9. Desarrollo del proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la mediación de software matemático interactivo

Carlos René Bautista Niño
renebautistainfor40@gmail.com

Resumen

El presente proyecto de investigación acción de enfoque cualitativo, tiene como objetivo fortalecer el proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de resolución de problemas geométricos en un entorno de software de matemática interactiva en los estudiantes del grado 4º y 5º de la escuela rural La Chácara del municipio de Santa Bárbara (Santander); quien es hábil al comunicar puede interpretar y expresar situaciones propias de los contextos matemáticos en un lenguaje determinado y específico. Estas habilidades comunicativas en la solución de un problema matemático son acciones relacionadas de manera cognoscitiva que llevan implícitas la propia actividad verbal, tales como audición y expresión oral, resumir, justificar, explicar, argumentar, definir, dialogar, comentar y discutir (Faustino, Del Pozo y Arrocha, 2013). Con esta investigación se pretende proponer una unidad didáctica que promueva el desarrollo de las habilidades propias del proceso de comunicación matemática: justificar, argumentar, identificar e interpretar a través del software de geometría dinámica. Así mismo, diseñar una estrategia metodológica que permita analizar los resultados de la incidencia del software de geometría dinámica en el fortalecimiento del proceso de comunicación matemática. Como estrategia de intervención, se diseñó e implementó una unidad didáctica compuesta de tres secuencias que abordaban el estudio de tres figuras geométricas: el cuadrado, el rectángulo y el rombo. Las actividades de las secuencias se organizaron teniendo en cuenta las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele indagando en cada una las habilidades propias del proceso de comunicación mencionadas anteriormente. La mediación pedagógica a través del uso de la tecnología digital como el software GeoGebra favoreció el abordaje de la enseñanza de la geometría y permitió mejorar el ambiente de aula y el entorno de aprendizaje. Finalmente, se aplicó una prueba final para verificar el desarrollo de las habilidades de representación y según los resultados obtenidos, se evidenció un progreso notable en dichas habilidades y la adquisición e interpretación de los conceptos de las propiedades de los cuadriláteros.

Palabras clave: pensamiento espacial, proceso de comunicación, habilidades comunicativas, software de geometría dinámica, secuencia didáctica.

Abstract

The present research project of action of qualitative approach, aims to strengthen the communication process in teaching and learning of mathematics, through resolution of geometric problems in an interactive mathematics software environment in 4th and 5th grade students of the escuela rural La Chacara the farm of the municipality of Santa Bárbara (Santander); Who is able to communicate, can interpret and express situations specific to mathematical contexts in a specific and specific language. These communicative abilities in the solution of a mathematical problem are cognitively related actions that implies verbal activity such as: listening and speaking, summarizing, justifying, explaining, arguing, defining, dialoguing, commenting and discussing (Del Pozo, 2001). This research intends to propose a didactic unit that promotes the development of the skills of the mathematical communication process: to justify, to argue, to identify and to interpret through the software of dynamic geometry. Also, to design a methodological strategy that allows to analyze the results of the incidence of software of dynamic geometry in the strengthening of the process of mathematical communication.

As an intervention strategy, a didactic unit was designed and implemented with three sequences that deal with the study of three geometric figures: the square, the rectangle and the rhombus. The activities of the sequences were organized taking into account the learning phases of the Van Hiele model investigating in each one the skills of the communication process mentioned above. Pedagogical mediation through the use of digital technology, such as GeoGebra software, favored the teaching of geometry and improved the classroom environment and the learning environment

Degree Project.

** Faculty of Human Sciences. School of Education. Master's in pedagogy. Director: Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal

Introducción

Si bien es cierto que el lenguaje natural nos permite tender puentes socialmente, no es menos cierto que el lenguaje matemático nos permite expresar ideas, comprender expresiones, entender diversas formas de representación o de notación y resolver problemas. Este artículo es fruto de la autorreflexión de la práctica docente y de los adelantos de una investigación sobre el fortalecimiento del proceso comunicativo matemático en un ambiente de geometría dinámica. Esta investigación se realizó con estudiantes de los grados 4º y 5º de primaria de una sede rural de una institución pública del municipio de Santa Bárbara. Se busca fortalecer el proceso de comunicación a través de la resolución de problemas geométricos, teniendo como principal mediación pedagógica el uso de herramientas tecnológicas, más específicamente el software de geometría dinámica GeoGebra. Otro de los propósitos es revaluar la estrategia metodológica y pedagógica docente, dándole a esta tarea un nuevo enfoque. El trabajo de investigación se basa en las siguientes consideraciones:

- Desarrollo del trabajo por procesos, con mediación de actividades concretas para fortalecer el proceso de la comunicación matemática.
- Conseguir que los estudiantes puedan llegar a hacer uso de sus habilidades comunicativas al resolver un problema geométrico.
- Plantear problemas de construcción geométrica, de manera que los participantes puedan plantear argumentos en las justificaciones de ciertos procedimientos.
- Brindar espacios en los que los alumnos puedan escuchar las estrategias de sus pares y expresar las propias en lenguaje matemático, con el fin de convencer a sus pares o controvertir las de otros.
- Usar un software de geometría dinámica, con actividades propias del pensamiento espacial, teniendo en cuenta que en la institución educativa en la que se realizó la investigación hay debilidades en este aspecto (según lo evidencian los resultados de las pruebas Saber), y predomina para los docentes en la orientación de sus clases el trabajo con el pensamiento numérico.

Precisamente, el problema de investigación nace de la necesidad de buscar la superación de las dificultades mostradas por los estudiantes en las pruebas Saber en los años 2014 y 2015, las cuales evidencian debilidad en el proceso comunicativo y en el pensamiento espacial.

En la práctica pedagógica, es decir en el aula, la comunicación se relega ya que muchas veces ganan mayor atención para el docente procesos como formulación y resolución de problemas y el de comparación y ejercitación de procedimientos algorítmicos. El de comunicación debe cobrar la relevancia que tiene para la comprensión de la matemática en la medida en que estimula la capacidad de verbalizar el lenguaje propio de la materia, ayuda a comprender el significado de los símbolos y sirve de apoyo para emplear este lenguaje para representar, razonar y resolver situaciones problemáticas cotidianas. Es un hecho notorio que muchos de los escolares se restringen por no tener un argot adecuado en matemática, lo cual limita y dificulta el proceso de enseñar y aprender la asignatura. Cuando no se es hábil comunicativamente en el uso del idioma matemático (símbolos, diagramas, algoritmos, notaciones, etc.), la dificultad para tener un buen desempeño en la materia está casi asegurada. Para la comprensión y el alcance de la competencia matemática, se hace necesario fortalecer destrezas del proceso de comunicación tales como argumentar, interpretar, explicar y justificar, a través de resolución de problemas en un entorno de software de matemática interactiva, porque se cree que este proceso es clave para superar las dificultades en el aprendizaje de la geometría.

Otro aspecto a tener en cuenta en el planteamiento del problema de investigación es vencer el arraigo del profesorado por enfocar la enseñanza de la asignatura en contenidos y no en procesos. Así, por ejemplo, un contenido específico debe ser conceptualizado desde el punto de vista de la comunicación, la ejercitación, la resolución de problemas, el razonamiento y la modelación. Si se aborda un tema desde una sola mirada empezarán los problemas, y a medida que se avance se arrastrará el óbice de un concepto mal entendido o incompleto, que en el futuro será señalado como un error o un desconocimiento por parte del estudiante y no como un sesgo que se produjo por el enfoque monodireccional dado por el docente al mismo.

Cuando el profesor es consciente y se cuestiona el hecho del por qué sus estudiantes no entienden matemáticas, germinan otras preguntas que apuntan al esclarecimiento de este hecho tales como: ¿me hago entender en clase?, ¿aplico estrategias innovadoras en la práctica pedagógica?, ¿se convierte la clase en un taller para la simple ejercitación de algoritmos? Este espacio de reflexión conlleva a encontrar problemáticas que inciden en la dificultad para aprender matemáticas que van desde situaciones de desmotivación, hasta problemas sociales y/o familiares, etc., pero al final, cuando se aborda la relación en el aula entre docente y estudiante queda una problemática por analizar: la comunicación.

Al abordar la relación docente-estudiante como un acto comunicativo, y a la luz de una autoevaluación de la práctica docente, se descubren situaciones que dan respuestas a las dificultades del aprendizaje de los estudiantes, como las siguientes:

- En el acto comunicativo prevalece mayormente la intervención del docente.
- En la relación docente-estudiante se hablan lenguajes diferentes.
- La matemática aparece como una representación simbólica, carente de valor y significado para el estudiante.

Hay que decir que las matemáticas, a pesar de no ser un lenguaje, han creado uno propio con el que ellas pueden comunicarse, con el que se expresan y representan, se leen y se escriben. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser una tarea acuciosa y cuidadosa para quien quiere ser competente, pues su manejo puede fomentar la discusión frecuente sobre representaciones y simbolizaciones y propiciar el trabajo colectivo.

Quien es hábil al comunicar puede interpretar y expresar situaciones propias de los contextos matemáticos en un lenguaje determinado y específico. Estas habilidades comunicativas en la solución de un problema matemático son acciones relacionadas de manera cognoscitiva que lleva implícita la propia actividad verbal, tales como: audición y expresión oral, resumir, argumentar, definir, dialogar, comentar y discutir.

La habilidad de argumentar es fundamental no solo para fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático, sino para organizar y plantear secuencias, formular conjeturas y corroborarlas, así como establecer conceptos, juicios y razonamientos que den sustento lógico y coherente al proceso o solución encontrada (Zabaleta, 2013).

El fortalecimiento de la habilidad de argumentar trae consigo el desarrollo de la competencia comunicativa, pues cuando un estudiante argumenta, maneja de manera adecuada el lenguaje matemático (Herrera, 2012). Cuando se trata del papel del docente para desarrollar la habilidad de argumentar, el maestro debe contar con suficientes herramientas para aprender a plantear preguntas que requieran argumentaciones u otras actividades escritas u orales (diálogos) que fortalezcan el proceso de comunicación a través de la expresión matemática.

En cuanto a la habilidad de interpretación se tiene en cuenta que implica ciertos procesos de pensamiento, y para el desarrollo de esta habilidad se requiere que cuando el estudiante se enfrente a un problema matemático necesite:

- Determinar de qué trata el problema, haciendo una lectura general del mismo.
- Identificar y definir las variables que intervienen en la situación.
- Valerse de los sistemas de representación para obtener una vía de solución.
- Discriminar el texto informativo del texto imperativo. Generalmente, la estructura de una situación problema está formada por estos dos tipos de textos. El texto informativo es aquel que contiene la información del problema y el texto imperativo es aquel que señala lo que se debe buscar.
- Identificar las relaciones que hay entre las variables involucradas en la situación problema.
- Hacer un esquema, o "traducir" los pasos anteriores en un sistema de representación

La interpretación sigue unos criterios de veracidad, los cuales no implican solo la comprensión de los contextos, sino que se debe dirigir a la situación concreta y reflexionar sobre sus implicaciones y los procesos de pensamiento involucrados con el recuerdo, comprensión, análisis, medición, etc. (Icfes, 2012).

La palabra justificar es un término que presenta un uso idiomático recurrente y aplicado en diversas situaciones. Se refiere al proceso de demostrar una cosa con pruebas, a explicar un accionar o un comportamiento con base en ciertos motivos.

Cuando se sustenta con argumentos matemáticos algún procedimiento, con el fin de lograr adhesión, se está justificando (Pluvinaje, 2011)

La justificación en matemáticas hace referencia a las actividades y procesos mediante los cuales se respalda una afirmación, se manifiesta el porqué de un proceso, se admite o refuta una conclusión por medio de razones relevantes, como la realización de un procedimiento, el planteamiento de una estrategia determinada o la utilización de un contraejemplo para lograr convencimiento o adhesión a sus tesis.

Cuando se hace referencia a la habilidad de explicación se tiene en cuenta que explicar implica hacer claridad acerca de un fenómeno o situación determinada. Matemáticamente, se considera la explicación como la idea primaria de la cual se desprenden la prueba y la demostración (Balacheff, 1982). La explicación también es un medio para entrelazar o unir ideas, dando una o más razones para la comprensión de un dato, un fenómeno o un resultado (Duval, 1999).

Para el concilio nacional de profesores de matemática NCTM la habilidad de explicar se considera como dar claridad a las respuestas de un determinado procedimiento, empleando un lenguaje cada vez más riguroso en la medida del avance del nivel escolar en el que los estudiantes se encuentren.

Durante el desarrollo de la investigación, las actividades propuestas para evidenciar la habilidad de explicación procuraron que los estudiantes expresaran de manera oral y escrita (utilizando un lenguaje matemático) las estrategias, predicciones, conjeturas y resultados al enfrentarse a la resolución de un problema matemático.

La investigación giró en torno al fortalecimiento de las habilidades de interpretar, argumentar, justificar y explicar. Estas habilidades matemáticas son reconocidas como aquellas capacidades que se constituyen durante la realización de las acciones y operaciones que tienen un carácter fundamentalmente matemático. Se pretendió fortalecer con el desarrollo de estas habilidades la capacidad del estudiante (al abordar una actividad matemática) de indagar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, hacer distintos tipos de representación, emplear estrategias de trabajo, establecer conjeturas, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos. Las habilidades matemáticas fortalecidas evidencian el nivel de dominio conceptual de un estudiante, la capacidad de buscar alternativas de solución a un problema matemático en cualquier contexto, mostrando capacidad para comunicarse matemáticamente.

En correspondencia con los enfoques didácticos procesuales, autoridades en la materia, manifiestan que “La comunicación para el proceso de aprendizaje de las matemáticas es un componente esencial, porque a través de la comunicación, los estudiantes reflexionan, clarifican y amplían sus ideas y la comprensión sobre las relaciones y razonamientos matemáticos” (Ministry of Education Ontario, 2005)

La comunicación matemática no es un proceso aislado, más bien está ligado a otros como plantear y resolver problemas, en donde se estructuran actividades secuenciales con base en preguntas, respuestas y razones; formalizar representaciones matemáticas a través de la reflexión, como herramienta para resolverlos; y se dan debates necesarios para el proceso de mejora con base en argumentaciones.

Análisis de los resultados

Las secuencias didácticas se planearon para que los estudiantes reconocieran las características generales y propiedades de los cuadriláteros, a través de la resolución de un problema geométrico, buscando fortalecer las habilidades de explicación, justificación, argumentación e interpretación.

- Hay evidentes debilidades en el lenguaje natural utilizado por los estudiantes (omisión de fonemas, falta de coherencia y cohesión en sus expresiones, entre otros) que les impiden comunicar de manera apropiada sus ideas.
- Si bien es cierto que todos los estudiantes utilizan en sus argumentos un lenguaje matemático para referirse a los elementos que conforman un cuadrilátero (vértices, segmentos de recta, figura cerrada, etcétera), estos conceptos no son manejados con claridad, puesto que

mencionan que estas figuras están formadas por rectas, por segmentos colineales y uno de ellos menciona que los cuadriláteros tienen los lados de la misma longitud, consideraciones que evidencian confusión y desconocimiento de propiedades elementales de esta figura.

- Todos los estudiantes coinciden en señalar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero da como resultado 360°, sin embargo, la habilidad de explicar requiere que el estudiante presente los métodos que ha empleado en dar solución al problema o exponer ante los demás sus respuestas y decir por qué las obtuvieron. Se demuestra en este caso que los estudiantes no dieron ninguna explicación, sino más bien, se limitaron a la expresión del resultado de una adición. A pesar de no ser una situación compleja, la habilidad de explicación requiere de una rigurosidad matemática que a todas luces escasea.
- Los estudiantes acertaron en considerar el cuadrilátero que construyeron como un polígono. Sin embargo, al momento de examinar la habilidad de justificar, se evidencian debilidades, por cuanto al presentar sus razones o argumentos para aceptar o rechazar las tesis planteadas, estos no se encuentran concatenados, no tienen un hilo matemático conductor que los líe y el estudiante no establece relaciones de conexidad entre los elementos de las figuras geométricas a las que se hace referencia.
- Ninguno de los estudiantes manifiesta de manera explícita la conclusión a la que llega luego de medir los ángulos interiores de los tres polígonos presentados. Al analizar la habilidad de justificar, encontramos que hay debilidades en cada uno de los estudiantes en este campo, por cuanto la validez y fuerza de sus razones son débiles, su lenguaje natural no es claro y sus argumentos son fácilmente debatibles. No se establecen relaciones de conexidad entre ellos (argumentos) y, sometidos a validez, se encuentra que las razones que manifiestan no resisten la réplica. Así mismo, es evidente que ninguno de los estudiantes presentó dentro de sus argumentos los métodos que emplearon para dar solución al problema.
- En lo que atañe a la habilidad de justificar, se evidencian debilidades, por cuanto al presentar sus razones o argumentos para aceptar o rechazar la tesis planteada, estos no se encuentran concatenados, no tiene un hilo matemático conductor que los líe y el estudiante no establece relaciones de conexidad entre los elementos de las figuras geométricas a las que se hace referencia.
- Los estudiantes tienen más dificultades comunicativas para escribir que para expresar sus argumentos de manera verbal.
- Los argumentos que presentan los estudiantes apenas son nocionales. Se apoyan en representaciones corporales para afirmar esa razón.

Dado que los resultados de las secuencias muestran la misma tendencia, a continuación se muestra la secuencia didáctica de construcción del rombo, para evidenciar la manera del planteamiento de la secuencia y el análisis hecho en cada una de las fases de la misma.

El rombo y sus propiedades

Esta secuencia didáctica se planeó para que los estudiantes reconocieran las características generales y propiedades del rombo, a través de la resolución de un problema geométrico, buscando fortalecer las habilidades del proceso de comunicación matemática.

Fase de información:

Actividad 1

En esta fase, el estudiante procede a tomar contacto con el objeto de estudio. Para ello, se les dio la orientación a los estudiantes de utilizar el software de geometría para construir de manera inscrita un rombo a partir de un rectángulo. Luego de que el estudiante determine la conservación de las propiedades del rectángulo, procede a la construcción del rombo a través del uso de la herramienta punto medio para cada uno de los segmentos que conforman el polígono inicial. Con esta actividad se pretende identificar los siguientes conocimientos previos:

- Punto medio.
- Mediatriz de un segmento.
- Bisectriz de un ángulo.
- Lados congruentes

Los objetivos de esta actividad propuesta buscaban que el estudiante pudiese identificar, comparar y analizar atributos generales del rombo, además de fortalecer el vocabulario para describirlo, potenciando así las habilidades de interpretación, justificación y argumentación, resolviendo preguntas sencillas.

Posteriormente, los estudiantes respondieron unas preguntas con el objeto de indagar su habilidad de explicación, planteadas así:

Tabla 1. ¿De qué manera puedo construir el rombo a partir del rectángulo?

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Expresión en lenguaje natural y matemático de la comprensión del problema.	EA	“traso un segmeto, luego utilizo una perpendicular, luego una paralela y un bisectriz” (sic)	Incorrecto
	EB	“con ayuda de la paralela la perpendicular el segmento la prueba del arrastre” (sic)	Incorrecto
	EC	“lo primero que hice fue construir un rectangulo le medi los angulos y huse polígono y luego trase la bisectris” (sic)	Incorrecto
	ED	“utilise la erramienta punto medio luego utilize la erramienta segmento para unir los puntos que hize luego al unir los puntos hise un rombo y borre el rectangulo” (sic)	Incompleto
	EE	“utilise la recta para trasar los lados del rombo y luego use el polígono para rellenar y ise la prueba del arrastre” (sic)	Incorrecto

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. ¿Qué ocurre con las longitudes de los lados del rombo cuando efectúas la prueba del arrastre?

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Expresión en lenguaje natural y matemático de la comprensión del problema.	EA	"Que cuando le hacemos la prueva del arrastre no cambia para nada y no cambia se mantiene para nada" (sic)	Incorrecto
	EB	"ocurre que el rombo se mantiene igual y no diferente de medida" (sic)	Incorrecto
	EC	"se Agrandan, se engordan se enflacan y se enpequeñan cuando le ago la prueba del arrastre para eso. Canbian, se mantienen iguales los angulos pero cuando le trasa las diagonales y le miden el angulo no cambian el angulo cuando ase la prueba del arrastre." (sic)	Incompleto
	ED	"Las medidas de los lados al aserle la prueva del arrastre mantienen las medidas iguales" (sic)	Correcto
	EE	"se mantiene el cuadrado y no canbia cuando hago la prueba del arrastre" (sic)	Incorrecto

Fuente: elaboración propia.

Las explicaciones dadas por los estudiantes permiten llegar a la siguiente conclusión:

- Los estudiantes presentan dificultad para expresarse a través del lenguaje natural afectando por ende su habilidad de explicar, por cuanto esta se da mediante unas expresiones que no denotan un carácter descriptivo. Su discurso no es claro, ni el proceso de construcción de conocimiento matemático es siquiera perceptible. En esta habilidad no se requiere el uso de un lenguaje matemático riguroso, sin embargo, vemos que, por una parte, el estudiante utiliza términos geométricos para comunicar sus predicciones (sin que sean correctamente empleados o correctamente aprehendidos) y por la otra, los evidentes vicios del lenguaje que presentan todos ellos, sin duda dificultan el flujo normal de su comunicación matemática.

Fase de orientación dirigida

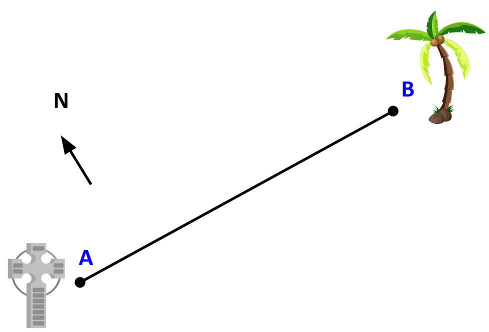
Se presentó a los estudiantes un problema geométrico. El problema propuesto habría de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben apropiar acerca del rombo. El problema planteado es el siguiente:

"En una llanura, un hombre enterró un tesoro. En el plano que dejó, solamente está señalada una cruz y una palmera. Dejó escrito que la cruz (punto A) y la palmera (punto B) son los puntos extremos de la diagonal mayor de un **rombo**.

A estos vértices los llamó vértice 1 y vértice 2 respectivamente. Además, indicaba que el vértice número 3 se hallaba hacia el norte, a 4 m del punto medio de la diagonal mayor como se ve en la figura. Del cuarto vértice sabemos que es el que alberga el tesoro. ¿Dónde habría que cavar para encontrarlo?

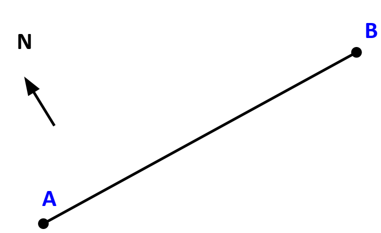
Localiza este sitio, teniendo en cuenta que para ello es necesario que tengas muy claras las propiedades del rombo antes de enfrentarte a este problema.

Imagen 1. Localización por medio de trazos de rombo mediante la figura expuesta.



En este caso, los estudiantes observaron en la pantalla un segmento AB que corresponde a la diagonal mayor de un rombo y cuyos puntos extremos resultan ser vértices de la figura en mención. Se esperaba que utilizaran la herramienta compás para hacer la traslación del segmento de longitud “4 m” (4 metros en el mapa del tesoro) para hallar la ubicación del tercer vértice de la figura y utilice otra estrategia para hallar el cuarto vértice del rombo. Debe comprobar que su construcción soporta la prueba del arrastre, verificando que las propiedades de este cuadrilátero se cumplen.

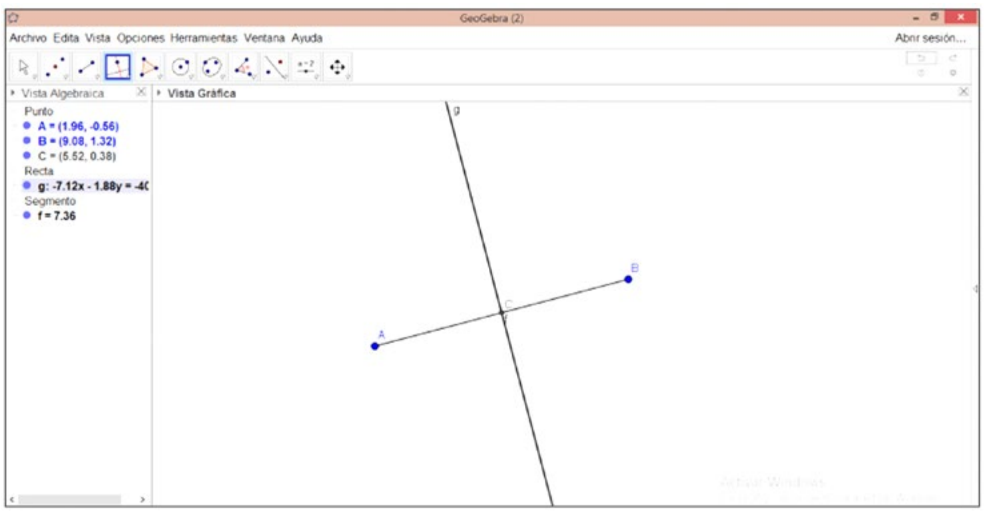
Imagen 2. Segmento AB que corresponde a la diagonal mayor de un rombo y cuyos puntos extremos



Para iniciar la resolución del problema se pidió que hicieran varias veces la lectura del mismo y que tuvieran en cuenta la ubicación del punto norte. A continuación, cada estudiante puso en marcha su estrategia, sin dar mayores indicaciones del trabajo a realizar por parte del docente. El planteamiento de esta actividad es pertinente porque hace que los estudiantes inicialmente a partir de la observación planteen conjeturas, y a medida que avanzaba la actividad, se centraran en las propiedades del rombo para hacer su construcción y hallar finalmente el tesoro. La diagonal mayor del rombo que es el segmento que se presenta inicialmente la encontraron en una posición oblicua. El reto para el estudiante consistió en encontrar el punto donde se halla el tesoro (cuarto vértice), pero solo llegará a él si su construcción cumple con las propiedades del rombo.

Imagen 3. Utilización de la herramienta punto medio o centro por estudiante

D: Docente ED: Estudiante D

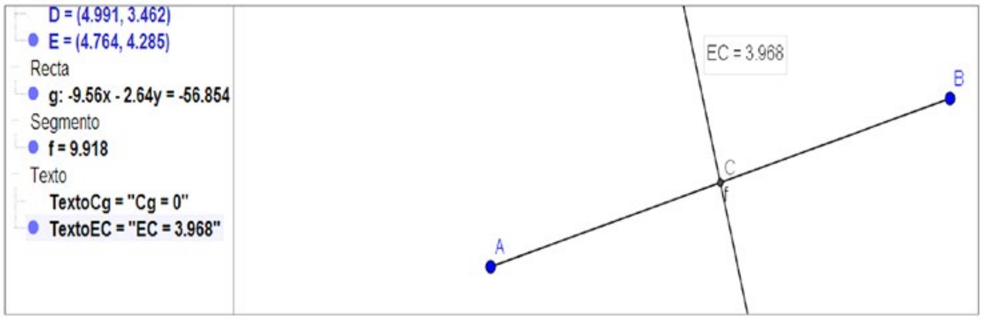


D: El tercer vértice está cuatro metros al norte como lo indica la flecha, ¿cómo haces para garantizar esa medida?

ED: "Pues pongo un punto y lo muevo hasta que sea cuatro"

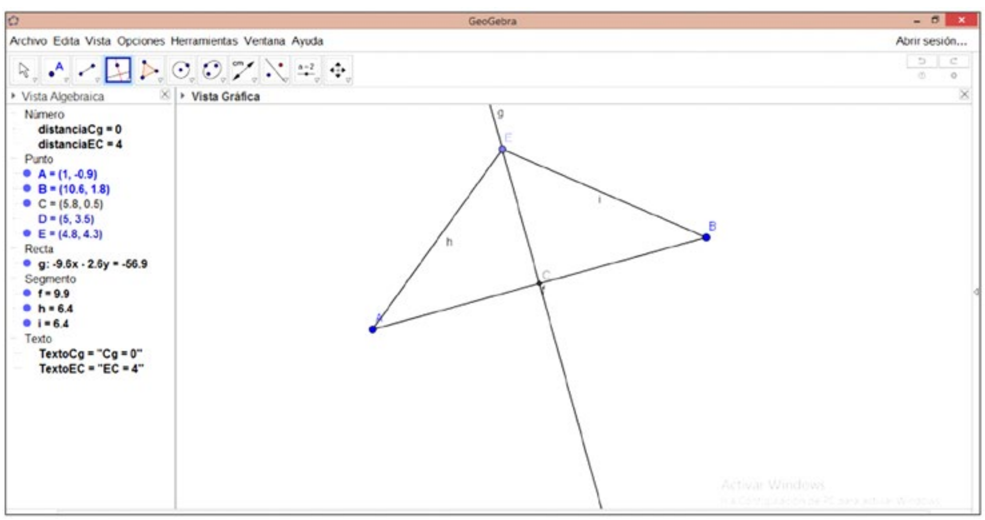
C: El estudiante seleccionó la herramienta punto y lo ubicó en la perpendicular trazada. Luego usó la herramienta "elige y mueve", transportando ese punto con el puntero del mouse a lo largo de la recta perpendicular. Esta situación fue dispendiosa para el estudiante porque el redondeo estaba a tres cifras decimales. Se acercaba a la cantidad, pero le costó mucho trabajo ubicar el punto a la medida que se exigía como se ve en la gráfica:

Imagen 4. Ubicación de punto a la medida que se exigía como se ve en la gráfica



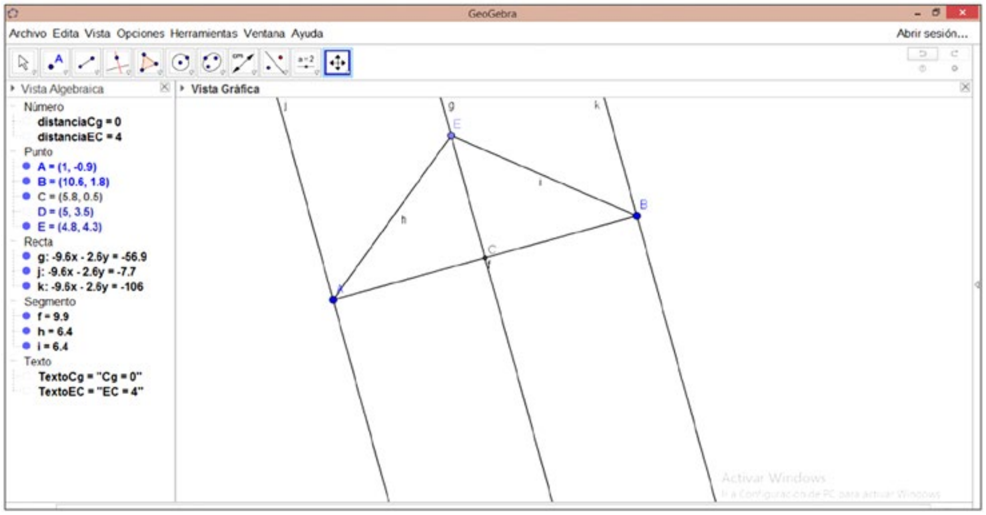
D: Ahora que has conseguido ubicar el tercer vértice, ¿cómo finalizas la construcción?
ED: "Ahora uno con segmento los puntos"

Imagen 5. Trazo de triángulo



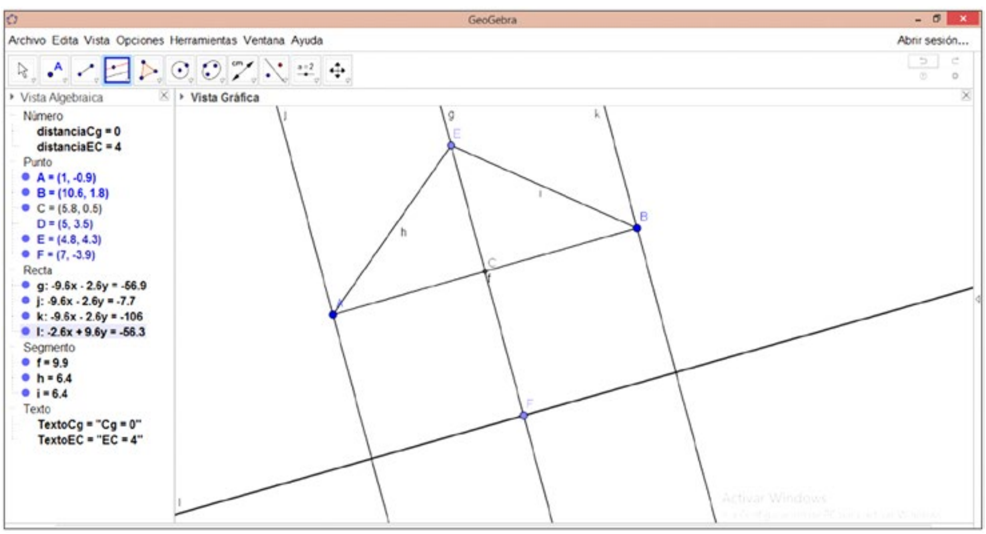
D: Pero lo que se ve es un triángulo, ¿cómo terminas de construir el rombo?
ED: "Trazo una perpendicular a la diagonal mayor y ahí salen los lados que faltan"

Imagen 6. Trazo una perpendicular a la diagonal mayor y ahí salen los lados que faltan



ED: "Y luego la paralela a la otra línea y ahí se echa el polígono"

Imagen 7. Paralela a la otra línea y ahí se arroja el polígono



D: El estudiante trazó una paralela a la diagonal mayor y ubicó un punto de corte sobre la perpendicular que pasa por el punto medio de manera aleatoria, sin percatarse que de esta manera no solo no garantiza la equidistancia entre el punto medio de la diagonal mayor y el tercer vértice, sino que la figura hecha no cumple con las propiedades del rombo, como por ejemplo la congruencia de sus lados.

Estudiante realizó trazo de una paralela a la diagonal mayor y ubicó un punto de corte sobre la perpendicular que pasa por el punto medio de manera aleatoria.

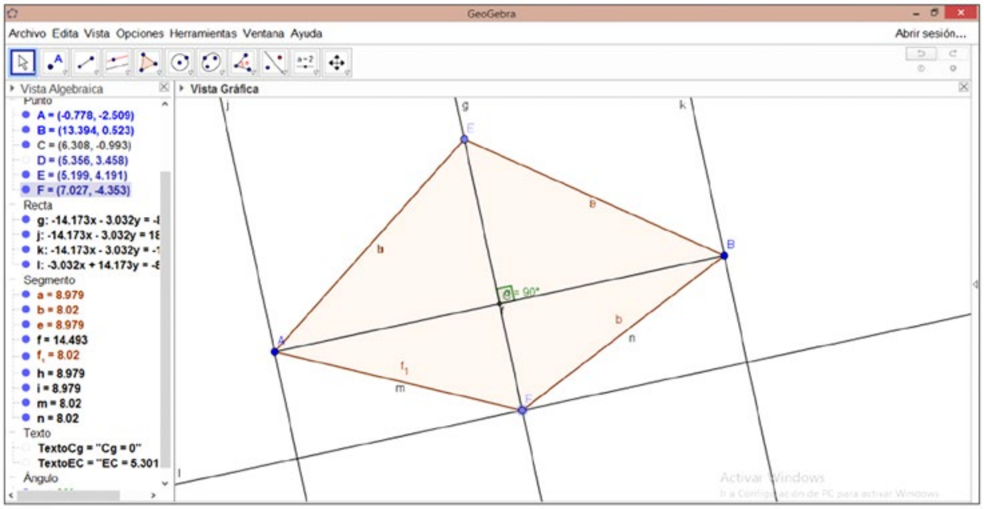


Tabla 3. ¿De qué manera puede encontrar el tercer vértice del rombo? Explique su respuesta.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Expresión en lenguaje natural y matemático de la comprensión del problema.	EA	"Yo le traze a una perpendicular mayor y a una que pasara por el punto medio luego hise un segmento hasta que medio 4 y con el compas lleve la medida hasta ubicarlo" (sic)	Incompleto
	EB	"le trace una perpendicular a la diagonal mayor del punto medio del rombo" (sic)	Incompleto
	EC	"use el compas y decia que midiera 4 cm para arriba entonces yo trase una perpendicular a la diagonal mayor que pasara por el punto medio y lo hice que pasara por el punto medio " (sic)	Incorrecto
	ED	"yo al trasar una perpendicular a la diagonal mayor trase un punto y lo movi hasta que me dio 4 y pude encontrarlo"	Incompleto
	EE	"con la regla la pongo y trazo la perpendicular hasta que me de 4 que pase por la mitad" (sic)	Incorrecto

Fuente: elaboración propia.

Las explicaciones dadas por los estudiantes para la construcción del rombo, y los procesos presentados para dar respuesta, evidencian que para los estudiantes fue bastante dispendioso e inconveniente encontrar el tercer vértice, no tanto por la ubicación, sino por la longitud que hay entre en el punto medio de la diagonal mayor y el vértice en mención. Las explicaciones que dan los estudiantes no reflejan un carácter descriptivo del proceso, más bien, son el reflejo de ideas sin concatenar, y no reflejan comunicativamente cómo llegaron a encontrar la solución del problema planteado.

Tabla 4. ¿Pueden las diagonales de un rombo ser no perpendiculares? ¿Por qué? Presenta tus argumentos.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Razona los criterios para dar solución a una situación problema partiendo de hechos o datos.	EA	"no pueden ser perpendiculares porque si fueran desiguales no serían perpendiculares " (sic)	Incorrecto
	EB	"no porque los lado son iguales y no son diferentes a los del rombo" (sic)	Incorrecto
	EC	"no porque los lados del rombo son iguales. Si las diagonales no son perpendiculares la figura no es un rombo " (sic)	Correcto
	ED	"No porque si la longitud de las diagonales estuvieran desiguales el polígono no seria un rombo"	Incorrecto
	EE	"las diagonales deben ser perpendiculares porque esas son las diagonales del rombo" ((sic)	Incompleto

Fuente: elaboración propia.

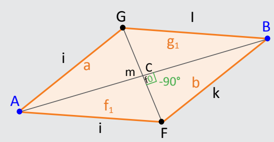
Al analizar las razones presentadas por los estudiantes, podemos concluir que hay una evidente debilidad en argumentar por cuanto:

- Su capacidad de expresión de tipo verbal para mostrarse a favor o en contra de la premisa planteada es muy limitada, ya que no emplea para ello modelos, contraejemplos, razonamientos válidos o propuestas concretas que persuadan o convenzan de su afirmación.
- Al someter sus argumentos a un examen de aceptabilidad, se encuentra que estos no son pertinentes para ser aceptados, ya que son fácilmente rebatibles con un contraejemplo o con la exposición de una razón consistente, por ejemplo, el EB de cuya idea se puede inferir que tanto la longitud de las diagonales como los lados del rombo son congruentes (como el cuadrado), sin embargo, es claro que en un rombo se conserva la congruencia de sus lados, mas no así las de sus diagonales, cuya propiedad preponderante es que se mantengan perpendiculares en una construcción geométrica.
- Las razones expuestas por los estudiantes no presentan criterios de validez, bien sea porque son inverosímiles, o son poco convincentes o totalmente erradas, como el caso del estudiante A, quien de entrada afirma que las diagonales de un rombo "no pueden ser perpendicu-

lares”, afirmación totalmente falsa que no corresponde a una de las propiedades fundamentales en el estudio de esta clase de paralelogramos.

Tabla 5. Posteriormente los estudiantes completarán la siguiente información.

ROMBO



CATEGORÍA	ESTUDIANTE	¿Se cortan siempre las diagonales?	¿Son siempre iguales las diagonales?	¿Son siempre perpendiculares las diagonales?	SUBCATEGORÍA
Infiere información, entre sistemas de representación	**EA**	Sí	No siempre	Sí	Correcto
	EB	Sí	No	Sí	Correcto
	EC	Sí	No	No	Incompleto
	ED	Sí	No	Sí	Correcto
	EE	Sí	No	Sí	Correcto

Fuente: elaboración propia.

Se indagó en los estudiantes la habilidad de interpretar, al extractar información a partir de una representación gráfica. Se pidió a los estudiantes responder acerca del corte, longitud y perpendicularidad de las diagonales del rombo. Los resultados muestran que uno solo de los estudiantes (EC) tuvo la falla de reconocer la perpendicularidad permanente de las diagonales de la figura. Los demás seguramente apoyados en la imagen visual presentada contestaron correctamente los cuestionamientos.

Fase de explicitación

Los estudiantes expresaron de manera verbal los resultados obtenidos al resolver el problema, intercambiaron sus experiencias y discutieron sobre ellas con el profesor y con los demás estudiantes, con el fin de llegar a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afianzar el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Los estudiantes se vieron en la necesidad de utilizar el vocabulario adecuado (aunque les cuesta muchas dificultades) para describir la construcción sobre la que han trabajado. El tipo de actividad que se realizó en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolver el problema, elementos, propiedades y relaciones que se han observado o utilizado.

Se evidencia que a pesar de que la experiencia de interactuar con el software les debe “obligar” a los estudiantes a utilizar un lenguaje matemático, para reconocer ciertas propiedades de las figuras geométricas que construyen, los estudiantes aún persisten en utilizar términos castizos dándole el carácter de términos matemáticos:

Términos castizos utilizados por los estudiantes

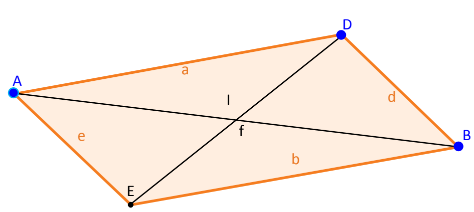
TÉRMINOS O EXPRESIONES CASTIZAS	TÉRMINO MATEMÁTICO ADECUADO
Bolita	Circunferencia
Puntico	Centro de la circunferencia
Me llevé la medida	Trasladar una longitud
La línea que me dieron	El segmento de recta dado
Hice una línea	Construí un segmento de recta

En este proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, cuesta mucho hacer que el lenguaje verbal, escrito y la interpretación de sistemas de representación del estudiante cambie. Es claro que el estudiante ha de hacer uso de términos y expresiones comunes y corrientes en su ambiente social, pero para participar en un proceso comunicativo matemático en el contexto escolar, surge la necesidad (u obligación) de ejercitarse en el uso e interpretación de un nuevo lenguaje semiótico que abarca vocablos y/o locuciones, que estarán vinculados con el aprendizaje de la escritura de nuevos sistemas de representación, o con la correcta interpretación de un sistema (gráfico o algebraico) o con el hecho de expresar con absoluta claridad su pensamiento matemático. Las habilidades comunicativas, como lo expresa Duval (1999), “son indispensables tanto para la designación de los objetos matemáticos o la comunicación, como para el trabajo con dichos objetos”. Podemos concluir que los estudiantes continúan dándole prelación al uso de su lenguaje natural, dándole el carácter de término matemático a los vocablos que usan en su cotidianidad, como lo expuesto en la tabla anterior.

Fase de orientación libre:

Observa atentamente la siguiente figura

Actividad propuesta por parte del docente



Esta actividad consistente en la presentación de un romboide se propuso para que determinaran si se trata de un rombo, a través de la comprobación de sus propiedades.

Tabla 6. La figura presentada es un rombo? ¿Por qué?

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Infiere información, entre sistemas de representación	EA	"La figura es un rombo porque al aserle la prueva del arrastre no se deforma en otra" (sic)	Incorrecto
	EB	"no porque cuando le ago la prueba del arrastre se va a ser un rectangulo" (sic)	Incompleto
	EC	"no porque los lados del rombo son iguales y los lados de esta figura no son iguales"	Incompleto
	ED	"No porque las diagonales no son de 90º"	Correcto
	EE	"Si es un rombo porque conserva su figura cuando se ace la prueva del arrastre" (sic)	Incorrecto

Fuente: elaboración propia.

Las justificaciones dadas por los estudiantes reflejan que están considerando la propiedad de la congruencia de los lados del rombo para emitirlas. Se evidencia que los estudiantes en general son hábiles para la interpretación de una representación gráfica, infiriendo información de la misma.

Los estudiantes acertaron en considerar el cuadrilátero que construyeron como un polígono. Sin embargo, al momento de examinar la habilidad de justificar, se evidencian debilidades, por cuanto al presentar sus razones o argumentos para aceptar o rechazar la tesis planteada, estos no se encuentran concatenados, no tienen un hilo matemático conductor que los líe y el estudiante no establece relaciones de conexidad entre los elementos de las figuras geométricas a las que se hace referencia.

Fase de integración

En esta fase los estudiantes establecen una visión global de lo aprendido sobre el tema, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. La actividad propuesta para esta fase es la de completar la información y justificar si la afirmación es falsa.

Tabla 7. Fase de integración

E: Estudiante V: Verdadero F: Falso

E	CATEGORÍA	AFIRMACIÓN	V	F	JUSTIFICACIÓN	SUBCATEGORÍA
EA	Aceptación o rechazo de una tesis por medio de razones relevantes	Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio.	X			Correcto
EB			X			Correcto
EC			X			Correcto
ED			X			Correcto
EE			X			Correcto
EA		ales de un rombo son perpendiculares entre sí.	X			Correcto
EB			X			Correcto
EC			X			Correcto
ED			X			Correcto
EE			X			Correcto
EA		Los lados opuestos del rombo no son congruentes		X	"todos los lados deven ser congruentes sino no es un rombo" (Sic)	Incompleto
EB				X	"los lados del rombo son los 4 de la misma medida"	Incompleto
EC				X	"no por que todos miden lo mismo"	Incompleto
ED				X	"si deben ser todos congruentes porque si no entonces el rombo no sería esa figura"	Incompleto
E E				X	"Si se mueve la figura los lados deben ser de igual medida"	Incompleto

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes aprehendieron algunas de las propiedades del rombo como la perpendicularidad de sus diagonales y la congruencia de los lados que lo conforman. Sin embargo, al momento de examinar la habilidad de justificar, se evidencian debilidades, por cuanto al presentar sus razones o argumentos para rechazar la tesis planteada, se limitan a negar la tesis propuesta, sin sustentar con otras propuestas, o contraejemplos el desacuerdo con la tesis planteada.

Conclusiones

Si bien es cierto que el lenguaje natural nos permite comunicarnos socialmente, no es menos cierto que el lenguaje matemático nos permite expresar ideas, comprender expresiones, entender diversas formas de representación o de notación y resolver problemas.

Una de las conclusiones relevantes de este proceso investigativo es el hecho de detectar que en el aprendizaje de las matemáticas influye notablemente el discurso semiótico propio del área. La manera de construir conocimiento con el estudiante también se afecta, pues muchas veces no son los conceptos los incomprensibles, sino la manera en que estos llegan al estudiante a través del “idioma” utilizado por el profesor.

Precisamente uno de los impactos que se esperaba de la propuesta era que el profesor al revisar su práctica se viera en la necesidad de convertirse en un comunicador, tarea que no se consigue a corto plazo, sino en la medida en que este profundice en su conocimiento disciplinar, y oriente su práctica tendiendo a fortalecer este proceso. Amén de los resultados obtenidos, debe destacarse que, en el caso del docente investigador, se cumple el propósito de valorar la importancia que tiene el uso de una jerga matemática adecuada para enseñar esta asignatura.

Es por ello que se pretendió fortalecer en los estudiantes su competencia comunicativa a través de las actividades de la propuesta de investigación. El diseño de cada una de las secuencias didácticas cumplió con el propósito de fortalecer las habilidades del proceso de comunicación como son la argumentación, explicación, justificación e interpretación basadas en el enfoque de resolución de problemas.

Precisamente, al observar los resultados obtenidos en cada una de las secuencias, se evidencian serias fallas en la expresión de los estudiantes, incluso en su lenguaje natural, como por ejemplo el uso de barbarismos, la omisión de fonemas, disgrafia, que le impiden expresar cualquier idea con facilidad.

Cuando hacemos referencia a las habilidades propias del proceso de comunicación debe decirse que se encontraron notables fallas en la mayoría de los estudiantes. Entre ellas tenemos que los argumentos, razones y explicaciones dadas por ellos no evidencian conocimiento matemático consolidado, además de no ser de naturaleza deductiva. Es evidente que los argumentos expuestos por ellos no se han hecho con palabras claras o ejemplos para que se haga perceptible el procedimiento de resolución de un problema.

Al ser sometidos los argumentos, las razones, las justificaciones y las explicaciones propias posteriores a la resolución de un problema matemático, se encuentra que estos no son pertinentes para ser aceptados, ya que son fácilmente rebatibles con un contraejemplo o con la exposición de una razón consistente.

Se pudo evidenciar que los estudiantes presentan dificultades para llevar a cabo la conversión del lenguaje natural al lenguaje matemático o de una representación verbal a una representación gráfica.

Gracias a las dificultades detectadas se pudo establecer la importancia de enfocar la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo de los procesos y no centrar el interés en los contenidos. Estos, vistos como un conjunto de saberes que deben ser aprehendidos y dominados, se pueden considerar como una valiosa excusa para el desarrollo de habilidades y aprendizajes.

Por último, cabe destacar que la mediación del software de geometría dinámica repercutió notablemente en la manera de abordar el estudio de la geometría. La interacción de los estudiantes con sus construcciones geométricas favorecieron los ambientes de aprendizaje y el gusto de los estudiantes por la asignatura. El programa informático permite discriminar de manera clara las características de un dibujo a las de una construcción geométrica, pudiendo verificar las propiedades de una figura a través de la prueba del arrastre.

Finalmente es importante señalar que, en cualquier campo de la enseñanza de las matemáticas, se deben planificar y ejecutar actividades proclives al fortalecimiento de las habilidades propias del proceso de comunicación, procurando cultivar aun desde los primeros grados de escolaridad las habilidades de comunicación, incentivando particularmente el uso del lenguaje matemático para formar estudiantes matemáticamente competentes.

Referencias

Balacheff, N. (1982). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.

Duval, R. *Argumentar, demostrar, explicar ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México. Editorial iberoamericana, 1999.

Faustino, A.; Del Pozo, E; y Arrocha, O. (2009) *Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática*. Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para Eumed

Niño, V. (2005). Competencias en la comunicación. Hacia las prácticas del discurso.

Pluvinaje, B. (2011). Revista Educación y Pedagogía.

Zabaleta, E. (2013). Innovación educativa. Guía de proyectos de innovación. Primera Edición. Cusco