

Optimización de inventarios multiproducto, basado en estimación de demanda y minimización de costos

Andrea Bermúdez Escobar
Universidad Pontificia
Bolivariana
Colombia
andrea.bermudez@alfa.upb.ed
u.co

Sebastián Londoño Olarte
Universidad Pontificia
Bolivariana
Colombia
Sebastian.londool@alfa.upb.e
du.co

Marisol Valencia Cárdenas
Universidad Nacional de
Colombia
Colombia
solmarival@gmail.com

RESUMEN

Un manejo óptimo de los inventarios es determinante para la rentabilidad de una empresa manufacturera, en especial, del sector lácteo, con tantas variaciones en su demanda y el corto ciclo de vida de sus productos. En este trabajo se formula un modelo de inventario que parte de estimar modelos de pronóstico de demanda para tres productos elaborados por una empresa del sector lácteo de Antioquia. Se exploran y estiman los modelos de pronóstico dinámicos regresivos y modelos de Redes Neuronales Artificiales (RNA's). Los pronósticos de demandas realizados con RNA, resultaron los más eficientes; con base en estos, se formula el modelo de optimización de inventarios multiproducto, en el software *LINGO*, con base en programación lineal. Se propone finalmente un esquema de pedidos y almacenamiento de inventarios a costo óptimo.

Palabras clave: Optimización de inventarios, modelos de Redes Neuronales Artificiales, pronósticos.

ABSTRACT

Optimal management of inventory is crucial to the profitability of a manufacturing company, especially in the dairy sector, having many variations in demand and short life cycle of their products. In this paper an inventory model is formulated to estimate models of demand forecasting for three products made by a company in the dairy sector of Antioquia. We explore and estimate dynamic models regressive forecast models and Artificial Neural Networks (ANN's). Demand forecasts performed with RNA, were the most efficient; based on these, the model of multiproduct inventory optimization is formulated in the *LINGO* software, based on linear programming. It finally proposes a scheme of orders and inventories at optimal storage cost.

Keywords: inventory optimization, Artificial Neural Network models, forecasts.

INTRODUCCIÓN

Los inventarios son considerados aspectos determinantes para la producción y distribución, gracias a su adecuado manejo, se pueden disponer de insumos o de productos terminados en

el momento oportuno (Gutiérrez & Vidal, 2008); una inadecuada administración de ellos puede llevar a una inmovilización de capital en mercancías, reflejado en la iliquidez o sobrecostos de operación. Tener inventarios al alza puede generar sobrecostos, pérdida de productos, baja en precios, por tanto, una reducción en el margen de utilidad; por otro lado, tener inventarios a la baja, por limitaciones de almacén o presupuesto, causaría pérdidas en ventas, y en el mercado a largo plazo (Sarimveis, Patrinos, Tarantilis, & Kiranoudis, 2008).

Reduciendo el inventario se minimiza la inversión, pero se corre el riesgo de no poder satisfacer la demanda de las operaciones de la empresa. Por ello es imprescindible explorar modelos adecuados para administrar adecuadamente los inventarios, integrando con estos, técnicas estadísticas para el pronóstico de la demanda (Correa & Gómez, 2009; Simchi-Levi, Kaminski, & Simchi-Levi, 2008).

Los pronósticos de demanda, aunque no aseguran un cumplimiento a cabalidad de los objetivos de una compañía, si permiten disminuir la incertidumbre, ya que se anticipan a hechos futuros basados en la historia del comportamiento de la demanda, o en análisis cualitativo, permitiendo así tomar decisiones para la planeación de la producción. Las series de tiempo son métodos estadísticos que permiten predecir variables como la demanda a partir de datos históricos de ventas, sin embargo muchos de estos dependen de estructuras teóricas y factores de comportamiento, patrones de tendencia, estacionalidad y aleatoriedad; las que pueden hacer más difícil el proceso de ajuste. Lo anterior podría llevar al incumplimiento de premisas teóricas como normalidad, supuestos de varianza constante, de dichos métodos estadísticos.

Han surgido las Redes Neuronales Artificiales (RNA) como técnicas que permiten realizar pronósticos basados en optimización (Tabares & Hernandez, 2006), buscando un objetivo, que en el caso de este trabajo, es la minimización de un error de ajuste, con el indicador MSE; sin tener basarse en distribuciones de probabilidad de parámetros estimados, como lo hacen los modelos estadísticos clásicos. Las RNA permiten la modelación de procesos complejos, como es una alta volatilidad; así, procesos de optimización como éstos permiten dar soluciones particulares a estos casos donde se

tienen altos niveles de incertidumbre (Sarimveis, Patrinos, Tarantilis, & Kiranoudis, 2008; Chelouah, 2005).

Modelos de inventarios, pronósticos de demanda y su integración para la optimización, en cadenas productoras de alimentos, han sido revisados por diversos autores (Galicia & Villegas, 2005; Mora, 2008). Rob A.C.M. Broekmeulen (2009) proponen y evalúan una nueva política de reaprovisionamiento utilizando un modelo de simulación del proceso de venta al por menor de productos perecederos, en el cual integran un factor que no se tenía en cuenta con anterioridad en ambientes estocásticos, la edad del inventario.

No son muchas las estrategias en el sector lácteo para realizar pronósticos de demandas o la optimización de inventarios. Doganis et al. (2006) sostienen que al realizar un pronóstico preciso, es posible generar unas políticas de producción e inventarios adecuados en la cadena láctea, afirman que la predicción de ventas diarias en productos de corta vida útil como la leche, usando técnicas heurísticas, resultan mucho más eficientes en los pronósticos de demanda respecto a modelos sencillos como los lineales y exponenciales.

Los modelos RNA se han utilizado para la predicción de casos en que la demanda presenta variabilidad y estacionalidad. Au, K. F.; Choi, T.M. & Yu (2008) realizaron un modelo de redes neuronales basado en los datos históricos de una empresa de confecciones; el cual su capacidad de predicción para la producción a corto plazo, fue muy acertado frente a otros modelos tradicionales como el SARIMA, especialmente cuando la serie de datos presenta incertidumbre y una demanda con estacionalidad y tendencia. Algunos autores encontraron mejor su desempeño frente a métodos tradicionales de series de tiempo, como se ha empleado para pronosticar demanda de energía diaria y horaria (Medina & García, 2005; Rueda, Velásquez & Franco, 2011).

En este trabajo se realizó la estimación del pronóstico de demanda mediante modelos de regresión en series temporales y se comparan con respecto a modelos de RNA, eligiendo el mejor, en términos de su validación y los indicadores del error: MSE (cuadrado medio del error) y MAPE (Error absoluto porcentual medio) (Ramírez, 2013). Seguido a esto, se formula un modelo de optimización de inventarios donde se emita un pedido a mínimo costo, basado en la demanda estimada previamente con el mejor modelo de pronóstico.

SERIES DE TIEMPO

Una serie de tiempo o serie temporal, se conoce como el conjunto de datos que son obtenidos y registrados de forma sucesiva con intervalos fijos en un periodo determinado, de esta forma se realizan observaciones a través del tiempo a una variable particular.

Los pronósticos son las predicciones de los hechos y condiciones futuras, realizados con técnicas cuantitativas o cualitativas; pero su aplicación en los procesos de toma de

decisiones son de gran importancia para algunas empresas, en especial si son comerciales, ya que permitiría planear con más previsión muchos procesos administrativos, de producción y operaciones (Bowerman & O'Connell, 2007; Adam & Ebert, 1991).

Modelos de regresión lineal

La relación entre dos o más variables relacionadas de un modo no determinístico, se conoce como análisis de regresión (Devore, 2005), en la cual se estudian las variaciones de una variable respuesta en función de una o más variables independientes o predictivas, dependiendo del número de estas variables pueden ser regresión simple (una variable) o regresión múltiple (más de una variable).

Modelo de regresión lineal

En general se puede relacionar la respuesta con k regresores o variables predictoras con el siguiente modelo (Montgomery, Peck, & Vining, 2006):

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Donde Y es la variable respuesta X_j , con $j=1\dots k$, son las variables independientes, los coeficientes β_j con $j=1, \dots, k$. se conocen como coeficientes de regresión parcial, los cuales representan el cambio esperado en la respuesta si se mantienen las demás variables independientes constantes, y al igual que el modelo de regresión simple se tiene un error aleatorio ε .

Es posible agregar a estos modelos términos trigonométricos o variables indicadoras (Montgomery, 2006), que representen cambios estacionales (Bowerman y O'Connell, 2007); además, agregar términos *autorregresivos* representando el pasado de la misma variable respuesta (endógena) o de otras (exógenas), pueden mejorar la estimación de autocorrelación de la serie temporal. Estos son llamados modelos econométricos (Caridad y Ocerín 1998) o dinámicos y un ejemplo de modelos con un término rezagado endógeno de orden 1 es:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon$$

El rezago de orden 1 puede ser remplazado por Y_{t-n} , incorporando el n -ésimo periodo (Caridad y Ocerín 1998).

Red Neuronal Artificial (RNA)

Una red neuronal es un centro de procesamiento de información de cuyas interacciones locales depende el comportamiento del conjunto del sistema.

Las RNAs son una de las ramas más destacadas del campo científico de la Inteligencia Artificial. Éstas tratan de simular el proceso de razonamiento humano, caracterizado por el aprendizaje a través de la experiencia y la extracción de conocimiento a partir de un conjunto de datos, e imitan esquemáticamente la estructura neuronal del cerebro.

El elemento fundamental de los sistemas neuronales biológicos es la neurona, ya que es la clave para el procesamiento de la información. De su cuerpo celular parte un denso árbol de ramificaciones compuesto por dendritas, donde llega la información, se procesa y se emite una señal por medio del axón o rama principal.

La estructura de la red está conformada por una capa de entrada, de salida y capas ocultas. Estas últimas reciben estímulos y emiten salidas dentro del sistema. En ellas se lleva a cabo el procesamiento básico de la información (Flórez & Fernández, 2008).

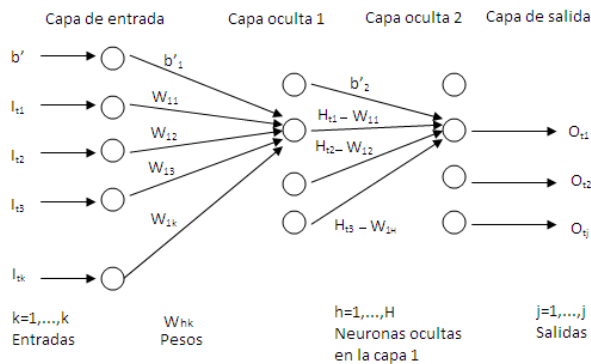


Figura 1. Estructura de una RNA.

Fuente: Elaboración propia.

En la primera etapa se agrega la información con una combinación lineal de los pesos asignados y neuronas de entrada y en la segunda etapa se aplica una función de transferencia hacia las neuronas de salida.

En cada neurona ocurren dos procesos, hay entradas y hay un umbral o señal mínima que se transmite a las otras neuronas, la cual está dada por:

$$b_h = f(\overline{W_{1k}} \cdot \overline{I_{tk}} + \overline{b'_1})$$

Los pesos W_{hk} pueden representarse matricialmente como:

$$IW^{10} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{h1} & W_{h2} & \dots & W_{hk} \end{bmatrix} IW^{21} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{j1} & W_{j2} & \dots & W_{jh} \end{bmatrix}$$

La capa oculta 1 está definida por la función:

$$Net_{th} = b'_h + W_{h1}I_{t1} + W_{h2}I_{t2} + \dots + W_{hk}I_{tk}$$

Un ejemplo de una función de transferencia para las neuronas que salen de la capa oculta 1, es la función logística:

$$H_{th} = \frac{1}{1 + e^{-Net_{th}}}$$

La capa oculta 2 está definida por la función:

$$Net_{tj} = b'_j + W_{j1}H_{t1} + W_{j2}H_{t2} + \dots + W_{jk}H_{tk}$$

La función logística de transferencia para las neuronas que salen de la capa oculta 2 puede definirse como:

$$\theta_{tj} = \frac{1}{1 + e^{-Net_{tj}}}$$

Generalmente en la capa final de salida se usa una función lineal:

$$W_i(w, x) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j$$

La función de salida de la red es:

$$O_{tj} = f^2 \left[b^2 + IW^{21} \left(f'(b' + IW^{10}I_{tk}) \right) \right]$$

Los criterios de optimización se basan en minimización de algún indicador de error como el MSE.

Los modelos clásicos al ser estimados con base en supuestos para los residuales, en general deben cumplir el supuesto de normalidad en los residuos, varianza constante e incorrelación en los errores.

Criterios de evaluación

Error cuadrático medio (MSE)

Es una forma de medir el error global del pronóstico. Consiste en el promedio de los cuadrados de las diferencias entre los valores pronosticados y observados. (Render, 2004). La función que lo define es:

$$MSE = \frac{\sum (\text{Errores de pronóstico})^2}{n}$$

Error porcentual absoluto medio (MAPE)

Es otra forma de medir el error global del pronóstico. El MAPE es el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados y los reales, expresado como porcentaje de los valores reales. Su fórmula es:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^n |real_i - pronóstico_i| / real_i}{n} * 100$$

Modelos de inventarios

Los inventarios uno de los mayores rubros en los estados financieros de las compañías, razón por la cual una acertada administración permite un adecuado nivel de servicio a un costo razonable. Los inventarios permiten amortiguar las diferencias que se presentan entre la oferta y la demanda, según Izar (1996) entre otras ventajas de tener un adecuado nivel de inventarios se encuentran:

- Satisfacer la demanda aún durante los tiempos de entrega –lead time–

- Oportunidad de descuentos por la compra de insumos en lotes de mercancías mayores
- Regular la carga de producción ante una demanda estacionaria

Para responder las preguntas de “cuándo” y “cuánto” siempre buscando el mínimo costo para la compañía y el mínimo capital ocioso, es posible usar modelos de inventarios que pueden ser determinísticos en los cuales se conoce con certidumbre la demanda de los productos o un modelo estocásticos en los cuales se pueden describir con una distribución de probabilidad.

Para la estimación del inventario, se tienen asociados algunos componentes que son generales e independientes del modelo seleccionado para su determinación, los cuales son:

- Demanda
- Costos de ordenar
- Costos de mantener o almacenar
- Costos de penalización por faltantes
- Tiempo de entrega

Otro tipo de clasificación para los inventarios se relaciona con la forma en que se revisa el inventario (Hillier & Liberman, 2002) puede ser de revisión continua, en el cual se hace un pedido en el momento en que el inventario baja de un punto de reorden establecido o un modelo de revisión periódica en el cual se verifica el nivel de inventarios con intervalos discretos. Este último modelo será el empleado para realizar el modelo de inventarios.

Modelo determinístico de revisión periódica

En un modelo determinístico con revisión periódica la demanda varía entre dos límites: un límite superior y otro inferior, en el cual se deben planear para los siguientes n periodos respecto a cuanto producir u ordenar para reabastecer el inventario al principio de cada periodo.

La demanda se denota con la variable r_i la cual varía para el periodo $i = 1, 2, \dots, n$

Las variables de costos son:

K = Costo de preparación para producir u ordenar artículos para reabastecer el inventario al inicio del periodo

c = Costo unitario de producir u ordenar cada artículo

h = Costo de mantener en inventario cada artículo que queda al final del periodo

El objetivo del modelo es minimizar el costo total durante los n periodos, el cual se logra sólo si se ignoran los costos fijos que afectan la producción.

La solución del modelo se logra mediante un algoritmo basado en una política óptima de un programa de producción en el cual sólo se produce cuando el nivel de inventario es cero. Además, en la restricción de los pedidos no necesariamente debe producirse el valor de demanda diaria, sino que puede aumentarse el lote de producción hasta

máximo la suma de demandas de los n periodos, dependiendo del tipo de proceso (Taha, 2004).

METODOLOGÍA

El trabajo parte de un análisis descriptivo, seguido de una estimación de modelos estadísticos clásicos y Redes Neuronales Artificiales para realizar pronósticos de ventas de 3 productos de la empresa Auralac, seleccionar el mejor de estos con base en los criterios MAPE y el MSE; seguido a esto, se usan los mejores pronósticos para un modelo de optimización de inventarios, basado en revisión periódica, que definirá las decisiones para programar pedidos y almacenamiento de inventarios al mínimo costo.

Para comenzar, se explicará el proceso de análisis descriptivo.

Se utilizaron los datos históricos de salidas por facturación, consideradas ventas, desde el primero de enero de 2010 hasta el 24 de diciembre de 2012, de tres productos elaborados por la empresa Auralac, proporcionados por ellos, de manera confidencial, sin dar sus nombres.

Para identificar los datos atípicos se realizó un diagrama de caja y bigotes para la serie de datos de salidas por facturación de cada una de las referencias, en el software *Statgraphics*. Luego se hizo una ponderación de cada uno de ellos con sus dos datos anteriores, con el fin de evitar sesgos en los pronósticos.

Para la identificación de patrones en la series se generaron, mediante el software *R*, las gráficas ACF y PACF; se graficó la serie de tiempo sólo para los dos últimos meses de cada una de las referencias, con el objetivo de tener una mejor visualización de la correlación y estacionalidad; así como gráficos de tendencia y variabilidad. Además se realizó la prueba de autocorrelación Box-Pierce para completar el análisis de estacionariedad.

Estimación de modelos de pronóstico

En la estimación del pronóstico de ventas para los siguientes siete días, se estimaron modelos dinámicos regresivos, por medio de los programas estadísticos *Statgraphics* y *R*. Además se elaboró una RNA para cada una de las series, mediante la herramienta de software *MATLAB*.

Para la definición de variables independientes del modelo dinámico regresivo, se utilizó el análisis descriptivo y las gráficas ACF y PACF. Debido a los cambios estructurales que presentan las series y las evidencias de estacionalidad de 7 días en todos los productos, se incluyeron la explicación de significancia de variables ficticias como: día de la semana y nivel. Luego de la estimación de los modelos, se seleccionaron aquellas que presentaron significancia inferior al 5% o 10% (encima del 95% o 90% de confianza) y se estimó el pronóstico.

Se analizaron las gráficas ACF y PACF para cada una de las series y a partir de ello se definieron los modelos Box Jenkins que más se ajustaran a los datos. Además se hizo uso de la función automática del software *Statgraphics* para generar más modelos tentativos.

Verificación de supuestos

Se realizó la prueba de validación de normalidad Jarque-Bera, de autocorrelación Box-Pierce y el MSE, para los modelos regresivos. Debido a que las RNA's no basan su estimación en premisas como la normalidad de los datos, estas no requieren las mismas pruebas que los modelos de regresión.

Proceso de entrenamiento y simulación de la Red neuronal

El proceso para la estimación de las RNAs se explica a continuación, partiendo de las variables más significativas derivadas del proceso anterior.

1. Identificar variables: respuesta y explicativas.
2. Fijar el número de variables de entrada, número de neuronas y salidas.
3. Definir el número de capas ocultas.
4. Seleccionar función de transferencia, entre las que se encuentran: Lineales y no lineales.
5. Definir tamaños de los grupos de entrenamiento, validación y pruebas.
6. Ingresar variables de entradas y salidas
7. Definir parámetros de simulación: Número de iteraciones, convergencia, criterio a optimizar, en este trabajo es el MSE.
8. Entrenar la red.
9. Estimar el indicador de error: MSE.
10. Encontrar el mínimo según número de iteraciones.
11. Pronosticar con red final hallada.

Las variables significativas tomadas de los modelos dinámicos, constituyen las entradas de los modelos de RNA's, dadas las pruebas estadísticas realizadas con los datos históricos de ventas con un nivel de significancia del 5%.

Se dividen las entradas y las salidas en tres subgrupos y se importan para la creación de la red.

Para la creación de la red se ingresaron el número de neuronas y de capas ocultas, la función de rendimiento, de entrenamiento, de aprendizaje y de transferencia.

Luego se realizó el entrenamiento de la red. Se definieron el número de iteraciones y se evaluó el rendimiento de la red por medio del MSE, para compararlos en una primera instancia con los modelos dinámicos.

Por último se ingresaron las entradas de los próximos siete días, se simuló la red y se llevaron los pronósticos al programa Microsoft Excel para estimar el MAPE de ajuste y de pronóstico y a partir de éstos elegir el mejor modelo.

Por último se integró el pronóstico del mejor modelo a un modelo de revisión periódica, realizado en el programa *LINGO*, con el fin de optimizar el sistema de inventarios de la empresa.

Modelo de optimización basado en revisión periódica

El objetivo del modelo de revisión periódica fue determinar las cantidades óptimas a producir en la semana del 25 al 31 de diciembre de 2012, de cada una de las referencias, de manera que se minimicen los costos que acarrearán los inventarios, asegurando que se cumpla con la utilidad operacional mínima esperada por la empresa.

Para la estimación del modelo se tuvo en cuenta los siguientes componentes asociados a los inventarios, para cada una de las referencias:

- Demanda.
- Costo de producción.
- Costo de mantener.
- Utilidad.
- Niveles máximos a almacenar semanalmente por referencia.

Las cantidades óptimas a producir deben cumplir con la demanda mínima de los siete días o periodos siguientes (pronóstico) y no deben superar el tope designado por política de la empresa para cada una de las referencias. Además se debe asegurar que éstas no superen la capacidad de producción diaria.

Función objetivo a minimizar:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^7 CM_i I_{ij} + CP_i P_{ij}$$

Restricción de inventarios para cada periodo:

$$I_{ij} = P_{ij} + I_0 - x_{ij}$$

Restricción de almacenamiento por producto:

$$\sum_{j=1}^7 I_{ij} \leq \sum_{j=1}^7 N_{ij} \text{ Para } i=1,2 \text{ y } 3.$$

Restricción de producción por período:

$$\sum_{i=1}^3 P_{ij} \leq Cp_j \text{ Para } j=1,2,\dots,7.$$

La programación debe cumplir con la mínima demanda:

$$\sum_{j=1}^7 P_{ij} \leq \sum_{j=1}^7 LI_{ij}$$

$$x_{ij}, P_{ij}, I_{ij} > 0$$

Donde,

x_{ij} : Cantidades de venta del producto i (1, 2, 3) para el periodo j (1,2,...,7).

P_{ij} : Unidades a pedir para ser producidas del producto i en el periodo j .

I_{ij} : Unidades a guardar en inventario del producto i en el periodo j .

Cp_j : Capacidad de producción del periodo j .

Ni_j : Nivel máximo de inventario por producto i en el periodo j .

CM_i : Costo unitario de mantener inventario para el i -ésimo producto, igual en todos los períodos.

CP_i : Costo unitario de producción para el para el i -ésimo producto, igual en todos los períodos.

Las cantidades de venta (X_{ij}) del modelo de revisión, son las demandas estimadas por el modelo de pronóstico más eficiente. Por lo tanto en el modelo esta variable es determinística, variable en cada periodo j . Se ingresaron la función objetivo y restricciones escritas en extenso en el software LINGO y se estimó el modelo de revisión periódica.

RESULTADOS

En este capítulo se presentarán los análisis exploratorios descriptivos, realizados a las series de ventas de las tres referencias y posteriormente se mostrarán las estimaciones de la demanda mediante modelos estadísticos, las debidas pruebas de validación y criterios de comparación, los cuales permiten seleccionar el modelo más eficiente de pronóstico, usando los criterios de menor MSE y MAPE.

Los altos picos de facturaciones por ventas, para las tres referencias, generan ruido en la estimación de los modelos de pronóstico; por lo tanto se realiza un promedio ponderado de estos datos extremos para asegurar que la serie tenga un comportamiento menos volátil.

Análisis descriptivo de las series

Para el producto A, se utilizó la serie de la demanda diaria durante tres años desde el 2010 hasta 2012, que equivale a 1089 datos, por lo tanto no se muestra la gráfica de la serie completa ya que no permitiría hacer un análisis descriptivo de la referencia; en la figura 2 se observa el comportamiento para los últimos dos meses en esta referencia. Se puede apreciar alta variabilidad de los datos y presencia de puntos extremos, representados en valores muy altos o muy bajos de ventas.

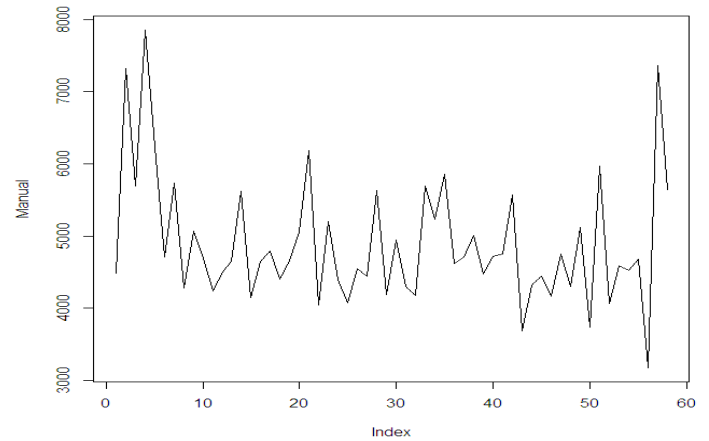


Figura 2. Salidas por facturación del producto A en los últimos dos meses

Según las funciones de autocorrelación AFC y PACF, se observa valores de autocorrelación muy fuertes los cuales se encuentran por fuera de las bandas de seguridad, observando un patrón que se repite cada 7 rezagos, lo cual nos indica la estacionalidad en la serie para esta referencia; los rezagos de orden 1 y 2 también son significativamente diferentes de cero. La prueba de Box-Pierce con un valor p de $2,2 \times 10^{-16}$ indican una fuerte autocorrelación en la serie confirmando el análisis anterior.

Para el producto B, en las funciones de ACF y PACF se observan altos valores cada 7 rezagos, lo que indica la presencia de estacionalidad de orden 7; de estos, los rezagos 3 y 4 se encuentran por dentro de las bandas de seguridad. Estas dependencias tan marcadas con el pasado de la serie serán incluidas como variables endógenas rezagadas en el modelo dinámico.

Para el producto C, similar a las anteriores referencias, la autocorrelación muestra un patrón similar a las referencias anteriores, cada 7 periodos. Las dependencias tan marcadas con el pasado de la serie, especialmente en los rezagos 1, 6 y 7 pueden ser incluidas como variables endógenas en el modelo dinámico al encontrarse por fuera de las bandas de seguridad.

Modelos de regresión en series temporales

Las pruebas de significancia ayudaron a la incorporación o no de las variables que afectan con mayor proporción el pronóstico de la demanda. Para corregir la correlación en los residuales, validación importante cuando se trata de una serie temporal, se ensayaron correctivos como:

- Transformaciones sobre la variable respuesta
- Incorporación de variables del pasado (variables autorregresivas-endógenas)
- Incorporar variables explicativas o de nivel (exógenas)

Las últimas dos pueden justificar la explicación de variabilidad debida a los posibles cambios estructurales en la serie.

La alta dispersión que presenta la serie de datos entre los años 2010 y 2012, permitió establecer 6 niveles de demanda en las tres referencias, tomando como punto de división los percentiles, de esta forma se logra la agrupación de los datos de forma estratificada: Los niveles 1 y 6 para los datos más extremos, los niveles 2 y 3 cuando los datos se encuentran por debajo de la media y los niveles 4 y 5 cuando se encuentran por encima de la media; tal como se muestra en la tabla 1.

NIVEL	PERCENTIL
Nivel 1	0 - 5
Nivel 2	5 - 25
Nivel 3	25 - 50
Nivel 4	50- 75
Nivel 5	75 - 95
Nivel 6	95 -100

Tabla 1. Asignación de niveles según valor del percentil

La inclusión de estas variables (especialmente el nivel) fue de gran ayuda para la disminución del MAPE y corregir la correlación en los residuales.

Se tomará el producto B para explicar el procedimiento seguido, que fue el mismo para las otras dos referencias. En el análisis se tiene incorporan variables tentativas como: Tendencia polinómica, Componente senoidal, Variables autorregresivas de orden: 1, 2, 6, 7.

Usando un método de selección BACKWARD¹ y haciendo transformaciones sobre la variable respuesta (raíz cuadrada, raíz cúbica, logaritmo), de todas las variables tentativas, sólo se incluyen en el modelo las variables: tiempo, variable trigonométrica sinoidal con periodo 3, rezago 6, rezago 7, sin intercepto y con transformación logarítmica, bajo un grado de significancia del 0.05, tal como lo muestra la tabla 2.

	Suma de cuadrados	Grados de Libertad	Valor F	Pr(>F)
Tiempo	5.806	1	184.292	< 2.2e-16
Sin(3π/7)	1.507	1	47.837	7.92E-12
L(log(serie),6)	0.477	1	15.14	0.0001059
L(log(serie),7)	6.132	1	194.656	< 2.2e-16
Residuales	33.959	1078		

Tabla 2. ANOVA Tipo III, producto B.

¹ Metodología de selección en la cual se incluyen todas las variables de la ecuación y después se elimina la variable que tenga una significación mayor. Si una variable cumple con los requisitos de eliminación, se recalcula el modelo sin dicha variable. El proceso se detiene cuando todas las variables tengan un nivel de significancia menor al estipulado. (Álvarez, 1994)

En tabla 2 se observa que todas las variables finales son significativas, dado por el Valor P inferior al 5%. El valor del indicador MAPE de ajuste es alrededor del 13.68%. La ecuación para el modelo es:

$$Z_t = 0.002 * T + 0.0566 * Sen\left(\frac{3\pi * t}{7}\right) + 0.1086 * Z_{t-6} + 0.389 * Z_{t-7} + \varepsilon$$

Donde $Z_t = \ln(y_t)$

Haciendo pronósticos puntuales para la semana del 25 al 31 de diciembre del 2012 se obtiene un error absoluto relativo medio (MAPE) de 22.85% (tabla 3).

Fecha	Real	Pronostico	Error relativo	MAPE
25/12/2012	2984.25	3322.11157	11.32%	22.85%
26/12/2012	3979	3522.97054	11.46%	
27/12/2012	3780.05	3267.76873	13.55%	
28/12/2012	5045.52	3309.25562	34.41%	
29/12/2012	5465.98	3449.32304	36.89%	
30/12/2012	4625.06	3999.29503	13.53%	
31/12/2012	5886.44	3602.22288	38.80%	

Tabla 3. Demanda real vs pronóstico con modelo dinámico tentativo, producto C.

Según la prueba de Shapiro-Wilks, con un valor p de 7.837e-12, puede afirmarse que existen evidencias para rechazar la distribución normal; para la prueba de Box Pierce, se obtiene un Valor P de < 2.2e-16, luego los residuales están autocorrelacionados.

Teniendo un MAPE de pronóstico tan alto y ninguna prueba de validación sobre los residuales aceptable, se toma la decisión de incorporar variables exógenas al modelo: día de la semana y los niveles. La tabla 4 muestra la estimación de un nuevo modelo dinámico para el producto B.

	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Valor F	Pr(>F)
Intercepto	75715	1	36634.637	< 2.2e-16
Cos4	96	1	46.6522	1.42E-11
Día	87	7	5.9848	7.43E-07
Nivel	19105	5	1848.7771	< 2.2e-16
Residuales	2222	1075		

Tabla 4. ANOVA Tipo III final para el producto B.

La ecuación final del modelo para el producto B es la siguiente:

$$\sqrt{Y_t} = 44.67 + 0.44 * \text{Cos}((4\pi * t)/7) + 0.064 * \text{Lunes} - 0.041 * \text{Martes} - 0.508 * \text{Miércoles} - 0.259 * \text{Jueves} - 0.144 * \text{Viernes} + 0.665 * \text{Sábado} + 1.114 * \text{Domingo} + 5.126 * \text{Nivel2} + 9.375 * \text{Nivel3} + 12.646 * \text{Nivel4} + 17.086 * \text{Nivel5} + 23.488 * \text{Nivel6} + \varepsilon$$

Empleando la ecuación anterior, obtenemos los pronósticos para la semana del 25 al 31 de diciembre del 2012, los cuales se detallan en la tabla 5.

Fecha	Real	Pronostico	Error relativo	MAPE
25/12/2012	2984.25	2948.09816	1.2%	7.44%
26/12/2012	3979	3787.38427	4.8%	
27/12/2012	3780.05	3817.83574	1.0%	
28/12/2012	5045.52	4665.46928	7.5%	
29/12/2012	5465.98	4776.47361	12.6%	
30/12/2012	4625.06	4838.48027	4.6%	
31/12/2012	5886.44	4693.3362	20.3%	

Tabla 5. Demanda real vs pronóstico con modelo dinámico final, producto C.

El modelo arroja un MAPE de pronóstico aproximadamente del 7.4%, lo cual corrobora el acierto de inclusión las dos variables exógenas logrando una disminución en el MAPE alrededor de 15 puntos.

Para el producto A, con el procedimiento de estimación anterior, se encuentra la siguiente ecuación:

$$Z_t = 0,0052 * T + 0,021 * Z_{t-6} - 2,535 * \text{Lunes} - 2,532 * \text{Martes} - 2,535 * \text{Miércoles} - 2,5335 * \text{Jueves} - 2,539 * \text{Viernes} - 2,52 * \text{Sábado} - 2,543 * \text{Domingo} + 0,2386 * \text{Nivel2} + 0,3282 * \text{Nivel3} + 0,4214 * \text{Nivel4} + 0,5423 * \text{Nivel5} + 0,716 * \text{Nivel6}$$

Donde $Z_t = \ln(y_t)$

Se estima un MAPE de ajuste para el modelo alrededor del 3.34%, y de pronóstico de 5.97%, para la última semana del año 2012.

Para el producto C, la ecuación final obtenida es:

$$\ln(y) = [9,13 + 0,0154 * \text{Lunes} + 0,1529 * \text{Martes} + 0,0171 * \text{Miércoles} + 0,0206 * \text{Jueves} + 0,0184 * \text{Viernes} + 0,0237 * \text{Sábado} + 0,097 * \text{Domingo} + 0,2188 * \text{Nivel2} + 0,3452 * \text{Nivel3} + 0,4408 * \text{Nivel4} + 0,5382 * \text{Nivel5} + 0,697 * \text{Nivel6}]$$

Se estima que el modelo tiene un MAPE de ajuste aproximadamente del 3.45% y de pronóstico para la semana del 25 al 31 de diciembre del 2012, de 3.27%.

Con base en las variables explicativas encontradas en los modelos anteriores, se procede a estimar los modelos de redes neuronales.

Modelos de Redes Neuronales

Producto A

Las variables significativas, que constituyen las entradas de la RNA, para el producto A son:

- Tiempo.
- Variable autorregresiva de orden 6.
- Variables exógenas de nivel y día de la semana.

La salida es la variable respuesta con transformación logarítmica.

En la creación de la red se asignó una función de entrenamiento lineal, de aprendizaje de momentos, de transferencia logística y de rendimiento el MSE. El número de capas ocultas es 2 y el de neuronas es 5, ya que son las variables de entrada más la de salida.

Se entrenó la red, con un número de iteraciones igual a 1000 y se obtuvo un MSE de 0.0013, debido a que éste es inferior al del modelo dinámico para esta referencia, se prosiguió con la simulación de la red.

Se simuló la red y se obtuvo un MAPE de ajuste de 3.42% y de pronóstico de 3.93%.

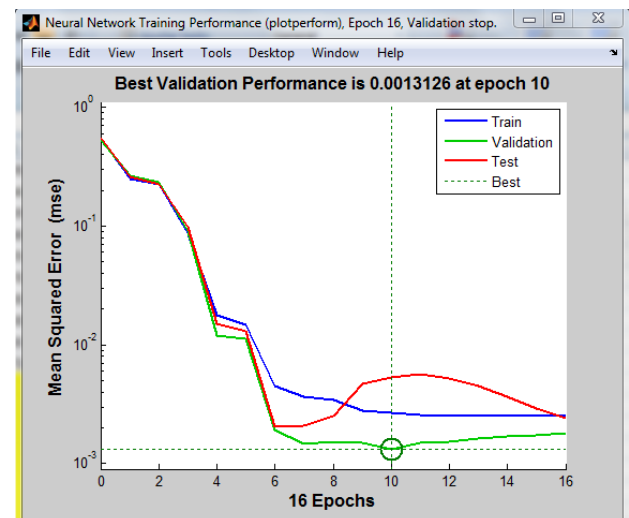


Figura 3. Rendimiento del modelo de RNA, producto A.

Producto B

Las variables significativas, que constituyen las entradas de la RNA, para el producto B son:

- $\text{Cos}(4\pi * t/7)$, donde t es el tiempo.
- Variables exógenas de nivel y día de la semana.

La salida es la variable respuesta con transformación de raíz cuadrada.

Se creó una RNA con una función de entrenamiento lineal, de aprendizaje de momentos, de transferencia logística y de rendimiento el MSE. El número de capas ocultas es 2 y el de neuronas es 4.

En el entrenamiento de la red se asignó un número de iteraciones igual a 1000 y se obtuvo un MSE de 1.7325, debido a que éste es inferior al del modelo dinámico para esta referencia, se prosiguió con la simulación de la red.

Se simuló la red y se obtuvo un MAPE de ajuste de 4.29% y de pronóstico de 6.99%.

Producto C

Las variables significativas, que constituyen las entradas de la RNA, para esta referencia son las variables exógenas de nivel y día de la semana. La salida es la variable respuesta con transformación logarítmica.

En la creación de la red se asignó una función de entrenamiento lineal, de aprendizaje de momentos, de transferencia lineal y de rendimiento el MSE. El número de capas ocultas es 2 y el de neuronas es 3.

Se entrenó la red, con un número de iteraciones igual a 1000 y se obtuvo un MSE de 0.0018, debido a que éste es inferior al del modelo dinámico para esta referencia, se prosiguió con la simulación de la red.

Se simuló la red y se obtuvo un MAPE de ajuste de 3.77% y de pronóstico de 2.86%.

La tabla 6 sintetiza los resultados de la comparación de modelos de pronóstico para las tres referencias estudiadas.

	Producto	Dinámico	RNA
MAPE Pronóstico (%)	A	5.97	3.93
	B	7.44	6.99
	C	3.27	2.86
MSE	A	0.0025	0.0013
	B	20.670	17.325
	C	0.0022	0.0018
Prueba de Normalidad	A	No	NA
	B	No	NA
	C	No	NA

Tabla 6. Resumen de valores de MSE, MAPE de pronóstico y supuestos de validación.

Todos los modelos cumplen con tener residuos incorrelacionados. La distribución normal no es una premisa en la estimación del modelo de red neuronal, por ello, esta prueba no aplica aquí. Esta prueba no la cumplen los residuos de los modelos dinámicos regresivos.

En la tabla 6 se observa cómo los MAPE de pronóstico y el MSE de los modelos de RNA dan valores inferiores a los obtenidos con todos los modelos clásicos evaluados. Por lo tanto se concluye que los modelos de RNA son los de mayor

precisión y eficiencia para la estimación del pronóstico de ventas de las tres referencias para los siguientes siete días.

Modelo de optimización de inventarios

El modelo de inventarios debe cumplir con la demanda requerida, para cada uno de los productos para los 7 días de una semana (lunes a domingo). En este caso ésta es la pronosticada por el modelo de RNA, por ser los más eficientes.

Pedido	Demanda		
	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}
1	3241.378	2902.07	11540.17
2	4204.607	3854.94	16475.03
3	4662.798	3868.21	13054.02
4	5914.025	4792.68	17878.56
5	6818.027	4804.43	14661.35
6	5821.997	4815.75	14610.76
7	7598.97	4739.3	18039.66

Tabla 7. Valores pronosticados

Producto	Costo de mantener (CM_i)	Costo de producción (CP_i)	Utilidad (U_i)
1	327.08	959.12	294.78
2	577.84	1704.32	322.61
3	226.33	663.67	224.40

Tabla 8. Límite superior e inferior de demanda por producto y día.

Dadas las utilidades por producto y las demandas pronosticadas se estima una utilidad total de la producción de \$45.270.00 lo cual da por arriba del mínimo estipulado (45 millones), con el sobrante de \$270.066.

Con esta información, se plantea y resuelve en *LINGO*, de manera que se encuentren las cantidades óptimas a producir de manera que se minimicen los costos que acarrear los inventarios y producción, asegurando que se cumpla con la utilidad operacional mínima esperada por la empresa.

Solución

El valor óptimo de los costos totales alcanzados, de la producción más los inventarios, a una utilidad mínima esperada de 45 millones, fue de \$158.297.000.

Los valores de la solución de pedidos e inventarios estimados por el software *LINGO* se muestran para cada una de las referencias en la tablas 9, 10 y 11; redondeando cifras decimales.

Periodo	Producción (P_{ij})	Inventario (I_{ij})
0		1128
1	2114	0
2	4205	0
3	10559	5896
4	19	0
5	9653	2834
6	2988	0
7	7599	0

Tabla 9. Resultados de la optimización del modelo de inventarios, para el producto A.

Periodo	Producción (P_{ij})	Inventario (I_{ij})
0		835
1	2068	0
2	4108	253
3	3616	0
4	4793	0
5	4805	0
6	4816	0
7	4740	0

Tabla 10. Resultados de la optimización del modelo de inventarios, para el producto B.

Periodo	Producción (P_{ij})	Inventario (I_{ij})
0		3412
1	8129	0
2	17553	1077
3	11978	0
4	21339	3460
5	11694	492
6	18347	4228
7	13812	0

Tabla 11. Resultados de la optimización del modelo de inventarios, para el producto C.

De los resultados mostrados en la tablas 9, 10 y 11, la empresa puede realizar la planeación de la producción, de tal forma que los costos sean mínimos y la empresa reciba la utilidad mínima esperada.

Variable	Costo reducido
I11	577.84
I17	4426.16
I21	577.84
I27	5171.36
I31	577.84
I37	4130.71

Tabla 12. Valores de costo reducido.

En la tabla 12 se muestran las cantidades de inventario que tienen valores positivos de costo reducido, indicando que hay pérdidas por el almacenamiento de inventario de los 3 productos en el primer y último periodo. Ninguna variable estructural tiene costo reducido.

CONCLUSIONES

El modelo de pronóstico con redes neuronales entre los demás modelos usados para la estimación de la demanda es el más eficiente bajo la comparación de los indicadores de error: MAPE y MSE, pero el acierto de este modelo se debe en gran medida a la inclusión de variables significativas realizadas durante la estimación del modelo dinámico. Es importante resaltar el alto peso que tienen los niveles de demanda y los días de la semana, este último permite comprobar la estacionalidad de cada siete días que se presenta en la serie temporal para las tres referencias.

El tiempo de cómputo para procesar las iteraciones requeridas para lograr una optimización de minimización sobre los errores del pronóstico realizado bajo el modelo de redes neuronales, no es muy alto, lo cual se convierte en una gran ventaja frente a los demás modelos. Las pruebas de validación de normalidad que se deben realizar sobre los residuales en los modelos tradicionales no son necesarias en los ajustes con RNA, una razón más para preferir éstos últimos.

El modelo de optimización de inventarios permitió proponer una planeación de la producción que garantice el cumplimiento de la demanda real, generar un plan de pedidos y almacenar inventarios a costo mínimo durante los 7 días de una semana, lo cual es de gran importancia para las empresas que se dedican a la producción de derivados lácteos, ya que al ser productos perecederos, con una corta vida útil, su sobreproducción puede generar grandes pérdidas debido a los altos costos de almacenamiento y dadas de baja.

La estimación de demanda, producción y principalmente de inventarios en las empresas distribuidoras y para nuestro caso productoras, se realizan generalmente a través de la experimentación o juicio de expertos; aunque estos pronóstico cualitativos son muy importantes para realizar estas actividades, el nivel de servicio y de respuesta serían mucho mejor si además se integran modelos cuantitativos.

La organización de la información es muy importante para esta empresa láctea, por su alta variación en demandas y producción, esto exige que tenga una sistematización constante y verídica, para mejorar las bases de toma de decisiones. Se sugiere que la demanda sea ingresada diariamente, evitando efectos atípicos o extremos que puedan afectar la planeación.

El modelo propuesto de optimización permitió asignar las restricciones según las capacidades de la empresa e incluso, presupuesto y mínimas utilidades, de esta forma se tiene un modelo, que además de minimizar los costos, permite flexibilidad, tal como sucede en la realidad con la programación de la producción.

Las propuestas metodológicas planteadas en este documento, pueden de ser empleadas en empresas del mismo sector, e incluso extrapolarse para empresas que quieran o necesiten un apoyo para la planeación de su producción y deseen una reducción en los niveles de inventarios.

BIBLIOGRAFÍA

- Adam, E. E., & Ebert, R. J. (1991). *Administración de la producción y las operaciones: conceptos, modelos y funcionamiento*. Madrid: Pearson Educación.
- Álvarez, R. (1994). *Estadística multivariante y no paramétrica con SPSS: Aplicación a las ciencias de la salud*. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.
- Au, K. F., Choi, T.M., & Yu, Y. (2008). *Fashion retail forecasting by evolutionary neural networks*. Hong Kong: International Journal of Production Economics.
- Bowerman, B. L., & O'Connell, R. T. (2007). *Pronósticos, series de tiempo y regresión: Un enfoque aplicado*. Cengage Learning Latin America.
- Caridad y Ocerín, J. M. (1998). *Econometría: Modelos económicos y series temporales*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Chiu, Y. P. (2003). *Determining the optimal lot size for the finite production model with random defective rate, the rework process, and backlogging*. Taiwan: Engineering Optimization.
- Correa, A., & Gómez, R. (2009). Cadena de Suministro para el sector minero como una estrategia para la productividad. *Boletín Ciencias de la Tierra*.
- Devore, J. L. (2004). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Cengage Learning Editores.
- Doganis, P., Alexandridis, A., Patrinos, P., & Sarimveis, H. (2006). Time series sales forecasting for shelf-life food products based on artificial neural networks and evolutionary computing. *Journal of food Engineering* 75, 196-204.
- Flórez, R., & Fernández, J. M. (2008). *Las Redes Neuronales Artificiales*. España: Netbilo S.L.
- Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2002). *Teoría de Inventarios*. México: McGraw Hill.
- Gutiérrez, V & Vidal, C (2008). Modelos de Gestión de Inventarios en Cadenas de Abastecimiento. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 134 - 149.
- Izar, J. M. (1996). *Fundamentos de investigación de operaciones para administración*. San Luis Potosí: Editorial Universitaria Potosina.
- Medina, S., & García, J. (2005). Predicción de demanda de energía en Colombia mediante un sistema de inferencia difuso neuronal. *Energética* 33, 15-24.
- Montgomery, D. C., Peck, E., & Vining, G. G. (2006). *Introducción al análisis de regresión lineal*. México: CECSA.
- Ramírez, S. (2013). *Comparación de metodologías estadísticas para el pronóstico de demanda de productos de difícil estimación*. Trabajo de grado de Industrial. Medellín: Universidad Pontificia Bolivariana.
- Render, B. (2004). *Principios de administración de operaciones*. Madrid: Pearson Educación.
- Rueda, V. M., Velásquez, J. D., & Franco, C. J. (2011). *AVANCES RECIENTES EN LA PREDICCIÓN DE LA DEMANDA DE ELECTRICIDAD USANDO MODELOS NO LINEALES*. Bogotá D.C.
- Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., & Simchi-Levi, E. (2008). *Designing and Managing the Supply Chain*. California: McGraw-Hill.
- Tabares, H., & Hernandez, J. (Octubre de 2006). *Pronostico puntos críticos de la serie temporal "Consumo de energía eléctrica del sector industrial en la ciudad de Quito" usando algoritmos genéticos*. Recuperado el 4 de Septiembre de 2013, de <http://ingenieria.udea.edu.co/grupos/revista/buscador/mai n.php>
- Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. Arkansas: Pearson Educación.
- Vaklieva-Bancheva, N., Shopova, E., España, A., & Puigjaner, L. (2006). Product portfolio optimization for dairy industry. *International Mediterranean modelling multiconference*, (págs. 100-109). Bcelona.