solución de problemas a nivel escolar básico en El Nuevo Colegio.

- Proponer un enfoque para la definición del sistema de codificación-decodificación propuesto, a partir de los diversos métodos vigentes alrededor de la enseñanza/aprendizaje de segundas lenguas.
- Determinar las correlaciones existentes entre conceptos y axiomas matemáticos relacionados con el aprendizaje escolar básico (Primaria y Secundaria), con los elementos lingüísticos (semióticos, semánticos, sintácticos y semiológicos) necesarios en un sistema de codificación-decodificación, desde la perspectiva de los procesos de matematización.
- Delinear el protocolo general de utilización del sistema desarrollado, en la descripción y modelación de un problema o situación dada.

Metodología

La metodología para el desarrollo de este trabajo se basa en la observación de características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores. Consta de tres fases: revisión, propuesta y ajuste.

Resultados esperados

Se espera que este trabajo impacte significativamente los procesos de enseñanza/aprendizaje de la Matemática a nivel escolar básico en El Nuevo Colegio, pues los mismos se verán fortalecidos en el desarrollo de competencias para la modelación de sistemas ligados a procesos que involucran variables cuantitativas. Adicionalmente, un sistema que permita la comprensión matemática de un escenario cotidiano representado en lenguaje natural facilitará la multidisciplinariedad en el aprendizaje, mediante los principios transversales del Aprendizaje Significativo (Figura 1).



Figura 1. Mapa conceptual de productos entregables.

Referencias

- ÁVILA MELÉNDEZ, Luis Arturo. Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe – I CEMACYC. Noviembre de 2013.
- BROWN, Douglas. Recuperado de: <https://methodologyshumextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-language-teaching.pdf> (Fecha de consulta: 7 de febrero de 2016)
- HOFSTADTER, Douglas. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007), 882 p.
- MENON, Usha. Mathematization vertical and horizontal. Recuperado de: <http://episteme.hbcsa.tfr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52> (Fecha de consulta: 3 de mayo de 2016)
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – MEN. Sistema para la Prevención y Atención de la Deserción en la Educación Superior – SPADIES. Recuperado de: https://spadies.mineducacion.gov.co/spadies/consultas_predefinidas.htm?2 (Fecha de consulta: 10 de abril de 2017)
- OECD. PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education. Recuperado de: <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm> (Fecha de consulta: 15 de abril de 2017)
- SCHLEPPGREGG, Mary J. The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: a research review. Recuperado de: <https://studentportalen.uu.se/usp-filearea-tool/download.action?modelid=1058147&toolAttachmentId=203996> (Fecha de consulta: 5 de septiembre de 2016)

Agradecimientos

Los autores agradecen a la institución educativa The New School – El Nuevo Colegio, por el soporte al desarrollo de la investigación.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

**ANEXO 6. REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA –
REPORTE DE INVESTIGACIÓN**



**ENFOQUE INTEGRADO PARA EL APRENDIZAJE
COMUNICATIVO DE LA MATEMÁTICA**

Lina Marcela Gómez Quintero; Guillermo León López Flórez

Universidad Pontificia Bolivariana. Colombia

marcela.gomezq@upb.edu.co, guillermo.lopez@upb.edu.co

Lenguaje matemático; investigación de maestría; investigación cualitativa correlacional.

Se presenta el modelo desarrollado para la integración de enfoques educativos orientados al aprendizaje de segundas lenguas, con miras a un sistema codificación–decodificación de doble vía, que permita el establecimiento de la relación entre el lenguaje convencional y el lenguaje matemático, favoreciendo el pensamiento lógico–crítico y la posterior solución de problemas. Este modelo multicíclico busca consolidar un sistema semiótico que garantice la interpretación y comprensión de cualquier situación cotidiana a describir en términos matemáticos. Este resultado se estima afectado por aspectos socioculturales tales como aprendizajes presentes en otras áreas, y aquéllos de mayor impacto en la primera infancia.



Introducción

La brecha entre el saber específico de los estudiantes y el dominio básico de las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las perspectivas de los docentes, las instituciones y las familias, afectan el acercamiento al lenguaje matemático, y, en consecuencia, al científico. Por tal razón, y partiendo del principio de que los lenguajes matemático y científico pueden considerarse segundas lenguas, que se cristalizan a través de procesos de "traducción" desde la observación y el dominio de la lengua materna, se buscó establecer un sistema de adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por Freudenthal (citado por Menon, 2005) y los ciclos de solución de problemas propuestos por G. Polya, (1965) para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica Primaria (1° a 5°).

Marco teórico

Puede considerarse la matemática como un sistema lingüístico dedicado a la reconstrucción y al modelamiento de los patrones que se encuentran en la Naturaleza, y que permiten la predicción de futuros fenómenos; el análisis matemático, entonces, se transforma en un asunto de "traducción", en el que operadores, símbolos, propiedades, comunican detalles de situaciones que modelan y reconstruyen sistemas observados en nuestra Naturaleza y en muchas otras posibles (Hofstadter, 1979). La matemática asume el matiz de una segunda lengua, la cual depende de la inmersión en escenarios propicios para la observación, a fin de formular preguntas que propendan por la adquisición de nuevos conceptos, y que ayuden a realizar una lectura lógica de carácter inductivo, lo cual se transforma posteriormente en un conocimiento previo formal necesario en la interacción con fenómenos más complejos. Perspectivas cognitivas como las de Duval (1999, 2006), D'Amore (2003, 2006), comulgaron con los modelos de aprendizaje explicados por Wearne y Hiebert (1988), las relaciones lingüísticas enfocadas a la comunicación matemática discutidas por Schleppegrell (2007) y el sentido del número propuesto por Dehaene (1997), para a su vez relacionarse con los principios chomskianos que cita Brown (2001), las ideas de Kuhl (2004) y las premisas de Oxford (1989) respecto de la influencia del enfoque comunicativo en la adquisición efectiva del lenguaje.

Método

La metodología para el desarrollo de este trabajo se basó en la observación de

características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores. Con el mismo, se puede delimitar el conjunto de elementos necesarios para el trabajo académico escolar básico, dentro de la perspectiva de la comunicación matemática. En este orden de ideas, este trabajo se desarrolló en tres etapas: revisión, propuesta y ajuste. Éstas obedecen a una investigación cualitativa de tipo correlacional.

Resultados

El modelo multicíclico propuesto, en sus vistas esquemática e integrada de ciclos, se muestra en la Figura 1.

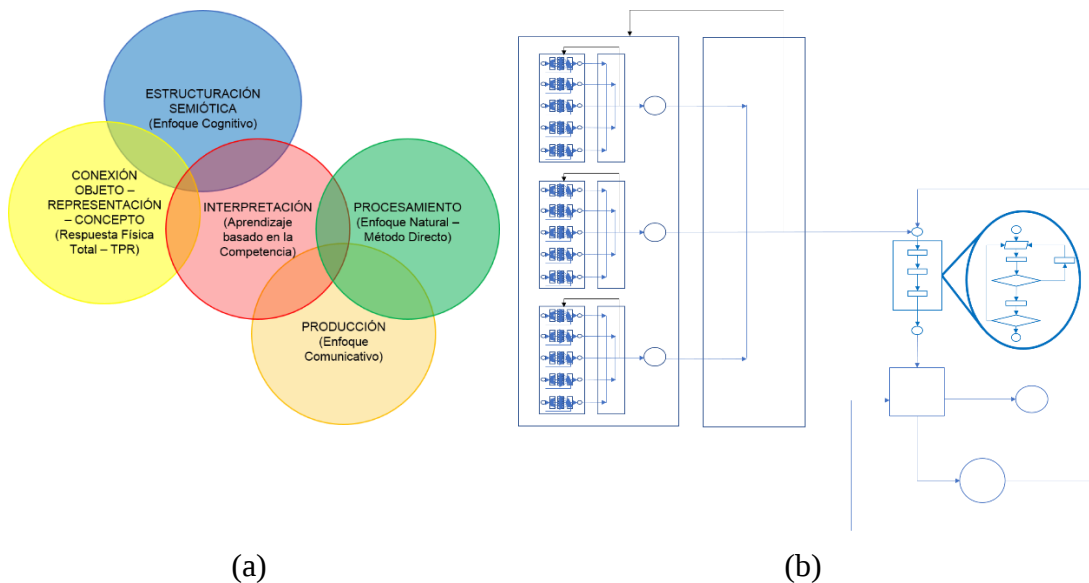


Figura 1. Modelo multicíclico propuesto (a) Vista esquemática. (b). Vista integrada de ciclos

Conclusiones

El derrotero de implementación de estas etapas no es lineal, menos unilateral, sino que pueden presentarse simultaneidades durante el proceso; el proceso puede retornar a alguna etapa previa cuando la composición requerida presente dificultades en su ejecución e interpretación. Entonces, la composición matemática no puede llevarse a cabo completamente sin la cabal apropiación de los anteriores procedimientos. También, puesto que este proceso demanda una labor consciente de codificación-decodificación de doble vía, basada en estructuras semióticas fundamentadas a su vez



en el aprendizaje lingüístico, el ejercicio de análisis/síntesis en textos desarrollados en la lengua materna es de vital importancia. Así, la enseñanza formal de la lengua materna adquiere un papel crucial.

Referencias

- BROWN, Douglas. Recuperado de: <https://methodologyshumenextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-languge-teaching.pdf> (Fecha de consulta: 7 de febrero de 2016)
- D'AMORE B. (2003). The noetic in mathematics. Scientia Pedagogica Experimentalis. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82.
- D'AMORE, B. Objetos, significados, relaciones matemáticas y sentido. Recuperado de: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2161582.pdf> (Fecha de consulta: 1 de diciembre de 2017)
- DEHAENE, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics. Recuperado de: <http://backspaces.net/temp/Spring2010Seminar/The%20Number%20Sense.pdf> (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)
- DUVAL, Raymond. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Recuperado de: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf> (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)
- DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/pdf/25472062.pdf?casa_token=LIp__hXk0P4AAAAA:WuZOCpx9HmamM5lJb8TpGVa_UpHyhAnZ8W-tfNy8CWVlFWLJVlZThHtq1gw4u6A3syM-p9Fp645BeR3jCSv8b8lYDiHmkT5F7gJ_XpunFOI7IIwsMjoD (Fecha de consulta: 7 de diciembre de 2017)
- HOFSTADTER, Douglas. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007); 882 p.
- KUHL, Patricia K. Early Language Acquisition: Cracking the speech code. En: Nature Reviews: Neuroscience. Volume 5, November 2004; p. 831–843.
- MENON, Usha. Mathematization vertical and horizontal. Recuperado de: <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52>



(Fecha de consulta: 3 de mayo de 2016)

- POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29IZzdxMnM/view?usp=drivesdk (Fecha de consulta: 9 de abril de 2016)
- SCHLEPPEGRELL, Mary J. The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: a research review. Recuperado de: <https://studentportalen.uu.se/uusp-filearea-tool/download.action?nodeId=1058147&toolAttachmentId=203996> (Fecha de consulta: 5 de septiembre de 2016)
- WEARNE, D. and HIEBERT, J. A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/749172?casa_token=7ZMJy8x9u1sAAAAA:4Oe5guMEPTEBM75ie7LsxsINvdVYqcNd-9XaCEoiADSA51VFJwDhYR1M5B3B55s4FGcqrn94thorPpPCLglyLg1TpKq3fo7OGSZNcc5T5KqyejkFFQlN&seq=1#page_scan_tab_contents
http://www.jstor.org/stable/749172?casa_token=7ZMJy8x9u1sAAAAA:4Oe5guMEPTEBM75ie7LsxsINvdVYqcNd-9XaCEoiADSA51VFJwDhYR1M5B3B55s4FGcqrn94thorPpPCLglyLg1TpKq3fo7OGSZNcc5T5KqyejkFFQlN&seq=1#page_scan_tab_contents (Fecha de consulta: 1 de febrero de 2018)



Universidad
Pontificia
Bolivariana

**ANEXO 7. REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA –
REPORTE DE INVESTIGACIÓN**



Clame

Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa



**PROTOCOLO DE IMPLEMENTACIÓN DE UN ENFOQUE
INTEGRADO PARA EL APRENDIZAJE COMUNICATIVO DE LA
MATEMÁTICA**

Lina Marcela Gómez Quintero; Guillermo León López Flórez

Universidad Pontificia Bolivariana. Colombia

marcela.gomezq@upb.edu.co, guillermo.lopez@upb.edu.co

Lenguaje matemático; investigación de maestría; investigación cualitativa correlacional.

Se presenta el protocolo propuesto para la implementación de un modelo cuyo propósito es integrar diversos enfoques educativos orientados al aprendizaje de segundas lenguas, hacia un sistema codificación–decodificación de doble vía, que permita el establecimiento de la relación entre el lenguaje convencional y el lenguaje matemático, favoreciendo el pensamiento lógico–crítico y la posterior solución de problemas. Dicho protocolo se fundamenta en la Taxonomía revisada de Bloom, para el diseño de los indicadores de desempeño que demarcan la evaluación de la competencia comunicativa matemática en los diferentes niveles escolares, a la luz de los ciclos del modelo previamente mencionado.



Introducción

La brecha entre el saber específico de los estudiantes y el dominio básico de las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las perspectivas de los docentes, las instituciones y las familias, afectan el acercamiento al lenguaje matemático, y, en consecuencia, al científico. Por tal razón, y partiendo del principio de que los lenguajes matemático y científico pueden considerarse segundas lenguas, que se cristalizan a través de procesos de "traducción" desde la observación y el dominio de la lengua materna, se buscó establecer un sistema de adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por Freudenthal (citado por Menon, 2005) y los ciclos de solución de problemas propuestos por G. Polya, (1965) para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica Primaria (1° a 5°).

Marco teórico

Teniendo en cuenta, entre otras, las contribuciones de Hofstadter (1979), se afirma que la matemática asume el matiz de una segunda lengua, la cual depende de la inmersión en escenarios propicios para la observación, a fin de formular preguntas que propendan por la adquisición de nuevos conceptos, y que ayuden a realizar una lectura lógica de carácter inductivo, lo cual se transforma posteriormente en un conocimiento previo formal necesario en la interacción con fenómenos más complejos. Esta concepción apoya la formulación de pensamiento basado en conceptos y sistemas, el cual promueve el desarrollo de competencias, particularmente las comunicativas matemáticas (Niss y Højgaard, 2011). Al respecto, el modelo por excelencia para la definición de los indicadores de desempeño que definen gradualmente la competencia es la Taxonomía de Bloom (1956), la cual ha sido revisada por Anderson y Krathwohl (2001) para integrar matricialmente las dimensiones cognitiva y del conocimiento.

Método

La metodología para el desarrollo de este trabajo se basó en la observación de características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores. Con el mismo, se puede delimitar el conjunto de elementos necesarios para el trabajo académico escolar básico, dentro de la perspectiva de la comunicación matemática. En este orden de ideas, este trabajo se desarrolló en tres etapas: revisión,



propuesta y ajuste. Éstas obedecen a una investigación cualitativa de tipo correlacional.

Resultados

El modelo multicíclico propuesto, en su vista esquemática, se muestra en la Figura 1. La matriz correspondiente a la Taxonomía revisada de Bloom, que integra la propuesta de aplicación de los ciclos propuestos en el modelo por cada grado escolar, se presenta en la Figura 2.

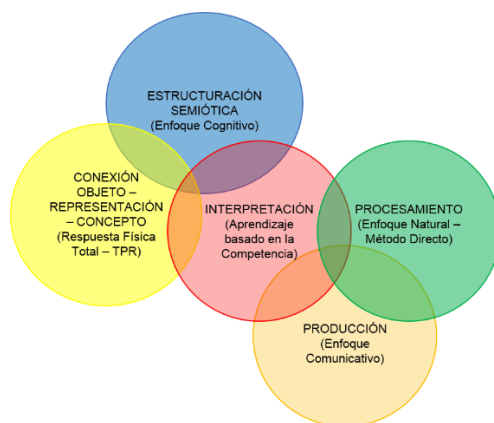


Figura 1. Modelo multicíclico propuesto – Vista esquemática.

Metacognitivo	Noveno Grado		Décimo Grado		Undécimo Grado	
Procedimental	Sexto Grado		Séptimo Grado		Octavo Grado	
Conceptual	Tercer Grado		Cuarto Grado		Quinto Grado	
Factual	Preescolar		Primer Grado		Segundo Grado	
	Recordar	Entender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear

Figura 2. Matriz integradora de la Taxonomía revisada de Bloom a cada grado de escolaridad, según los ciclos del modelo propuesto

Conclusiones



El derrotero de implementación de estas etapas no es lineal, menos unilateral, sino que pueden presentarse simultaneidades durante el proceso; el proceso puede retornar a alguna etapa previa cuando la composición requerida presente dificultades en su ejecución e interpretación. Entonces, la composición matemática no puede llevarse a cabo completamente sin la cabal apropiación de los anteriores procedimientos. También, puesto que este proceso demanda una labor consciente de codificación–decodificación de doble vía, basada en estructuras semióticas fundamentadas a su vez en el aprendizaje lingüístico, el ejercicio de análisis/síntesis en textos desarrollados en la lengua materna es de vital importancia. Así, la enseñanza formal de la lengua materna adquiere un papel crucial.

Referencias

- ANDERSON, L. W., KRATHWOHL, D. R., & BLOOM, B. S. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Allyn & Bacon.
- BLOOM, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. New York: David McKay, 356, 1998-1999
- HOFSTADTER, Douglas. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007); 882 p.
- MENON, Usha. Mathematization vertical and horizontal. Recuperado de: <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52> (Fecha de consulta: 3 de mayo de 2016)
- NISS, Mogens y HØJGAARD, Tomas. Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Recuperado de: http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/485web_b.pdf (Fecha de consulta: 24 de febrero de 2018)
- POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29IZzdxMnM/view?usp=drivesdk (Fecha de consulta: 9 de abril de 2016)



**ANEXO 8. FORMULACIÓN DE PREGUNTAS PROBLEMATIZADORAS Y
COMPETENCIAS – EJERCICIO INICIAL PARA REESTRUCTURACIÓN DE PLAN DE
ÁREA EL NUEVO COLEGIO (MEDELLÍN)⁴⁴**

		MATEMÁTICAS					
Grado	COMP	1		2		3	
		Pregunta problematizadora	Competencia de período	Pregunta problematizadora	Competencia de período	Pregunta problematizadora	Competencia de período
1	Comunicación Matemática	¿Cómo puedo moverme en un espacio sin perderme?	Formular instrucciones precisas para moverme en el espacio	¿Cómo medir mi alrededor a través de objetos cotidianos?	Relacionar dimensiones y cantidades para construir sistemas numéricos y geométricos de manera aproximada	¿Cómo registro cambios en mi entorno, que pueda representar empleando números?	Aplicar el sistema de numeración decimal en operaciones de adición y sustracción con cantidades de una a tres cifras
2		¿Cómo evalúo cambios en mi entorno, que pueda representar empleando números?	Evaluar algoritmos de adición y sustracción que involucren cantidades de hasta 6 cifras en diferentes contextos.	¿Cómo ilustro información asociada a un problema?	Analizar problemas matemáticos a partir de representaciones gráficas que faciliten su comprensión.	¿Cómo puedo verificar que estoy entendiendo el problema que necesito resolver?	Construir diferentes modelos de una situación determinada para el desarrollo de una visión generalizada del contexto.
3		¿Cómo expreso mis observaciones del medio, de una manera simplificada, utilizando el lenguaje matemático?	Analizar regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros), para modelar los cambios encontrados en un sistema dado.	¿Cómo expreso mis observaciones del medio, de una manera simplificada, utilizando el lenguaje matemático?	Sintetizar regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros), para modelar los cambios encontrados en un sistema dado.	¿Cómo resuelvo un problema en el que no es posible utilizar cifras exactas?	Evaluar la noción de fracción como una división de dos números enteros para ampliar el concepto de cantidad
4		¿Cómo transfiero mi conocimiento sobre el uso de cifras no exactas a otros contextos?	Integrar situaciones de índole numérica, geométrica y espacial con el tratamiento de datos no exactos.	¿Cómo aplico las reglas para construir números en la expresión de cantidades no exactas?	Transformar relaciones entre cantidades no exactas para hacerlas compatibles con el sistema de numeración decimal.	¿Cómo es posible aprovechar los datos que se recogen durante el estudio de una situación de mi interés?	Evaluar de forma preliminar, información disponible a través de datos aleatorios para introducir procesos de toma de decisiones.

⁴⁴ Este compendio de preguntas y competencias se desarrolló en el marco del proceso de Actualización Curricular en la institución educativa The New School – El Nuevo Colegio, por parte de los docentes del área de Matemáticas, con la autora de este documento como Jefe de Área. La información contenida en este anexo es de carácter confidencial, pues pertenece a la institución educativa The New School – El Nuevo Colegio. Es citada en este documento sólo con fines académicos.



5	Solución de Problemas y Competencias Comunicativas	¿Cómo involucro distintas perspectivas de un problema para encontrar una solución consistente al mismo?	Revisar situaciones problema asociadas a un escenario dado por medio de modelos matemáticos integrados.	¿Cómo expreso los cambios regulares que observo en los datos que recolecto durante el estudio de una situación de mi interés?	Sintetizar regularidades y patrones en la relación entre distintas magnitudes para predecir comportamientos de las mismas bajo diferentes condiciones.	¿Cómo las características de mi modelo para representar un sistema pueden influir en mi resultado final?	Evaluar sistemáticamente el efecto de un conjunto de operaciones en cantidades enteras asociadas a un problema.
6		¿De qué manera puedo interpretar la información que recibo para resolver un problema, si está expresada en otro lenguaje?	Aplicar de forma coherente los principios constitutivos de los sistemas de numeración, para el análisis de datos expresados en diferentes formatos numéricos	¿Cómo puedo respaldar una serie de decisiones tomadas a partir de los datos que describen un sistema?	Analizar rigurosamente el impacto de las características y condiciones de un sistema determinado, sobre su comportamiento observable	¿Cómo emplear de manera más eficiente el espacio que habito y los recursos a los que puedo acceder?	Diseñar sistemas geométricos planos a partir de las relaciones entre sus componentes básicos, utilizando el entorno como referencia, en pro de un uso eficiente de los recursos físicos disponibles
7		¿Cómo puedo adaptar el espacio que habito, a cualquier cambio estructural en el entorno que lo contiene?	Transformar sistemas geométricos planos a partir de las relaciones entre sus componentes básicos, utilizando el entorno como referencia, en pro de un uso flexible de los recursos físicos disponibles	¿Cómo puedo determinar las probabilidades de que ocurra un evento de interés, con los datos históricos suministrados por el entorno?	Evaluar de manera precisa las características de un sistema para estimar la posibilidad de ocurrencia de un evento en el futuro	¿De qué manera puedo reescribir comportamientos regulares y/o periódicos que observo en diferentes situaciones de mi vida diaria, para facilitar su comunicación?	Transferir de forma ordenada modelos aritméticos correspondientes a situaciones particulares, a un lenguaje simbólico de tipo literal
8		¿De qué manera puedo reescribir comportamientos regulares y/o periódicos que observo en diferentes situaciones de mi vida diaria, para facilitar su comunicación?	Formular gráficamente relaciones de proporcionalidad entre dos variables asociadas a un problema o situación dada	¿Cómo puedo hallar las condiciones necesarias para resolver problemas interrelacionados a través de las características del sistema al que pertenecen?	Resolver correctamente un sistema de ecuaciones relacionado con un determinado contexto, reportando el procedimiento efectuado para tal fin	¿Cómo conocer un sistema compuesto por diferentes elementos?	Descomponer completamente un sistema para explicar cómo éste funciona a través de las relaciones entre sus partes
9		¿Cuál es el nivel de influencia que tienen las relaciones entre sucesos, sobre las probabilidades de ocurrencia de un episodio determinado en un contexto?	Evaluar de manera precisa las relaciones causa-efecto entre las variables asociadas a un sistema, para determinar la posibilidad de ocurrencia de un evento en el futuro	¿De qué manera puedo reescribir comportamientos regulares y/o periódicos que observo en diferentes situaciones de mi vida diaria, para facilitar su comunicación?	Formular gráficamente relaciones de proporcionalidad de segundo grado entre dos variables asociadas a un problema o situación dada	¿Cómo evaluar un sistema cuyo modelo no encaja con los desarrollados anteriormente?	Analizar relaciones entre variables asociadas a sistemas que no pueden representarse a través de los modelos previamente desarrollados



10	Modelación de Sistemas y Competencias Comunicativas	¿Cómo utilizar datos representados en distintos formatos para interpretar la relación de diferentes variables en un mismo espacio?	Establece relaciones de equivalencia entre las características de diferentes parámetros geométricos para determinar sistemas de localización y transformación de elementos en el plano y el espacio	¿Cómo simplificar relaciones entre variables, necesarias para el estudio de un sistema?	Revisa expresiones idénticas susceptibles de empleo en la solución de ecuaciones que modelen sistemas periódicos mediante el uso de conceptos fundamentales ligados a las funciones trigonométricas	¿Cómo asegurar la utilidad del modelo con el cual comunico el estado de un sistema de interés?	Establecer de forma precisa el rango para el cual un determinado modelo correspondiente a una situación dada, tiene validez
11		¿De qué manera puedo reescribir comportamientos regulares y/o periódicos que observo en diferentes situaciones de mi vida diaria, para facilitar su comunicación?	Formular gráfica y analíticamente relaciones de proporcionalidad de tercer grado entre dos variables asociadas a un problema o situación dada	¿Cómo determinar las tendencias de un modelo que representa un sistema dado, para tomar decisiones relacionadas con eventos críticos?	Predecir el comportamiento de un modelo matemático a través de sus tendencias cuando es evaluado en puntos específicos	¿Cómo determinar las tendencias de un modelo que representa un sistema dado, para tomar decisiones relacionadas con eventos críticos?	Analizar los cambios en los modelos que representan un sistema dado, con el fin de predecir y regular respuestas a estímulos dados



ANEXO 9. II CONGRESO INTERNACIONAL DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA –
ARTÍCULO ENVIADO A EVALUACIÓN

MODELO DE ENFOQUES INTEGRADOS PARA EL APRENDIZAJE
DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Lina Marcela Gómez Quintero ^[0000-0002-2586-2614], Guillermo León López Flórez ^[0000-0001-5002-1422] y Juan Diego
Martínez Marín ^[0000-0003-0844-7889]

Universidad Pontificia Bolivariana, Cq. 1 7001, Medellín, Colombia
marcela.gomezq@upb.edu.co

Resumen. Partiendo de la concepción de la Matemática como un lenguaje adicional al materno, se propone un modelo de cinco ciclos para la adquisición y aprendizaje del lenguaje matemático [11-18] a lo largo del ciclo escolar básico, a partir de la integración de varios enfoques y métodos vigentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de lenguajes adicionales. Además, se presenta un esquema de implementación de dichos ciclos en el marco de los niveles de educación básica vigentes, considerando la Taxonomía revisada de Bloom [20] como sustrato para la formulación de las competencias asociadas. El modelo es consistente con los planteamientos de [10] sobre la adquisición del lenguaje en la infancia, y además con los trabajos de [19] en torno a los enfoques y métodos diseñados y probados para el aprendizaje de un nuevo lenguaje. Se recomienda que, durante su implementación, se establezca un grupo piloto que permita revisar la influencia de dicho modelo en el aprendizaje del lenguaje matemático, en comparación con el modelo definido en la institución educativa correspondiente.

Palabras clave: Lenguaje Matemático, Sistema Semiótico, Modelo Multiciclo, Protocolo de Implementación, Taxonomía Revisada de Bloom, Formación por Competencias, Validez de Constructo.

1 Introducción

El aprendizaje matemático ha sido uno de los asuntos más álgidos a la hora de establecer dinámicas de aprendizaje sostenibles que aseguren una interacción adecuada del estudiante con un futuro entorno profesional, el cual se ha visto en buena parte demarcado por las demandas en innovación científica y tecnológica, que involucran además el procesamiento de grandes cantidades de datos a través de la formulación de nuevos modelos descriptivos y predictivos con miras a la predicción de nuevas tendencias en frentes varios, incluyendo el bursátil, el farmacéutico, el informático y otros. La Matemática ha sido indudablemente considerada como el lenguaje de las Ciencias, en cuanto a su correspondencia directa con el comportamiento de la materia; es válido afirmar que este lenguaje se mantiene en el punto más alto de idoneidad a la hora de desarrollar los modelos previamente mencionados y, por esto, su aprendizaje influye de manera notable en la continuidad, efectividad y confiabilidad de este proceso.

Es bastante visible, sin embargo, la brecha entre el saber específico de los estudiantes y el dominio básico de las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las perspectivas de los docentes, las instituciones y



las familias; los últimos resultados del Reporte PISA [1, 2], por ejemplo, muestran que Colombia se mantiene entre los países con desempeños más bajos en Lenguaje, Matemática y Ciencias, resultados evaluados de manera aplicada y con miras a la solución de problemas. Se juzga evidente que estos prejuicios, sustentados en la concepción que se tiene del saber matemático y sus inferencias en el desarrollo científico, afectan el acercamiento a ambos lenguajes, así como su ulterior aplicación.

Este documento presenta el modelo de enfoques integrados que se desarrolló con el propósito de resolver la situación anteriormente planteada desde una perspectiva educativa estructural, y partiendo del principio de que los lenguajes matemático y científico pueden considerarse lenguajes adicionales, del mismo modo que el inglés en la estructura educativa básica nacional, que se cristalizan a través de procesos de "traducción" desde la observación y el dominio de la lengua materna. El modelo planteado abarca adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza y el aprendizaje de lenguajes adicionales a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por [3] y los ciclos de solución de problemas propuestos por [4] para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica.

2 Estado del arte

La formación para el desarrollo del pensamiento matemático parte de la concepción acerca del mismo. Muchos debates se han desarrollado en torno a la naturaleza de la Matemática, tratando de determinar si fue descubierta o inventada, si se trata de una creación de la mente humana, o si es obra de la Naturaleza; se ha difundido hasta ahora que la Matemática es ambas cosas, esto es, una creación de la mente humana a partir de los arreglos y patrones que se encuentran en la Naturaleza, muchos de los cuales se conocen como Leyes Universales. Desde esta perspectiva, puede considerarse la Matemática como un sistema lingüístico dedicado a la reconstrucción y al modelamiento de los patrones que se encuentran en la Naturaleza, y que permiten la predicción de futuros fenómenos; el análisis matemático, entonces, se transforma en un asunto de "traducción", en el que operadores, símbolos, propiedades, comunican detalles de situaciones que modelan y reconstruyen sistemas observados en nuestra Naturaleza y en muchas otras posibles [5]. De hecho, se ha enunciado que una de las características de la Matemática es que se expresa a través de un sistema de símbolos cuyos significados sintetizan, de una u otra manera, las propiedades de un sistema basado en cantidades, sean éstas constantes o variables, respecto de cómo serían expresadas a través de un lenguaje natural [6].

Así las cosas, la Matemática asume el matiz de una segunda lengua, la cual depende de la inmersión en escenarios propicios para la observación, a fin de formular preguntas que propendan por la adquisición de nuevos conceptos, y que ayuden a realizar una lectura lógica de carácter inductivo, con el fin de desarrollar categorías cognitivas que conlleven a la conformación de un verdadero aprendizaje significativo, el cual se transforma posteriormente en un conocimiento previo formal necesario en la interacción con fenómenos más complejos. Diferentes proyectos de investigación y disertaciones muestran gran relación entre el uso de la lengua como herramienta para el aprendizaje matemático [7-9], considerando que el lenguaje es la primera herramienta de representación de la realidad, y, por tanto, a ella se debe referir cualquier iniciativa de enseñanza. Teniendo en cuenta lo anterior, es importante afirmar que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe guardar una estrecha relación con los aprendizajes lingüístico y científico, ya que éstos fortalecen la observación del entorno, la interpretación de los fenómenos adscritos a él, y la comunicación de lo observado con el fin de asegurar su comprensión.



Alrededor del aprendizaje lingüístico, existen múltiples hipótesis e investigaciones. Una de las más destacadas es la de [10], quien afirma que existe un esquema de adquisición de patrones lingüísticos soportados en la interacción permanente con símbolos en el lenguaje materno a través de la comunicación con el entorno y con otros pares, que permite estructurar relaciones entre nuevos términos. Dicha premisa se ve soportada por las investigaciones de [11-18], quienes presentan esquemas diversos respecto del aprendizaje matemático desde una comunión estrecha con la adquisición y fortalecimiento del lenguaje natural, estableciendo estructuras diádicas y triádicas que conforman los procesos de interpretación en diferentes sistemas semióticos.

Diversas aproximaciones, enfoques y métodos se han desarrollado con el fin de asegurar el aprendizaje de segundas lenguas, y todos estos métodos surgen de diversas concepciones alrededor de cómo el ser humano aprende un lenguaje natural. Así las cosas, se puede revisar la posibilidad de desarrollar un método que, bajo la misma luz, promueva un aprendizaje profundo, sólido y significativo del lenguaje matemático. Ante esto, [19] presentó una revisión histórica de la enseñanza del lenguaje, reseñando los distintos métodos y enfoques alrededor de lenguajes adicionales. Esta lista incluye, entre otros:

- Enfoque tradicional (Classical Approach, or Grammar-Translation Method)
- Enfoque Natural o Método Directo (Direct Method)
- Método Audiolingüístico (Audiolingual Method)
- Respuesta Física Total (Total Physical Response)
- Aprendizaje de Códigos Cognitivos (Cognitive Code Learning)
- Aprendizaje del Lenguaje Comunitario (Community Language Learning)

Cada uno de estos métodos comprende una concepción del aprendizaje que se basa en el lenguaje natural. Con esto, se puede afirmar que el aprendizaje de un nuevo lenguaje involucra el manejo de códigos que se ven potenciados de una u otra forma por la interacción con el mundo físico y la comunidad que domina dicho lenguaje. No obstante, a sabiendas de que no es común el lenguaje matemático para la comunicación natural, por múltiples razones, para la adquisición del lenguaje matemático es menester un sistema que promueva la codificación del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, lo cual permitirá vincular los métodos de enseñanza de lenguas extranjeras y las herramientas lingüísticas que tanto se potencian a diario, con los procesos de enseñanza y aprendizaje de un lenguaje universal. Dentro de estos métodos, considerando los principios presentados en [3, 4, 10-18], el uso integrado de los enfoques cognitivo, comunicativo y basado en la competencia – los cuales involucran los métodos de Aprendizaje de Códigos Cognitivos, Respuesta Física Total y Aprendizaje del Lenguaje Comunitario – se muestra como una opción de impacto considerable para la adquisición de estructuras conceptuales más sólidas que faciliten el aprendizaje matemático, dada su relación con la creación de estructuras y patrones asociados a representaciones mentales basadas en la manipulación concreta del contexto, y con el establecimiento de códigos y estructuras semióticas sólidas a través de la superposición de representaciones mentales.



3 Metodología

La metodología para el desarrollo de este trabajo se basó en la observación de características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores. Con el mismo, se puede delimitar el conjunto de elementos necesarios para el trabajo académico escolar básico, dentro de la perspectiva de la comunicación matemática.

Así, se definieron tres fases preliminares:

Fase 1 – Revisión. Es posible calificar esta fase de la investigación como una exploración de tipo cualitativo, en la que el proceso de diseño es de corte documental.

Fase 2 – Propuesta. Durante esta fase, se practicó un enfoque cualitativo correlacional, en donde las características del enfoque de referencia establecido fueron plasmadas en el proceso constructivo del sistema codificación–decodificación de doble vía, considerando los vínculos de doble vía entre las estructuras lingüísticas básicas y las características formales primarias de los objetos matemáticos que atañen a los niveles de educación básica.

Fase 3 – Ajuste. Esta última fase obedece al ajuste del modelo planteado, a partir de la revisión conceptual y estructural del mismo en función de las generalidades del enfoque propuesto.

4 Resultados

Se estableció un modelo multiciclo a partir de enfoques y métodos múltiples de enseñanza y aprendizaje de lenguas adicionales, y un posterior protocolo para su implementación.

4.1 Modelo de enfoques integrados

El modelo formulado consta de cinco ciclos interconectados, en los cuales se adapta la adquisición y fortalecimiento del lenguaje matemático al proceso de desarrollo del lenguaje natural. El esquema de dicho modelo se muestra en la Fig. 1., mientras que la integración de los ciclos se muestra en la Fig. 2. Posteriormente, se describirán los cinco ciclos que componen este modelo.

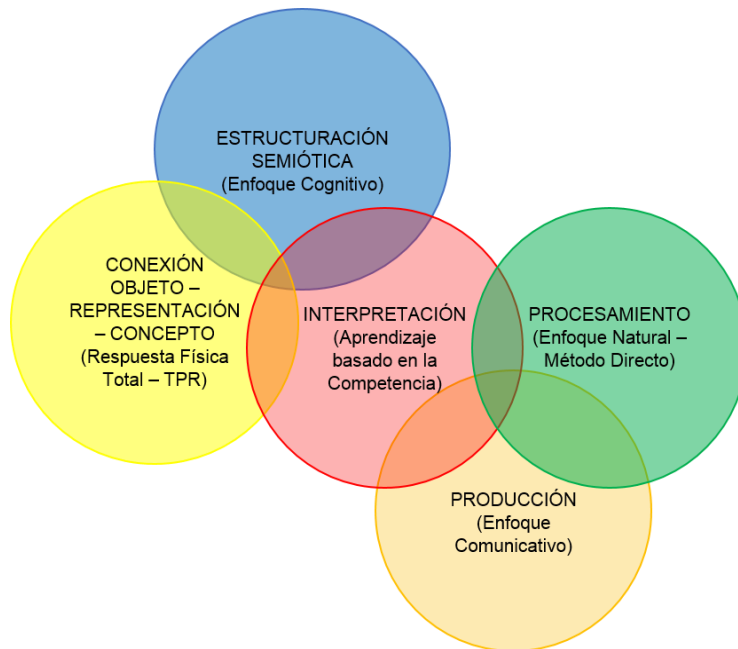


Fig. 1. Modelo de enfoques integrados para el aprendizaje del lenguaje matemático – Versión esquemática.

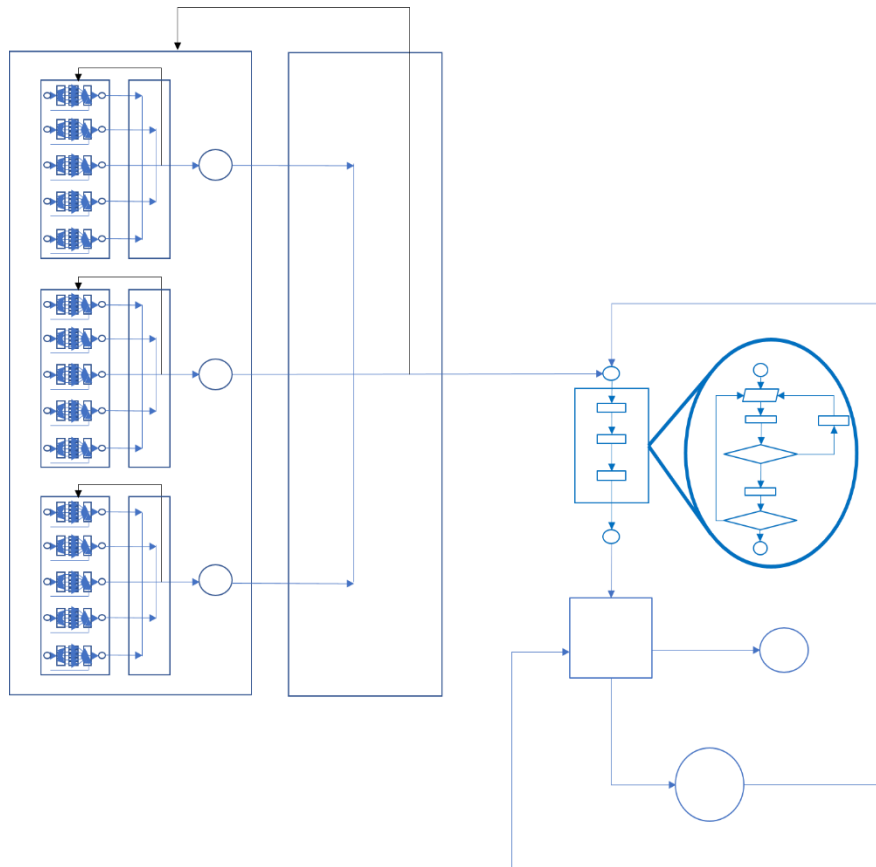


Fig. 2. Modelo de enfoques integrados para el aprendizaje del lenguaje matemático – Versión integrada.

Los ciclos se describen como sigue:

4.3.1. Ciclo de conexión objeto – representación - concepto. La interacción con el objeto/categoría de interés determina la conformación de un vínculo sólido entre el objeto, su representación mental y su representación semiótica [14, 18]. Así las cosas, se hace necesaria la interacción permanente con objetos y ubicaciones, promoviendo su manipulación y orientando la creación precategorial mediante el uso de nombres, acciones y sinónimos, enunciando protoprocesos que favorezcan la asociación conceptual con la manipulación concreta y el desempeño motriz [11]. La generación de protoprocesos está basada en la identificación de términos que señalan acciones en tiempo y espacio, esto es, la identificación verbal adscrita a la evaluación de objetos en el entorno de interés que constituye el marco de referencia sobre el cual se desenvuelve el individuo. Por tanto, se requiere determinar una secuencia que favorezca la caracterización del objeto en el contexto referencial.

4.3.2. Ciclo de estructuración semiótica. Con la verificación de los protoprocesos en el análisis numérico y espacial, es posible definir la estructura semántica de una oración en términos



matemáticos, esto es, identificando las características de la oración – sujetos, verbos, complementos – y vinculando los correspondientes símbolos que asegurarán la representación semiótica para la correcta formulación del enunciado. Para que esto sea posible, es indispensable analizar y determinar relaciones entre conceptos, los cuales han sido construidos en paralelo, es decir, no de manera necesariamente secuencial; en esta tarea, se desarrollan procesos analíticos y sintéticos que establecen nodos de atributos, en cuyo seno se generan nuevas lecturas de cada concepto en un formato que podría llamarse matricial. Así, se logra la creación de un macroconcepto, una estructura más compleja conformada por conceptos ya construidos mediante el ciclo anterior.

4.3.3. Ciclo de interpretación. Con la revisión de código semiótico, se analiza la configuración de la oración planteada, es decir, se reconoce la estructura en enunciados matemáticos con el fin de identificar los procesos asociados a los mismos, develando la representación del sistema que se intentaba describir.

4.3.4. Ciclo de producción. Considerando el análisis previo de estructuras “gramaticales” construidas bajo condiciones dadas, se propone la utilización de estas referencias semióticas para la construcción de oraciones que describan sistemas correspondientes con el contexto local. Para la construcción de dichas oraciones, se requiere la intervención del docente en cuanto concierne a la orientación por medio de preguntas.

4.3.5. Ciclo de procesamiento. Dada la competencia adquirida en el análisis y síntesis de oraciones matemáticas, se procede a continuación con la composición de enunciados matemáticos de mayor complejidad, los cuales involucran un uso marcado de sinónimos (equivalencias, igualdades e identidades). En este momento, pueden encontrarse sistemas semióticos triádicos, que demandarán a su vez la utilización de sistemas semióticos conectados, construyéndose así “traducciones” de múltiples etapas.

4.2 Protocolo de implementación del modelo

Para el protocolo de implementación del modelo, se empleó el sustrato expuesto por [20, 21] y sobre el mismo se integraron los grados de educación escolar básica con los ciclos definidos en dicho modelo, estableciéndose una matriz integradora que facilitara la visualización del proceso (ver Fig. 3). Dicha matriz integradora constituye el fundamento de la reconfiguración institucional para la implementación del modelo, a fin de asegurar validez de constructo y posterior sostenibilidad.



Metacognitivo	Noveno Grado		Décimo Grado		Undécimo Grado	
Procedimental	Sexto Grado		Séptimo Grado		Octavo Grado	
Conceptual	Tercer Grado		Cuarto Grado		Quinto Grado	
Factual	Preescolar		Primer Grado		Segundo Grado	
	Recordar	Entender	Aplicar	Analizar	Evaluar	Crear

Fig. 3. Matriz integradora de la Taxonomía revisada de Bloom a cada grado de escolaridad, según los ciclos del modelo propuesto.

El protocolo se puede resumir, entonces en los siguientes pasos:

- Redefinir el Perfil del Egresado a partir de las competencias propuestas en el último nivel de la Taxonomía Revisada de Bloom.
- Estructurar la competencia a alcanzar a lo largo del proceso de aprendizaje, de acuerdo con el nuevo Perfil del Egresado.
- Plantear la competencia a alcanzar en cada nivel educativo, de acuerdo con la distribución matricial presentada en la Fig. 3.
- Reformular la competencia a alcanzar a lo largo de cada grado escolar.
- Desarrollar una pregunta detonante o problematizadora que contextualice la competencia. Dicha pregunta debe estar redactada desde el lenguaje del estudiante, es decir, formulada como una inquietud que atañe al estudiante, a fin de que sea auténtica y significativa.
- Revisar, para cada competencia, los indicadores de desempeño que permitirán evaluar el desarrollo individual de cada estudiante. Estos indicadores deben permitir la demarcación de umbrales para el seguimiento preciso de la adquisición y fortalecimiento de la competencia en el estudiante.
- Conformar rúbricas que contengan la información correspondiente a los indicadores de desempeño previamente propuestos, para su utilización ulterior en el diseño de actividades de aprendizaje y evaluación.

5 Conclusiones

El núcleo del proceso de aprendizaje, según el modelo propuesto, se da en las etapas de Estructuración Semiótica e Interpretación, dado que el Sistema Semiótico es su punto de conexión. Es allí en donde se verifica la completitud y consistencia de los conceptos de acuerdo con el marco de referencia de interés, y donde se crea la estructura de aprendizaje básica.



El modelo propuesto es coherente con los enfoques establecidos en [10-21], al integrar diferentes métodos y enfoques para la enseñanza de otras lenguas, con la adquisición del lenguaje matemático y el desarrollo del lenguaje natural, y los objetivos de aprendizaje para la estructuración de sistemas de aprendizaje y evaluación coherentes.

El derrotero de implementación de estos ciclos no es lineal, menos unilateral, sino que pueden presentarse simultaneidades durante el proceso, significando esto que el final de una etapa puede darse durante o después del inicio de una etapa posterior. En la misma línea de razonamiento, el proceso puede retornar a alguna etapa previa cuando la composición requerida presente dificultades en su ejecución e interpretación. Entonces, la composición matemática no puede llevarse a cabo completamente sin la cabal apropiación de los anteriores procedimientos.

Referencias

1. OECD. Reporte PISA 2012 – Estudiantes de bajo rendimiento, <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf>, último acceso 2016/09/13
2. OECD. PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm>, último acceso: 2017/04/15
3. Menon, U. Mathematization vertical and horizontal, <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52>, ultimo acceso 2016/05/03
4. Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas, https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29IZzdxMnM/view?usp=drivesdk, último acceso 2016/04/09
5. Hofstadter, D. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007).
6. Lee, C. El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. 1ra edn. Ed. Morata (2009).
7. Ávila Meléndez, L. A. Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües. En: I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe – I CEMACYC (2013).
8. Borges Ripoll, M. Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo05.pdf>, último acceso 2016/06/05
9. García Quiroga, B., Coronado, A. y Giraldo Ospina, A. Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas. Ed. Universidad de la Amazonía, primera edición (2015).
10. Kuhl, P. K. Early Language Acquisition: Cracking the speech code. Nature Reviews: Neuroscience. Vol. 5 (Noviembre), 831–843 (2004).
11. Andersen, H. Active Arithmetic, http://www.waldorflibrary.org/books/3/view_bl/52/ebooks/56/active-arithmetic-ebook, último acceso 2017/07/20
12. Cortez Vásquez, A., Vega Huerta, H., Pariona Quispe, Jaime. Procesamiento de lenguaje natural, <http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/sistem/article/download/5923/5121>, último acceso 2018/05/20
13. D'Amore B. The noetic in mathematics. Scientia Pedagogica Experimentalis. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82 (2003).
14. D'Amore, B. Objetos, significados, relaciones matemáticas y sentido, <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2161582.pdf>, último acceso 2017/12/01
15. D'Amore, B. y Martini, B. Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas 32 (Diciembre) 26–42 (1997).
16. Dehaene, S. The number sense: how the mind creates mathematics, <http://backspaces.net/temp/Spring2010Seminar/The%20Number%20Sense.pdf>, ultimo acceso 2017/12/07
17. Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, http://www.jstor.org/stable/pdf/25472062.pdf?casa_token=Llp_hxk0P4AAAAA:WuZOCpx9HmamM5Jb8TpGVa



- [UpHyhAnZ8W-tfNy8CWVlFWLJVlZThHtq1gw4u6A3syM-p9Fp645BeR3jCSv8b8lYDiHmkT5F7gJ_XpunFOI7IlwsMjoD](#), ultimo acceso 2017/12/07
18. Duval, R. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>, último acceso 2017/12/07
 19. Brown, D. A methodical history of language teaching, <https://methodologyshumenextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-langauge-teaching.pdf>, ultimo acceso 2016/02/07
 20. Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of educational objectives. New York: David McKay, 356, 1998-1999
 21. Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. S. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Allyn & Bacon.



ANEXO 10. X CONFERENCIA INTERNACIONAL DE AMBIENTES VIRTUALES DE
APRENDIZAJE ADAPTATIVOS Y ACCESIBLES (CAVA 2018) – ARTÍCULO ENVIADO
A EVALUACIÓN

□

Entornos *maker* para la inclusión en el aprendizaje conceptual: construcción de instrumentos musicales y desarrollo del lenguaje matemático.

Sergio N. Gallo, *The New School, Medellín*, Lina M. Gómez y Guillermo L. López, *Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín*

Resumen— Se presentan los resultados obtenidos a la fecha en torno a la creación de un entorno *maker* para el fortalecimiento del aprendizaje conceptual matemático a nivel escolar básico, a través de su relación con el aprendizaje musical. Se describe el modelo de adquisición y aprendizaje del lenguaje matemático desarrollado, sobre el cual se sustenta la elección del aprendizaje musical como herramienta para el aprendizaje significativo de la matemática. Posteriormente, se muestran varias de las relaciones existentes entre las actividades realizadas en el aprendizaje musical, y las correspondientes en el aprendizaje matemático. Para finalizar, se describen varios de los instrumentos desarrollados como producto final a este proceso formativo.

Palabras clave — Aprendizaje activo, aprendizaje significativo, construcción de instrumentos, cultura STEAM, entornos *maker*, lenguaje matemático, lenguaje musical, pensamiento sistémico.

I. INTRODUCCIÓN

EL aprendizaje matemático ha sido considerado por muchos años, uno de los puntos críticos en las discusiones respecto de la calidad en la educación, dada su injerencia en el desarrollo de habilidades de pensamiento y competencias para la solución de problemas [1]. Ahora bien, diversas investigaciones han declarado que la matemática es un lenguaje adicional que permite describir el Universo de forma clara y precisa [2], y por esto su didáctica requiere una perspectiva lingüística que comprenda el desarrollo del lenguaje natural en su diseño. Ahora, teniendo en cuenta que el proceso de adquisición y aprendizaje del lenguaje natural inicia en la interacción con el medio [3, 4], dicha interacción permite la adquisición y consolidación de relaciones entre variables que redundan en la construcción del lenguaje matemático [5-9]. En este sentido, es menester asegurar experiencias auténticas con las cuales la conexión entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural se dé satisfactoriamente; dichas experiencias pueden contar con elementos concretos y abstractos, siendo de especial relevancia los espacios de apreciación y creación musical.

La relación que existe entre la música y la matemática, ha constituido un hito importante en la revisión histórica de la matemática y su importancia en la construcción de conocimiento artístico y científico [9]; se considera



que su influencia en el desarrollo de habilidades de pensamiento es notable, y por ello es necesaria la presencia de sesiones de aprendizaje musical y matemático en el programa escolar, tanto de manera simultánea como en sesiones separadas. El proceso de formación musical, por otro lado, es muy similar en hábitos y estructuras al proceso de formación matemática, dado que demanda el dominio de un código lingüístico que describe representaciones del entorno para su aplicación [10], y demanda, adicionalmente, sesiones permanentes de estudio para la interpretación del lenguaje específico. Esta dinámica de trabajo es consistente con la definida en el enfoque educativo STEAM, el cual promulga las competencias para el siglo XXI en aras de la innovación científica y tecnológica, y que se ampara en los principios del movimiento maker para el desarrollo sostenible y el pensamiento sistémico.

Este documento presenta los resultados obtenidos a la fecha, en el marco de la creación de un entorno maker para la consolidación del pensamiento sistémico mediante el desarrollo del pensamiento matemático y el pensamiento musical, en donde la construcción de instrumentos y su correspondiente puesta en escena a través de ensambles, fomenta la revisión consciente de los códigos lingüísticos desarrollados para desarrollar la musicalidad en primera instancia, y así comunicar (desde la exploración sonora, rítmica y melódica) la manera en que producen sonido. Se han construido diversos instrumentos – cordófonos, aerófonos y percusión – con los que los estudiantes han realizado diversos ensambles, lo cual da cuenta del desarrollo de competencias para el trabajo colaborativo en aras de un resultado soportado en nuevas habilidades de pensamiento y competencias con injerencia cognitiva y metacognitiva.

II. MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL ARTE

Una de las principales premisas para hablar actualmente de inclusión, está dada por el Diseño Universal de Aprendizaje [11]; en éste, los diversos canales de referencia para la adquisición del conocimiento – visual, auditivo, kinestésico entre ellos – deben ser considerados en el diseño de toda sesión de aprendizaje, así como en su correspondiente evaluación.

Así, se establecen el aprendizaje basado en competencias y el enfoque STEAM como que involucra el aprendizaje conceptual matemático y el aprendizaje del lenguaje musical mediante dinámicas de trabajo colaborativas y apoyadas en hábitos maker.

A. *Competencias para el Siglo XXI: enfoque STEAM y aprendizaje basado en competencias*

La educación básica es la que permite el desarrollo de competencias, hábitos y actitudes en el marco de saberes específicos. Teniendo en cuenta las condiciones de vida que exige la era actual, en donde la proactividad y la interdisciplinariedad tienen gran cabida, se hace necesario orientar la formación de hábitos y competencias hacia la participación activa y sostenible en esta sociedad y siguientes [12].

STEAM es un enfoque educativo, cuyo nombre corresponde al acrónimo que se refiere a la integración de las Ciencias, la Tecnología, la Ingeniería, las Artes y las Matemáticas (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) para el aprendizaje mediado por el pensamiento crítico, la pregunta como detonante cognitivo y el trabajo colaborativo. Es, en sí, una versión mejorada de STEM, ya que incluye las Artes como aspecto humanizador y sensibilizador [13-18]. Si bien en sus inicios – cuando se hablaba de enfoque STEM – se buscaba incrementar el número de estudiantes involucrados en carreras asociadas a las Ciencias, la Tecnología y la Ingeniería, para así reducir la brecha profesional en el campo y aumentar la fuerza de trabajo en estas áreas, el objetivo de STEAM ha evolucionado notablemente. Puede afirmarse que el objetivo de STEAM es el aprendizaje científico y tecnológico de carácter significativo, que permita la conformación de una mentalidad consistente con los retos que traen este siglo y posteriores. Este enfoque se ha posicionado como



referente en términos de innovación educativa, precisamente porque tiene como objetivo la innovación científica y tecnológica, en simbiosis con el pensamiento artístico y humanístico.

B. Aprendizaje conceptual matemático

La formación para el desarrollo del pensamiento matemático parte de la concepción acerca del mismo. Actualmente puede considerarse la matemática como un sistema lingüístico dedicado a la reconstrucción y al modelamiento de los patrones que se encuentran en la naturaleza, y que permiten la predicción de futuros fenómenos; el análisis matemático, entonces, se transforma en un asunto de “traducción”, en el que operadores, símbolos, propiedades, comunican detalles de situaciones que modelan y reconstruyen sistemas observados en nuestra Naturaleza y en muchas otras posibles [19]. De hecho, se ha enunciado que una de las características de la matemática es que se expresa a través de un sistema de símbolos cuyos significados sintetizan, de una u otra manera, las propiedades de un sistema basado en cantidades, sean éstas constantes o variables, respecto de cómo serían expresadas a través de un lenguaje natural [20].

Alrededor del aprendizaje lingüístico, existen múltiples hipótesis e investigaciones. Una de las más destacadas es la de [21], quien afirma que existe un esquema de adquisición de patrones lingüísticos soportados en la interacción permanente con símbolos en el lenguaje materno a través de la comunicación con el entorno y con otros pares, que permite estructurar relaciones entre nuevos términos [21-27], quienes presentan esquemas diversos respecto del aprendizaje matemático desde una comunión estrecha con la adquisición y fortalecimiento del lenguaje natural, estableciendo estructuras diádicas y triádicas que conforman los procesos de interpretación en diferentes sistemas semióticos.

Diversas aproximaciones, enfoques y métodos se han desarrollado con el fin de asegurar el aprendizaje de segundas lenguas, y todos estos métodos surgen de distintas concepciones alrededor de cómo el ser humano aprende un lenguaje natural [28]. Así las cosas, se puede revisar la posibilidad de desarrollar un método que, bajo la misma luz, promueva un aprendizaje profundo, sólido y significativo del lenguaje matemático.

C. Aprendizaje significativo en la música: construcción de instrumentos

El aprendizaje significativo tiene como uno de sus principios, la construcción de significados y el aprovechamiento de conocimientos previos, dentro de un aprendizaje activo [20, 21], lo cual es coherente con el aprendizaje propuesto en el enfoque STEAM, y demanda la conformación de comunidades de aprendizaje de acuerdo con los principios de la Cultura STEAM [16]. En este orden de ideas, la construcción de instrumentos musicales trae consigo procesos similares a los que propuestos en STEAM alrededor de la experimentación y a la revisión de conceptos, para consolidar competencias [30, 31].

La construcción de instrumentos propiamente dicha puede realizarse en dos fases: experimentación sonora con objetos cotidianos – llamados también cotidiáfonos [32] – y construcción de instrumentos más elaborados (como aerófonos, cordófonos y percusión) a través de la aplicación de conceptos estrechamente ligados a la matemática – como es el caso de los armónicos, las frecuencias y los intervalos para la generación de música en la escala diatónica o pentatónica – con el propósito de explorar, improvisar, interpretar, comprender y crear nuevos ensambles sonoros.

La construcción instrumental abarca las siguientes etapas o fases [33]:

- Exploración: es importante que cada estudiante, de forma individual, explore e identifique las características del sonido y sus categorías (altura, duración, intensidad, timbre), así como la vibración y amortiguación del sonido y demás, asociadas a las propiedades acústicas del material que constituye el elemento sonoro; además, se pretende el planteamiento de hipótesis para identificar el mecanismo que hace al objeto sonar. Su relación con el entorno y su experiencia previa al escuchar música, ayudarán a predecir el comportamiento de dicho elemento sonoro.



- Construcción mental: los estudiantes desarrollan un mapa mental previo a la ejecución de las posibilidades para la creación de una melodía con los elementos sonoros disponibles. En esta instancia entra en juego la formulación de una necesidad, la cual conlleva a la solución de problemas, elemento básico para la detonación del pensamiento creativo.
- Experimentación: una vez el estudiante logra sacar la máxima producción de los elementos sonoros que tiene a disposición, entra en juego la musicalidad; ésta tiene una instancia inicial de improvisación libre, cuyo objetivo es asegurar la familiarización del estudiante con la forma en que cada instrumento produce sonido. Tan pronto esta etapa se consuma, puede darse cabida a varias actividades de creación. Lo importante es hacer que esas experiencias de éxito con el instrumento puedan ser registradas para su posterior revisión y utilización, así que se requiere un lenguaje individual para sistematizar la experiencia. Ese lenguaje individual debe ser verificado en cuanto a su efectividad en el seguimiento de la experiencia musical.
- Socialización: en este momento, los instrumentos deben confluír. Se puede proceder con una improvisación dirigida; aquí se establece un tempo (en el cual, dentro de la improvisación, se harán las subdivisiones y sumas de pulsos y silencios, hechos de forma espontánea), así como las diversas cualidades del sonido. En esto, hay que recoger todas las apreciaciones de los estudiantes, cada uno a su nivel de exploración musical: ¿qué sintieron? ¿cómo lo sintieron? ¿cómo describen las experiencias rítmica, melódica y armónica?
- Creación: luego de socializar, se ofrecen estructuras de creación musical en las cuales se puede tener un acento determinado, una cantidad de compases específicos dentro de una estructura musical; allí, cada estudiante aplicará su código de escritura. Una vez se haga la revisión de la creación individual en relación con la estructura musical planteada, los estudiantes trabajarán de manera colaborativa en el ensamble de estas creaciones individuales.
- Evaluación: los posteriores procesos de evaluación formativa implican trabajos de autoevaluación, coevaluación, revisión colaborativa de códigos, manipulación colaborativa de instrumentos, y otros (pudiendo incluirse en esta categoría a las bitácoras y portafolios de creación, propuestos desde la Cultura STEAM para la evaluación). Como fin último, surge la necesidad de crear un código único que permita que cualquiera de los estudiantes pueda tocar cualquiera de los instrumentos, esto es, el lenguaje formal musical.

Es importante mencionar que estas etapas concuerdan con los procesos planteados en el enfoque STEAM para la construcción de conocimiento, y con los definidos en la Cultura STEAM para la conformación de comunidades de aprendizaje a través del aprendizaje basado en conceptos.

III. MODELOS PROPUESTOS

El proceso de creación de entornos maker fundamentados en el desarrollo del pensamiento matemático y del pensamiento musical, se basa en el modelo de enfoques integrados, que involucra métodos de aprendizaje interactivos con el entorno, la solución de problemas, y la consolidación de un lenguaje específico para el contexto, de manera que éste responda a la descripción y predicción de los fenómenos asociados a su normal funcionamiento.

A. *Modelo de enfoques integrados para el aprendizaje matemático*

El modelo propuesto consta de cinco ciclos integrados, cada uno de ellos asociado de manera predominante a un enfoque o método de aprendizaje para el aprendizaje de lenguajes adicionales (ver Fig. 1).

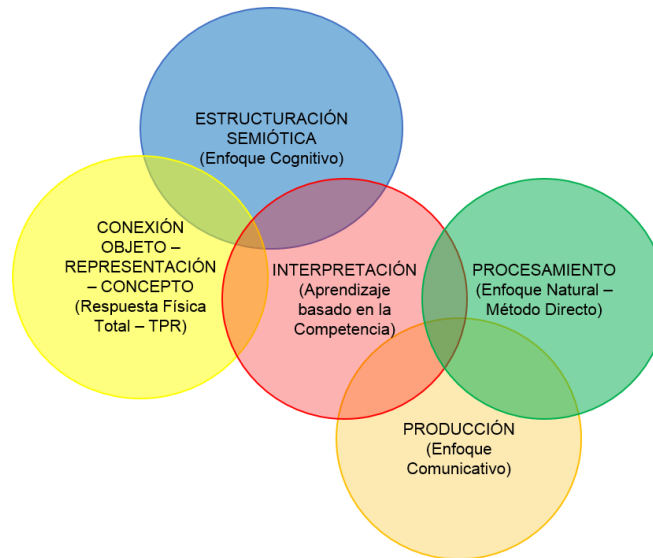


Fig. 1. Representación esquemática del modelo de enfoques integrados para el aprendizaje del lenguaje matemático

Este modelo puede presentarse de manera consolidada siguiendo un diagrama de flujo regular (ver Fig. 2). En éste, puede apreciarse cómo el núcleo del proceso de aprendizaje se da en las etapas de Estructuración Semiótica e Interpretación, dado que el Sistema Semiótico es su punto de conexión. Es allí en donde se verifica la completitud y consistencia de los conceptos de acuerdo con el marco de referencia de interés, y donde se crea la estructura de aprendizaje básica.

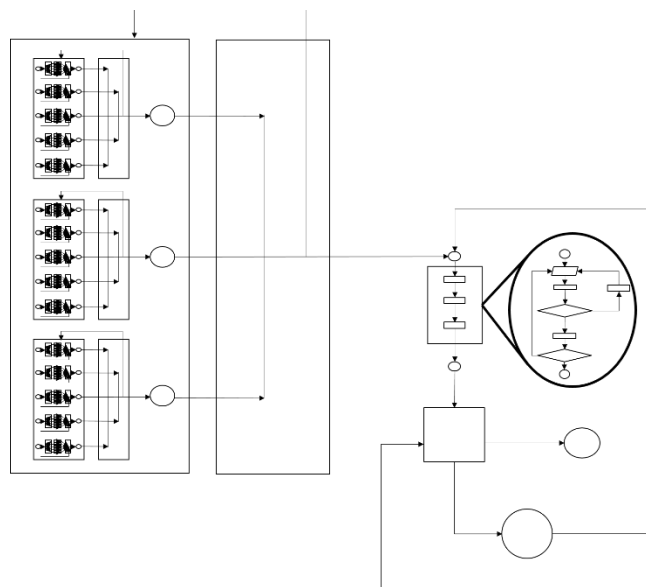


Fig. 2. Representación consolidada del modelo de enfoques integrados para el aprendizaje del lenguaje matemático



B. *Relación del modelo propuesto con la práctica de construcción de instrumentos*

Hay importantes conexiones entre los procesos de construcción instrumental y los de matematización [34], los cuales facilitan el establecimiento de estrategias de aula que pueden ser aprovechadas para la evaluación del conocimiento matemático y musical, del mismo modo en que pueden asegurar una evaluación confiable (ver Tabla I).

TABLA I
RELACIÓN ENTRE CICLOS DEL MODELO Y PROCESOS DE CREACIÓN MATEMÁTICA Y MUSICAL

Ciclo del modelo	Proceso de creación musical	Proceso de creación matemática
<i>Conexión objeto – representación – concepto</i>	Exploración con cotidiáfonos	Manipulación de objetos y posiciones en el espacio.
<i>Estructuración semiótica</i>	Construcción de lenguaje representativo del sonido en cotidiáfonos.	Construcción de lenguaje representativo de los cambios en cantidades y posiciones.
<i>Interpretación</i>	Improvisaciones libre y dirigida.	Revisión de coherencia entre la información suministrada por el lenguaje, y la presentada por el entorno
<i>Producción</i>	Ensamble musical con los instrumentos	Procedimientos de solución de problemas, basado en el ciclo de G. Polya
<i>Procesamiento</i>	Revisión de código musical individual a la luz del lenguaje musical formal	Reescritura de recursos para la solución de problemas, de acuerdo con las estructuras matemáticas formales

IV. RESULTADOS: INSTRUMENTOS CONSTRUIDOS

Se establecieron dinámicas de trabajo de aula de acuerdo con lo anteriormente descrito, y en concordancia con los ciclos descritos en el modelo anterior. En detalle, se establecieron espacios de construcción mental y desarrollo individual de lenguaje musical a través de la experiencia con cotidiáfonos (ver Fig. 3).



Fig. 3. Sesiones de construcción colectiva de código para la comunicación de la experiencia musical con cotidiáfonos.

También, se desarrollaron tareas auténticas y significativas que promovieron la integración de los sistemas de representación y comunicación matemática y musical, de acuerdo con los objetivos de aprendizaje y competencias delineados en los planes de estudios (ver Fig. 4).

Nombre del estudiante		Fecha	
Asignatura	- Matemáticas (English) - Artes (Música)	Grado	8AB
Indicador de logro	Matemáticas 3. Ubica correctamente puntos en el plano cartesiano dadas las coordenadas (x,y). Música 3. Analiza obras pequeñas para extraer de ellas la armonía y los intervalos musicales.		
Instrucciones	Esta tarea debe estar registrada en el cuaderno de Música. Será socializada en ambas clases, por lo cual se debe contar con ambos cuadernos para el posterior registro de socialización.		

Math + Música: intervalos musicales y patrones coordinados

- Realiza la siguiente consulta:
 - ¿Qué es un intervalo en Matemáticas?
 - ¿Qué es un intervalo en Música?
 - ¿Qué es un tono?
 - ¿Qué es un semitono?
 - ¿Qué significan, en el contexto musical, los términos "mayor", "menor", "justa" y "aumentada"?
- De acuerdo con estas definiciones, completa la imagen. Recórtala y pégala en tu cuaderno de Música

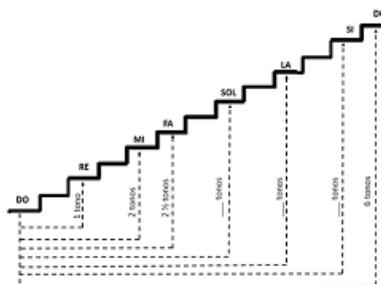


Fig. 4. Diseño de actividades de aprendizaje y evaluación integradas entre Música y Matemáticas, para la integración de conceptos a la creación de lenguajes musical y matemático.



También se construyeron instrumentos de cuerda, viento y percusión, los cuales fueron empleados en la creación de ensambles musicales mediante improvisación libre y dirigida (ver Figura 5).

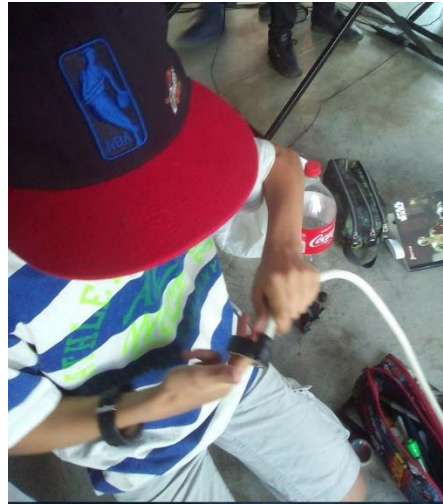


Fig. 5. Construcción de instrumentos de viento empleando materiales reutilizables de uso cotidiano.

Finalmente, se desarrollaron ensambles musicales dirigidos, en los cuales dichos instrumentos contruidos a partir de materiales de uso y reúso cotidianos, previamente manipulados y estudiados, tuvieron amplio impacto (ver Fig. 6).



Fig. 6. Ejemplos de ensambles musicales desarrollados empleando cotidiáfonos e insturmentos musicales construidos en el aula.

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El trabajo realizado arrojó las siguientes conclusiones y recomendaciones:

- 1) La integración de la formación en pensamiento matemático y musical, permitió a los estudiantes establecer hábitos de razonamiento en ambos contextos, favoreciendo la conexión entre ambos lenguajes y la formulación de equivalencias a la hora de resolver problemas en el aula.
- 2) Las sesiones de creación de un código musical acompañaron de forma significativa la introducción al pensamiento algebraico, puesto que permitieron la relación entre símbolos diferentes a los empleados en la comunicación mediante el lenguaje natural, con la manifestación de fenómenos físicos asociados a los ejercicios de apreciación, comprensión y creación sonora.
- 3) El ejercicio específico de la construcción de aerófonos (trompetas de manguera) ofrece la posibilidad de trabajar técnica vocal y afinación, además de la creación melódica a través de la relación entre variables físicas (dimensiones de la manguera) y el sonido generado (medidas de los sonidos y pulsos). Sin embargo, las relaciones de la medida de los sonidos con el pulso requieren de un mayor afincamiento en las actividades previas.
- 4) La construcción de las trompetas ofreció un espacio creativo y de planeación para su construcción, cada estudiante ideó formas alternas para el ensamble de las piezas y se buscaron otros materiales que ofrecieran mayor vibración y por ende mayor volumen y claridad en las notas, toda vez que los estudiantes



encontraron que el plástico en el pabellón de la trompeta no ofrecía la prolongación en la vibración como lo hacía un latón.

- 5) Las improvisaciones realizadas después del calentamiento con una determinada escala, influían directamente en los intervalos que realizaban en dichas improvisaciones; los acompañamientos armónicos variaron dentro de esta tonalidad, buscando una mayor exploración de las posibilidades melódicas del instrumento construido. Esto guarda relación con la construcción melódica del concepto de marco de referencia, de amplia importancia en la solución de problemas matemáticos y científicos.

REFERENCIAS

- [1] OECD. Reporte PISA 2012 - Estudiantes de bajo rendimiento, <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf>, último acceso 2016/09/13
- [2] OECD. PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm>, último acceso: 2017/04/15
- [3] Menon, U. Mathematization vertical and horizontal, <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52>, ultimo acceso 2016/05/03
- [4] Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas, https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29IZzdxMnM/view?usp=drivesdk, último acceso 2016/04/09
- [5] Hofstadter, D. Gödel, Escher, Bach - Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007).
- [6] Lee, C. El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. 1ra edn. Ed. Morata (2009).
- [7] Ávila Meléndez, L. A. Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües. En: I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe - I CEMACYC (2013).
- [8] Borges Ripoll, M. Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo05.pdf>, último acceso 2016/06/05
- [9] García Quiroga, B., Coronado, A. y Giraldo Ospina, A. Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas. Ed. Universidad de la Amazonía, primera edición (2015).
- [10] Colombia Aprende. Diseño Universal de Aprendizaje – DUA. Recuperado de: <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/cerrandobrechas/Men%C3%BA%20horizontal%20inferior/DUA.pdf>, último acceso: 2018/06/10
- [11] Castro Alonso, J. C., Ayres, P. and Paas, F. The Potential of Embodied Cognition to Improve STEAM Instructional Dynamic Visualization. En: Emerging Technologies for STEAM Education – Full STEAM Ahead. Recuperado de: <http://www.springer.com/la/book/9783319025728> (Fecha de consulta: 10 de septiembre de 2017)
- [12] Gómez Quintero, L. M. Cultura STEAM: la mentalidad por encima del producto - Parte I. En: Las Notas de Clase de Marcela Gómez. Recuperado de: <http://lasnotasdeclasedemarcelagomez.blogspot.com.co/2017/09/cultura-steam-la-mentalidad-por-encima.html>, último acceso: 2017/09/30
- [13] El-Deghaidy, H. STEAM Methods: a case from Egypt. En: Designing and Teaching the Secondary Science Methods Course. An International Perspective. Recuperado de: <https://www.sensepublishers.com/catalogs/bookseries/other-books/designing-and-teaching-the-secondary-science-methods-course/>, último acceso: 2017/08/05

- [14] Ge, X., Ifenthaler, D., Spector, J. M. Emerging Technologies for STEAM Education – Full STEAM Ahead. Recuperado de: <http://www.springer.com/la/book/9783319025728> (Fecha de consulta: 10 de septiembre de 2017)
- [15] Goh Chueng Meng, Christine. A cognitive perspective of language learners' listening comprehension problems. Recuperado de: <https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/18662/1/S-28-1-55.pdf> (Fecha de consulta: 10 de septiembre de 2017)
- [16] Gómez Quintero, L. M. Cultura STEAM y la Educación para el Siglo XXI. Recuperado de: <http://www.santillana.com.co/rutamaestra/edicion-18/cultura-steam-y-la-educacion-para-el-siglo-xxi/> (Fecha de consulta: 16 de marzo de 2017).
- [17] Gómez Quintero, L. M. Educación de calidad y mentalidad de superviviente II: la educación y la innovación toman tiempo. En: Las Notas de Clase de Marcela Gómez. Recuperado de: <http://lasnotasdeclasedemarcelagomez.blogspot.com.co/2017/10/educacion-de-calidad-y-mentalidad-de.html> (Fecha de consulta: 10 de octubre de 2017)
- [18] Martínez, J. E. The Search for Method in STEAM Education. Recuperado de: <http://www.palgrave.com/la/book/9783319558219> (Fecha de consulta: 30 de noviembre de 2017)
- [19] Cortez Vásquez, A., Vega Huerta, H., Pariona Quispe, Jaime. Procesamiento de lenguaje natural, <http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/sistem/article/download/5923/5121>, último acceso 2018/05/20
- [20] Andersen, H. Active Arithmetic, http://www.waldorflibrary.org/books/3/view_bl/52/ebooks/56/active-arithmetic-ebook, último acceso 2017/07/20
- [21] Ausubel, D. and Fitzgerald, D. Meaningful Learning and Retention: Intrapersonal Cognitive Variables. Recuperado de: <http://www.jstor.org/stable/pdf/1168901.pdf>, último acceso: 2017/09/12
- [22] Kuhl, P. K. Early Language Acquisition: Cracking the speech code. *Nature Reviews: Neuroscience*. Vol. 5 (Noviembre), 831-843 (2004).
- [23] D'Amore B. The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*. (Gent, Belgio). XXXIX, 1, 75-82 (2003).
- [24] D'Amore, B. Objetos, significados, relaciones matemáticas y sentido, <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2161582.pdf>, último acceso 2017/12/01
- [25] D'Amore, B. y Martini, B. Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas* 32 (Diciembre) 26-42 (1997).
- [26] Dehaene, S. The number sense: how the mind creates mathematics, <http://backspaces.net/temp/Spring2010Seminar/The%20Number%20Sense.pdf>, ultimo acceso 2017/12/07
- [27] Duval, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, http://www.jstor.org/stable/pdf/25472062.pdf?casa_token=Lip_hxk0P4AAAAA:WuZOCpx9HmamM5lJb8TpGVa_UpHyhAnZ8W-tfNy8CWVlFWLJVlZThHtq1gw4u6A3syM-p9Fp645BeR3jCSv8b8lYDiHmkT5F7gJ_XpunFOI7lIwsMjoD, ultimo acceso 2017/12/07
- [28] Duval, R. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf>, último acceso 2017/12/07
- [29] Brown, D. A methodical history of language teaching, <https://methodologyshumenextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-languauge-teaching.pdf>, ultimo acceso 2016/02/07
- [30] Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives*. New York: David McKay, 356, 1998-1999
- [31] Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., & Bloom, B. S. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Allyn & Bacon.



- [32] Akoschky, J. Los “cotidía-fonos” en la educación infantil (2005). Eufonía. [Versión electrónica]. Revista Eufonía 33. Recuperado de: <http://um.es/desarrollopsicomotor/wq/2010/wqvcentemay2010/material/Ref03.pdf>, último acceso: 2018/06/10
- [33] Trallero, C. (2008). El oído musical. Recuperado de: [http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/11525/1/EL% 20OIDO% 20MUSICAL. Pdf](http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/11525/1/EL%20OIDO%20MUSICAL.Pdf), último acceso: 2018/06/11
- [34] Gómez Quintero, L. M. y Gallo Caro, S. N. Recuperado de: <https://linkedin.com/pulse/possibilities-linguistic-teaching-methods-musical-our-gomez-quintero/>, último acceso: 2018/05/28



Sergio N. Gallo es Licenciado en educación básica con énfasis en educación artística y cultural: Música, de la Universidad de Antioquia, así como Tecnólogo en Gestión y Ejecución Instrumental para las Prácticas Musicales, de la Escuela Superior Tecnológica de Artes Débora Arango. Cuenta con una diplomatura en Formación Pedagógica para Profesionales no Licenciados, y otra en “Arteterapia Integrativa” un paradigma innovador de intervención clínica y comunitaria, ambas otorgadas por la Universidad de San Buenaventura. Actualmente labora como docente de Música en la institución educativa The New School – El Nuevo Colegio, ubicada en la ciudad de Medellín.

También se desempeña como músico y productor.



Lina M. Gómez es Ingeniera Mecánica de la Universidad Pontificia Bolivariana, sede Medellín. Realizó sus estudios de especialización en Gestión de Proyectos a través de la Fundación Universitaria Iberoamericana – FUNIBER – y es actual candidata a magíster en Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Pontificia Bolivariana, sede Medellín. Cuenta con experiencia investigativa en nuevos materiales, en particular materiales de carbono para aplicaciones en la industria aeronáutica. Adicionalmente, tiene formación en Educación, la cual incluye una diplomatura en Metodología, Didáctica y Evaluación en la Enseñanza de Segundas Lenguas, así como con una certificación en Coaching Educativo. Cuenta con experiencia docente de más de 10 años, y es docente y consultora STEAM, así como creadora del concepto de Cultura STEAM en Colombia. Se desempeña como Mentora Líder en el Proyecto Mujeres y Niñas STEAM Colombia, y es fundadora de la comunidad Rookie Teacherpreneurship Medellín.



Guillermo L. López es ingeniero electrónico de la Universidad Pontificia Bolivariana, sede Medellín, así como Licenciado de la Universidad de Medellín. Es además especialista en Gestión Tecnológica y en Didáctica de las Ciencias y la Matemática, así como magíster en Gestión Tecnológica de la Universidad Pontificia Bolivariana, sede Medellín. Se ha desempeñado como docente e investigador en varias instituciones universitarias, que incluyen a la Universidad de Medellín y a la Universidad Pontificia Bolivariana. También es asesor de trabajos de grado, en programas de pregrado y posgrado. Es actual miembro de la Sociedad Colombiana de Matemáticas.



ANEXO 11. ANTEPROYECTO APROBADO

A. INFORMACIÓN GENERAL:

Título del proyecto	COMPETENCIA COMUNICATIVA DE LA MATEMÁTICA: UN ENFOQUE PARA LA MODELACIÓN DE SITUACIONES PROBLEMA.
Tipo de proyecto	Investigación: _____ Académico: _____ Interdisciplinario: <u> X </u>
Líder principal responsable del proyecto (Director)	Nombre y apellido: Guillermo León López Flórez
	Grupo: Gestión de la Tecnología y la Innovación (GTI)
Miembros e integrantes	Lina Marcela Gómez Quintero
Unidad académica	Maestría en Ciencias Naturales y Matemática
Entidades involucradas	
Lugar de ejecución	Medellín, Antioquia, Colombia
Fecha de inicio	01 de septiembre de 2017
Fecha de finalización	01 de septiembre de 2018
Costo total del proyecto	\$ 49,668,030
Montos de contrapartida (Por la UPB y entes financiadores)	\$ 39,800,595 UPB \$ 19,024,870 Estudiante
Palabras claves	Lenguaje matemático, signo, significado, código, segunda lengua.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

(Máximo 5)	



B. RESUMEN:

En la actualidad existe un interés especial por las profesiones enfocadas en las Ciencias Exactas y Naturales, así como en el amplio manejo del lenguaje matemático para la modelación de sistemas y predicción de comportamientos asociados a ciertos grupos de estudio. Considerando el marcado interés generado en este aspecto, se presta una gran atención a la capacitación y entrenamiento, formal y no formal, que promueva la consolidación de habilidades y competencias en torno al dominio y aplicación certeras del saber científico y matemático. Así las cosas, se hace menester desarrollar, además de habilidades, afinidades con estos lenguajes desde el terreno de la Educación Básica, para facilitar la inmersión del individuo en este mundo lleno de datos y patrones. Pero hay una gran dificultad: la brecha entre estudiantes y las Ciencias Exactas y Naturales, que se ve materializada en los bajos resultados en las pruebas estándar y no estándar, así como en los prejuicios establecidos desde las instituciones y las familias en torno a lo rígido y difícil que es el acercamiento al lenguaje matemático, y, en consecuencia, al científico.

Por tal razón, y partiendo del principio de que los lenguajes matemático y científico pueden considerarse segundas lenguas, que se cristalizan a través de procesos de "traducción" desde la observación y el dominio de la lengua materna, se busca establecer un sistema de adaptación de las aproximaciones y métodos desarrollados para la enseñanza/aprendizaje de las segundas lenguas a la creación de métodos para la enseñanza matemática y científica, basada en problemas y proyectos, los cuales se apoyan en los procesos de matematización descritos por Freudenthal y los ciclos de solución de problemas propuestos por G. Polya, para su uso potencial en el diseño de estrategias pedagógicas asociadas a los grados de Educación Básica Primaria (1° a 5°) en El Nuevo Colegio de la ciudad de Medellín. Se espera que este sistema favorezca, a través de su estructura, la interpretación de situaciones problema en estos primeros años, a la luz del código matemático formal, promoviendo los procesos de razonamiento inductivo para la predicción del comportamiento de diferentes variables adscritas a un sistema de interés.



C. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO:

1. Planteamiento del Problema

El Ministerio de Educación Nacional, a través de su sistema SPADIES – Sistema para la Prevención de la Deserción en la Educación Superior – presenta y publica los datos recolectados en torno al comportamiento de la actividad escolar universitaria, caracterizando a la población estudiantil correspondiente, tasas de deserción y apoyo a la permanencia. De acuerdo con el último informe disponible en línea, se plantea que existe una alta tasa de deserción a nivel técnico, tecnológico y profesional universitario, cuyo valor más representativo aparece en el primer semestre (Figura 1).

DESERCIÓN POR COHORTE SEGÚN ÁREA DEL CONOCIMIENTO

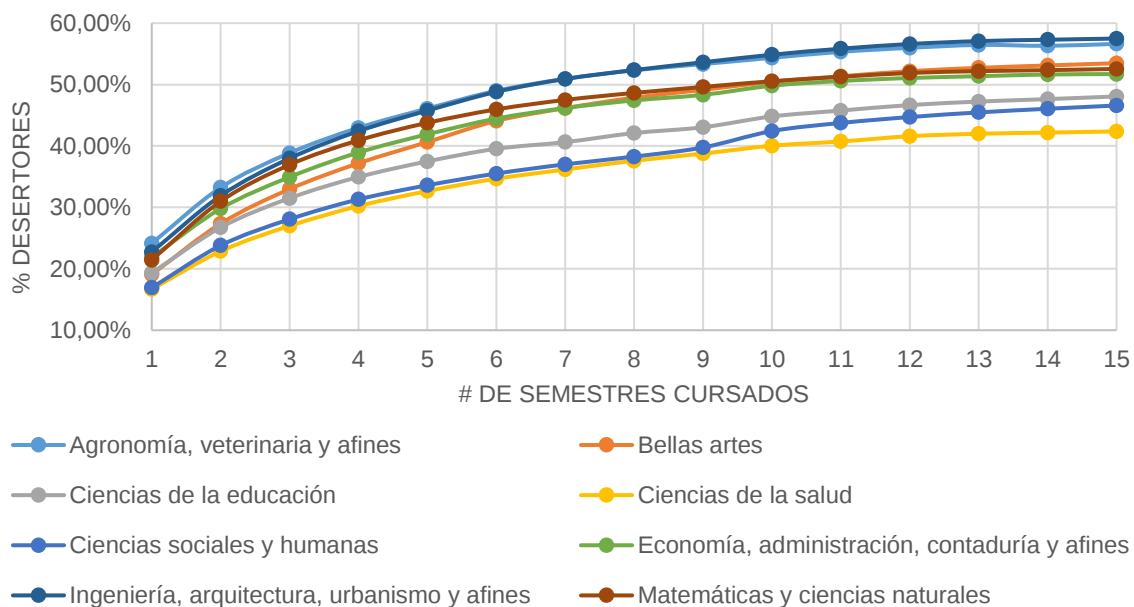




Figura 1. Deserción escolar universitaria, por área del conocimiento (SPADIES-MEN, 2016)

Las carreras que requieren Matemáticas en su desarrollo – como Ingenierías, Arquitectura, Urbanismo y afines – presentan tasas de deserción acumulada superiores al 50% entre el octavo y el décimo semestre, mientras que dicho valor se encuentra alrededor del 40% para las Ciencias Básicas. Dichas cifras son consistentes con el panorama latinoamericano, en donde el Indicador de Eficiencia de Titulación señala a las Ingenierías y a las Ciencias Básicas como las áreas que reportan mayor número de deserciones acumuladas (MEN, 2009). Esto hace pensar que los estudiantes que se enfrentan a un panorama de formación superior en el cual las Matemáticas y las Ciencias son indispensables, no cuentan con una estructura conceptual y procedimental suficiente que les permita abordar estos contenidos con éxito.

Una revisión retrospectiva permite ver que a nivel escolar básico hay importantes vacíos: según el estudio PISA 2012, *“más de uno de cada cuatro alumnos de 15 años de los países de la OCDE no han alcanzado un nivel básico de conocimientos y habilidades en al menos una de las tres asignaturas principales evaluadas por PISA: lectura, matemáticas y ciencia [...] esto significa que cerca de 13 millones de alumnos de 15 años en los 64 países y economías participantes en PISA 2012 tuvieron un bajo rendimiento en al menos una asignatura...”* (OECD, 2012). El siguiente reporte, emitido en 2015, indica que se han mantenido los resultados desde el 2006 en la mayor parte de los países evaluados, con excepción de algunos en los que se notaron mejoras (OECD, 2015); Colombia está entre dichos países, pero todavía los índices de rendimiento en esta prueba siguen siendo muy bajos, especialmente en Matemáticas.

Los resultados mostrados por este reporte dan cuenta de una necesidad imperiosa por lograr mayores niveles de literacidad en las tres áreas que se evalúan en sus pruebas: Matemáticas, Lectura y Ciencia, ambas de gran interrelación conceptual y problémica. Datos más detallados al respecto se encuentran a continuación, en la Figura 2:



Snapshot of performance in science, reading and mathematics

Countries/economies with a mean performance/share of top performers above the OECD average Countries/economies with a share of low achievers below the OECD average								
Countries/economies with a mean performance/share of top performers/share of low achievers not significantly different from the OECD average								
Countries/economies with a mean performance/share of top performers below the OECD average Countries/economies with a share of low achievers above the OECD average								
	Science		Reading		Mathematics		Science, reading and mathematics	
	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Mean score in PISA 2015	Average three-year trend	Share of top performers in at least one subject (Level 5 or 6)	Share of low achievers in all three subjects (below Level 2)
	Mean	Score dif.	Mean	Score dif.	Mean	Score dif.	%	%
OECD average	493	-1	493	-1	490	-1	15.3	13.0
Singapore	556	7	535	5	564	1	39.1	4.8
Japan	538	3	516	-2	532	1	25.8	5.6
Estonia	534	2	519	9	520	2	20.4	4.7
Chinese Taipei	532	0	497	1	542	0	29.9	8.3
Finland	531	-11	526	-5	511	-10	21.4	6.3
Macao (China)	529	6	509	11	544	5	23.9	3.5
Canada	528	-2	527	1	516	-4	22.7	5.9
Moldova	428	9	416	17	420	13	2.8	30.1
Albania	427	18	405	10	413	18	2.0	31.1
Turkey	425	2	428	-18	420	2	1.6	31.2
Trinidad and Tobago	425	7	427	5	417	2	4.2	32.9
Thailand	421	2	409	-6	415	1	1.7	35.8
Costa Rica	420	-7	427	-9	400	-6	0.9	33.0
Oman	418	21	402	15	402	26	3.4	42.0
Colombia	416	8	425	6	390	5	1.2	38.2
Mexico	416	2	423	-1	408	5	0.6	33.8
Montenegro	411	1	427	10	418	6	2.5	33.0
Georgia	411	23	401	16	404	15	2.6	36.3
Jordan	409	-5	408	2	380	-1	0.6	35.7
Indonesia	403	3	397	-2	386	4	0.8	42.3
Brazil	401	3	407	-2	377	6	2.2	44.1
Peru	397	14	398	14	387	10	0.6	46.7
Lebanon	386	m	347	m	396	m	2.5	50.7
Tunisia	386	0	361	-21	367	4	0.6	57.3
FYROM	384	m	352	m	371	m	1.0	52.2
Kosovo	378	m	347	m	362	m	0.0	60.4
Algeria	376	m	350	m	360	m	0.1	61.1
Dominican Republic	332	m	358	m	328	m	0.1	70.7

Figura 2. PISA 2015: reporte de desempeño en Matemáticas, Lectura y Ciencia (OECD)

Según este reporte, Colombia es uno de los países en donde el porcentaje de estudiantes con un bajo rendimiento (Niveles 1 y 2, e incluso estudiantes con desempeños inferiores) en las tres áreas evaluadas, triplica la media establecida. En Matemáticas se obtuvo el puntaje más bajo entre las tres pruebas, logrando un promedio 100 puntos por debajo del establecido por la OCDE, lo cual es un indicador bastante preocupante de cómo la formación en Matemáticas a nivel escolar básico no es suficiente para asegurar su uso en problemas de carácter situacional. Esta información sugiere la necesidad de cambiar el enfoque de formación en Matemáticas desde el ciclo de Educación Básica, específicamente el enfoque dado al diseño de estrategias pedagógicas y su correspondiente implementación



en el aula, dado que la ejecución a la fecha no está generando un resultado positivo en la formación de competencias necesarias en el nuevo siglo.

Esta información es muy cercana a la que se reportó en 2012, y da luces acerca de cómo proceder al respecto: en aquel entonces, el 43% de los estudiantes que fueron evaluados en PISA, presentó un bajo rendimiento en las tres asignaturas de interés, mientras menos del 23% estuvo por encima del nivel básico en las mismas – la media de la OCDE para este segundo resultado es 71.6%. Además, los estudiantes que sólo tuvieron dificultades en Matemáticas multiplican en varias unidades a la cantidad de estudiantes que mostraron bajos rendimientos en Lectura y Ciencias; los bajos rendimientos en Matemáticas y una de las otras dos asignaturas, superaron las medias de la OCDE y estuvieron al menos 8 veces por encima del porcentaje de estudiantes con dificultades en Lenguaje y Ciencias (OCDE, 2012). Como la mejora en este ciclo no ha sido sustancial, puede afirmarse que las estrategias educativas aplicadas al momento no han tenido un impacto positivo y notable en el fortalecimiento y consolidación de procesos de pensamiento. Estos resultados hacen pensar en el uso de recursos que promuevan el pensamiento sistémico y multidisciplinario.

2. Impacto Esperado:

- **Académico – Educación Básica:** los procesos de enseñanza/aprendizaje de la Matemática a nivel escolar básico en El Nuevo Colegio, se verán fortalecidos en el desarrollo de competencias para la modelación de sistemas ligados a procesos que involucran variables cuantitativas. Adicionalmente, un sistema que permita la comprensión matemática de un escenario cotidiano representado en lenguaje natural facilitará la multidisciplinariedad en el aprendizaje, mediante los principios transversales del Aprendizaje Significativo.

3. Estado del arte



3.1. LA MATEMÁTICA COMO LENGUAJE

“La Matemática es el lenguaje con el que Dios escribió el Universo”

Galileo Galilei

La formación para el desarrollo del pensamiento matemático parte de la concepción acerca del mismo. Muchos debates se han desarrollado en torno a la naturaleza de la Matemática, tratando de determinar si fue descubierta o inventada, si se trata de una creación de la mente humana, o si es obra de la Naturaleza; se ha difundido hasta ahora que se la Matemática es ambas cosas, esto es, una creación de la mente humana a partir de los arreglos y patrones que se encuentran en la Naturaleza, muchos de los cuales se conocen como Leyes Universales. Desde esta perspectiva, puede considerarse la Matemática como un sistema lingüístico dedicado a la reconstrucción y al modelamiento de los patrones que se encuentran en la Naturaleza, y que permiten la predicción de futuros fenómenos; el análisis matemático, entonces, se transforma en un asunto de “traducción”, en el que operadores, símbolos, propiedades, comunican detalles de situaciones que modelan y reconstruyen sistemas observados en nuestra Naturaleza y en muchas otras posibles (Hofstadter, 1979):

“... trata acerca de significado y símbolos, códigos e isomorfismos, conexiones y analogías; en breve, acerca de correspondencias, exactas e inexactas, entre diferentes sistemas en todos los niveles imaginables. Ésta es ciertamente la esencia de la traducción”

Clara Lee se adhiere a este pensamiento, y enuncia que una de las características de la Matemática es que se expresa a través de un sistema de símbolos cuyos significados sintetizan, de una u otra manera, las propiedades de un sistema basado en cantidades, sean éstas constantes o variables, respecto de cómo serían expresadas a través de un lenguaje natural (Lee, 2009):



“Puesto que la forma específica en que se expresan las matemáticas se asemeja bastante a una lengua diferente con muchas de las características de una lengua natural, es razonable examinar si enseñar matemáticas como si fuera una segunda lengua extranjera puede o no ayudar a los alumnos a superar algunas de las barreras de aprendizaje que aparecen al utilizar el registro matemático. Aprender un idioma extranjero requiere que los alumnos dominen las palabras, la gramática y la sintaxis de la lengua, así como tener alguna noción de la cultura que utiliza el lenguaje para expresar ciertas ideas y conceptos. Es necesario aprender el idioma matemático para poder expresar las ideas y concepciones que forman su disciplina, y al aprender la lengua los alumnos empiezan a familiarizarse con la cultura”.

Así las cosas, la Matemática asume el matiz de una segunda lengua, la cual depende de la inmersión en escenarios propicios para la observación, a fin de formular preguntas que propendan por la adquisición de nuevos conceptos, y que ayuden a realizar una lectura lógica de carácter inductivo, con el fin de desarrollar categorías cognitivas que conlleven a la conformación de un verdadero aprendizaje significativo, el cual se transforma posteriormente en un conocimiento previo formal necesario en la interacción con fenómenos más complejos. Diferentes proyectos de investigación y disertaciones muestran gran relación entre el uso de la lengua como herramienta para el aprendizaje matemático (Ávila Meléndez, 2013; Borges Ripoll, s.p.i; García Quiroga et al., 2015), considerando que el lenguaje es la primera herramienta de representación de la realidad, y, por tanto, a ella se debe referir cualquier iniciativa de enseñanza. Teniendo en cuenta lo anterior, es importante afirmar que el proceso enseñanza/aprendizaje de la Matemática debe guardar una estrecha relación con los aprendizajes lingüístico y científico, ya que éstos fortalecen la observación del entorno, la interpretación de los fenómenos adscritos a él, y la comunicación de lo observado con el fin de asegurar su comprensión.

Puede observarse fácilmente que, en muchas ocasiones, se suele confundir la idea matemática con la representación de esa idea. En los primeros años se le ofrece al niño, en primer lugar, el símbolo, dibujo, signo o representación cualquiera sobre el concepto en cuestión, haciendo que el sujeto intente comprender el significado de lo que se ha representado. Estas experiencias son perturbadoras para el desarrollo del pensamiento



lógico-matemático, pues se ha demostrado suficientemente que el símbolo o el nombre convencional es el punto de llegada y no el punto de partida, por lo que, en primer lugar, se debe trabajar sobre la comprensión del concepto, propiedades y relaciones. Al respecto, Schleppegrell manifiesta la importancia del lenguaje cotidiano como medio propicio para establecer equivalencias conceptuales preliminares que introduzcan el lenguaje matemático formal, puesto que existen estructuras lingüísticas en común con el lenguaje matemático empleado para la definición de situaciones de interés (Schleppegrell, 2007).

El tema se ha visto ampliamente difundido en círculos de carácter académico e investigativo, e incluso se han determinado espacios exclusivos para la discusión de las características semióticas y semiológicas del lenguaje matemático. En Alemania, Sträßer ha retratado las dos líneas empleadas para la investigación semiótica en las Matemáticas: la primera se relaciona con el uso de categorías semióticas para estudiar la comunicación matemática basada en Internet, en donde se produce el intercambio espontáneo de lenguaje ordinario y signos matemáticos; la segunda tiene que ver con el empleo de la Semiótica como un recurso de alto nivel para la comprensión del mundo de los objetos, en donde el pensamiento abductivo y el razonamiento diagramático son imprescindibles para la conformación de redes de conocimiento (Sträßer, 2004). Estas redes son de crucial importancia en la consolidación de categorías conceptuales, que sustentan la formación de hipótesis y modelos preliminares para la explicación de fenómenos y la predicción de resultados bajo condiciones dadas.

Considerando las características de la educación matemática tradicional, que se destaca por su rigidez y principal enfoque en el dominio algorítmico, se han planteado diversas estrategias para la consecución de verdaderas habilidades asociadas a la consolidación de un pensamiento matemático, y dentro de las más aceptadas en la actualidad se encuentra la matematización. El concepto de matematización fue desarrollado por Freudenthal (Freudenthal, 1973 – citado por Menon, 2015), uno de los pioneros en la investigación alrededor de la formación matemática; durante sus investigaciones, se encargó de mostrar que la aproximación al aprendizaje de la Matemática, formulada a través del método deductivo que se trabajaba mediante los axiomas de Peano, correspondía a un caso de inversión antididáctica, y que el proceso realmente didáctico era opuesto diametralmente, esto es, afín con un enfoque inductivo. Así, el modelo algorítmico, en sí mismo una aplicación del método deductivo, no favorece los procesos de adquisición del lenguaje



matemático, como sí lo haría un método que permita la comunicación directa con el fenómeno a abordar, y con el registro histórico de situaciones similares susceptibles de modelación.

La matematización tiene como uno de sus pilares, el uso de aplicaciones para el aprendizaje de la Matemática (De Lange, 1996), y como método de aprendizaje, se ve influenciada, evidentemente, por las características de los modelos instruccionales con los cuales entra en comunicación. Dichos principios, agrupados dentro del término didactización, establecen las pautas para el desarrollo de un ambiente de aprendizaje específico, lo cual potencia en mayor o menor medida la consolidación de los procesos cognitivos alrededor del razonamiento lógico – lingüístico–matemático. Así las cosas, el ambiente bajo el cual el lenguaje matemático es introducido y desarrollado, tiene una gran injerencia en el resultado final, que corresponde al uso adecuado y aplicado de éste en la representación y manipulación de variables para el análisis de una situación real de estudio.

3.2. MÉTODOS Y ENFOQUES PARA EL APRENDIZAJE DE SEGUNDAS LENGUAS

Diversas aproximaciones, enfoques y métodos se han desarrollado con el fin de asegurar el aprendizaje de segundas lenguas, y todos estos métodos surgen de diversas concepciones alrededor de cómo el ser humano aprende una lengua natural. Así las cosas, se puede revisar la posibilidad de desarrollar un método que, bajo la misma luz, promueva un aprendizaje profundo, sólido y significativo del lenguaje matemático.

Brown presentó en 2001 una revisión histórica de la enseñanza del lenguaje, reseñando los distintos métodos y enfoques alrededor de las lenguas extranjeras (Brown, 2001). Esta lista, cuyo resumen comparativo se encuentra en la Tabla 3, incluye, entre otros:

- Enfoque tradicional (*Classical Approach, or Grammar-Translation Method*)
- Enfoque Natural o Método Directo (*Direct Method*)
- Método Audiolingüístico (*Audiolingual Method*)



- Respuesta Física Total (*Total Physical Response*)
- Aprendizaje de Códigos Cognitivos (*Cognitive Code Learning*)
- Aprendizaje del Lenguaje Comunitario (*Community Language Learning*)

Cada uno de estos métodos comprende una concepción del aprendizaje que se basa en la primera lengua, o lengua natural. Con esto, se puede afirmar que el aprendizaje de una segunda lengua involucra el manejo de códigos que se ven potenciados de una u otra forma por la interacción con el mundo físico y la comunidad que domina dicho lenguaje. No obstante, a sabiendas de que no es común el lenguaje matemático para la comunicación natural, por múltiples razones, para la adquisición del lenguaje matemático es menester un sistema que promueva la codificación de la lengua natural al lenguaje matemático y viceversa, lo cual permitirá vincular los métodos de enseñanza de lenguas extranjeras y las herramientas lingüísticas que tanto se potencian a diario, con los procesos de enseñanza/aprendizaje de un lenguaje universal. Dentro de estos métodos, considerando los principios del Aprendizaje Activo (Andersen, 1995) y los previamente citados trabajos de Freudenthal y Polya, el uso integrado de los métodos de Aprendizaje de Códigos Cognitivos, Respuesta Física Total y Aprendizaje del Lenguaje Comunitario, se muestra como una opción de impacto considerable para la adquisición de estructuras conceptuales más sólidas que faciliten el aprendizaje matemático.

Tabla 1. Cuadro comparativo de métodos para la enseñanza de segundas lenguas (Brown, 2001)

	Theory of Language	Theory of Learning	Objectives	Syllabus	Activity Types	Learner Roles	Teacher Roles	Materials Roles
Audiolingual	Language is a system of rule-governed structures hierarchically arranged.	Habit formation; skills are learned more effectively if oral precedes written; analogy, not analysis.	Control of structures of sound, form, and order; mastery over symbols of the language; goal: native – speaker mastery.	Graded syllabus of phonology, morphology and syntax. Contrastive analysis.	Dialogues and drills, repetition and memorization, pattern practice.	Organisms that can be directed by skilled training technique to produce correct responses.	Central and active teacher – dominated method. Provides model, controls direction and pace.	Primarily teacher – oriented. Tapes and visuals, language lab often used.
Total Physical Response	Basically a structuralist, grammar-based view of language.	L2 learning is the same as L1 learning; comprehension before production is “imprinted” through carrying out commands (right – brain functioning); reduction of stress.	Teach oral proficiency to produce learners who can communicate uninhibitedly and intelligibly with native speakers.	Sentence-based syllabus with grammatical and lexical criteria being primary, but focus on meaning, not form.	Imperative drills to elicit physical actions.	Listener and performer, little influence over the content of learning.	Active and direct role; “the director of a stage play” with students as actors.	No basic text; materials and media have an important role later. Initially voice, action, and gestures are sufficient.



<i>The Silent Way</i>	Each language is composed of elements that give it a unique rhythm and spirit. Functional vocabulary and core structure are key to the spirit of the language	Processes of learning a second language are fundamentally different from L1 learning. L2 learning is an intellectual, cognitive process. Surrender to the music of the language, silent awareness then active trial.	Near-native fluency, correct pronunciation, basic practical knowledge of the grammar of the L2. Learner learns <i>how</i> to learn a language.	Basically structural lessons planned around grammatical items and related vocabulary. Items are introduced according to their grammatical complexity.	Learner responses to commands, questions, and visual cues. Activities encourage and shape oral responses without grammatical explanation or modeling by teacher.	Learning is a process of personal growth. Learners are responsible for their own learning and must develop independence, autonomy, and responsibility.	Teachers must (a) teach (b) test (c) get out of the way. Remain impassive. Resist temptation to model, remodel, assist, direct, exhort.	Unique materials: colored rods, color-coded pronunciation and vocabulary charts.
<i>Community Language Learning</i>	Language is more than a system for communication. It involves whole person, culture, educational, developmental communicative processes.	Learning involves the whole person. It is a social process of growth from childlike dependence to self-direction and independence.	No specific objectives. Near-native mastery is the goal.	No set syllabus. Course progression is topic-based; learners provide the topics. Syllabus emerges from learners' intention and the teacher's reformulations.	Combination of innovative and conventional. Translation, group work, recording, transcription, reflection and observation, listening, free conversation.	Learners are members of a community. Learning is not viewed as an individual accomplishment, but something that is achieved collaboratively.	Counseling/parental analogy. Teacher provides a safe environment in which students can learn and grow.	No textbook, which would inhibit growth. Materials are developed as course progresses.
<i>The Natural Approach</i>	The essence of language is meaning. Vocabulary, not grammar, is the	There are two ways of L2 language development: "acquisition" – a natural subconscious	Designed to give beginners and intermediate learners basic communicative skills. Four	Based on selection of communicative activities and topics derived	Activities allowing comprehensible input, about things in the here-and-now. Focus on	Should not try to learn language in the usual sense, but should try to lose themselves in	The teacher is the primary source of comprehensible input. Must create positive low-anxiety	Materials come from realia rather than textbooks. Primary aim is to promote comprehension



	heart of language.	process, and "learning" – a conscious process. Learning cannot lead to acquisition.	broad areas; basic personal communicative skills (oral/written); academic learning skills (oral/written)	from learner needs.	meaning, not form.	activities involving meaningful communication.	climate. Must choose and orchestrate a rich mixture of classroom activities.	and communication.
Suggestopedia	Rather conventional, although memorization of whole meaningful texts is recommended.	Learning occurs through suggestion, when learners are in a deeply relaxed state. Baroque music is used to induce this state.	To deliver advanced conversational competence quickly. Learners are required to master prodigious lists of vocabulary pairs, although the goal is understanding, not memorization.	Ten unit courses consisting of 1,200-word dialogues graded by vocabulary and grammar.	Initiatives, question and answer, role-play, listening exercises under deep relaxation.	Must maintain a passive state and allow the materials to work on them (rather than vice versa).	To create situations in which the learner is most suggestible and present material in a way most likely to encourage positive reception and retention. Must exude authority and confidence.	Consists of texts, tapes, classroom fixtures, and music. Texts should have force, literary quality, and interesting characters.
Communicative Language Teaching	Language is a system for the expression of meaning, primary function – interaction and communication.	Activities involving real communication; carrying out meaningful tasks; and using language which is meaningful to the learner	Objectives will reflect the needs of the learner; they will include functional skills as well as linguistic objectives.	Will include some/all of the following: structures, functions, notions, themes, tasks. Ordering will be guided by learner needs.	Engage learners in communication, involve processes such as information sharing, negotiation of meaning, and interaction.	Learner as negotiator, interactor, giving as well as taking.	Facilitator of the communication process, participants' tasks, and texts; needs analyst, counselor, process manager.	Primary role in promoting communicative language use; task-based materials; authentic.



Universidad
Pontificia
Bolivariana

$\int_a^b f(x) dx$
MAESTRÍA
Ciencias Naturales y Matemática

		promote learning.						
--	--	----------------------	--	--	--	--	--	--



Objetivo general: Proponer un sistema de codificación-decodificación para la traducción de problemas a términos matemáticos, basado en los métodos de enseñanza/aprendizaje de segundas lenguas, con miras a su implementación en procesos de modelación y solución de problemas a nivel escolar básico en El Nuevo Colegio.

Objetivos específicos:

- Proponer un enfoque para la definición del sistema de codificación-decodificación propuesto, a partir de los diversos métodos vigentes alrededor de la enseñanza/aprendizaje de segundas lenguas.
- Determinar las correlaciones existentes entre conceptos y axiomas matemáticos relacionados con el aprendizaje escolar básico (Primaria y Secundaria), con los elementos lingüísticos (semióticos, semánticos, sintácticos y semiológicos) necesarios en un sistema de codificación-decodificación, desde la perspectiva de los procesos de matematización.
- Delinear el protocolo general de utilización del sistema desarrollado, en la descripción y modelación de un problema o situación dada.

5. Metodología

Se basa en la observación de características semióticas y patrones, que permitan encontrar una forma más precisa de establecer un código o algoritmo de reconocimiento y aplicación de signos y operadores.

La metodología preliminar consta de tres fases: Revisión, propuesta y ajuste. Dichas fases contemplan las siguientes actividades principales:

FASE 1. REVISIÓN



- Revisión del estado de la técnica
 - Estudio de los modelos relevantes.
 - Identificación de las características de los modelos estudiados.
 - Campos de aplicación de los modelos estudiados.
 - Aporte de cada modelo
- Revisión de modelos aplicados encontrados en el estado de la técnica
 - Estudio de los modelos aplicados.
 - Identificación de características
 - Aporte de los modelos al desempeño
- Revisión de características tales como:
 - Modos de aprendizaje o de acceso al conocimiento.
 - Manejo de la información.
 - Transferencia de conocimiento.
 - Transformación del conocimiento.

FASE 2. PROPUESTA

- Propuesta de un modelo
 - Comparación de las características y aportes a los modelos estudiados con las características identificadas
 - Selección del modelo a proponer que mejor logre adaptarse a las características y potencie los resultados del área.
 - Revisión modelo propuesto vs características de lo existente.
 - Revisión del modelo propuesto.
 - Validación del modelo con la presencia de todos los expertos.

FASE 3. AJUSTE

- Ajuste del modelo según revisión del modelo propuesto.



6. Productos Esperados:

Los productos a entregar son:

- Copia a la Biblioteca Central de la UPB del documento en papel y medio magnético, que soporta el trabajo de grado, una vez sea aprobado.
- Un artículo en revista nacional, para aprobación.
- Una ponencia en evento local.

7. Estrategia de Comunicación:

Se difundirá la información a través de un artículo en revista nacional (será presentado para aprobación). Además, se presentará una ponencia en un evento local alrededor del tema.

8. Cronograma

Actividades	Meses																																															
	Mes 1				Mes 2				Mes 3				Mes 4				Mes 5				Mes 6				Mes 7				Mes 8				Mes 9				Mes 10				Mes 11				Mes 12			
	Semanas																																															
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
Revisión Bibliográfica																																																
Entrega informe 1 - Enfoque																																																
Planteamiento relaciones matemático-lingüísticas																																																
Entrega informe 2 - Código																																																
Plan de utilización																																																
Entrega informe 3 - Protocolo																																																
Entrega artículo																																																
Entrega del Trabajo de grado																																																

9. Bibliografía.



- ANDERSEN, Hemming. Active Arithmetic. Recuperado de: http://www.waldorflibrary.org/books/3/view_bl/52/ebooks/56/active-arithmetic-ebook (Fecha de consulta: 20 de julio de 2017)
- ÁVILA MELÉNDEZ, Luis Arturo. Pertinencia de técnicas de enseñanza de segundas lenguas en clases de matemáticas en contextos multilingües. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe – I CEMACYC. Noviembre de 2013.
- BORGES RIPOLL, Manuel. Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/45/Articulo05.pdf> (Fecha de consulta: 5 de junio de 2016)
- MENON, Usha. Mathematization vertical and horizontal. Recuperado de: <http://episteme.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/download/168/52> (Fecha de consulta: 3 de mayo de 2016)
- HOFSTADTER, Douglas. Gödel, Escher, Bach – Un eterno y grácil bucle. Ed. Tusquets, edición en español (2007); 882 p.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL – MEN. Sistema para la Prevención y Atención de la Deserción en la Educación Superior – SPADIES. Recuperado de: https://spadies.mineduccion.gov.co/spadies/consultas_predefinidas.html?2 (Fecha de consulta: 10 de abril de 2017)
- OECD. Reporte PISA 2012 – Estudiantes de bajo rendimiento. Recuperado de: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf> (Fecha de consulta: septiembre 13 de 2016)
- OECD. PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education. Recuperado de: <http://www.oecd.org/education/pisa-2015-results-volume-i-9789264266490-en.htm> (Fecha de consulta: 15 de abril de 2017)
- GARCÍA QUIROGA, Bernardo, CORONADO, Arnulfo y GIRALDO OSPINA, Albeiro. Orientaciones Didácticas para el Desarrollo de Competencias Matemáticas. Ed. Universidad de la Amazonía, primera edición (2015); 258 p.
- DE LANGE, Jan. International Handbook of Mathematics Education, Chapter 2: Using and Applying Mathematics in Education. Recuperado de: http://www.newbooks-services.de/MediaFiles/Texts/7/9780792335337_Excerpt_003.pdf (Fecha de consulta: 3 de julio de 2016)
- POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Recuperado de: https://drive.google.com/file/d/0B9X_ut9YyVHWdXY5T29IZzdxMnM/view?usp=drivesdk (Fecha de consulta: 9 de abril de 2016)
- SCHLEPPEGREL, Mary J. The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: a research review. Recuperado de:



Universidad
Pontificia
Bolivariana

$\int a \, f(x) \, dx$
MAESTRÍA
Ciencias Naturales y Matemática

<https://studentportalen.uu.se/uusp-filearea-tool/download.action?nodeId=1058147&toolAttachmentId=203996> (Fecha de consulta: 5 de septiembre de 2016)

- STRÄBER, Rudolf. Introduction: Semiotics in Mathematics Education Research. Recuperado de: <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm046a1.pdf> (Fecha de consulta: 6 de septiembre de 2016)
- BROWN, Douglas. Recuperado de: <https://methodologyshumenextramurals.files.wordpress.com/2013/02/2-a-methodical-history-of-langauge-teaching.pdf> (Fecha de consulta: 7 de febrero de 2016)

Tabla 1. Presupuesto Global.

	FUENTES		TOTAL
	UPB	ESTUDIANTE (Especies)	
PERSONAL	\$ 30,591,450	\$ 9,177,435	\$ 39,768,885
EQUIPOS	\$ 500,000	\$ 240,000	\$ 740,000
SOFTWARE	\$ 100,000	\$0	\$ 100,000
MATERIALES (desembolsable)	\$0	\$ 100,000	\$ 150,000
SALIDAS DE CAMPO (desembolsable)	\$0	\$ 300,000	\$ 300,000
MATERIAL BIBLIOGRÁFICO	\$ 5,000,000	\$ 0	\$ 5,000,000
ADMINISTRACION Y/O IMPROVISTOS	\$ 3,609,145	\$0	\$ 3,609,145
TOTAL	39,800,595	19,024,870	\$ 49,668,030

Tabla 2. Presupuesto Gastos de Personal

NOMBRE DEL INVESTIGADOR / EXPERTO/ AUXILIAR	FORMACIÓN ACADÉMICA	FUNCIÓN DENTRO DEL PROYECTO	DEDICACIÓN h/semana	RECURSOS		TOTAL
				UPB	Contrapartida	
					ESTUDIANTE	
Guillermo López Flórez	Magíster	Director	6	\$ 30,591,450		\$ 30,591,450.00
Lina Marcela Gómez Quintero	Estudiante	Desarrollador	15		\$ 9,177,435	\$ 9,177,435.00
TOTAL						\$ 39,768,885.00



Tabla 3. Presupuesto de Compra de Equipos.

EQUIPO	JUSTIFICACIÓN	RECURSOS		TOTAL
		UPB	Estudiante	
Computador	Redacción y Base de datos	\$ 500,000	\$ 0	\$ 500,000
Computador	Redacción y Base de datos	\$ 0	\$ 240,000	\$ 240,000
TOTAL				\$ 740,000

Tabla 4. Presupuesto Software Utilizado.

SOFTWARE	JUSTIFICACIÓN	RECURSOS		TOTAL
		UPB	ESTUDIANTE	
Microsoft Office 2016 ®	Base de Datos y Diagramas	\$ 100,000.00	\$0	\$ 100,000.00
TOTAL				\$ 100,000.00

Tabla 5. Presupuesto Salidas de Campo.

ÍTEM	COSTO UNITARIO	#	FUENTE		TOTAL
			UPB	ESTUDIANTE	
Visita otras universidades (Transporte)	\$30,000	10	\$0	\$ 300,000	\$ 300,000
TOTAL					\$ 300,000

Tabla 6. Presupuesto Materiales.

MATERIALES	JUSTIFICACIÓN	FUENTE	TOTAL
------------	---------------	--------	-------



		UPB	ESTUDIANTE	
Insumos de papelería para impresión de documentos	Impresión del trabajo de grado	\$0	\$ 150,000.00	\$150,000
	TOTAL			\$ 150,000

Tabla 7. Presupuesto Bibliografía empleada.

ÍTEM	JUSTIFICACIÓN	FUENTE		TOTAL
		UPB	ESTUDIANTE	
Artículos de revistas (Bases de datos)	Realización del proyecto	\$ 5,000,000	\$0	\$ 5,000,000
TOTAL				\$ 5,000,000