

**Las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes del grado
novenio (9°) al hacer uso del mediador Argonaut/Digalo**

Luz Helena Caraballo Martínez

Universidad Pontificia Bolivariana

Escuela de Educación y Pedagogía

Facultad de Educación

Medellín

2014

**Las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes del grado
novenio (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo**

Luz Helena Caraballo Martínez

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación

Asesor:

John Henry Durango Urrego

Universidad Pontificia Bolivariana

Escuela de Educación y Pedagogía

Facultad de Educación

Medellín

2014

Nota de Aceptación

Firma
Nombre
Presidente del jurado

Firma
Nombre
Presidente del jurado

Firma
Nombre
Presidente del jurado

Medellín, diciembre 15 de 2014

AGRADECIMIENTOS

Principalmente a Dios todo poderoso que me dio salud y los medios necesarios para realizar este proceso investigativo.

A mis familiares que con cariño me impulsan a realizar estudios superiores.

A mi asesor John Henry Durango Urrego por su paciencia, dedicación y brindarme sus conocimientos en este campo investigativo.

A mis queridos estudiantes de la Institución Educativa. Maestro Arenas que participaron en esta investigación, ya que sin ellos no hubiera sido posible desarrollarla.

A todos aquellos docentes y compañeros de la universidad Pontificia Bolivariana (Medellín-Colombia) que participaron en la Maestría en Educación énfasis: Ambientes de Aprendizaje Mediados por TIC-cohorte 6, por las experiencias vividas durante el desarrollo de esta, las enseñanzas, los aprendizajes y el camino recorrido juntos.

Tabla de contenido

RESUMEN	9
ABSTRACT	10
INTRODUCCIÓN	1
1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	8
1.1 Justificación	8
1.2 Planteamiento del problema.....	13
1.3 Pregunta de investigación	17
1.4 Objetivos	18
1.4.1 Objetivo General	18
1.4.2 Objetivos Específicos	18
2. MARCO DE REFERENCIA.....	18
2.1 Estado de la Cuestión	19
2.1.1 Contexto internacional.....	23
2.1.2 Contexto Nacional	34
2.1.3 Contexto Local.	38
2.1.4 Normas y proyectos gubernamentales en matemáticas	39
2.2 Referentes Conceptuales	42
2.2.1 La mediación.....	44
2.2.1.1 Mediación pedagógica.....	45
2.2.1.2 Mediación Tecnológica.....	45
2.2.2 Ambientes virtuales de aprendizaje	46
2.2.3 El aprendizaje mediado por TIC en matemáticas	47
2.2.4 El aprendizaje sociocultural.....	47
2.2.5 El aprendizaje colaborativo	48
2.2.6 El aprendizaje colaborativo mediado por ordenador CSCL	49
2.2.7 La argumentación.....	49
2.2.7.1 La argumentación en matemáticas en ambientes virtuales de aprendizaje	53
2.2.7.2 La argumentación en matemáticas.....	54
3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.....	55

3.1	Tipo de investigación y aproximación metodológica	55
3.2	Enfoque metodológico.....	57
3.2.1	Supuesto ontológico	58
3.2.2	Supuesto gnoseológico	58
3.3	Método: Estudio de caso	59
3.4	Escenario y contexto investigativo	61
3.5	Participantes de la investigación.....	62
3.6	Técnicas de investigación.....	64
3.6.1	La observación	64
3.6.2	La Entrevista	65
3.7	Desarrollo y fases de la investigación.....	66
3.7.1	Fase 1: Motivación y convocatoria de los participantes	66
3.7.2	Fase 2: Consentimientos informados.....	67
3.7.3	Fase 3: Instalación y Uso de la Herramienta Argunaut	68
3.7.4	Fase 4: Intervención de la propuesta “Tareas Matemáticas”	73
3.8	Episodios.....	74
3.8.1	Episodio 1: Categoría “razonamiento inductivo”	74
3.8.2	Episodio 2: Categoría “razonamiento deductivo”	76
3.8.3	Episodio 3: Categoría “razonamiento abductivo”	77
4.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	77
4.1	El caso de los Memories.....	79
4.1.1	Categoría razonamiento inductivo	81
4.1.2	Categoría razonamiento deductivo	91
4.1.3	Categoría razonamiento abductivo	94
4.2	El caso de los Omegas.....	100
4.2.1	Categoría razonamiento inductivo	101
4.2.2	Categoría razonamiento deductivo	109
4.2.3	Categoría razonamiento abductivo	116
5.	CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN	121
6.	RECOMENDACIONES DE LA INVESTIGACIÓN	123
7.	REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS.....	125
8.	ANEXOS	134

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Resultado prueba SABER de noveno grado en matemáticas. (2012)	15
Ilustración 2. Resultados olimpiadas Medellinenses del conocimiento. (2012).....	16
Ilustración 3. Pregunta de investigación.....	17
Ilustración 4. Investigaciones en razonamientos matemáticos	22
Ilustración 5. Factores de la argumentación	33
Ilustración 6. Mapa de conceptos	43
Ilustración 7. Esquema de Toulmin	52
Ilustración 8. Portafolio	69
Ilustración 9. Mapa de episodios.....	70
Ilustración 10. Ontologías	71
Ilustración 11. Enunciado razonamiento inductivo	75
Ilustración 12. Enunciado razonamiento deductivo	76
Ilustración 13. Primer episodio caso Memories.....	87
Ilustración 14. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Memories.....	90
Ilustración 15. Tercer episodio caso Memories	97
Ilustración 16. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Memories.....	99
Ilustración 17. Primer episodio caso Omegas	105
Ilustración 18. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Omegas	108
Ilustración 19. Mapa de argumentos razonamiento deductivo caso Omegas.....	115
Ilustración 20. Tercer episodio caso Omegas	120
Ilustración 21. Ontologías programa Digalo	167

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Categorías de la investigación	61
Tabla 2. Argumentaciones inductivas Memories	84
Tabla 3. Actividad argumentativa Memories episodio 1.	88
Tabla 4. Argumentaciones deductivas Memories.....	92
Tabla 5. Argumentaciones abductivas Memories.....	95
Tabla 6. Actividad argumentativa Memories episodio 3	98
Tabla 7. Argumentaciones inductivas Omegas	103
Tabla 8. Actividad argumentativa Omegas episodio 1.	106
Tabla 9. Argumentaciones deductivas Omegas	112
Tabla 10. Actividad argumentativa Omegas episodio 2.....	114
Tabla 11. Argumentaciones abductivas Omegas	117
Tabla 12. Actividad argumentativa Omegas episodio 3.....	119

RESUMEN

La presente investigación se realizó bajo la metodología cualitativa, mediante de un estudio de caso realizado en estudiantes de la institución Educativa Maestro Arenas del Municipio de Medellín entre los años 2012 y 2013. El objetivo de la investigación consistió en la caracterización de las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo. Esta investigación se desarrolló por medio de entrevistas semiestructuradas representadas en episodios, que a su vez, estaban agrupados en categorías (**Categoría 1** razonamiento inductivo, **Categoría 2** razonamiento deductivo y **Categoría 3** razonamiento abductivo).

A partir de estos episodios, los estudios de caso “Memories” y “Omegas” realizaron sus argumentaciones haciendo uso del programa Argunaut/Digalo en forma sincrónica y asincrónica. Los registros de las argumentaciones contenidas en el programa Argunaut/Digalo, fueron apoyadas por otros instrumentos de recolección de información como la observación directa no participante, registros escritos en papel y grabaciones de audio/video.

Los resultados de esta investigación revelan, en primer lugar que los estudiantes presentan dificultades en argumentaciones de tipo deductivo, pese a que sus argumentos son apoyados en algunas propiedades y leyes de las matemáticas, los criterios que validan sus argumentaciones se quedan inconclusos. En cambio, en los razonamientos de tipo inductivo y abductivos se evidenció pertinencia, fuerza y coherencia en sus argumentos, apoyando sus ideas en justificaciones válidas. Esta investigación se apoya principalmente en las teorías de Toulmin (2003) y Vygotsky (1978).

PALABRAS CLAVE: Argumentaciones; discurso argumentativo; ambientes virtuales de aprendizaje y aprendizaje colaborativo.

ABSTRACT

The present research was carried out under the qualitative methodology, using a case study in students of the Master Arenas High School of the Municipality of Medellin between 2012 and 2013. The objective of the research was the characterization of the mathematical arguments made by ninth-graders (9 °) when using the mediator Argunaut//Digalo. This research was developed by means of semi-structured interviews represented in episodes which were also grouped into categories (category 1: inductive reasoning, Category 2: deductive reasoning, and Category 3: abductive reasoning).

Based on these episodes, the case studies “Memories” and “Omegas” made their arguments in the Argunaut/Digalo program synchronously and asynchronously. The record files of the arguments in the Argunaut/Digalo program were also backed up by other data collection instruments such as: non-participant direct observation, written records on paper and audio/video recordings.

The results of this research reveal, firstly, that students have difficulties in arguments of deductive type, in spite of the fact that their arguments are supported in some properties and laws of mathematics, the criteria that validate their arguments are inconclusive. In contrast, students’ arguments based on inductive and abductive reasoning showed relevance, strength and their ideas were supported on valid justifications. This research was based mainly on the theories of Toulmin (2003) and Vygotsky (1978)

KEY WORDS: Arguments; argumentative discourse; virtual learning environments and collaborative learning.

INTRODUCCIÓN

Los jóvenes cada vez saben más (aunque no necesariamente del "currículum oficial") y aprenden más cosas fuera de los centros educativos. Por ello, uno de los retos que tienen actualmente las instituciones educativas consiste en integrar las aportaciones de estos poderosos canales formativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, facilitando a los estudiantes la estructuración y valoración de estos conocimientos dispersos que obtienen a través de los "mass media" e Internet. (Màrques Graells, 2000)

En matemáticas la demostración de tipo formal se ha planteado como la única forma de mostrar la validez de un enunciado, proposición o teorema, donde a partir de una hipótesis se debe afirmar una verdad o tesis, que no es evidente a simple vista.

Específicamente, en algunas ocasiones en Educación Matemática al pretender que el estudiante de básica secundaria demuestre un teorema dentro de un sistema (lógico-deductivo) usando un lenguaje formalizado se observa que tarda demasiado en desarrollar este proceso, fracasando en el intento al dejarlo inconcluso, mostrando con esto que existen dificultades para asimilar y desarrollar demostraciones matemáticas.

De otro lado, en el desarrollo de su práctica, la docente ha venido reflexionando a partir de expresiones de estudiantes en donde manifiestan la necesidad de tener en cuenta las diferentes maneras en la que ellos pueden argumentar una proposición.

Debido a estas dificultades que se presentan en el aula de matemáticas, al realizar demostraciones de tipo formal, la docente ha visto la necesidad de investigar cómo argumentan los estudiantes, ante razonamientos de tipo inductivo, deductivo y abductivo. Destacando el carácter sociocultural de la argumentación, la cual debe encontrarse fundamentada en los aprendizajes y vivencias del ambiente estudiantil, más acordes con sus prácticas cotidianas.

Incluso, investigadores como De Acedo, (2001); Godino y Recio (2001); Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006a); Castro, Cañadas y Molina (2010)¹; Crespo, Farfán y Lezama (2010); Soto, Guerrero y Beltrán (2010) plantean otras formas de llegar a la validez de una proposición, a partir de un argumento o a partir de la construcción del conocimiento mediante comprobación empírica de los hechos, a través de razonamientos de tipo inductivos y abductivos, más cercanos a las experiencias del contexto que día a día vivencian los estudiantes.

Igualmente, en los principios y Estándares para la Educación Matemática, elaborados por National Council of Teachers of Mathematics, se evidencia la importancia de desarrollar con los estudiantes de los grados noveno (9°) razonamientos de tipo inductivos y deductivos, que les permitan establecer conjeturas, refutaciones, justificaciones, generalizaciones y observar el papel que estos desempeñan en contextos dentro y fuera de las matemáticas (NCTM, 1989).

Sumado a esto, se resalta la necesidad de implementar en la enseñanza de las matemáticas las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) (Congreso de La República de Colombia, 1994; Laborde, 2002; MEN, 2003; Gutiérrez, 2007; NCTM, 2008; Cruz y Puente, 2012) principalmente el computador y la internet, con el fin de generar cambios en los escenarios dispuestos para aprender, de tal manera que los estudiantes interactúen para tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas; modificándose con esto los roles ejercidos por docentes y estudiantes en el modelo pedagógico tradicional.

¹Es posible llegar a la generalización a través de la abstracción de lo que es regular y común en los sucesos y los hechos científicos, a partir del descubrimiento de patrones que constituyen el germen de leyes propias del nuevo conocimiento (p.1).

La comprensión de las interrelaciones entre el diseño tecnopedagógico y las formas de organización de la actividad conjunta efectivamente desarrolladas por la docente y los estudiantes, y el análisis de la “interactividad real” así establecida, constituye [...] un elemento fundamental para la comprensión de qué aprenden (o no) los estudiantes en un ambiente virtual de aprendizaje y, sobre todo, por qué (o por qué no) lo aprenden (Onrubia, 2005, p.8)

Se hace necesario entonces, que en el aprendizaje de las matemáticas por medio de las TIC, el docente pase de ser el emisor fundamental en el acto comunicativo para convertirse en orientador, tutor o facilitador del aprendizaje, favoreciendo en sus estudiantes la participación en la construcción del conocimiento. Rompiendo las barreras espacio-temporales que se presentan en los procesos educativos tradicionales.

Para lograr el uso crítico de las tecnologías [...], tanto el docente como todos los actores involucrados en estos procesos, requieren de formación y perfeccionamiento, en donde las tecnologías sean un medio más, no el fin último (Cabero, 2007, p.5)

A causa de las TIC, el aprendizaje de las matemáticas se ha visto fortalecido especialmente por el uso de software educativo, que ha posibilitado unir en un mismo entorno visualizaciones, prácticas y teorías. Espacio en el cual los estudiantes pueden interactuar con el conocimiento y sus pares; asimilar conceptos de manera conjunta y con mayor facilidad, sobrepasando las paredes del aula, solventando problemas que se presentan en la enseñanza tradicional de tiza, exposición y tablero.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que la transformación y la significación que se alcance con ellas no dependerá de la tecnología en sí misma, sino de la capacidad de relacionarlas con el resto de las variables curriculares: contenidos, objetivos y metodologías (Cabero, 2007).

Y en concordancia con el énfasis de la maestría en educación y la propuesta del grupo EAV² que la direccionan “no se trata de salvar la dicotomía consuetudinaria de escuela y tecnologías, de adicionar nuevos y sofisticados medios para modernizar el funcionamiento del sistema escolar sino de integrar de forma reflexiva las tecnologías a la escuela y al currículo” (Peláez, 2013, p. 102).

Para tal fin, tanto docentes como estudiantes deben establecer vínculos entre sus conocimientos matemáticos y el uso de herramientas tecnológicas, para que trabajando de manera colaborativa e individual puedan desarrollar habilidades argumentativas en matemáticas, abriendo caminos al fomento de la crítica propositiva dentro de un mundo globalizado.

² El Grupo de Investigación en Educación en Ambientes Virtuales (EAV) de la Escuela de Educación y Pedagogía, busca generar investigación en torno a los nuevos ambientes educativos que potencian TIC; orientar el proceso de integración o no de una determinada tecnología en las prácticas de enseñanza, tendiente a la comprensibilidad de las TIC en contextos formativos; y sistematizar las experiencias realizadas. Tomado de <http://eav.upb.edu.co/peav/>

Aprovechando el potencial que brindan las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), al interior y fuera de nuestras aulas educativas es posible generar encuentros interactivos, donde se fomenten discusiones de tipo argumentativas, que permitan explorar razonamientos: deductivos, inductivos y abductivos; que es esencialmente lo que se pretende en esta investigación.

Estas interacciones de tipo argumentativas, realizadas por los estudiantes del grado noveno (9°) de educación básica secundaria a partir del uso del mediador Argunaut/Digalo y de tipo escrito en grupos de discusión, requieren de una observación constante de la docente, quien actúa como orientadora y facilitadora del proceso, sin alterar el rumbo normal de la investigación, a través de un estudio complejo de los casos por indagar, para tratar de comprender su desarrollo en diversas circunstancias.

En concordancia con todo lo anteriormente expuesto se presenta como objetivo de esta investigación la caracterización de las argumentaciones en matemáticas de estudiantes del grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo en una institución específica, donde se analizan y describen las argumentaciones de los estudiantes en matemáticas al estar mediadas por el uso de este software. Para lo cual, esta investigación se estructura en seis (6) partes, así:

En la primera (1) Presentación de la investigación, se describe inicialmente la importancia de esta investigación a partir de referentes como: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989; 1991; 2008), Congreso de la República de Colombia (1994), el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2003), Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2012), seguido a esto, se muestran las dificultades que poseen los estudiantes para realizar argumentos en el aula de matemáticas y los autores que soportan dichas afirmaciones, después se sustenta la importancia de las TIC en el desarrollo de argumentaciones en el aula de matemáticas y por último se describe la pregunta de investigación y el objetivo.

En la segunda (2) Marco de referencia, se muestran las diversas investigaciones donde se aborda la argumentación en matemáticas en la educación básica secundaria, con las metodologías/métodos de investigación implementadas y sus respectivas técnicas e instrumentos, además, se exponen detalladamente los autores que justifican el estudio de esta investigación partiendo de investigaciones internacionales, pasando por las nacionales, hasta llegar al contexto local, estableciendo un paralelo entre dichas investigaciones buscando semejanzas y diferencias en sus resultados. Adicionalmente, se particularizan los conceptos principales que fundamentan esta investigación y las diversas maneras en que están relacionados.

En la tercera (3) Diseño de la investigación educativa, se presenta el diseño metodológico que guía esta investigación apoyado en los autores que lo referencian y el método utilizado para caracterizar las argumentaciones de los estudiantes en matemáticas, donde se vinculen pedagógicamente las TIC como una estrategia de mediación; también se explicitan los participantes de la investigación, cómo fueron seleccionados, los consentimientos informados para que pudieran ser parte de esta, las técnicas de investigación e instrumentos implementados para tratar de dar cumplimiento al objetivos propuesto y por último, cada una de las fases en que se desarrolla la investigación.

En la cuarta (4) Análisis de resultados, se realiza la caracterización, de los resultados obtenidos en la investigación por medio de la triangulación de registros virtuales, escritos en papel y grabaciones de audio respecto a las argumentaciones en matemáticas (inductivas, abductivas y deductivas) y las conclusiones obtenidas por los casos de estudio en relación al esquema de Toulmin (2003) y el marco teórico de esta investigación.

En la quinta (5) Conclusiones de la investigación, se establece una síntesis de los resultados obtenidos a partir del análisis de las argumentaciones en matemáticas, tendiente a mostrar las fortalezas y dificultades de los estudiantes al momento de abordar razonamientos (inductivos, abductivos y deductivos) en esta investigación.

Finalmente **en la sexta (6) parte las Recomendaciones de la investigación,** se enuncia lo que se evidenció en el análisis de resultados de esta investigación y algunos posibles aspectos a tener presentes en el desarrollo de argumentaciones en el aula de matemáticas, que de una forma u otra ayuden a los estudiantes a solventar las dificultades presentadas en el tema aquí investigado y a los docentes para iniciar futuras investigaciones en argumentaciones en matemáticas.

1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Justificación

"La escuela y el sistema educativo no solamente tienen que enseñar las nuevas tecnologías, no sólo tienen que seguir enseñando materias a través de las nuevas tecnologías, sino que estas nuevas tecnologías aparte de producir unos cambios en la escuela producen un cambio en el entorno y, como la escuela lo que pretende es preparar a la gente para este entorno, si éste cambia, la actividad de la escuela tiene que cambiar"

Majó (2003)

El interés por estudiar las argumentaciones de los estudiantes en matemáticas haciendo uso del mediador Argunaut/Digalo, nace de las dificultades observadas en la práctica de la docente de secundaria, al intentar dar nociones a los estudiantes del universo de las demostraciones y detectar lo tormentoso que ha sido para ellos asimilar ese proceso y para la docente encontrar la metodología adecuada para que estos puedan interiorizarlas y apropiarse de estas.

Dichas dificultades en matemáticas con respecto al razonamiento matemático se han venido reflejando año tras año en los bajos resultados que arrojan pruebas en competencias matemáticas³aplicadas a estudiantes de secundaria a nivel local (Medellín), Nacional (Colombia) e internacional.

³ La capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las matemáticas juegan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e involucrarse en las matemáticas de manera que satisfagan las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OCDE, 2004, p.24).

Es así como, en las evaluaciones SABER que realiza el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a estudiantes del grado noveno (9°), por medio del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), la prueba PISA⁴ por The Organisation for Economic Co-operation and Development (OCDE⁵) y las TIMSS⁶ donde unas de las competencias evaluadas son el razonamiento y la argumentación en todos los pensamientos matemáticos⁷, los estudiantes colombianos no han obtenido los resultados esperados en las escalas y niveles desarrollados por dichas instituciones (ver anexo 3 y anexo 4).

Pese a que desde el Ministerio de Educación Nacional se ha venido haciendo énfasis en la necesidad de que los estudiantes puedan comprender, utilizar, aplicar, comunicar conceptos y argumentar procesos matemáticos, y a su vez puedan relacionar estos con situaciones de su cotidianidad, más allá de las paredes de la escuela” (MEN, 2003). Aún en las aulas de matemáticas se continúa con el ritual de la demostración, desvirtuando el potencial que los estudiantes puedan tener a la hora de justificar un enunciado.

⁴ Programme for International Student Assessment: Mide si los estudiantes tienen la capacidad de reproducir lo que han aprendido, de transferir sus conocimientos y aplicarlos en nuevos contextos académicos y no académicos, de identificar si son capaces de analizar, razonar y comunicar sus ideas efectivamente, y si tienen la capacidad de seguir aprendiendo durante toda la vida.

⁵ La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos

⁶ Trends in International Mathematics and Science Study: Estudio realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo en sus siglas en inglés (IEA) International Association for the Evaluation of Educational Achievement, que busca proveer de información de calidad sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes de educación básica, y los contextos educacionales en los que aprenden.

⁷ Numérico-variacional, Geométrico-métrico y aleatorio.

Por eso la argumentación matemática en la clase debe permitir que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas: usar la argumentación, la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración (MEN, 2006, p. 51).

De ahí la importancia de permitir que desde inicios escolares dar pequeñas justificaciones en situaciones de su cotidianidad donde estén inmersos todos los tipos de razonamiento (inductivos, deductivos y abductivos) (Crespo, 2005a); planteados desde los diferentes pensamientos matemáticos en concordancia con los estándares básicos de matemáticas, planteados a partir del Ministerio de Educación Nacional.

En dicho proceso las TIC pueden ser un buen recurso pedagógico y didáctico, del cual el docente se puede valer para facilitar la reestructuración cognitiva del aprendizaje en matemáticas, ya que en estos entornos el estudiante efectúa procesos de asimilación, acomodación y socialización.

Con la guía eficaz de la docente de matemáticas, los estudiantes de diferentes niveles pueden utilizar herramientas informáticas para apoyar y ampliar el razonamiento matemático, acceder a contenido matemático y contextos de resolución de problemas para mejorar procesos argumentativos (NCTM, 1991).

Con la integración de las TIC en el aula de matemáticas, principalmente mediante el uso de blogs, plataforma moodle⁸, recursos virtuales como: Descartes, JClic⁹, programas geométricos (Geogebra¹⁰, C.a.R, Regla y Compás¹¹, Sketchpad¹²) y analíticos (Derive¹³, Cabri), se ha tratado de solventar cierto tipo de dificultades presentadas por los estudiantes en procesos de tipo demostrativos dentro de las matemáticas. Gracias a que ellos pueden comprobar por medio gráfico y visual lo que en una proposición se quiere demostrar.

⁸ Es una aplicación web de tipo Ambiente Educativo Virtual, un sistema de gestión de cursos, de distribución libre, que ayuda a los educadores a crear comunidades de aprendizaje en línea.

⁹ Está formado por un conjunto de aplicaciones informáticas que sirven para realizar diversos tipos de actividades educativas: rompecabezas, asociaciones, ejercicios de texto, palabras cruzadas.

¹⁰ Aplicación de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, cálculo y estadística, programado en el lenguaje Java, lo que facilita su uso en muchas plataformas. Es de fácil acceso, pues es gratuito, sencillo y fácil de aprender, convirtiéndolo en un programa versátil, que ofrece variadas y útiles aplicaciones a través de sus numerosas herramientas, permitiendo abordar problemas geométricos y de dibujo lineal en el plano, mediante la experimentación y la manipulación de distintos objetos, dando paso a la resolución de problemas de una forma interactiva.

¹¹ Compass and Ruler, es un simulador de construcciones geométricas animadas, con regla y compás, creado por René Grothmann, en lenguaje JAVA.

¹² Es una herramienta dinámica que añade una dimensión de gran alcance para el estudio de las matemáticas. Este software es utilizado para construir e investigar modelos matemáticos, objetos, figuras, diagramas y gráficos.

¹³ Es un potente programa para el cálculo matemático avanzado: variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, vectores, matrices, trigonometría. También tiene capacidades de calculadora científica, y puede representar funciones gráficas en dos y tres dimensiones en varios sistemas coordenados.

De ahí que las escuelas deben asegurarse de que los estudiantes tengan acceso a la tecnología, para desarrollar razonamientos matemáticos, comprenderlos, estimular su interés y potenciar sus aptitudes argumentativas en matemáticas (Congreso de la República de Colombia, 1994; NCTM, 2008).

Desde esta perspectiva, las TIC en esta investigación serán el puente que posibilite a los estudiantes interactuar con sus argumentos, bien sean de tipo verbales, escritos o gráficos, donde atendiendo al esquema argumentativo de Toulmin (2003) puedan dar respuestas convincentes a sus afirmaciones al ser estas cuestionadas por sus compañeros.

De esta forma se puede establecer una conexión entre los conocimientos matemáticos que poseen y sus vivencias, estableciendo en sus argumentos los elementos propuestos por Toulmin (2003).

Toulmin expresa que en un argumento está formado por datos que están contenidos en las afirmaciones o enunciados que lo constituyen; unas garantías que son las razones que sustentan las afirmaciones, y que a su vez, son principios o reglas que sirven de apoyo a las conclusiones, un calificador modal que está constituido por la palabra o conjunto de palabras que dan fuerza a las razones, el respaldo que puede ser un estudio científico, un código, una estadística, o una creencia que sirve de apoyo a la garantía y por último las condiciones de excepción o refutación según se aplique o no al argumento (2003).

De esto, que las diferentes afirmaciones realizadas por un estudiante durante la actividad argumentativa, pueden ser aceptadas o refutadas por sus compañeros de acuerdo a los conocimientos matemáticos que estos poseen y a las justificaciones aportadas por ellos, que garanticen la validez o no de sus aseveraciones como el producto de actos argumentativos en relación a un contexto determinado.

1.2 Planteamiento del problema

La demostración en la educación básica secundaria ha venido siendo cuestionada (Codina y Lupiáñez, 1999; Balacheff, 2000; Godino y Recio, 2001; Mariotti, 2006; Malva, Puppo y Roldán, 2009; Larios y Gonzáles, 2010; Crespo, 2005a; 2005b; González y Lora, 2011), bien sea por la estructura de las proposiciones demostrativas en matemáticas o los procesos requeridos para su realización, lo que convierte a la demostración en un proceso mecánico, y carente de sentido para los estudiantes, más aún si no encuentran una relación de esta con el contexto en el que se desenvuelven.

Generalmente en la clase desarrollada por la docente de matemáticas cuando un estudiante se ve enfrentado a un proceso de tipo demostrativo, luego de revisar una y otra vez el enunciado propuesto tiende a hacer una comprobación empírica de la proposición presentada basándose en un ejemplo numérico o esquema gráfico. O En otras ocasiones el estudiante no siempre recuerda las reglas, propiedades y símbolos que son fundamentales para justificar un teorema¹⁴ esto lo lleva a desistir de su procedimiento dejándolo inconcluso.

Se hace necesario entonces, que en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes controlen y dominen las diversas prácticas argumentativas, así como ser conscientes de las relaciones dialécticas entre las mismas (Godino y Recio, 2001, p. 412).

¹⁴ Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros teoremas ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas (DRAE, 2012).

1.1.1 Situaciones y realidades que se presentan al desarrollar demostraciones en el contexto escolar

“Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los estudiantes en la escuela” (Crespo, 2005b, p. 23). Dificultad que ha sido observada en la práctica cotidiana que la docente desarrolla con los estudiantes del grado noveno (9°) al momento de explicar, justificar¹⁵, o desarrollar una demostración en matemáticas, relacionada con propiedades de los números reales, propiedades de figuras y cuerpos geométricos.

Sumado a esto la necesidad de memorizar métodos o técnicas que son indispensables en la solución de demostraciones, se convierte para los estudiantes una situación compleja, ya que ellos tienen que seguir pasos de forma sistemática, convirtiéndose esto en un limitante para sus discursos argumentativos.

Y aunque desde el Ministerio de Educación Nacional se estipulan los lineamientos y estándares curriculares para la educación matemática en la básica y media, que expresan la necesidad de desarrollar en matemáticas diversas formas de razonamiento, que promuevan en el estudiante la creatividad, el discurso oral y escrito, interactuar con sus compañeros, y la integración de las TIC para lograr un aprendizaje globalizado, dinámico e interactivo (Men, 1998; 2003; 2006a). Aún se sigue promoviendo en el aula de matemáticas prácticas demostrativas que no permiten el debate y la controversia entre los estudiantes.

¹⁵ justificar es producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos y examinar su aceptabilidad con la finalidad de modificar el valor epistémico de una tesis en relación al corpus de conocimientos en que se incluyen los contenidos objeto de la tesis. (Jorba, 1998, p. 81) citado por (De Gambóia, 2009, p.5).

1.1.2 Situaciones y realidades fuera de las paredes del aula que reflejan dificultades en el razonamiento de los estudiantes.

En resultados de las pruebas SABER (2009; 2012), más del 50% de los estudiantes Colombianos que cursaban el grado noveno (9°) se encuentran en un nivel mínimo de desempeño en el área de matemáticas. Alejados totalmente del resultado esperado en cuanto al desarrollo de competencias matemáticas, entre estas: el razonamiento y la argumentación (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2012).

En la ilustración 1 se observa que el más alto porcentaje de estudiantes tanto a nivel nacional, local e institucional se encuentra en un desempeño mínimo en el desarrollo de procesos generales de matemáticas. Lo que refleja que en razonamiento y argumentación los estudiantes ubicados en este nivel responden a las preguntas de mínima complejidad de la prueba.

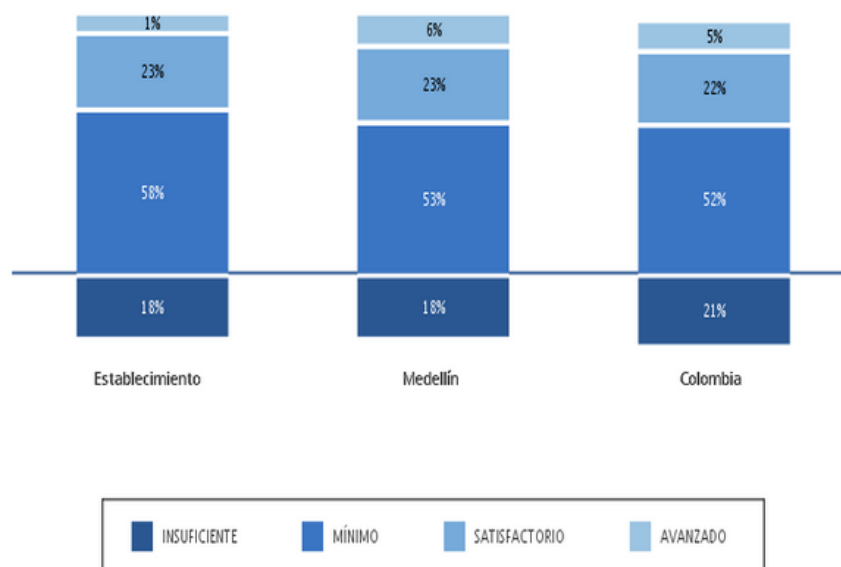


Ilustración 1. Resultado prueba SABER de noveno grado en matemáticas. (2012)

Tomado de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

De modo similar en el informe presentado por la Alcaldía de Medellín (2013) en las olimpiadas del conocimiento en matemáticas que son realizadas anualmente en el Municipio de Medellín, en 2012 por competencias en razonamiento se obtuvo en el grado 10° un 24,35% de acierto y en 11° un 27,84%.

De las competencias matemáticas¹⁶ evaluadas en estas olimpiadas en secundaria los estudiantes tienen muy bajo logro en razonamiento. Esto se visualiza en la ilustración 2.

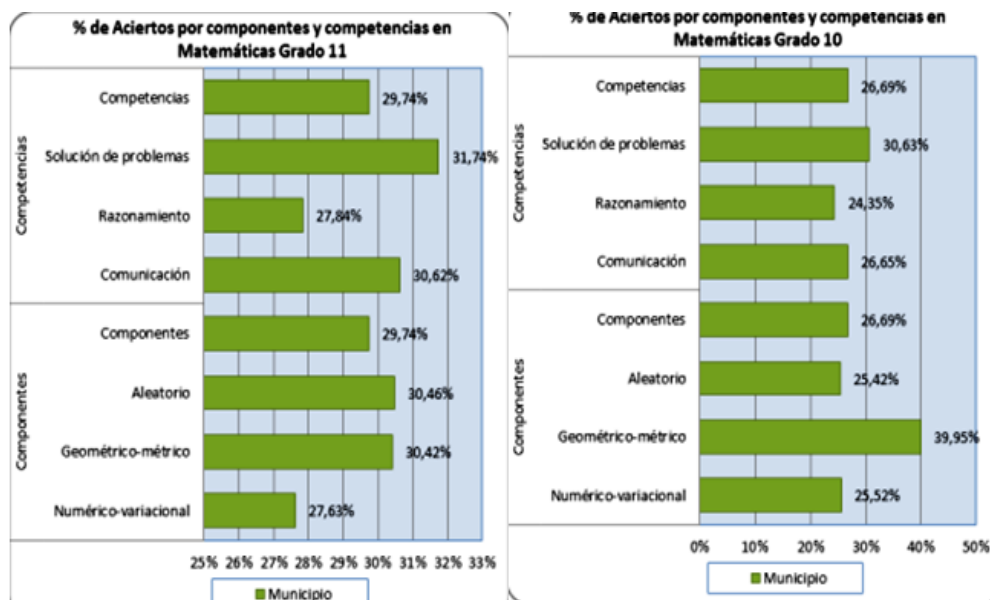


Ilustración 2. Resultados olimpiadas Medellinenses del conocimiento. (2012)

Fuente: Tomado de <http://secmed.aprender.com.co/aprender/index.php/olimpiadas-del-conocimiento/1960-resultados-olimpiadas-2012/file>

¹⁶ Las competencias matemáticas que se evalúan en estas olimpiadas son: comunicativa, razonamiento y Solución de problemas.

Incluso en las pruebas TIMSS, y principalmente PISA los estudiantes Colombianos en conocimientos matemáticos no logra el desempeño mínimo establecido por estas evaluaciones internacionales; lo que indica que los estudiantes tienen dificultades para usar la matemática en determinadas situaciones, como por ejemplo construir y comunicar explicaciones y argumentos (IEA, 2012; OCDE, 2013).

A causa de estas, se presenta la necesidad de desarrollar en la práctica matemática diversas formas de razonamientos (inductivos, deductivos y abductivos), que promuevan en los estudiantes discursos argumentativos; destacando así el papel sociocultural de la argumentación en el aula de matemáticas.

1.3 Pregunta de investigación

La ilustración 3 presenta la pregunta de investigación, encaminada a presentar las características de las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo, teniendo como referente teórico el modelo de Toulmin (2003).

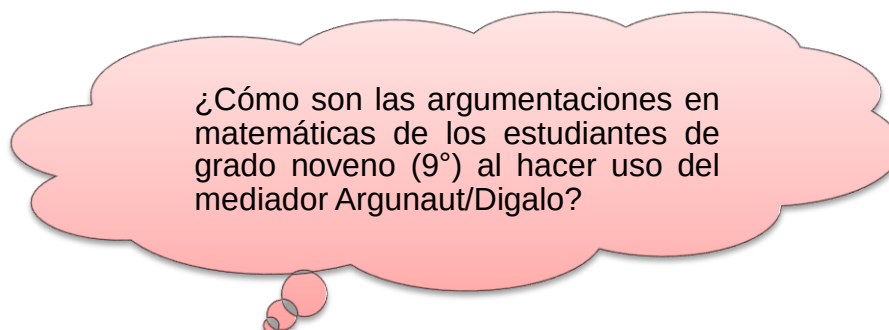


Ilustración 3. Pregunta de investigación

Fuente: Elaboración Propia

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Caracterizar las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo.

1.4.2 Objetivos Específicos

- I. Identificar las argumentaciones en matemáticas (inductivas, deductivas, y abductivas) de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo.
- II. Describir las argumentaciones en matemáticas (inductivas, deductivas y abductivas) de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan diferentes estudios que fueron rastreados por la docente investigadora desde el mes de Julio del año 2012, en que se dio inicio a esta maestría en educación, estableciendo diferencias entre las investigaciones que usan las TIC en la demostración y la argumentación en matemáticas, de las que utilizan instrumentos didácticos propios en el aula de matemáticas. Además, se presentan los diferentes referentes conceptuales a considerar, que orientan el camino hacia el objetivo planteado.

2.1 Estado de la Cuestión

Un recorrido por las miradas de los autores: “puntos de partida, puntos de llegada y puntos de encuentro”

Los trabajos indagados por la docente en investigación sobre argumentación y demostración en matemáticas son de tres tipos. Unos muestran la importancia del software CABRI GEOMETRE en la enseñanza, aprendizaje, visualización y comprobación de demostraciones de propiedades de figuras, teoremas y conjeturas en matemáticas.

Otros advierten sobre la importancia de incluir la demostración en el plan de matemáticas desde primaria hasta secundaria para desarrollar competencias de razonamiento, comunicativas (interpretativas y propositivas) y de resolución de problemas en los estudiantes.

Por otra parte, se muestran diferentes posturas entorno a los razonamientos de tipo formal e informal, estableciendo teorías que permiten diferenciar entre las expresiones (explicación, justificación, razonamiento, argumentación y demostración en matemáticas) y elaborando modelos e indicadores de los tipos de razonamientos usados por los estudiantes.

Las diferentes investigaciones en demostración y argumentación en matemáticas son el resultado de una búsqueda sistemática y rigurosa en diferentes bibliotecas de la ciudad de Medellín-Colombia, entre estas: La Universidad de Antioquia, La Universidad Pontificia Bolivariana, La Universidad de Medellín y La Universidad Nacional, complementado con la búsqueda en diferentes bases de datos y bibliotecas virtuales como son: Google Scholar, Scopus, Scielo, Ebsco, Dianelt, Redalyc, SCIC, FUNES, CLAMED (Ver [Anexo 5](#) y [Anexo 6](#)) donde se hace una clasificación de estos estudios, a nivel de Latinoamérica y otros países del mundo donde se ha investigado el tema aquí abordado.

Para esta revisión se analizaron más de sesenta (60) documentos entre artículos, proyectos gubernamentales, tesis de maestría y doctorado, que posibilitan fundamentar la construcción del diseño y la propuesta metodológica. En estos se exponen diferentes resultados de argumentaciones de estudiantes de básica y media en matemáticas con o sin la integración de las TIC. A partir de las cuales se seleccionaron las propuestas significativas en la argumentación en matemáticas, organizadas desde los contextos: Internacional, Nacional y Local respectivamente; categorizadas de acuerdo a la ciudad o región donde se están desarrollando, destacando principalmente: los autores, la metodología utilizada, la estrategia metodológica, los hallazgos, los resultados y las conclusiones.

La ilustración 4 agrupa las investigaciones que dan soporte a la presente investigación, en esta se puede observar la clasificación de los diferentes razonamientos en matemáticas y sus respectivos autores. La descripción y el análisis se complementan con las tablas de los anexos 1 y 2.

2.1.1 Contexto internacional

En este apartado se logró establecer diferentes tipos de relaciones entre las formas como los estudiantes interactúan en el aula de clase, para llevar a cabo razonamientos, demostraciones y argumentos en matemáticas con el uso de Software y/o con papel y lápiz. Así mismo, se destacan las ventajas que tiene el uso de las TIC en el desarrollo de competencias y habilidades para la resolución de argumentos, donde es necesario que el docente, facilitador o moderador genere en el estudiante cierto tipo de motivación, para que sus habilidades argumentativas y demostrativas se reflejen dentro y fuera del espacio escolar.

2.1.1.1 Investigaciones en España

(Codina y Lupiañez, 1999) estos investigadores realizan una distinción entre lo que es una demostración y una argumentación en matemática, por medio del análisis de los conectivos¹⁷ utilizados por los estudiantes en estos tipos de razonamientos, y observan en el uso de las TIC profundos cambios en el campo educativo; tanto a nivel de objetivos, contenidos, metodología, así como en las actividades de evaluación, resaltando de esta manera el uso del programa informático CABRI para modelar situaciones, a través de la representación de figuras geométricas; experimentar y descubrir propiedades, gracias a la posibilidad de manipular y ejecutar dichas figuras.

¹⁷ Ahora, porque, en consecuencia, por lo tanto, pero, sin embargo, aunque, si..., entonces, la “o” exclusiva e inclusiva, la “y”, muestran un aspecto demostrativo mientras que (se sabe que, es necesario que, concluyo que) revelan un razonamiento más argumentativo y espontáneo.

“Sin embargo, y a pesar de las inmensas posibilidades que ofrece este programa, le han surgido algunas críticas en relación a que desalienta a los alumnos a demostrar, pues éstos quedan satisfechos al comprobar perceptivamente una propiedad geométrica” (Codina y Lupiañez, 1999, p. 19).

Además, resaltan Codina y Lupiañez (1999) que el docente debe permitir a sus estudiantes razonar de forma libre y espontánea, de manera que estos puedan reflejar sus pensamientos y no vean la demostración con un proceso aislado de su realidad circundante.

Esta teoría cobra fuerza más adelante en la investigación de Godino y Recio (2001) quienes a partir de un análisis característico del significado de la noción de argumentación matemática en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas, apoyados en el marco teórico sobre los objetos matemáticos y sus significados desarrollado en Godino y Batanero (1994, 1998) deducen que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la argumentación matemática en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas.

Asimismo, se observa en Godino y Recio (2001) cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la argumentación matemática, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes en la clase.

Otros autores que en sus escritos insisten en el uso del Cabri en la enseñanza de propiedades geométricas, para ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de la naturaleza de la argumentación matemática y mejorar sus habilidades son Marrades y Gutiérrez (2000), quienes a diferencia de Codina y Lupiañez (1999); Godino y Recio (2001) centran su interés en analizar y describir las respuestas de estudiantes de (15 a 16 años) a problemas demostrativos, mostrando los resultados de dos estudios de casos, donde los estudiantes de secundaria trabajan con Cabri-Géomètre para resolver problemas de geometría estructurados en una unidad didáctica. Para ello utilizan un esquema de clasificación de las justificaciones empíricas¹⁸ y deductivas¹⁹ desarrolladas por los estudiantes.

Los investigadores Marrades y Gutiérrez (2000) expresan que los sistemas gráficos digitales (DGS) ayudan a los docentes a crear ambientes de aprendizaje donde los estudiantes pueden experimentar propiedades matemáticas y el estado o verificación de conjeturas con mayor facilidad que en otros entornos de cálculo o con el papel y lápiz.

La principal ventaja de DGS es que los estudiantes pueden construir figuras complejas y realizar fácilmente en tiempo real una amplia gama de transformaciones, por lo que los estudiantes tienen acceso a una variedad de ejemplos que difícilmente pueden ser igualados por los entornos tradicionales²⁰(Marrades y Gutiérrez, 2000, p. 95).

¹⁸ Contiene el empirismo ingenuo, fallido, experimento crucial y el ejemplo genérico.

¹⁹ Formados por Experimentos de pensamiento, deducción formal y razonamientos fallidos o erróneos.

²⁰ Traducción propia.

Un estudio con objetivo similar, en el que se aprecia el uso de CABRI es el desarrollado por Gutiérrez (2007) donde considera que es necesario que profesores y estudiantes sean conscientes de que un programa de geometría dinámica puede ayudar a encontrar ideas para hacer una demostración, pero no puede hacer la demostración.

Gutiérrez (2007) propone en su escrito que los procesos demostrativos se incluyan en el área de matemáticas desde los primeros niveles de educación primaria, donde se planteen actividades que lleven a los estudiantes a razonar matemáticamente. Actividades adecuadas a su capacidad de razonamiento.

De otro lado Planas y Morera (2010) analizan argumentaciones en el aula de matemáticas de secundaria, a partir de dos aproximaciones: la interacción social en el aula y la influencia de esta interacción en los procesos de aprendizaje de los estudiantes; por medio de la implementación de una secuencia didáctica sobre transformaciones en el plano. Su estudio se fundamenta en los esquemas argumentativos de Plantin (1998) y Toulmin (1958), donde a partir de unas premisas se obtiene una conclusión, empleando al menos una razón.

De la misma manera que Planas y Morera (2010); Chico y Planas (2011) emplean las teorías interaccionistas para analizar los datos arrojados por una pareja de estudiantes durante la resolución de un problema de generalización en una clase de matemáticas de secundaria. A partir de los datos arrojados por los sujetos participantes en esta investigación, asumen que el discurso establecido en la interacción en pareja es un factor clave de influencia en los procesos de construcción de conocimiento matemático.

En los resultados de su investigación, Chico y Planas (2011) muestran la relación entre el uso de ciertos indicadores discursivos y los avances en la "intención argumentativa" de los estudiantes. La mayoría de intercambios con intención argumentativa vienen precedidos o acompañados por refutación, cuestionamiento, paráfrasis, convencimiento y en menor grado, validación.

Por su parte Cañadas (2007) realiza un estudio de caso con doce (12) estudiantes de educación secundaria, a los que les propone dos tareas matemáticas donde a través de procesos de interacción hacen uso de razonamientos inductivos. Estos autores coinciden en que la generalización verbal se asocia a un intento por parte de los estudiantes de justificar la resolución de un problema.

2.1.1.2 Investigaciones en Estonia, Suecia y Finlandia

Los autores Hemmi y otros(2013) analizan y comparan las demostraciones que se relacionan con las competencias a desarrollar en los grados 1°a 12°, de conformidad con los documentos de dirección nacional de Estonia, Finlandia y Suecia. Tres países vecinos con diferentes antecedentes culturales e históricos. Estos investigadores evalúan cómo estos países están desarrollando su plan de estudios en matemáticas con el fin de elevar el papel de la demostración y la argumentación en todos los niveles escolares y para todos los grupos de estudiantes. En dicho estudio se encontraron con tres trayectorias muy diferentes con respecto al desarrollo de las competencias relacionadas con la argumentación matemática en la clase.

El plan de estudios de Estonia declara explícitamente los objetivos y el contenido relativos a la argumentación matemática y a la demostración en la enseñanza obligatoria. El estilo de Estonia se asemeja a la manera "tradicional" de empezar a trabajar con las argumentaciones y demostraciones dentro de la geometría en la secundaria inferior y, por tanto, es posible que exista una brecha entre los grados 6° y 7° relativos a los elementos de argumentación matemática en la clase.

El plan de estudios de Finlandia también establece algunas metas sobre la introducción de la argumentación en los niveles inferiores de la secundaria, pero puede haber una brecha entre los niveles secundario y universitario superior, ya que la argumentación matemática no está explícitamente presente en el currículo de la escuela secundaria superior finlandesa.

En cuanto a Suecia, la palabra demostración no se menciona en el plan de estudios de la enseñanza obligatoria. Sin embargo hacen énfasis en las conexiones con la vida cotidiana.

2.1.1.3 Investigaciones en Argentina

A los autores Malva y otros(2009) al igual que Hemmi y otros (2013) les interesa que en la educación matemática en Argentina renazca el interés por la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Por tanto exponen que por el bajo nivel que muestran los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones se ha despertado en Argentina un interés por los procesos de validación que son propios del quehacer matemático.

El acercamiento a las demostraciones se contextualiza a partir de la lógica y de los sistemas formales; donde incluyen ejemplos justificados a partir de la práctica de la Educación Matemática impartida en las aulas tales como demostraciones por implicaciones directas, por contra recíproco y por reducción al absurdo; proponiendo ejemplos sencillos para ser iniciados en la educación secundaria y complejizados en la formación superior con el objetivo de favorecer una inclusión efectiva y eficaz de la demostración en la educación matemática de los jóvenes.

2.1.1.4 Investigaciones en México

González y Montes de Oca (2010) diseñan una estrategia didáctica, para favorecer la formación y desarrollo de la habilidad de argumentar en el lenguaje de la matemática en los estudiantes de octavo grado del nivel básico. Se trata de un modelo comunicativo explicado a partir de tres subsistemas, que permiten mostrar las relaciones que se dan en el proceso de formación y desarrollo de habilidad de argumentar en el lenguaje de la matemática como núcleo integrador del lenguaje matemático y el lenguaje común, capaz de provocar el efecto sinérgico entre ellos.

En esta investigación concluyen que mediante el diálogo en diversas situaciones matemático comunicativas y contextos pueden los estudiantes llegar a comprender el significado de los conceptos matemáticos, donde los docentes tienen como función orientar a los estudiantes para que puedan ordenar adecuadamente sus ideas, emplear adecuadamente el vocabulario, los términos y símbolos matemáticos, manifestar las ideas con seguridad y en forma concreta, formular conjeturas y expresar argumentos suficientes. Se trata de una investigación en la cual se evidencia la interacción entre sus participantes dejando ver la similitud con las investigaciones de Planas y Morera, (2010); Chico y Planas (2011); Cañadas (2007); Miyazaki (2000) este último se expone más adelante.

Larios y Gonzáles (2010) Al igual que Marrades y Gutiérrez (2000); Sánchez y Mercado (2002); Gutiérrez, (2007); enfatizan el uso de CABRI para visualizar y comprobar proposiciones en geometría. Señalan algunas reflexiones sobre la construcción de la demostración geométrica en el ambiente escolar del nivel medio. Así como algunos aspectos que influyen en tal construcción: los tipos de justificaciones que se pueden utilizar y fenómenos relacionados con la visualización, como es el uso de prototipos y la rigidez geométrica. El estudio de la geometría es abordado a partir de tres niveles propuestos por Kuzniak y otros (2007, p. 955)

Larios y Gonzáles (2010) concluyen que la importancia de la demostración en matemáticas es incuestionable y su presencia en la matemática educativa es necesaria y aprovechable para enseñar a estudiar geometría en todos sus aspectos a pesar de que los estudiantes en una u otra institución tengan diferentes niveles cognitivos y significados relacionados con la demostración.

En cambio Pech y Ordaz (2009) dedican su investigación a las argumentaciones que se producen en situaciones de variación y cambio, manifestando que el tratamiento generalmente otorgado al concepto de función en las instituciones no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes, sino por el contrario propicia la memorización y algoritmia, esta situación desemboca en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes.

Entretanto Sánchez y Mercado (2002) no sólo se conforman con el uso del programa CABRI en la enseñanza de la geometría como Marrades y Gutiérrez (2000); Larios y González (2010); Gutiérrez (2007); sino que por el contrario, realizan un estudio de su efectividad a partir una serie de actividades realizadas por ocho (8) estudiantes de bachillerato (16-17 años).

Sánchez y Mercado (2002). Observan a través de instrumentos virtuales utilizados, que el ambiente de geometría dinámica ²¹CABRI permite que los estudiantes descubran por sí mismos propiedades geométricas interesantes, que con el lápiz y el papel no eran capaces de lograr.

2.1.1.5 Investigaciones en República Dominicana

En cuanto al uso de OVA²² para motivar la enseñanza de la argumentación, los autores Cruz y Puente (2012) exponen los resultados de una experiencia empírica sobre el uso de diferentes recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática Básica. Con el objetivo de motivar la participación y el aprendizaje activo de los estudiantes y de desarrollar las competencias matemáticas sugeridas en el proyecto PISA.

En lo referente a las herramientas utilizadas, Cruz y Puente (2012) tuvieron en cuenta software que no requerían de instalación en el computador (herramientas que proporciona la WEB 2.0), las cuales, según los autores Cruz y Puente (2012) representan un escenario donde se puede interactuar con los contenidos por medio de la participación, diálogo e interacción de los participantes.

²¹ Recurso informático que permite la interactividad del alumno con las ideas matemáticas.

²² Objetos Virtuales de Aprendizaje, según Institute of Electrical and Electronics Engineers, es cualquier entidad digital que puede ser usada, re-usada o referenciada para el aprendizaje soportado en tecnología (IEEE, 2002).

Dentro de las herramientas tecnológicas utilizadas para dar cumplimiento al objetivo se pueden mencionar los simuladores en línea que forman parte de la Biblioteca Nacional de Manipuladores de la Universidad Estatal de UTAH (http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html), **Desmos Graphing Calculator** (<https://www.desmos.com/calculator/#>),²³ y **Graph.tk** (<http://graph.tk/>)²⁴ y **Conceptboard** (<http://conceptboard.com/teamwork>), es un espacio donde se pueden realizar trabajos en equipo en tiempo real.

2.1.1.6 Investigaciones en Perú

Huapaya y Sandoval (2011) son otros autores que le apuesta al uso de OVA en el desarrollo de argumentaciones en matemáticas. Aportan algunos resultados y reflexiones sobre una experiencia de innovación educativa desarrollada en la Institución Educativa Scipión Llona, que contribuye al mejoramiento, fortalecimiento de las capacidades y/o competencias matemáticas relacionadas con conexiones y razonamiento de estudiantes de primer año de la I.E. “Scipión Llona, a través del uso adecuado de los recursos y herramientas TIC.

La metodología de trabajo considera el uso de software, uso de blog, calculadoras científicas, así como Internet y otros recursos y medios que permitan la contextualización de conceptos matemáticos. (Huapaya y Sandoval, 2011) concluyen que es importante que el estudiante este motivado para que continúe con el aprendizaje de las matemáticas por fuera de la institución, ya que el contexto en el que habitamos es una fuente de recursos didácticos para ser utilizados de manera ingeniosa.

²³ Un software gratuito, disponible en la red, se puede acceder con cualquier explorador. Les permite capturar la imagen, y compartirla con otros. Pueden graficar múltiples ecuaciones de manera simultánea pero también cambiar el rango para realizar las gráficas.

²⁴ Esta aplicación permite graficar cualquier tipo de ecuación e inecuación matemática.

2.1.1.7 Investigaciones en Japón

Miyazaki (2000) establece seis niveles de argumentación matemática como pasos de una argumentación inductiva a una demostración algebraica, en estudiantes de secundaria de 13 a 15 años. Para establecer estos niveles argumentativos describe tres ejes fundamentales: contenido y representación de la argumentación, y pensamiento de los estudiantes (operaciones formales y concretas).

En este sentido, define la demostración como una actividad humana en la que se encuentran los factores que se exponen en la ilustración 5.



Ilustración 5. Factores de la argumentación

Fuente: Adaptado de Miyazaki (200). Factores que intervienen en la argumentación.

En su escrito Mitazaki (2000) muestra que los estudiantes aprenden una demostración sólo como una especie de ritual que es desarrollado en el aula de matemáticas. Como resultado, los estudiantes no relacionan esta con situaciones fuera del contexto escolar.

2.1.2 Contexto Nacional

En este apartado se muestra el trabajo con los programas: Simas, Argunaut/Digalo para trabajar argumentos en matemáticas y representar el conocimiento, y el software Cabri para demostrar conjeturas. Los diferentes autores coinciden en que los estudiantes a pesar de los esfuerzos realizados en la enseñanza de la demostración matemática, siguen mostrando razonamientos empíricos, inclusive los clasificados en el deductivo usan bastante el empirismo.

2.1.2.1 Investigaciones en Santander

Pineda y otros (2011) presentan unos referentes teóricos y estrategias implementadas con estudiantes de décimo y undécimo grado de secundaria de la institución Educativa Oriente Miraflores de la ciudad de Bucaramanga en un club de estudio buscando desarrollar competencias en la resolución de problemas matemáticos.

Las competencias de tipo interpretativas fueron desarrolladas con el software SIMAS²⁵ como facilitador de la representación del conocimiento mediante una ontología asociada al problema que se intente resolver; las competencias argumentativas se potenciaron con DIGALO²⁶.

²⁵ Software desarrollado por La Universidad pedagógica Nacional de Colombia, bajo la dirección del Dr. Luis Facundo Maldonado, el cual permite la construcción de ontologías (conceptualización) apoyadas con hipertextos.

²⁶ Software desarrollado por el grupo Kishurim de la Universidad Hebrea de Jerusalén, es un ambiente dinámico orientado a la utilización de la argumentación en la solución colaborativa de problemas. El software puede ser utilizado siguiendo una metodología de análisis de casos, buscando que los estudiantes aprendan a usar su lenguaje resolviendo los casos y generando competencias cognitivas y argumentativas (De Groot et al, 2008) citado por (Pineda, Téllez y Landazábal, 2011).

Y las competencias propositivas con el ambiente de modelado FREESTYLER²⁷; este último software permite el modelado y la simulación a partir del conocimiento de la estructura del fenómeno estudiado, haciendo posible el diseño de las políticas de intervención. Esta propuesta se apoya en los referentes teóricos de Polya (2012) sobre la resolución de problemas.

Los investigadores Pineda y otros (2011) revelan que cuando los estudiantes argumentan por medio del programa DIGALO (elemento mediador para el presente estudio) se facilita la regulación de sus ritmos de aprendizaje, entendiendo la argumentación como un proceso, donde cada miembro integra sus aportes al grupo sin perder su identidad.

En esta investigación “los procesos de formación de competencias cognitivas se potencian mediante la introducción de ambientes digitales que permitan a los estudiantes una maduración plena de su curva de aprendizaje” (Pineda y otros, 2011. p. 3).

Otro estudio que presenta resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a tres grupos de estudiantes de 10° grado de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander es el de (Fiallo y Gutiérrez , 2007) la intención de estos autores consiste en indagar y analizar los tipos de demostraciones realizadas por los estudiantes del curso. Además, los datos arrojados por la investigación les permitieron a los investigadores exponer algunas conclusiones acerca de su comprensión de la demostración.

²⁷ Software desarrollado por el grupo Collide de la Universidad de Duisburg-Essen, esta plataforma permite trabajar diversas formas de modelado colaborativo.

La evaluación aplicada por Fiallo y Gutiérrez (2007) muestra que los estudiantes tenían un tipo de razonamiento empírico, estos últimos tienen la idea de que hay que utilizar argumentos matemáticos aceptados para demostrar, pero al no ser capaces de dar justificaciones deductivas se apoyaban bastante en el empirismo.

En esta investigación se evidenciaron los tipos de demostración empírica, empírica fallida y fallida que indica que los estudiantes no tienen la habilidad necesaria para poder demostrar por sí mismos sus propias conjeturas. Esto posiblemente debido a que los procesos de conjeturar y demostrar no son promovidos en los cursos anteriores.

2.1.2.2 Investigaciones en Bogotá

Bolívar y Martín (2010) caracterizan la actividad matemática que llevan a cabo grupos de estudiantes de grado noveno, del Instituto Pedagógico Nacional de Bogotá, cuando se enfrentan a una tarea en la que tienen que formular una conjetura y demostrarla, haciendo uso de un conjunto de enunciados geométricos estudiados en clase. Este artículo presenta un avance de un trabajo de grado sobre la actividad demostrativa en educación básica secundaria, mediada por el uso de un programa de geometría dinámica, en el que se diseñan un conjunto de problemas encaminados a que los estudiantes identificaran propiedades comunes al rectángulo y al trapecio isósceles. El principal referente teórico es la actividad demostrativa definida por Perry y otros (2006). Según los autores es posible acercar significativamente a estudiantes de secundaria a la demostración si ellos participan de manera genuina en acciones asociadas a dicha actividad interactuando constructivamente, teniendo en cuenta los aportes no solo de la docente sino también de los compañeros.

Esta investigación se complementa con la de Samper y otros (2011). Estudio centrado especialmente, en identificar formulación de implicaciones (Arzarello, 2007) y procesos abductivos que llevan a cabo estudiantes cuando, apoyados en un programa de geometría dinámica, resuelven un problema cuyo fin es descubrir un hecho geométrico, formular una conjetura y demostrarla.

Los autores Samper y otros(2011) apoyados en registros de audio y video, y en la transcripción de los mismos, describen e interpretan la actividad de un grupo de estudiantes en relación con los procesos demostrativos. Se describe el papel de la geometría dinámica no sólo como entorno que permite exploraciones de tipo empírico, sino como potenciador de procesos abductivos relacionados con la implicación.

En la misma línea de la argumentación y uso de software para apoyar procesos argumentativos en matemáticas Alfonso y otros (2014) caracterizan cinco actividades (la visualización, identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades, formular conjeturas, Verificar conjeturas y generalizar conjeturas), que se tendrán en cuenta en este escrito para el análisis de los datos; las cuales se emplean en la validación de conjeturas en el contexto de la actividad de argumentar.

Alfonso y otros (2014) expresan que en la actividad matemática aparecen al menos tres tipos de argumentos diferentes, estos son: abductivo, inductivo y deductivo. Donde el proceso de argumentar debe estar presente con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar habilidades o competencias argumentativas.

De manera que, las actividades matemáticas deben generar momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber.

2.1.3 Contexto Local.

Las investigaciones expuestas en esta sección exponen la necesidad de fomentar en el aula razonamientos lógico-matemáticos, para que los estudiantes puedan generar argumentos acorde con su desarrollo mental. De este modo, se pretende potenciar la resolución de situaciones problema, por medio de aplicaciones gráficas.

2.1.3.1 Investigaciones en Medellín

Villarreal y Herrera (2010) esta propuesta tiene como base la utilización en la enseñanza de conceptos, metodologías de tipo cognitivas, ya que estas tienen como finalidad la movilización del pensamiento desde diferentes perspectivas.

Villarreal y Herrera (2010) Buscan que sus estudiantes puedan desarrollar procesos de pensamiento desde los niveles básicos (más simples) hasta niveles superiores (más complejos), a la vez que realizaran tareas que les fueran familiares y otras tareas que no lo fueran.

Estos investigadores revelan que existen dificultades en el nivel de los procesos de pensamiento que se utilizan estos estudiantes al resolver los problemas matemáticos o querer aprender un concepto. Estas dificultades consistían en la no aplicación del proceso necesario para resolver la tarea planteada Esta investigación deja al descubierto que los procesos desarrollados por los estudiantes no estaban acordes con los niveles que las teorías cognitivas plantean para su edad.

Así mismo, Herrera (2009) busca en su propuesta desarrollar procesos generales como: el planteamiento y la resolución de problemas, el razonamiento matemático, la modelación matemática y la comunicación matemática; atendiendo a las exigencias de documentos oficiales como los Lineamientos curriculares de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2002).

Motivando de esta manera, a que los estudiantes busquen distintos caminos de solución de una situación, las confronte con la de sus compañeros, las defienda o las discuta, y ejercite su capacidad de modelar situaciones cada vez más complejas.

Para resumir, las diferentes investigaciones presentadas anteriormente en esta investigación, muestran los múltiples caminos en que son abordadas las argumentaciones y/o demostraciones en matemáticas por los estudiantes de secundaria a partir de situaciones problemas, donde ellos pueden justificar, explicar, conjeturar y construir procesos más elaborados como la demostración, a partir de la construcción de diversos argumentos.

2.1.4 Normas y proyectos gubernamentales en matemáticas

En esta sección se presentan algunas políticas y proyectos gubernamentales nacionales e internacionales que hacen referencia al uso de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas del conocimiento.

2.1.4.1 Ley general de educación “ley 115”

En lo referente a matemáticas y las Tecnologías expresa la importancia de desarrollar la capacidad crítica, reflexiva y analítica para fortalecer el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país (Congreso de la República de Colombia, artículo 5.9,1994).

2.1.1.2 Estándares básicos de competencias en matemáticas

MEN (2003) los estándares básicos de competencias en matemáticas son el referente que orientan al docente en la enseñanza de conceptos y desarrollo de competencias matemáticas que se trabajan gradual e integradamente, con el fin de ir superando niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo, estas competencias requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas.

En estos estándares se muestra la importancia de procesos matemáticos que contribuyen al aprendizaje de los estudiantes tales como el razonamiento, el planteamiento y la resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración y comparación de procedimientos; donde las tecnologías son las que dinamizan y propician cambios en el currículo de matemáticas, unidas a los cinco (5) pensamientos matemáticos: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

De igual forma revelan lo que un estudiante al terminar en el grado 9° debe saber con relación al razonamiento matemático, entre esto: conjeturar y verificar propiedades entre figuras bidimensionales y objetos tridimensionales, reconocer y contrastar propiedades utilizadas en teoremas de Tales y Pitágoras, justificar el uso de diferentes sistemas de medidas, usar procesos inductivos y el lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas y justificar criterios de semejanza y congruencia entre triángulos.

2.1.1.3 Proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia” y sus avances.

(Castiblanco, s.f.) Este proyecto es una estrategia para mejorar la calidad de la educación matemática y modernizar ambientes escolares. Desde el año 2000 el Ministerio de Educación Nacional de Colombia adelanta este proyecto, con el cual se pretende aprovechar el potencial educativo que brindan las tecnologías computacionales, específicamente las calculadoras gráficas y algebraicas.

2.1.1.4 “Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México”

Rojano (2003) El principal propósito de este proyecto es poner a prueba modelos de uso de las TIC en los que, a la vez que se incidiera en el mejoramiento del aprendizaje de temas curriculares clásicos, se tuviese una influencia en la transformación de las prácticas en el aula, y se incursionara en la enseñanza de nuevos contenidos que permitieran a los estudiantes el acceso a ideas importantes en matemáticas y ciencias mediante el trabajo en entornos tecnológicos.

2.2 Referentes Conceptuales

En este apartado se pretende puntualizar los conceptos que sustentan esta investigación entre estos: la argumentación, la argumentación en matemáticas, la argumentación en la cotidianidad, la mediación y ambientes virtuales de aprendizaje.

La argumentación en esta investigación es entendida como un acto discursivo dotado de lenguaje natural y matemático, ligado al contexto en el que se desenvuelven los estudiantes; en el que a partir de premisas sustentadas y articuladas por medio de razonamientos o teorías permite obtener unas conclusiones y/o tesis. La caracterización de las argumentaciones realizadas por los estudiantes se efectuará a partir de la teoría de Toulmin (2003).

Con respecto a la mediación Vygotsky (1978) citado por León (1997) establece que el ser humano desarrolla sus funciones mentales superiores al interactuar con los objetos y los demás, en la cultura y el contexto.

El mapa presentado en la ilustración 7, resume los conceptos en los que se fundamenta esta investigación y sus respectivos referentes teóricos

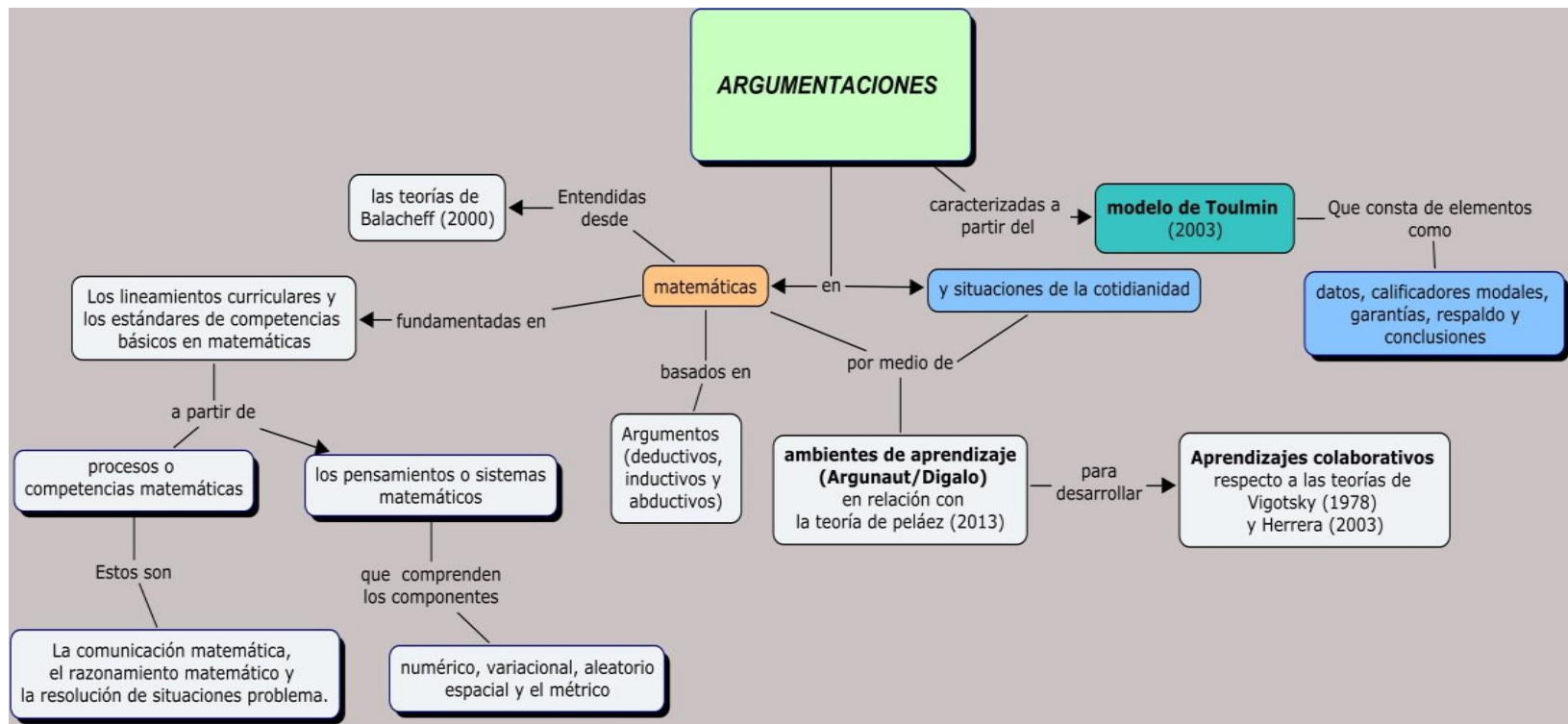


Ilustración 6. Mapa de conceptos

Fuente: elaboración propia

2.2.1 La mediación

El concepto de mediación en esta investigación se abordará desde el enfoque socio-cultural de Vygotsky (1978), donde se hace relación al uso de herramientas, bien sea de tipo físico o intelectual que un sujeto puede y está en capacidad de utilizar para interrelacionarse fluida, comprensiva y coherentemente con su entorno y con los otros sujetos citada por (León, 1997).

Este autor concibe la mediación como un proceso por el cual se desarrolla una interacción entre un individuo con funciones cognitivas deficientes o insuficientes con otro que ya posee un conocimiento experimental con una visión determinada para provocar modificaciones o perfeccionamiento de tales funciones cognitivas.

Vygotsky (1978) citado en (León, 1997, p.17) hace referencia a diferentes tipos de mediadores, entre estos el lenguaje, los recursos mnemotécnicos, los símbolos algebraicos, la escritura, los esquemas, los diagramas, los mapas, los dibujos y otro tipo de signos convencionales que son más que creaciones artificiales de la humanidad construidas a partir de su cultura, y que para esta investigación son un aspecto de gran importancia en las argumentaciones de los estudiantes.

Es así entonces, como a través de la mediación se llevan a cabo situaciones donde los sujetos pueden interactuar con lo otro o con los otros, generando de esta forma aprendizajes colaborativos, desaprendiendo y reaprendiendo, y a su vez desarrollando funciones cognitivas superiores.

2.2.1.1 Mediación pedagógica

El término “mediación pedagógica” en esta investigación es entendido como el papel que desempeña el docente en el acto educativo cuando por medio de una buena orientación, al utilizar la metodología adecuada y haciendo seguimiento del proceso que está desarrollando logra que sus estudiantes desarrollen actividades argumentativas. Todo esto a partir de un permanente encuentro de saberes entre los actores del proceso (estudiantes y docentes) llevado a cabo en espacios físicos o virtuales dispuestos para ellos.

De esta forma, Tébar (2013, párr. 13) define al docente como un experto en organizar y formar por procesos, que sabe diagnosticar las disfunciones y dificultades de aprendizaje de los estudiantes, domina el método socrático, traduce las dificultades a cuestiones asequibles y atiende a la construcción social de la mente en su labor de elevar constantemente la zona de desarrollo próximo, a través de la experiencia de aprendizaje mediado.

2.2.1.2 Mediación Tecnológica

Este tipo de mediación se concibe en esta investigación como el medio dotado de virtualidad que permite al estudiante interactuar en tiempo real, de manera sincrónica y asincrónica con el conocimiento y sus pares. De esta forma puede solventar dificultades de manera inmediata y con la ayuda de personas externas vinculadas en red, trabajando colaborativamente.

“Las herramientas tecnológicas deben emplearse para permitir que los estudiantes comuniquen e intercambien ideas, construyan conocimiento en forma gradual, resuelvan problemas, mejoren su capacidad de argumentación oral y escrita y creen representaciones no lingüísticas de lo que han aprendido” (Domínguez, 2009, p.149).

De ahí que, por medio del uso de las TIC los estudiantes pueden dirigir su propio aprendizaje y de esta forma ejercer la autonomía en distintos escenarios de discusión y toma de decisiones sobre un problema específico que pueda ser analizado y resuelto a partir de los aportes de cada estudiante, y así puedan aprender de otros y con otros (Domínguez, 2009).

2.2.2 Ambientes virtuales de aprendizaje

Un ambiente de aprendizaje se concibe en esta investigación como aquel espacio físico o virtual diseñado por la docente, donde los estudiantes interactúan con los otros y lo otro (en conjunto con ideas, concepciones, sentimientos, emociones, habilidades y destrezas) de tal manera que puedan llegar a la apropiación del conocimiento y/o construcción de argumentos. Es así, como “en un ambiente virtual [...], el aprendizaje se convierte en un proceso continuo, que debe ser necesariamente autorregulado por quien aprende” (Giraldo, 2012, 204)

Los ambientes de aprendizaje deben ser planeados por el docente con el fin de crear las condiciones necesarias de tipo pedagógico y/o didáctico donde el estudiante pueda interactuar con otros para generar redes de aprendizaje. En estos espacios, la mediación del docente se complementa con el uso de plataformas, materiales educativos y toda una serie de recursos virtuales diseñados con el fin de permitir aprendizajes colaborativos.

De esta manera, cuando se hace referencia a un ambiente virtual de aprendizaje o a un ambiente de aprendizaje mediado por TIC, se hace referencia a una construcción artificial [...] producida en un proceso de objetivación de los otros, del entorno y de nosotros mismos. Por tanto, los ambientes mediados por TIC están integrados por: objetos físicos, objetos sociales y objetos abstractos, todos ellos supeditados al sentido que se le asigne a través de la acción (Giraldo, 2012, p. 198).

2.2.3 El aprendizaje mediado por TIC en matemáticas

Para esta investigación el aprendizaje virtual en matemáticas es entendido como el proceso apoyado por las tecnologías que brinda al estudiante la posibilidad de adquirir información, fortalecer sus competencias y habilidades para argumentar en matemáticas, al estar en contacto permanente con sus pares, el conocimiento y las TIC.

La potencialidad de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, radica entonces, en que ofrece al estudiante la interacción y manipulación de contenidos y problemas matemáticos, permitiendo modificar condiciones, controlar variables y manipular fenómenos. Con lo cual el estudiante tiene la capacidad de mejorar el pensamiento crítico y otras habilidades y procesos cognitivos superiores (Gibelli y Chiecher, 2003, p. 5).

2.2.4 El aprendizaje sociocultural

Desde la teoría sociocultural de Vygotsky el ser humano aprende en relación y con ayuda de otros. Por ende, desde esta investigación se hace un énfasis especial en ese encuentro entre estudiantes y el conocimiento matemático para el desarrollo de argumentaciones en matemáticas, aprovechando las potencialidades que brinda el contexto y/o ambiente presencial o virtual.

A partir de este aspecto, el aprendizaje sociocultural puede ser verificado mediante el fortalecimiento de la zona de desarrollo próximo²⁸, en virtud de que el apoyo socializador de los demás sujetos logra establecer canales de discusión-argumentación sobre categorizaciones específicas de la realidad contextual educativa, por tanto y, cuando los sujetos emplean sus estructuras mentales en procesos de adquisición y producción de conocimientos extraídos de la realidad, se logra verificar dicho aprendizaje (Soto, 2008, párr. 58).

2.2.5 El aprendizaje colaborativo

En esta investigación se entiende por aprendizaje colaborativo un enfoque para la enseñanza y el aprendizaje que involucra a grupos de estudiantes que trabajan juntos, de forma autónoma y en tiempo real para exponer sus argumentos sobre un enunciado, donde el docente nunca abandona el rol de guía, facilitador y moderador.

El aprendizaje colaborativo se basa en la idea de que el aprendizaje es un acto de naturaleza social en el que los participantes se comunican entre sí. Es a través del diálogo que se produce el aprendizaje²⁹ (Srinivas, 2010, p. 2).

²⁸ Es la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás, en este caso con una persona de mayor experiencia o con un adulto.

²⁹ Traducción propia.

2.2.6 El aprendizaje colaborativo mediado por ordenador CSCL³⁰

La estrategia de aprendizaje colaborativo, mediado por ordenador permite que dos o más sujetos interactúen para construir aprendizajes, a través de la discusión, reflexión y creación de argumentos, proceso en el cual las TIC actúan como mediadores tecnológicos.

De ahí que, se debe fomentar la colaboración entre los estudiantes, en los ambientes virtuales, para que a través de la formulación de preguntas, del planteamiento de actividades conjuntas, de enseñar a los demás y de observar como los demás estudiantes aprenden se desarrolle la interactividad (Stahl, Koschmann y Suthers, 2006).

2.2.7 La argumentación

La argumentación en esta investigación, se abordará desde la teoría de Toulmin (2003) ya que en su teoría se resalta la importancia que tienen los sujetos participantes en el acto argumentativo para decidir sobre el valor de los argumentos de acuerdo al contexto donde se llevan a cabo, y con ello, su capacidad de asignar razones, respaldos y conclusiones a las afirmaciones que son apoyadas con estos.

³⁰ Computer Supporte Collaborative Learning: disciplina de las ciencias de la educación que combina la noción de aprendizaje colaborativo con el potencial de las TIC para apoyarlo (Onrubia y otros, 2008, p. 235).

El criterio que lleva a la docente a optar por el esquema argumentativo de Toulmin en su investigación, se debe a que el modelo de Toulmin, adaptado a la práctica escolar, permite reflexionar con el estudiante sobre la estructura del texto argumentativo y aclarar sus partes, destacando la importancia de las relaciones lógicas que debe haber entre ellas. Es decir, posibilita una metareflexión sobre las características de una argumentación en matemática, profundizando sobre cómo se establecen las coordinaciones y las subordinaciones, sobre el uso de los diferentes tipos de conectores (adversativos, causales, consecutivos...), sobre la no-linealidad de los razonamientos (Sardá y Sanmartí, 2000, p. 408).

Para Toulmin (2007) La argumentación es una actividad compleja que comprende varias premisas, vinculadas entre sí y de forma modalizada con una conclusión, toda vez que se contempla unas posibles refutaciones, se aportan pruebas adicionales y se inscribe en el contexto dialógico de una interacción comunicativa inacabada citado en (Trujillo, 2007, p. 163).

En este sentido, resulta interesante que la argumentación de los estudiantes se fundamente en justificar o dar razones sobre una proposición o enunciado previo, no con la intención de persuadir, sino a través de un conjunto de argumentos coherentes convencer a sus compañeros de la validez de sus ideas.

Según el modelo de Toulmin (2003) las argumentaciones cotidianas no siguen el clásico modelo riguroso de la lógica de silogismos³¹. Para él, en una argumentación un sujeto argumentador presenta explícitamente una tesis, enunciado u opinión y expone una serie de argumentos³² o razones lógicas que con llevan a una conclusión, que confirma la tesis propuesta.

Partiendo de las ideas anteriormente expuestas, las argumentaciones presentadas por los estudiantes en esta investigación serán caracterizadas a partir del siguiente esquema argumentativo propuesto por Toulmin (2003). Ver ilustración 7.

³¹ Argumento que consta de tres proposiciones, la última de las cuales se deduce necesariamente de las otras dos (DRAE, 2012).

³² Un argumento es una secuencia de símbolos lingüísticos, un segmento de razonamiento que va desde los datos de partida hasta la conclusión, encadenando razones y objeciones, que establecen el contenido y la fuerza de la tesis que es presentada (Trujillo, 2007, p. 161).

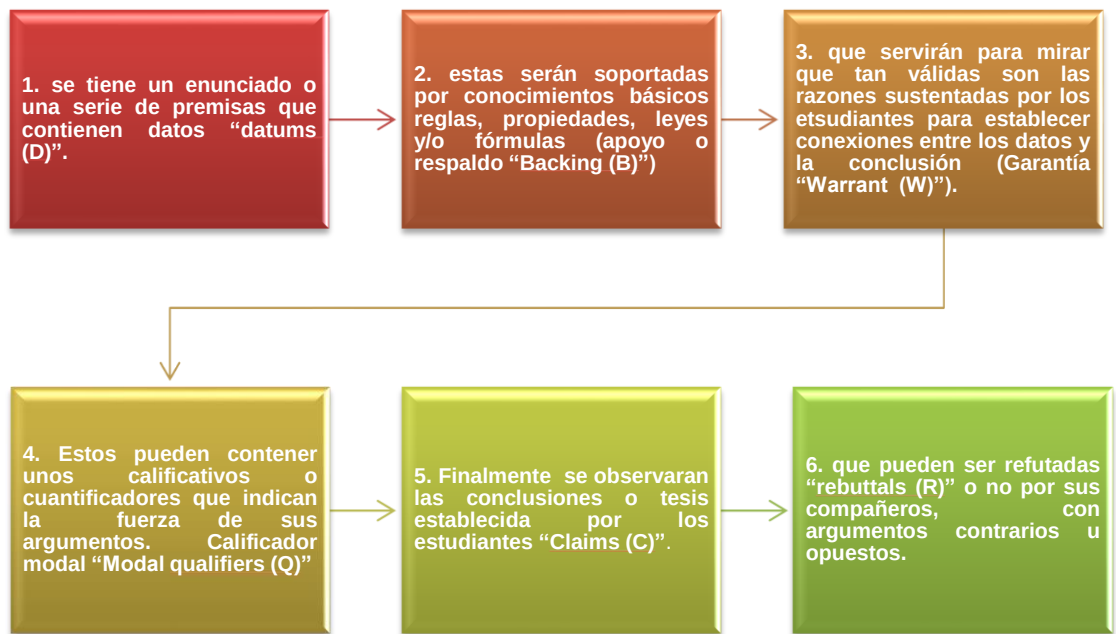


Ilustración 7. Esquema de Toulmin

Fuente: Adaptado de Toulmin (2003). Los usos de la argumentación.

Otros referentes teóricos que al igual que Toulmin (2003) conciben la argumentación desde una perspectiva social, donde el contexto es un factor determinante son: (Weston, 1994; Balacheff, 1999; Habermas, 1987; De Gambóia, 2009; Crespo, 2005), donde la argumentación es entendida como una actividad social, intelectual y verbal, teniendo al lenguaje como medio discursivo, mediante el cual los sujetos interactúan y exponen sus razones. La fuerza de estas razones está fundamentada principalmente por el contexto en el cual se desenvuelven los estudiantes.

2.2.7.1 La argumentación en matemáticas en ambientes virtuales de aprendizaje

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, principalmente en la geometría se ha hecho énfasis preponderantemente en el uso de software geométrico; ya que se ha evidenciado que los estudiantes presentan las mayores dificultades al momento de deducir propiedades de figuras, plantear y resolver demostraciones de tipo formal.

Por este tipo de situaciones presentadas en los procesos de la enseñanza de la matemáticas es que se ha optado por “el desarrollo de programas informáticos como Cabri Géomètre, que ofrece a los docentes la posibilidad de que en ramas de la matemática como la geometría puedan acercar a los estudiantes a razonamientos que resultan muy complicados de visualizarse sin estos instrumentos” (Aguirre, Codina y Lupiáñez, 2000, p. 3).

2.2.7.2 La argumentación en matemáticas

Una argumentación no es una demostración. Están separadas por vínculos de organización; para que un razonamiento sea considerado una demostración, este debe de ser válido (tener vínculos de validez) y tener como objetivo la verdad, mientras que la argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de pertinencia, tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto más cercano a las prácticas discursivas espontáneas Duval (1999) citado por Aguirre y otros (2000, p. 1)

Sin embargo es posible pensar desde el aula matemática en establecer una conexión entre las argumentaciones de los estudiantes y el acto demostrativo, donde la argumentación se convierta en el primer paso para que los estudiantes puedan interiorizar y llegar a realizar demostraciones.

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

“Una búsqueda, distintos caminos y sólo uno elegido”

"La verdadera educación no sólo consiste en enseñar a pensar sino también en aprender a pensar sobre lo que se piensa y este momento reflexivo -el que con mayor nitidez marca nuestro salto evolutivo respecto a otras especies- exige constatar nuestra pertenencia a una comunidad de criaturas pensantes."

Savater (2004)

En este capítulo se presenta el paradigma metodológico que guía esta investigación, el cualitativo, el enfoque crítico-hermenéutico a partir de los supuestos ontológicos y gnoseológicos, el método estudio de caso que brinda las herramientas para abordar el trabajo con los estudiantes, el contexto donde la investigación es desarrollada en conjunto con sus participantes y los instrumentos que permitieron a la docente recoger información de cada uno de los encuentros con los estudiantes. En adición a esto, se muestra el uso que los estudiantes dieron a la herramienta Argunaut/Digalo, la cual sirvió de soporte para que ellos construyeran las tareas matemáticas e interactuaran con sus pares y los argumentos.

3.1 Tipo de investigación y aproximación metodológica

El objetivo presentado en esta investigación, la orientan hacia una metodología de tipo cualitativa, ya que un investigador cualitativo estudia los objetos en sus escenarios naturales, en el caso de esta investigación, el lugar dispuesto para investigar es la Institución Educativa Maestro Arenas Betancur, lugar donde los estudiantes a diario se relacionan e interactúan con sus pares en un intercambio constante de saberes. Con la intención caracterizar las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes de grado noveno (9°) al hacer uso del mediador Argunaut/Digalo en relación a los significados que ellos les dan (Denzin y Lincoln, 2005).

“En la metodología cualitativa el investigador ve al escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o los grupos no son reducidos a variables, sino considerados como un todo”. (Taylor y Bogdan, 1987, p.3).

En esta investigación resulta importante después de tener una visión clara de la información arrojada realizar una descripción de lo que caracteriza las argumentaciones en matemáticas de los estudiantes en un contexto determinado, en este caso el aula de matemáticas y la virtualidad, de dos grupos de estudiantes de básica secundaria con historias de vida diferentes y condiciones socioculturales semejantes.

Cada uno de los estudiantes que forman parte de esta investigación tiene algo que contar a través de sus argumentos. Haciendo que la realidad a la que ellos se enfrentan cambie de forma dinámica, transformada por las actividades argumentativas de dos casos “Memories” y “Omegas”.

Dichos estudios de caso, emprenden procesos de participación e interacción al construir sus argumentos; aportando ideas, vivencias, pensamientos, intereses, estableciendo acuerdos, discrepancias, puntos de apoyo, garantías y cuantificadores; atendiendo al esquema de Toulmin (2003) como acción reveladora de los argumentos de los estudiantes.

En este sentido la docente investigadora desempeña el papel de facilitador, motivando a sus estudiantes para que logren sus argumentos, estableciendo enlaces entre la teoría y la práctica que se desarrollan en el aula de clase

Este espacio dispuesto para la investigación, llamado aula de clase de matemáticas, unido al ambiente virtual Argonaut/Digalo, brinda la posibilidad de generar procesos de interactividad entre los estudiantes y las argumentaciones construidas, las cuales son apoyadas mediante registros escritos, generando una mezcla de conocimiento, acción y valores.

3.2 Enfoque metodológico.

La tarea de la docente en esta investigación consiste en crear enunciados que promuevan en los estudiantes participantes, interacciones que los conlleven al diálogo, la participación y la generación de argumentos; haciendo con esto, que sus pensamientos y razonamientos sean dirigidos hacia el objetivo de la investigación, es decir que pongan en juego los diferentes procesos de pensamiento, que reflexionen sobre estos, que compartan ideas y sentimientos, que se ayuden mutuamente, vinculando sus conocimientos previos con lo aprendido y con los aportes de sus compañeros, para así potenciar la argumentación en matemáticas.

De ahí que, el enfoque metodológico con el que se pretende tener un acercamiento a la comprensión de los argumentos de los estudiantes en esta investigación es el crítico hermenéutico, tendiente al estudio de múltiples realidades, dos estudios de caso, cada uno conformado por 4 estudiantes que comparten el mismo contexto, aunque con formas de pensar muy distintas. Teniendo en cuenta los supuestos ontológicos propuestos por Guba y Lincoln (2002) basados en la forma en que los enfoques dan respuesta a preguntas básicas a partir de lo ontológico y lo gnoseológico.

3.2.1 Supuesto ontológico

Partiendo desde este supuesto en el enfoque crítico hermenéutico se consideran distintas formas de ver la relación entre los sujetos, el investigador y lo investigado, la sociedad y el contexto.

Los estudiantes participantes de esta investigación los Memories y los Omegas, presentan realidades múltiples que son influenciadas por el entorno en el cuál se producen las argumentaciones. “Los fenómenos solo pueden ser comprendidos si son estudiados en su ambiente natural, es decir en su contexto” (Lincoln y Guba, 1985) citado por (González, 2000).

3.2.2 Supuesto gnoseológico

Este supuesto está relacionado con la forma como se concibe y se genera el conocimiento, en la relación sujeto-conocimiento. Es relevante en esta investigación la interacción entre los estudiantes que participan de ella y los argumentos generados como parte de la actividad argumentativa.

Las interpretaciones son llevadas a cabo por la docente investigadora teniendo en cuenta la particularidad de los casos analizados, y estas dependen en gran medida del contexto real de los estudiantes y de las relaciones establecidas entre la docente, estudiante y el objeto de estudio (argumentaciones de los estudiantes en matemáticas). “Situando los hechos en un todo social, pues a través de la reflexión crítica se evidencia cómo se enmascaran las diferencias” Mardones (1991) citado (De Pinto y de Rojas, 2006, p.109).

3.3 Método: Estudio de caso

Si se toma como punto de partida una pregunta empírica que investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real, sobre todo cuando los límites entre el fenómeno y contexto no son claramente evidentes nos encontramos ante un estudio de caso (Yin, 2009, p.9).

Precisamente en esta investigación se presenta un estudio de caso que nace de un interés intrínseco de la docente por indagar sobre las argumentaciones en matemáticas de sus estudiantes. Por tanto, presenta una forma particular de ver la realidad circundante, con lo cual se hace necesario atender dichas particularidades y complejidades, para llegar a comprender la actividad argumentativa en matemáticas de los estudiantes en circunstancias importantes (Stake, 1999, pág. 11).

De este modo, se procura en esta investigación no perturbar la actividad cotidiana de los casos estudiados, a partir de la observación directa no participante de la docente y la revisión de grabaciones y registros de los estudiantes. Para así, tratar de vislumbrar el punto de vista de los estudiantes participantes en sus actos argumentativos (Stake, 1999).

Se trata pues, de un estudio intrínseco y colectivo de casos. El cual emerge de una necesidad que se presenta en la práctica docente en el aula de matemáticas que cuestiona a la docente, donde lo realmente importante es la necesidad de aprender sobre ese caso en particular. En esta investigación el estudio de caso está conformado por los “Memories” y los “Omegas”. Cada uno de ellos es un instrumento para aprender sobre las argumentaciones en matemáticas.

Desde ese punto de vista la docente optó por el método de estudio de caso porque el tema en cuestión además de ser específico, es de gran importancia para la práctica que desarrolla la docente, por tanto, brinda la posibilidad de interpretar las argumentaciones de los estudiantes dentro de su contexto, sin vulnerar sus espacios, ni entorpecer el desenvolvimiento natural de ellos, a partir de una observación directa no participante y registros de cada sección, vinculando la práctica argumentativa a la cotidianidad de los estudiantes.

En el marco de este escrito, se propone una categoría general y otras categorías específicas para guiar el proceso de investigación. La categoría general está representada por las argumentaciones de los estudiantes en matemáticas y en su cotidianidad. Las categorías específicas están representadas por los diferentes razonamientos que se presentan en la actividad argumentativa.

Categoría general	Categorías específicas	Descripción
Argumentaciones de los estudiantes	Argumentaciones en matemáticas:	Argumentos, razones, datos, fundamentos e ideas que apoyan y defienden la tesis dada al inicio o la refutan y que validan la actividad argumentativa de los estudiantes.
	Razonamiento inductivo	
	Razonamiento deductivo	
	Razonamiento abductivo	

Tabla 1. Categorías de la investigación

Fuente: elaboración propia.

3.4 Escenario y contexto investigativo

Esta investigación se desarrolló en la Institución Educativa Maestro Arenas Betancur sección bachillerato, de carácter oficial, académica, la cual se encuentra ubicada en el barrio Castilla, comuna cinco (5) en la Calle 98A carrera 65-120, perteneciente al núcleo 920 al noroccidente del Municipio de Medellín.

Los estudiantes de esta Institución pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. En su mayoría son hijos de madres cabeza de familia que son las encargadas de trabajar para dar sustento al hogar. De esta familia Maestro Arenas hacen parte alrededor de mil cuatro estudiantes distribuidos en dos sedes de la siguiente forma:

✓ Sede Primaria: quinientos ochenta y cuatro estudiantes, de ellos setenta se encuentran en transición, ochenta y seis (86) en el grado primero, setenta y tres (63) en segundo, ochenta y siete (87) en tercero, setenta y ocho (78) en cuarto, ochenta y uno (81) en el grado quinto y ciento nueve (109) en el grado sexto.

✓ Sede bachillerato: cuatrocientos veinte (420) estudiantes, de estos ciento nueve (109) se encuentran en el grado séptimo, noventa y dos (92) en el grado octavo, noventa y uno (91) en el grado noveno, sesenta y tres (73) en el grado décimo y sesenta y cinco (65) en el grado undécimo.

3.5 Participantes de la investigación

Esta investigación la conforman ocho estudiantes del grado noveno. Tres de ellos con una edad de catorce años (14), cuatro con quince años (15) y solamente uno con diecisiete años (17) , donde la motivación realizada por la docente en el aula de clase fue un detonante para que estos estudiantes vieran en esta investigación una oportunidad para mostrar sus debilidades y potencialidades en argumentos matemáticos, convirtiéndose este trabajo investigativo para ellos en un reto del cual participaron de manera voluntaria y autónoma, pero de antemano contando con el consentimiento de sus padres de familia. “Es fundamental obtener un permiso escrito de los padres cuando se trata de atender personalmente a niños concretos” (Stake, 1999, p. 58).

La docente tuvo a bien, hacer una convocatoria en los grados novenos de la institución para que los estudiantes conocieran y participaran de esta investigación, tratando de no ser excluyentes con ninguno de ellos. Lo primero que se le explicó a los estudiantes fue en qué consistía el trabajo exponiendo el tema motivo de esta investigación, cómo se trabajaría cada uno de los encuentros que ellos tuvieran con la docente, cuál era la función de la docente, y que al menos cada uno de ellos debía tener en sus hogares un computador con acceso a internet para dar continuidad a este proceso por fuera de las paredes de la institución, o de lo contrario asistir a la institución en los tiempos previstos para desarrollar la investigación y utilizar los computadores que esta posee al servicio de la comunidad educativa, por tanto, requerían de disponibilidad de tiempo fuera de la jornada escolar para los diferentes encuentros de tipo virtual con sus compañeros.

También se explica a los estudiantes que lo más importante para participar de esta investigación es que el trabajo a realizar sea de su agrado para no desistir en dicho proceso “si es posible, debemos escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas” (Stake, 1999, p.17).

De esta convocatoria decidieron participar ocho estudiantes que hacen parte de los diferentes grupos del grado noveno (novenos uno, novenos dos y novenos tres), distribuidos en dos casos los “Memories” y los “Omegas”.

La participación de estos ocho estudiantes facilita la observación de las situaciones presentadas durante la actividad argumentativa sumado a esto, el que cada uno disponga de un computador en sus casas conectado a internet posibilita la continuidad del desarrollo de los episodios y el hacer un seguimiento a la autonomía de los estudiantes.

Seguido a esto se envía con cada uno de los estudiantes participantes de esta investigación un escrito tipo consentimiento informado a sus acudientes, para que además de que estuvieran enterados de la aplicación y ejecución del proyecto de investigación, dieran el permiso, para que los estudiantes pudieran asistir a los encuentros a realizados dentro y fuera de la jornada escolar.

3.6 Técnicas de investigación

La investigación cualitativa consiste en una serie de prácticas que convierten al mundo en una serie de representaciones, incluyendo notas de campo, entrevistas, conversaciones, fotografías, grabaciones, y memorádums personales. (Denzin y Lincoln, 2005).

Para recoger datos y obtener información de la actividad argumentativa de los estudiantes además de la observación no participante, se implementa el programa Argunaut/Digalo al igual que registros escritos y grabaciones de las interacciones entre los estudiantes que hacen parte de cada uno de los casos (Memories y Omegas). Esto hizo posible obtener información de sus argumentos en cada uno de los encuentros, pensamientos, sentimientos, emociones y trabajo colectivo. Es así, como en “un estudio de caso es posible obtener evidencia de forma variada donde además de los documentos, se emplean las entrevistas, artefactos, y observaciones participante-no participante” (Yin, 2009).

3.6.1 La observación

La observación apoyada de un registro escrito permite focalizar la atención en aspectos relevantes (patrones o paradigmas de búsqueda) en los actos argumentativos de los estudiantes, particularmente cuando el tiempo disponible para el trabajo de campo no es muy amplio (Sandoval, 1996, p. 139)

En esta investigación la docente investigadora no desarrolla ningún tipo de interacción con los estudiantes después de dar inicio al desarrollo de las tareas matemáticas, esta observación directa no participante permite integrar aspectos como: los procesos de interactividad entre los estudiantes participantes de la investigación los casos “Memories” y “Omegas”, la manera en que comparten conocimientos, sentimientos encontrados, formas de razonar y diversos comportamientos.

3.6.2 La Entrevista

La entrevista “es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples” (Stake, 1999, p. 63). Basada en quince (15) episodios, categorizados de acuerdo a 3 tipos de razonamiento (Razonamiento inductivo, razonamiento deductivo y razonamiento abductivo) donde los casos “Memories” y “Omegas” tienen la misma posibilidad de participar.

Las respuestas dadas por cada estudio de caso, son registradas y grabadas por un integrante del caso, que hace las veces de secretario del equipo. Todo esto es un complemento a los registros escritos de la docente. El contenido de las preguntas es estructurado y con base en los objetivos de la investigación.

Para la realización de las entrevistas se tiene un ambiente virtual y físico (aula de clase), donde cada uno de los casos Memories y Omegas tienen las tareas de los diferentes tipos de argumentos a desarrollar impresas y en forma de mapas en el programa Argonaut/Digalo, los casos de estudios disponen cada uno de un portátil con cámara y micrófono integrado en el cual desarrollan sus argumentos, realizan las grabaciones y complementan con el registro escrito por un estudiante asignado para ello.

3.7 Desarrollo y fases de la investigación

A continuación se presentan cada una de las fases en que fue abordada esta investigación, partiendo de la reflexión de la práctica de la docente hasta la aplicación del instrumento diseñado para obtener información sobre las argumentaciones de los estudiantes que participan de este proceso en el ambiente diseñado para ello.

Se parte de que una de las cualidades principales de los investigadores cualitativos es la experiencia de saber, lo que conduce a una comprensión significativa, a reconocer las buenas fuentes de datos, y la de comprobar de forma consciente o inconsciente, la veracidad de lo que ve y la solidez de sus interpretaciones (Stake, 1999, p.51).

3.7.1 Fase 1: Motivación y convocatoria de los participantes

Inicialmente la docente explica a los estudiantes del grado noveno (9°) en una de sus clases de matemáticas la intención de desarrollar esta investigación en la Institución Educativa Maestro Arenas Betancur, en la que la cual se trataba de hacer un estudio sobre sus argumentaciones en matemáticas en relación con el contexto.

A la semana siguiente realiza una invitación formal donde les comenta a los estudiantes que para ella es de gran importancia que cada uno de ellos conozca cuál es su nivel argumentativo en matemáticas, su relación con la forma en que ellos argumentan en una situación dada, en otras palabras que identificaran sus fortalezas, debilidades en cuanto a su capacidad crítica y argumentativa en matemáticas. Pero que para esto era importante que se sintieran a gusto realizando esta actividad, para que tuviera el desarrollo adecuado dentro y fuera de la institución.

También informa a los estudiantes que la investigación sería desarrollada en equipos de trabajo, donde cada uno de los equipos que la integraría debía pensar en un secretario, cuyo papel consistía en hacer los registros y grabaciones de cada uno de los encuentros, además, era necesario decidir un nombre para el equipo, tener acceso a internet en sus casas y crear una contraseña que fuera fácil para todos; con el fin de acceder al programa Argonaut/Digalo, en el cual se realizaría el proceso de argumentación con sus compañeros. Dicho trabajo tendría una duración aproximadamente de tres meses.

Después de toda la información brindada por la docente a los estudiantes del grado noveno (9°), diez de ellos quisieron participar con agrado en la investigación, y manifestaban estar muy contentos ya que era la primera vez que integraban una propuesta para ser presentada en una universidad de la que se podía llegar a publicar sus resultados en palabras de los estudiantes “serían famosos por sus argumentos matemáticos”.

De los estudiantes que decidieron participar de la propuesta se retiraron dos por cambio de domicilio y finalmente esta se desarrolló con ocho estudiantes distribuidos en dos estudios de caso los “Memories” y los “Omegas”.

3.7.2 Fase 2: Consentimientos informados

Por ser los estudiantes menores de edad “es fundamental obtener un permiso escrito (ver anexo 7) especial de los padres cuando se trate de atender personalmente a niños concretos” (Stake, 1999, p.58). Lo que hizo necesario que los padres de los estudiantes participantes de la investigación conocieran la propuesta en la que estarían directamente involucrados sus acudidos, los tiempos a desarrollarse y la forma en que esta sería abordada por los estudiantes.

Las razones expuestas son la causa principal para que la docente envíe a cada uno de los padres de familia de los estudiantes participantes de la investigación un escrito donde se presentaba el nombre de la propuesta, los porqués se desarrollaría y la función de cada uno de los estudiantes en esta, además la docente deja totalmente claro que el nombre de los estudiantes estaría de forma explícita en la investigación.

La respuesta de los padres fue buena ante la participación de sus hijos en este proceso investigativo, ya que según ellos expresaron “este tipo de actividades les ayudaría a mejorar su conocimiento, el razonamiento y la forma de expresar sus pensamientos en matemáticas, por esto sugieren que debería hacerse más a menudo”.

3.7.3 Fase 3: Instalación y Uso de la Herramienta Argunaut

Después obtener el permiso de los padres para que sus acudidos participaran en la investigación, la docente muestra paso a paso a los estudiantes la forma en que se debe instalar el programa, acceso y creación de los mapas para ingresar las argumentaciones.

Para ello, la docente investigadora entrega a uno de los estudiantes integrantes de cada caso una memoria que contenía el programa Argunaut/Digalo, del tal manera que ellos pudieran seguir paso a paso sus explicaciones y comprendieran el proceso de instalación del programa en el computador, sumado a esto lo primero que cada estudio de caso debía hacer después de instalado el programa consistía en generar un nombre y una contraseña la cual debían recordar siempre para acceder a cada uno de los episodios contenidos en la carpeta de trabajo.

El siguiente paso consistía en buscar dentro de un listado la carpeta diseñada (ver ilustración 8) por la docente e inscribirse a ella con un código asignado por la docente, dicha carpeta que contenía toda la información necesaria para el desarrollo de los argumentos durante el proceso investigativo e inscribirse a esta, para que posteriormente la docente aceptara sus inscripciones.

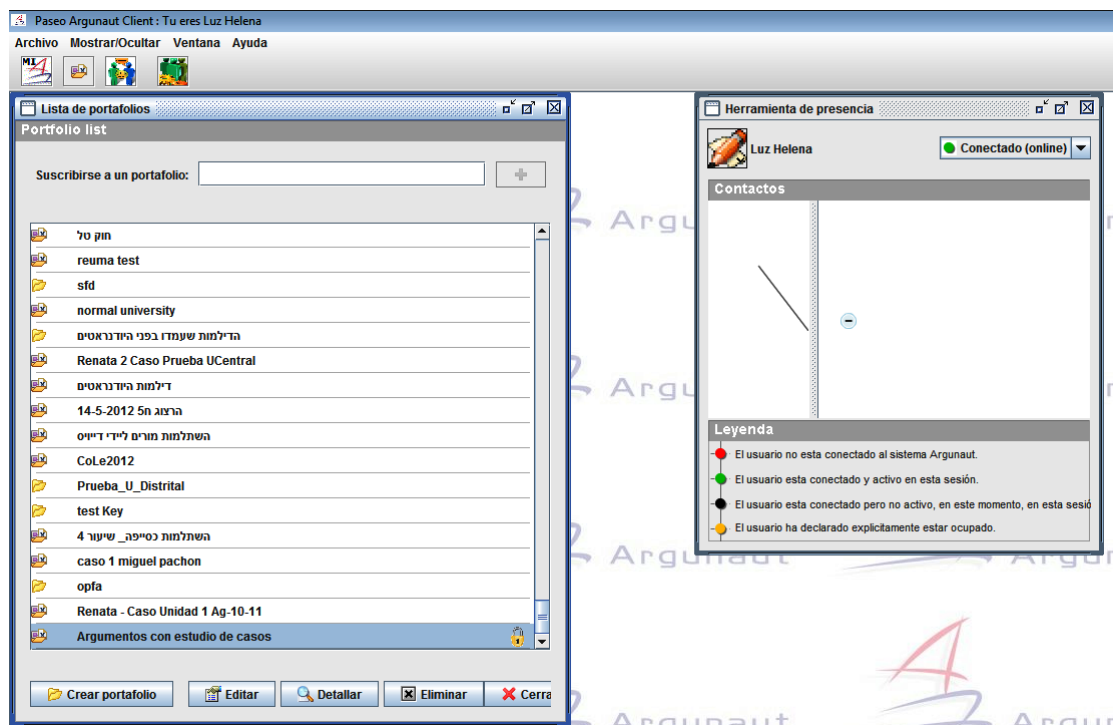


Ilustración 8. Portafolio

Fuente: elaboración propia

Cada estudio de caso (los Memories y los Omegas) contaban con un computador portátil conectado a internet donde trabajaron de forma independiente los episodios (ver ilustración 9), aportando sus argumentos por medio del programa Argonaut/Digalo.

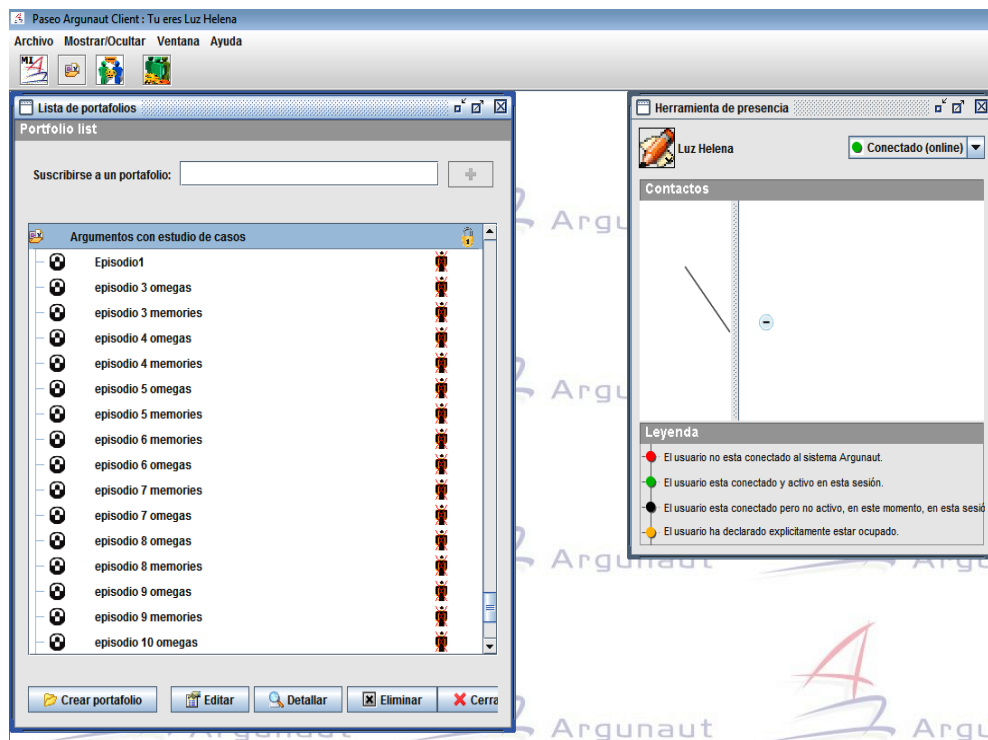


Ilustración 9. Mapa de episodios

Fuente: elaboración propia

En la parte superior de la herramienta se puede observar una barra que contiene formas y flechas, que constituyen la "ontología" del mapa. El valor predeterminado es de 7 formas (reclamación, información, comentario, idea, argumento, pregunta, explicación) y 3 flechas (oposición, apoyo y enlace o neutral). Cuando un participante quiere decir algo, elija la forma que considera más adecuada, hace clic en la pantalla y se abre una ventana con preguntas, información, explicación y reclamación.

Los estudiantes abordaron la construcción de los mapas, teniendo en cuenta que cada una de las figuras de la barra de herramienta tiene una función a la hora de redactar los argumentos (ver [ilustración 10](#)). Cabe resaltar que como se trata de un programa diseñado para argumentos y algunas funciones de tipo matemático, las construcciones con imágenes debían ser realizadas con ayuda de registros de tipo escrito, en papel y lápiz.

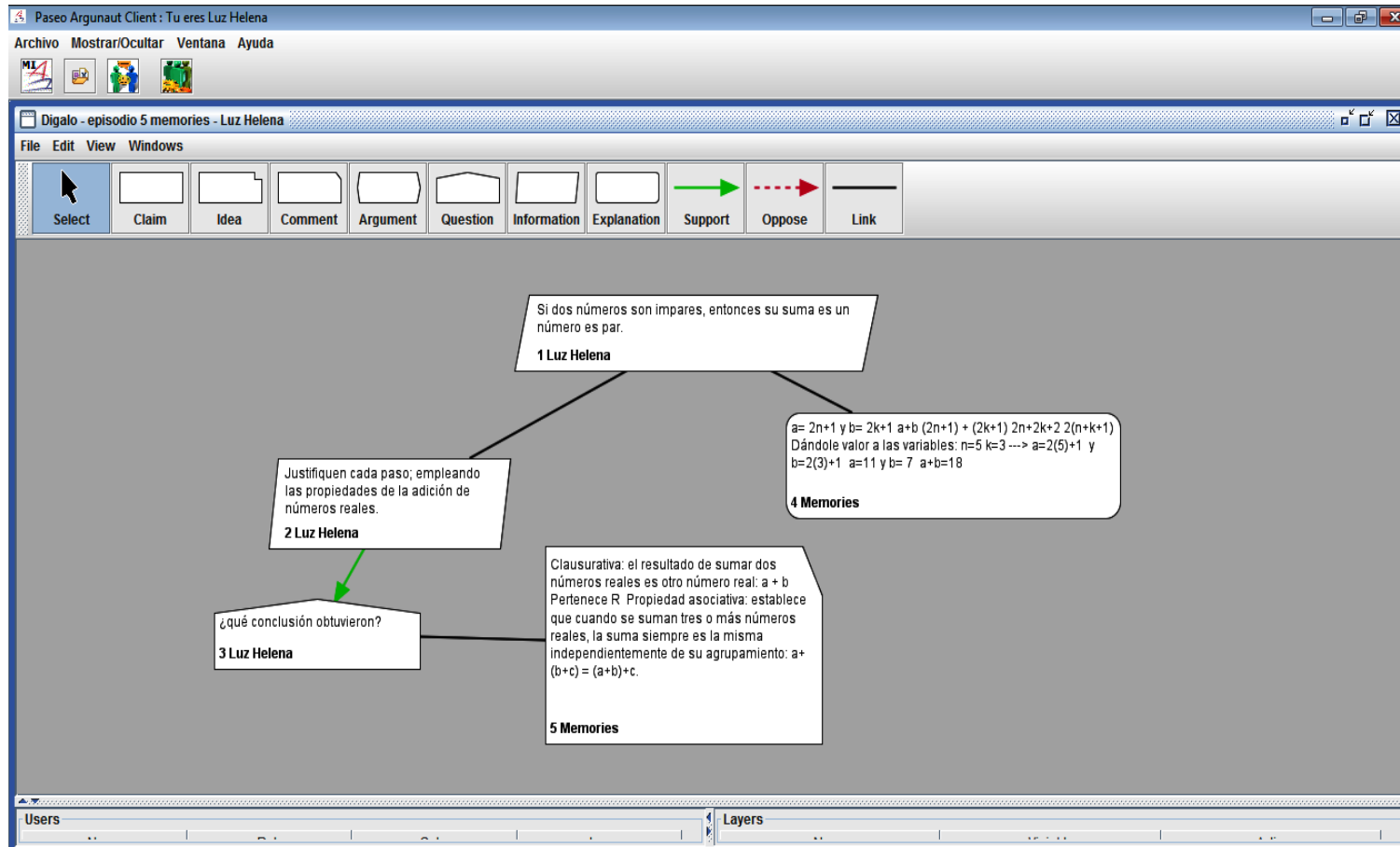


Ilustración 10. Ontologías

Fuente: elaboración propia

Así que además de expresar sus ideas y trabajar de forma colectiva, los estudiantes pueden generar preguntas para ser resueltas por sus compañeros y hacer una reclamación si no están de acuerdo con un argumento dado. Con el objetivo de realizar un trabajo colaborativo e interactivo, generar competencias argumentativas, cognitivas y de trabajo en equipo.

Después de que los estudiantes terminaban cada episodio el secretario de cada grupo entregaba a la docente los registros escritos, la grabación y se verificaba que el trabajo desarrollado en el programa fuera guardado.

En los quince (15) episodios desarrollados por los estudiantes, los datos recogidos fueron los siguientes:

- ✓ Registro en audio de las sesiones presenciales y en línea.
- ✓ Registro en el programa Argunaut de las argumentaciones de los estudios de caso.
- ✓ Registro escrito en papel de algunas argumentaciones de tipo deductivas realizadas por los estudio de caso.
- ✓ Encuesta de acceso, uso y efectividad del mediador Argunaut.

3.7.4 Fase 4: Intervención de la propuesta “Tareas Matemáticas”

Los episodios que conforman las tareas matemáticas se desarrollaron alrededor de 3 meses, 4 horas a la semana, dos de tipo virtual y dos de tipo presencial. Las secciones tanto de tipo virtual como presencial fueron de común acuerdo entre los estudiantes participantes en la investigación y la docente facilitadora de esta.

Durante la sesión presencial los estudiantes participantes se pusieron de acuerdo con la docente en las horas estipuladas para estar todos conectados a internet, con el fin de realizar los episodios correspondientes de manera sincrónica, de tal forma que la docente pudiera estar pendiente de cualquier dificultad que se le presentara a los estudiantes para acceder al programa y a la carpeta donde se encuentra la información necesaria para desarrollar cada episodio.

La ventaja de trabajar en este ambiente de aprendizaje es, que permite a la docente estar enterada del trabajo de los estudiantes, y hacer seguimiento a sus argumentos, actitudes y aptitudes para la argumentación en matemáticas, es decir, observar si todos los estudiantes estaban cumpliendo con las tareas propuestas y no sólo una parte de ellos, e incluso fomenta el trabajo autónomo y virtual, al brindar la posibilidad al estudiante de organizar su horario de trabajo, acceder al programa e interactuar con sus compañeros y los argumentos.

3.8 Episodios

De los quince (15) episodios (**Ver anexo 8**) desarrollados por los estudiantes, se describen cuatro de estos, debido a que en estos se encuentra la información necesaria para la caracterización de las argumentaciones de los estudiantes en matemáticas en relación al contexto objeto de esta investigación.

En las siguientes páginas se presenta un modelo de los episodios abordados sobre los razonamientos inductivos, deductivos y abductivos, desde el momento en que los estudiantes tienen la primera interacción con estos hasta que exponen sus argumentos e ideas encontradas, apoyadas en propiedades o pensamientos propios.

Estos episodios fueron diseñados de tal forma que los estudiantes dieran explicaciones, justificaran sus aseveraciones, expresaran en qué apoyaban sus afirmaciones, dieran a conocer sus puntos de acuerdo o desacuerdo y argumenten las afirmaciones y conjeturas que hagan. Mostrando las ventajas que tiene el programa Argunaut/Digalo para presentar argumentos de forma gráfica y organizada, develando las capacidades de los estudiantes para desarrollar habilidades argumentativas.

3.8.1 Episodio 1: Categoría “razonamiento inductivo”

En este episodio se quiere vislumbrar los argumentos inductivos desarrollados por los estudios de caso Memories y Omegas, atendiendo al esquema de Toulmin (2003). A partir del esquema de Toulmin (2003) la docente puede guiar a los estudiantes para que justifiquen un enunciado (apoyo), explicar sus razonamientos, establecer puntos de acuerdo y desacuerdo (refutaciones), muestren los referentes empleados (garantías) y expresen sus conclusiones.

Un modelo de este episodio es el que se observa en la ilustración 11:

Ana va al parque zoológico Santafé ubicado en la ciudad de Medellín, en su recorrido por la zona de aves observa que en cada una de las jaulas hay águilas de cola blanca así: en la jaula número uno hay dos águilas, en la jaula número dos hay cinco águilas, en la jaula número tres hay 8 águilas y así sucesivamente.

De tal manera que con el número de águilas en cada jaula se forma la secuencia: 2, 5, 8, 11, 14,...

a. Partiendo de que cada número de la secuencia representa las águilas que contiene cada jaula, ¿cuántas águilas hay en la jaula N° 15? ¿Cuál fue tu razonamiento? Descríbelo.

b. Ana considera que el número de águilas en cada jaula es posible obtenerlo mediante la ecuación $2.n$ donde n representa el número de jaulas (1, 2, 3, 4,...) ¿están de acuerdo o en desacuerdo con esta afirmación? ¿en qué se basan para decir esto?

c. Si no están de acuerdo, justifiquen cómo Ana puede obtener la ecuación que le permita deducir el número de águilas en cada jaula. ¿Por qué consideran que este proceso es el más acertado?, ¿En qué referentes o conceptos se apoyan para decidir que su explicación es válida?

Ilustración 11. Enunciado razonamiento inductivo

Fuente: elaboración propia

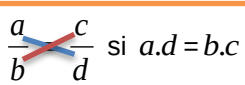
3.8.2 Episodio 2: Categoría “razonamiento deductivo”

En este episodio se pretende que los estudiantes muestren la forma en que argumentan enunciados de tipo deductivo, de tal manera que se pueda evidenciar un razonamiento formal en cada uno de los estudios de caso “Memories” y “Omegas”. Un modelo de este episodio se muestra en ilustración 12.

Manuel recordó esta regla de la aritmética:

Para saber si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$; son iguales, **se debe multiplicar en cruz** para encontrar $a.d$ y $b.c$

Si $a.d = b.c$, entonces las fracciones son iguales



Él se preguntó si esto siempre funciona, pero no sabe cómo argumentarlo.

a. Construyan un argumento utilizando las propiedades del producto de números reales, para justificar si la regla recordada por Manuel es válida o no. Escribe tus conclusiones.

b. ¿En qué propiedades basaron sus argumentos?

Ilustración 12. Enunciado razonamiento deductivo

Fuente:

Reformado

de

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L1_T4_text_fin_al_es.html

3.8.3 Episodio 3: Categoría “razonamiento abductivo”

En este episodio los estudios de caso Memories y Omegas deben emplear en sus argumentos conceptos del campo de la geometría y las matemáticas para convencer a sus compañeros sobre la validez de un teorema dado. Un modelo de este razonamiento se muestra en la ilustración 13.

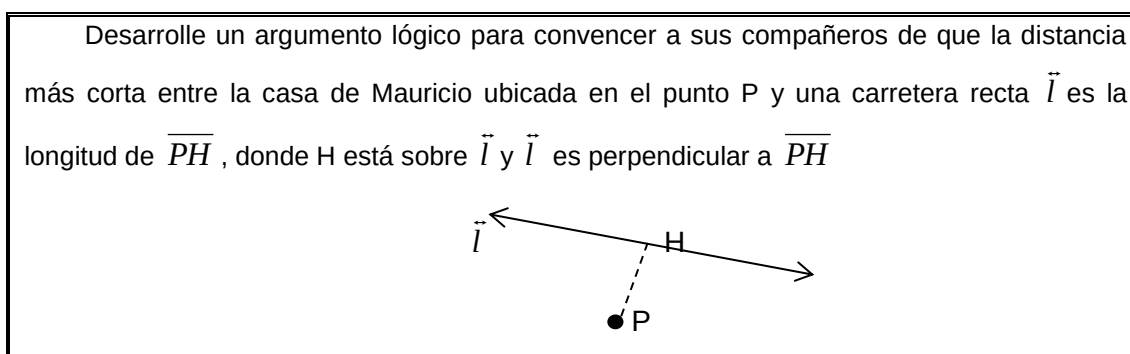


Ilustración 13. Enunciado razonamiento abductivo

Fuente: elaboración propia

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El encuentro de las voces, sentimientos y argumentos de los estudiantes.

“Para comprender el lenguaje de los otros no es suficiente comprender las palabras; es necesario entender su pensamiento.”

Lev Semionovich Vygotsky (s.f)

Para validar los resultados de esta investigación se tuvo en cuenta la triangulación de datos a partir del análisis, contrastación e interpretación de los episodios desarrollados por cada estudio de caso dentro y fuera del aula de clase de matemáticas, los registros escritos, las grabaciones de audio y video y la encuesta aplicada.

La triangulación, entendida como la exposición simultánea de múltiples y refractadas realidades. Cada una de las metáforas “trabaja” para crear simultaneidad más que secuencialidad o linealidad. Lectores y audiencias son entonces invitados a explorar visiones del contexto que compiten, para sumergirse en y fusionarse con nuevas realidades a comprender (Denzin y Lincoln, 2005, p.7)

A partir del análisis de la actividad argumentativa de los estudios de caso “Memories” y “omegas” en cada uno de los episodios con su respectiva categoría, la docente pudo obtener una comprensión de la forma en que ellos argumentan en diferentes situaciones.

Además, durante el desarrollo de esta investigación se presta atención a cada una de las expresiones utilizadas por los estudiantes durante el acto argumentativo al interactuar con los otros y con el conocimiento, donde cada uno de los estudios de caso intenta dar soluciones en forma de argumentos a diferentes situaciones matemáticas y de la cotidianidad con su propio estilo, basados en sus vivencias socioculturales y los aprendizajes obtenidos durante su recorrido por las aulas escolares.

En las siguientes páginas se presenta una descripción de la manera en que los estudios de caso “Memories” y “Omegas” abordan cada uno de los episodios con sus categorías respectivas.

4.1 El caso de los Memories

Los estudiantes que conforman este estudio de caso se caracterizan por su dedicación, constancia y compromiso con el desarrollo y entrega de las tareas académicas, en las diferentes clases de matemáticas se destacan por prestar atención a las sugerencias y explicaciones de la docente, se esfuerzan por dar cumplimiento a cada una de las actividades propuestas en clase, lo que favorece el desarrollo de los procesos argumentativos que se requieren en esta investigación.

Por medio de la participación constante presencial y virtual en cada uno de los episodios propuestos se pretende entonces que los estudiantes se vean enfrentados ante diferentes razonamientos, que les permitan interactuar, y dar a conocer a sus compañeros el conocimiento que cada uno posee entorno a la argumentación en matemáticas.

Inicialmente se realiza un análisis y categorización de las argumentaciones de los estudiantes y sus escritos teniendo en cuenta que la fuerza de sus afirmaciones se encuentra ligada a la relación existente entre los datos u afirmación y la justificación que aporten a cada uno de estos, combinando los contenidos semánticos “lenguaje formal o natural”, apoyadas en los referentes correspondientes o respaldos. Finalmente se procede a la organización de cada uno de los episodios en el programa en el programa Demmattoul³³ mostrando el esquema correspondiente a cada episodio argumentado por ellos, en concordancia con el modelo de Toulmin (2003).

³³ un software libre y de código abierto donde se trabaja en la construcción de mapas de argumentos basados en el modelo de Toulmin completo. Cuando se combinan dos argumentos de manera secuencial, el elemento que es a la vez conclusión del primer argumento y dato del siguiente, se etiqueta automáticamente como CD (Rodríguez y Gutiérrez, 2012).

En cada episodio se presenta la categorización de los datos a través de los códigos que surgieron durante los encuentros virtuales y presenciales con los estudiantes: razonamiento (Raz), justificación (Just), conclusión (Concl), Pregunta de información (Preg. Inf), Explicación (Exp), respaldo (Resp), refutación (Ref), afirmación (Afir). Esta codificación se llevó a cabo en el programa Atlas.ti³⁴.

Para analizar la pertinencia, fuerza y por ende la validez de un argumento dado por los estudios de caso se tendrá como referente a Toulmin (2003) donde en un argumento es indispensable que a partir de unos datos o un enunciado el estudiante llegue a una conclusión, justificando sus afirmaciones por medio de reglas, propiedades, conceptos o teorías que serán las garantías del argumento, y a su vez, esto contenido se convertirá en el respaldo del argumento; y Duval (1999) “La fuerza de un argumento va a depender principalmente de su adaptación a la situación [...] se trata de asegurar que la solución funciona o que puede funcionar”(párr. 10).

³⁴ Software desarrollado por Adobe Systems Incorporated, utilizado en la codificación de datos o información. “Codificar se refiere al proceso de asignación de categorías, conceptos o “códigos” a segmentos de información que son de interés para una investigación” Friese (2012).

4.1.1 Categoría razonamiento inductivo

Los estudiantes que conforman el caso interactúan hasta alcanzar la comprensión del enunciado, bien sea, porque cada uno de ellos se plantean preguntas y luego consiguen la respuestas a estas, o las clarifican e interiorizan con la ayuda de sus compañeros. De acuerdo con (Vygotsky, 1978 citado en León, 1997), esto les permite verificar sus argumentos y de esta forma obtener argumentos convincentes y con criterios de validez pertinentes y verificables, ajustados a su entorno y al nivel educativo que poseen en concordancia con las teoría de (Toulmin 2003). Ver tabla 2.

<i>El investigador</i>	<i>El caso Memories</i>	<i>Caracterización de los argumentos.</i>
Ana va al parque zoológico Santafé ubicado en la ciudad de Medellín, en su recorrido por la zona de aves observa que en cada una de las jaulas hay águilas de cola blanca así: en la jaula número uno hay dos águilas, en la jaula número dos hay cinco águilas, en la jaula número tres hay 8 águilas y así sucesivamente. De tal manera que con el número de águilas en cada jaula se forma la secuencia: 2, 5, 8, 11, 14,...	Después de leer el enunciado los estudiantes dan inicio al acto argumentativo.	A partir de esa interacción se puede observar cómo los estudiantes utilizan el <u>conteo o secuencia natural</u> para describir el número de águilas en cada una de las jaulas, principalmente en el aula 15. La validez de la conclusión se sustenta en los <u>ejemplos narrativos de los estudiantes</u>. A partir de <u>justificaciones articuladas a vivencias de la cotidianidad</u>. <u>La verificación y algunos elementos simbólicos (n)</u> refiriéndose al número de jaula cobran fuerza en sus argumentos.
Partiendo de que cada número de la secuencia representa las águilas que contiene cada jaula, ¿cuántas águilas hay en la jaula N° 15? ¿Cuál fue tu razonamiento? Descríbelo.	Estudiante 2. Ujum, me imagino que en la primera 2, en la segunda 5, en la tercera 8, en la cuarta 11...en las diferentes jaulas, esto quiere decir que hay varias jaulas y en cada jaula están las águilas que dice en la secuencia. Exp. Estudiante 1. No lo entiendo bien, porque dice que en las diferentes jaulas hay águilas de cola blanca y eso... ¿Pero cómo que de acuerdo a la siguiente secuencia? Preg. Inf. ¿O sea cuántas hay en cada jaula? Preg.Inf. Estudiante 4. Si seguimos con la secuencia que en la Jaula uno hay dos águilas, en la dos cinco, en la tres ocho y seguimos contando de tres en tres en la jaula número 15 debe de haber...um...piensa un momento ¡ya!, 44. Raz.	Los procesos de interacción y colaboración son relevantes a la hora de <u>tomar decisiones, pues lo hacen de manera conjunta</u>. En relación con Onrubia (2005) Los argumentos de los Memories <u>se basan en lo que piensan, lo que conocen, operaciones, conteos, descripciones, explicaciones, empirismo, y deducciones</u>. Finalmente después de hacer un conteo numérico, donde se establece a cada jaula un número de águilas, las estudiantes escriben como conclusión: Estudiante 3. Entonces en la jaula número 15 hay 44 águilas. Concl.

El investigador	El caso Memories	Caracterización de los argumentos.
Ana considera que el número de águilas en cada jaula es posible obtenerlo mediante la ecuación $2.n$ donde n representa el número de jaulas (1, 2, 3, 4,...) ¿están de acuerdo o en desacuerdo con esta afirmación? ¿En qué se basan para decir esto?	En la ilustración 17 se observa cómo los estudiantes argumentan que no es posible obtener el número de águilas en cada jaula con esa fórmula ya que si la n representa las jaulas y vale $2(2)=4$ y no existe esa cantidad de águilas en ninguna jaula.	Se evidencia que los estudiantes no tienen dificultad en uso de <u>argumentos de tipo algorítmicos</u>. Los discursos de los Memories se fundamentan en realizar <u>verificaciones y análisis</u> de la situación presentada en el enunciado, tratan en todo momento de <u>comprender con la ayuda de sus compañeros</u> cada una de las preguntas planteadas y los datos del argumento. Con el fin de dar <u>justificaciones al episodio</u> planteado por la docente. De ahí que se destaca la presentación de razones y relaciones involucradas en la solución de acuerdo a (Toulmin 2003; Vygotsky, 1978 citado por León, 1997).
Si no están de acuerdo, justifiquen cómo Ana puede obtener la ecuación que le permita deducir el número de águilas en cada jaula. ¿Por qué consideran que este proceso es el más acertado?, ¿En qué referentes o conceptos se apoyan para decidir que su explicación es válida?	Estudiante 3. Ella necesita generar una ecuación que le permita formar la secuencia. Entonces la secuencia es que va de tres en tres, va saltándose tres. Porque miren de 5 a 8 hay tres. Exp. Just. Estudiante 1. No de dos a cinco más bien, hay 3, de 5 a 8 hay 3, de 8 a 11 hay tres y de 11 a 14. ¿Entonces dice, como puedo obtener esa ecuación? Exp. Preg. inf. Estudiante 1. Ella quiere es realizar una fórmula para mirar por ejemplo la secuencia de pájaros. Exp. $2+3=5$.la segunda jaula. Just. $5+3=8$ la tercera jaula. Just. $8+3=11$...la cuarta jaula. Just. Estudiante 1. Esa es una fórmula que le permite a ella reconstruir la secuencia de pájaros vista. Ella lo que quiere es mirar toda la secuencia en una fórmula. Exp.	En el desarrollo de sus argumentos se evidencia que confunden la construcción de una ecuación con el algoritmo de la adición, al pretender mostrar que la sucesión de águilas de cola blanca corresponde a la "fórmula" que la reproduce. y esa fórmula es una operación dado el caso

1+1=2 la primera jaula. Just.

2+3=5 la segunda jaula. Just.

*La fórmula la obtenemos sumando la diferencia de
pájaros o aves entre una jaula y otra. Raz.*

Tabla 2. Argumentaciones inductivas Memories

Fuente: Elaboración propia

La actividad argumentativa de los estudiantes en este episodio, da lugar al esquema 14. A partir de este esquema y teniendo en cuenta las diferentes justificaciones y expresiones de los estudiantes en sus interacciones, se identifican y se describen las partes de cada uno de los argumentos contruidos. Los datos y expresiones se presentan de manera simplificada, pues en la tabla N° 2 han sido narradas y contempladas cada una de sus partes.

En cada parte de la actividad argumentativa de los Memories en esta situación, se evidencia la manera en que trabajando colaborativamente logran obtener la progresión aritmética, que corresponde al número de águilas en cada jaula, atendiendo con esto a la zona de desarrollo próximo. (Vygotsky, 1978 citado en León, 1997, p.17)

Además los Memories en cada uno de sus actos argumentativos hacen uso del lenguaje cotidiano, atendiendo a las teorías de (González y Montes de Oca, 2010; Toulmin, 2003; Balacheff, 2000) al utilizar expresiones como:

“va saltándose” para referirse a la razón de la progresión

“Mirar toda la secuencia en una fórmula” para referirse al término general de la progresión. Y para expresarlo utilizan palabras en vez de símbolos y ecuaciones matemáticas.

En los argumentos de los Memories además de evidenciarse el esquema completo de Toulmin (2003), se observa que sus expresiones están fuertemente marcadas por conectivos o calificadores modales utilizados para apoyar cada uno de sus argumentos. Ver tabla 3.

Se observa concordancia entre los datos propuestos y la conclusión planteada por los estudiantes, a partir de los conocimientos aprendidos en el aula de clase y lo vivenciado en el contexto escolar. Sus justificaciones fuertemente marcadas por sus vivencias cotidianas se fundamentan de forma coherente lo que permite validar toda la argumentación.

Después de leer el enunciado varias veces y establecer espacios de interactividad con sus compañeros finalmente los Memories logran describir la ecuación necesaria para concluir la actividad argumentativa de acuerdo con (Stahl, Koschmann y Suthers, 2006); esto se puede observar en la ilustración 12 elaborada en el programa Argunaut/Digalo.

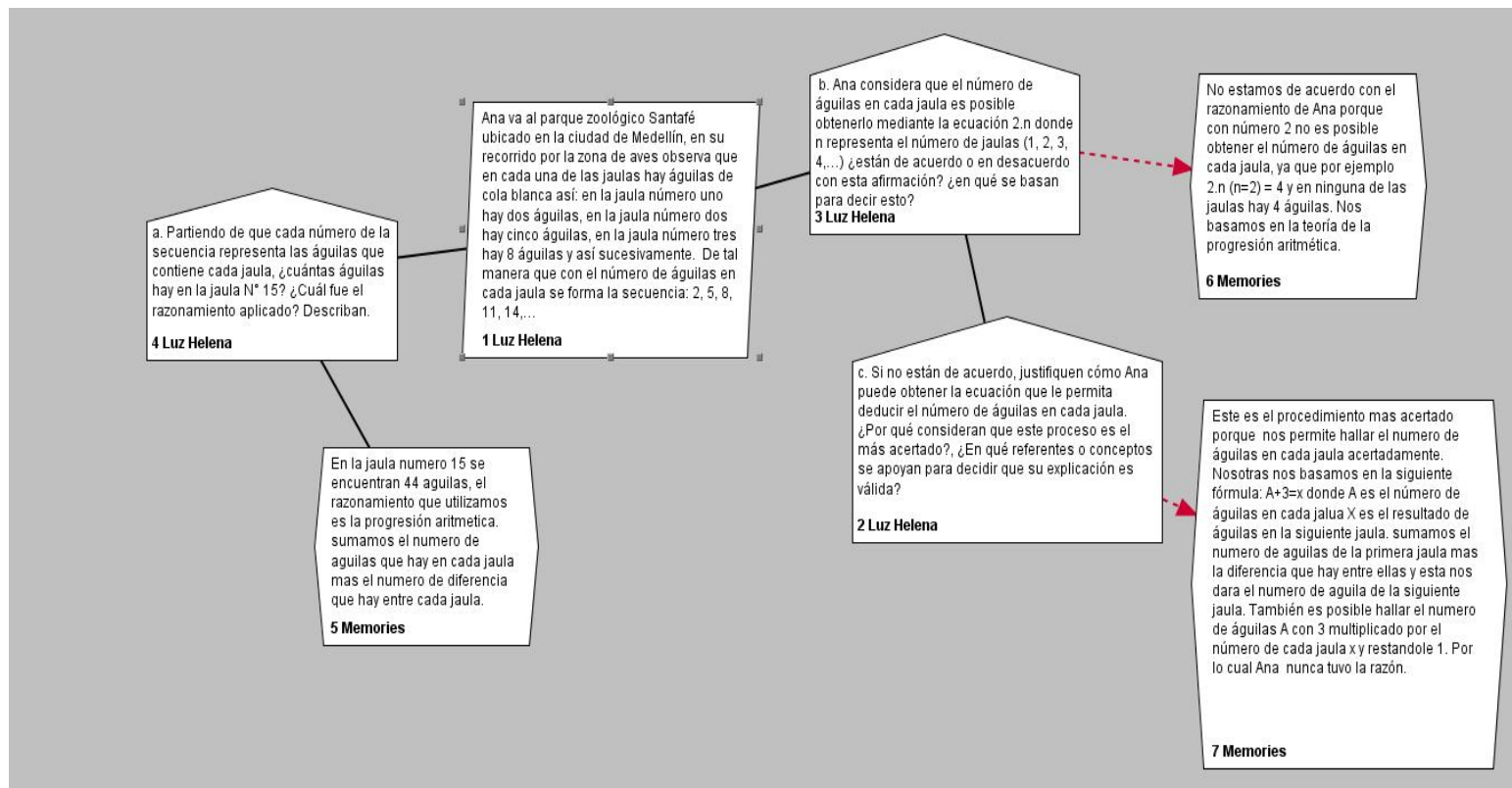


Ilustración 13. Primer episodio caso Memories
Fuente: Elaboración propia.

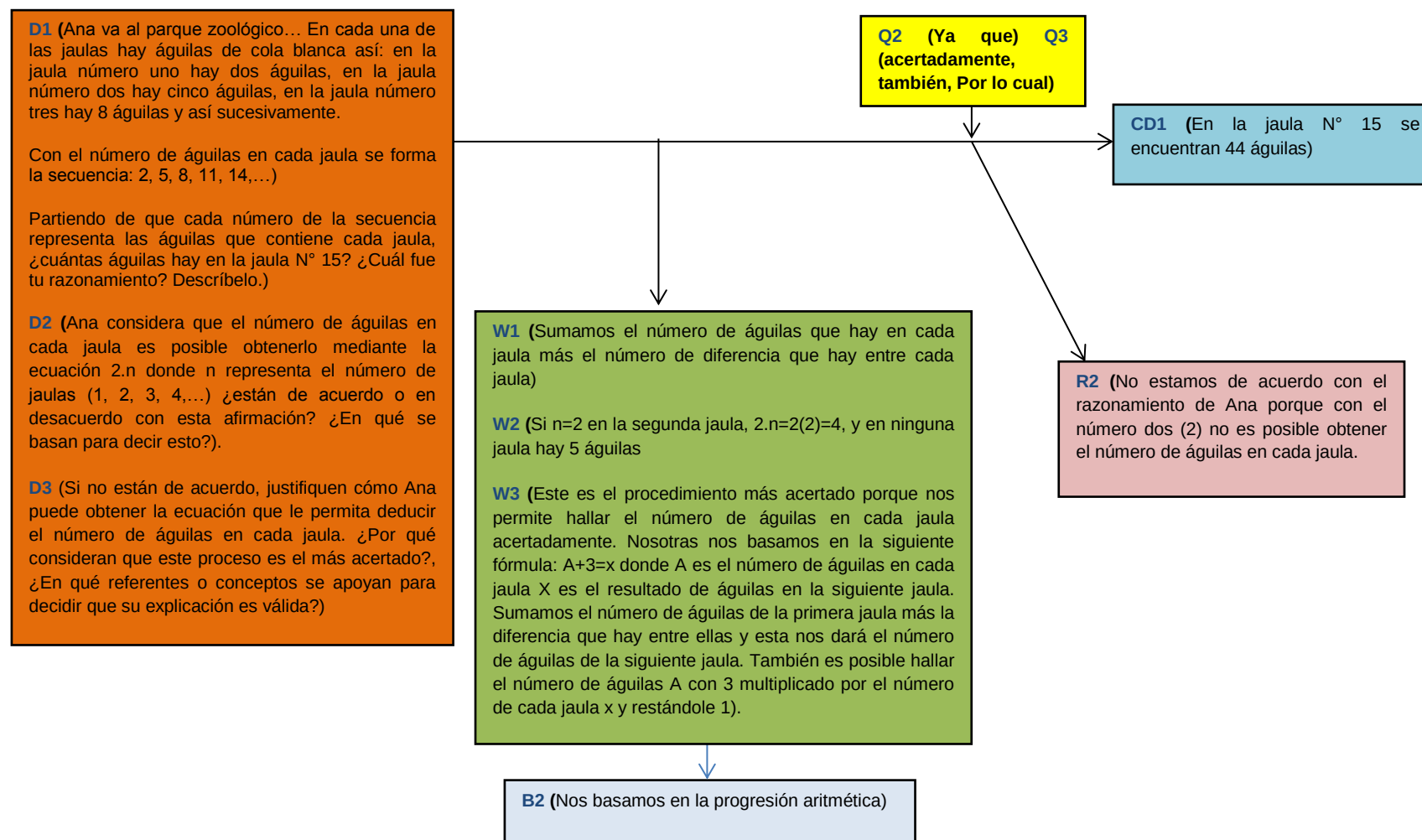
A partir de la tarea propuesta se pueden encontrar aspectos puntuales de la actividad argumentativa de los estudiantes (ver tabla 3), pues tratan en cada momento del episodio de sustentar sus conclusiones. En ese sentido los argumentos dados arrojan una serie de elementos que permiten dar soporte o concluir con la verificación de conjeturas.

Respaldo , conocimiento o apoyo	Refutaciones o contra- argumentaciones	Calificador modal	Conclusiones
	Justificaciones (garantías)		
Progresiones aritméticas y libro de historias matemáticas	No están de acuerdo con la ecuación 2.N para solucionar la progresión. Verifican: 2x(2)=4 Justifican: Ya que en la segunda jaula no existen 4 águilas	Ya que (conector más utilizado por los estudiantes para justificar un argumento) Por lo cual (conector utilizado para concluir) También (conector utilizado para mostrar una secuencia) Porque (utilizado para justificar un argumento) En ninguna (utilizado para refutar un argumento) acertadamente (utilizado para afirmar una idea).	El número de águilas en la jaula 15 es cuarenta y cuatro (44) La ecuación para la secuencia del número de águilas se puede obtener como: el número tres multiplicado por el número de jaulas x y restarle uno (tiene mayor sentido para los Memories el uso del lenguaje verbal (natural), que el simbólico y algebraico).

Tabla 3. Actividad argumentativa Memories episodio 1.

Fuente: Elaboración propia

Finalmente, a partir de los argumentos de los estudiantes analizados en el programa Argunaut y en sus conversaciones se construye el esquema mostrado a continuación, donde se visualiza la estructura del discurso argumentativo y sus partes atendiendo al esquema de Toulmin (2003). Ver la ilustración 14.



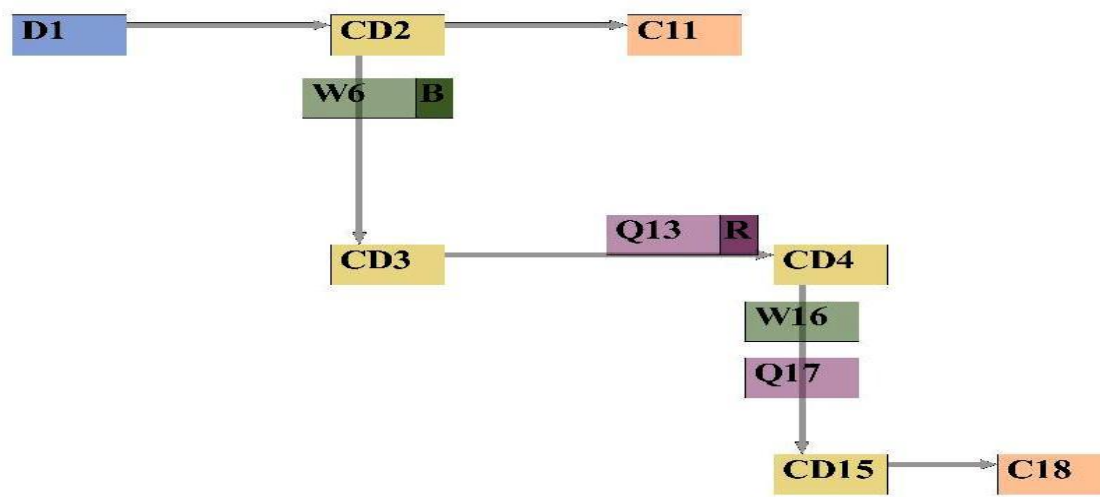


Ilustración 14. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Memories

Fuente: elaboración propia

4.1.2 Categoría razonamiento deductivo

Este episodio fue resuelto por los estudiantes mediante papel y lápiz debido a algunas limitaciones que presenta el programa Argonaut/Digalo para insertar gráficos e imágenes. Cómo se enunció la teoría de (Cañadas, 2007) Al enfrentarse a este tipo de enunciado los estudiantes muestran dificultades para realizar la demostración de tipo formal y justificar cada paso de acuerdo a las propiedades de la adición y el producto de números reales. Utilizan la verificación por medio de ejemplificación, comparando fracciones numéricas Ver tabla 4

El investigador	El caso Memories	Caracterización de los argumentos.
Manuel recordó esta regla de la aritmética: Para saber si las fracciones $\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0;$ son iguales, se debe multiplicar en cruz para encontrar $a.d$ y $b.c$ Si $a.d = b.c$, entonces las fracciones son iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si } a.d = b.c$ Él se preguntó si esto siempre funciona, pero no sabe cómo argumentarlo. Construyan un argumento [...] Manuel es válida o no. Escribe tus conclusiones ¿En qué propiedades basaron sus argumentos?	Después de leer el enunciado los estudiantes los estudiantes dan inicio al acto argumentativo. Estudiante 3. Mirando el enunciado: hay que construir un argumento, pero... ¿Por dónde empezamos? preg. inf Estudiante 2. ¿Y por qué no hacemos un ejemplo? Toma el lápiz y escribe: $\frac{4}{8} = \frac{4}{8}$ Estas fracciones son iguales Raz. Estudiante 1. Si multiplicamos en cruz da el mismo valor $4 \times 8 = 4 \times 8 = 32$, miren que sí funciona Exp. Estudiante 4. ¿Si multiplicamos otros números pasa lo mismo? Preg. Inf Estudiante 1. Yo creo que sí ehheh Piensa un momento y escribe Estudiantes 4. Entonces $\frac{4}{6}$, es igual a $\frac{2}{3}$. Si simplifico 4 me da 2, si saco mitad a 6 me da 3. Just Estudiante 1. Ah ya, si multiplicamos en cruz da 12. Si sirven esos números Exp. Just Estudiante 2. Toma el lápiz y escribe: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ahí está la propiedad conmutativa. Exp. Estudiante 4. ¿Si esa es la que dice que no el orden de los números no altera el resultado? Preg. Inf. Estudiante 1. ¿No habrá que escribir letras como en el enunciado? Preg.inf Estudiante 4. Esperen...Toma el lápiz y escribe: $\frac{d}{c} = \frac{m}{o}$	Los estudiantes limitan sus argumentos a expresiones numéricas, sólo <u>verificando que el enunciado se cumple sin llegar a generalizaciones</u> Por tanto, el argumento dado por los estudiantes apuntando a razonamientos de tipo deductivos no es válido. <u>Se basan en el empirismo</u> y no son capaces de obtener una conclusión válida de este tipo de argumentos, en relación con Fiallo y Gutiérrez (2007) Los argumentos deductivos de los Memories atendiendo a sus explicaciones y garantías se ven <u>fortalecidos en procesos aritméticos</u> con esto pretenden convencerse a ellos mismos que su conclusión es válida.

Tabla 4. Argumentaciones deductivas Memories

Fuente: Elaboración propia

Los “Memories” en esta categoría confunde la construcción de un argumento válido con la verificación de propiedades a partir de operaciones numéricas, se percibe dificultad en la generalización, ya que sus argumentos presentados no y las justificaciones en que apoyaron sus ejemplificaciones no son válidas de acuerdo con Balacheff (2000).

Finalmente los estudiantes concluyen:

a. $\frac{d}{c} \cdot \frac{m}{o} = \frac{p+r}{j} = \frac{L}{j}$

b. $\frac{m}{o} \cdot \frac{d}{c} = \frac{r+p}{j} = \frac{L}{j}$ Justificación y Conclusión:

La Regla es válida, basándonos en la Propiedad conmutativa pudimos demostrar que si se cumple, con esta propiedad comprobamos que el orden de los factores no altera el producto. Como ya dijimos en la propiedad conmutativa

Ilustración 14. Segundo episodio caso Memories

Fuente: estudiantes Caso Memories

En relación con la conclusión del episodio, se visualiza que los Memories no tiene en cuenta el papel condicional del enunciado “si $a.d = b.c$ entonces las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales” para dar inicio al acto argumentativo. A pesar de que al final escriben de forma general una fracción, no interiorizan que tienen que partir de dicha expresión y que por medio de propiedades de la multiplicación (uniforme, inverso multiplicativo, modulativa) podían concluir que las fracciones son iguales.

Así pues, los Memories adoptan el argumento como si se tratara de una simple verificación de la regla, cuando escriben “ $\frac{4}{6}$, es igual a $\frac{2}{3}$. Si **simplifico 4 me da 2, si saco mitad a 6 me da 3**” por lo que se dedican a comprobarla usando ejemplos numéricos en vez de expresiones algebraicas; considerando que dicho ejemplo es un argumento que justifica la validez de la regla recordada por Manuel (Crespo, Farfán y Lezama, 2010).

Por ende, los estudiantes tienen idea de que cómo deben dar inicio al argumento, pero sus explicaciones tienden siempre a la comprobación y no a la aplicación de reglas generales de la aritmética en este tipo de enunciados deductivos. De acuerdo con (Chico y Planas, 2011) Se nota que hay intensidad argumentativa de los estudiantes.

4.1.3 Categoría razonamiento abductivo

En esta tarea los estudiantes a partir de los conceptos vistos en clase tratan de aportar un argumento que logre convencer a sus compañeros de la veracidad del enunciado. En la tabla 5 se presenta la descripción y el análisis de este episodio, a su vez en la ilustración 16 se describen los elementos de la actividad argumentativa de los estudiantes en relación al esquema de Toulmin (2003).

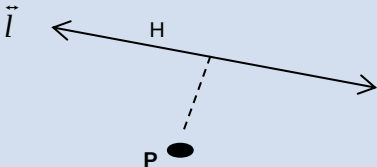
El investigador	El caso Memories	Caracterización de los argumentos
Desarrolle un argumento lógico para convencer a sus compañeros de que la distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$ donde H está sobre $\vec{l}$ y $\vec{l}$ es perpendicular a $\overline{PH}$ 	Luego de leer la proposición los estudiantes comienzan la práctica argumentativa: Estudiante 4. Pues es evidente que si la casa de Mauricio está en P, es más cerca caminar derecho que por cualquier otro lado. Exp Estudiante 2. Sí, pero ¿cómo lo escribimos? Preg. Inf Estudiante 3. Tracemos varias líneas de la casa de Mauricio a la carretera. Raz. Estudiante 1. Entonces hagamos lo que dice el compañero, refiriéndose al estudiante 3. Afir. Estudiante 4. Toma el lápiz y traza la línea mostrada en el gráfico. Raz Estudiante 1. Miren que se forma un triángulo con los lados desiguales. Raz. Estudiante 4. Sí, pero creo que es recto. Afir. Estudiante 3. ¿Cómo que recto? Preg. inf. Estudiante 4. Pues porque tiene un ángulo de 90°, por lo cual las rectas son perpendiculares y la profe nos explicó que tienen ángulos de 90°. Just Resp Estudiante 2. Ah...entonces por eso es un triángulo rectángulo Exp. Estudiante 4. De manera que es rectángulo. Afir.	Al momento de los estudiantes argumentar en su escrito que el camino PH es más corto se <u>fundamentan en la visualización y representación gráfica</u> trazada por ellos que el que ellos han llamado PB (ver <u>ilustración 23</u>), atendiendo a la teoría de Miyazaki (200), justificando su conclusión en <u>conceptos vistos en el aula</u> (teorema de Pitágoras), respaldando sus afirmaciones en lo enseñado por la docente, a pesar de los errores conceptuales que los Memories presentan. Mostrando con esto <u>argumentos apoyados en la autoridad</u> acuerdo con la teoría de (Weston, 1994) La verdad de un resultado se afirma después de verificarla para algunos casos. ya que en cualquier triángulo rectángulo la Hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud en un triángulo rectángulo y como lo enuncia dicho teorema $PB^2=PH^2+HB^2$

Tabla 5. Argumentaciones abductivas Memories

Fuente: Elaboración propia

En las situaciones descritas (Ver tabla 5) se presentan algunas características, de acuerdo con (Weston,1994; Balacheff, 2000). Entre las cuales se resaltan las expresiones que utilizan los estudiantes para apoyar sus ideas, razonamientos y explicaciones.

Es así como para referirse al teorema “Una línea recta es el camino más corto entre dos puntos” los Memories utilizan la expresión: “es más cerca caminar derecho que por cualquier otro lado” lanzando apreciaciones de modo a priori de manera empíricas y apoyados en la visualización gráfica.

En este episodio, cuando se le pide a los “Memories” desarrollar un argumento lógico que sustente el enunciado, ellos se apoyan en representaciones gráficas ver ilustración 15, para detectar propiedades inmersas en el enunciado en relación con las teorías de (Alfonso y otros, 2014; Fiallo y Gutiérrez, 2007), fundamentando sus justificaciones en conceptos presentados por la docente en el aula de clase

Al lanzar la expresión “se forma un triángulo con lados desiguales, pero creo que es recto” cambian la palabra “triángulo rectángulo” por “triángulo recto” y para respaldar dicho argumento dicen que “la profe les explicó que un triángulo recto es el que tiene un ángulo de 90° ” aunque inicialmente con errores de conceptualización, que finalmente son corregidos por el mismo estudiante que lo comete.

Se evidencia también, cierto razonamiento abstracto en los estudiantes pues de ellos surgen ideas como “agregar puntos de referencia” que les permitan develar situaciones imperceptibles a simple vista. La conclusión de los argumentos de los Memories se muestra en la ilustración quince (15) y continúan basando sus apreciaciones en el empirismo, lo que ellos llaman “por lógica” y patrones deducidos. Aunque de cierta forma relacionados con conceptos matemáticos. De acuerdo con (Alfonso y otros , 2014) (ver ilustración 15)

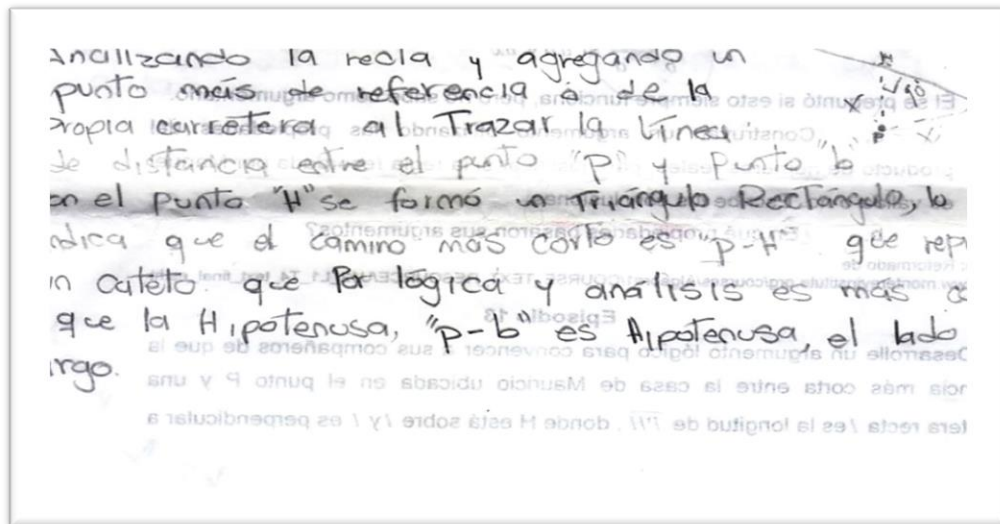


Ilustración 15. Tercer episodio caso Memories

Fuente: Estudiantes caso Memories

En este episodio se puede evidenciar el conocimiento que poseen los estudiantes del teorema de Pitágoras y que son capaces de aplicarlo en una situación dada. Por tanto, atendiendo al nivel formativo de los estudiantes se puede aceptar la veracidad de los argumentos aportados por ellos.

De manera más detallada se puede observar los elementos del esquema de Toulmin (2003), que utilizan los estudiantes, al expresar argumentos de tipo abductivo en la siguiente tabla ([ver tabla 6](#))

Respaldo conocimiento o apoyo	Justificaciones (garantías)	Calificador modal	Conclusión
Teorema de Pitágoras. Líneas perpendiculares Clases de triángulos.	Al trazar un línea del punto P, al punto B se forma un triángulo rectángulo, el cual tiene un ángulo de 90°, Lo que indica que el camino más corto es PH, que es un cateto del triángulo	Lo que indica que, entonces, por tanto, de manera que (utilizados por los estudiantes para concluir) porque, pues (utilizados para justificar) pero (utilizado para preguntar), por eso (utilizado para afirmar)	la distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$

Tabla 6. Actividad argumentativa Memories episodio 3

Fuente: Elaboración propia

La información mostrada en la tabla 6 se resume en el siguiente esquema argumentativo donde se exponen las partes de los argumentos empleados por los estudiantes en relación con Toulmin (2003). (Ver la ilustración 16).

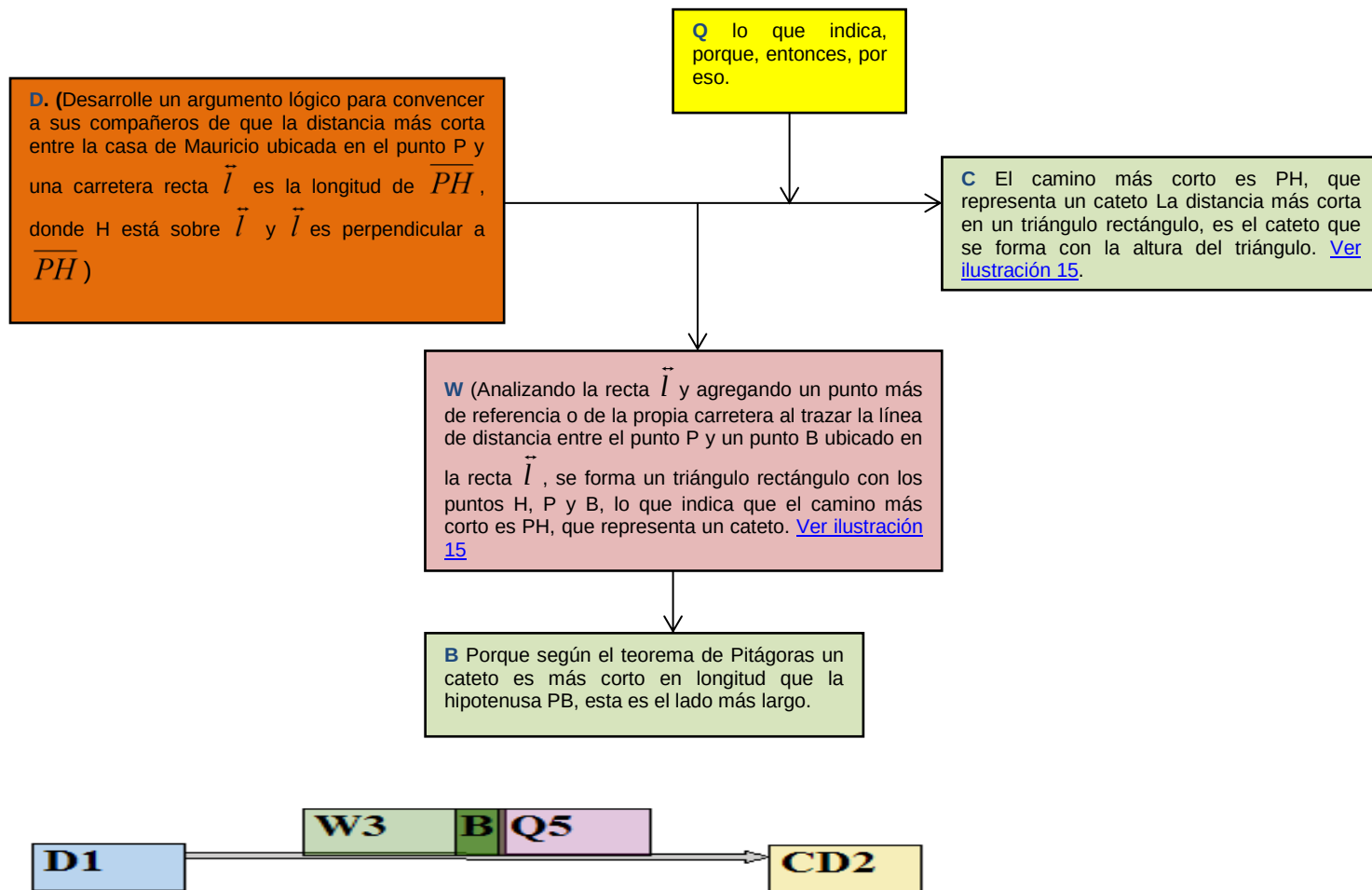


Ilustración 16. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Memories
Fuente: Elaboración propia

4.2 El caso de los Omegas

Los estudiantes que conforman este estudio de caso se caracterizan por ser estudiantes críticos, dispuestos a mejorar sus niveles de conocimiento y a reflexionar sobre su proceso de aprendizaje en matemáticas. Generalmente se muestran atentos para recibir las orientaciones dadas por sus docentes y demás compañeros del aula de clase, facilitando con esto el trabajo desarrollado en esta investigación.

Al igual que en el caso de los Memories en cada episodio se presenta la categorización de los datos a través de los códigos que surgieron durante los encuentros virtuales y presenciales con los estudiantes: razonamiento (Raz), justificación (Just), conclusión (Concl), Pregunta de información (Preg. Inf), Explicación (Exp), respaldo (Resp), refutación (Ref), afirmación (Afir). Esta codificación se llevó a cabo en el programa Atlas.ti³⁵.

³⁵ Software desarrollado por Adobe Systems Incorporated, utilizado en la codificación de datos o información. "Codificar se refiere al proceso de asignación de categorías, conceptos o "códigos" a segmentos de información que son de interés para una investigación" Friese (2012).

4.2.1 Categoría razonamiento inductivo

En el desarrollo de este episodio los Omegas establecen relaciones entre el número de jaulas del enunciado y la variable J asignada por ellos, pudiendo de esta forma construir la ecuación que les permite reproducir la secuencia de águilas observadas en cada una de las jaulas del zoológico. De acuerdo con (Alfonso y otros 2014)

De este episodio se resalta la relación que establecen los Omegas entre el lenguaje natural y el lenguaje simbólico, utilizando expresiones (calificadores modales que dotan de sentido a sus explicaciones y justificaciones) en relación a (Toulmin, 2003). Ver tabla 8.

En las próximas líneas se presentan la descripción de los argumentos de los estudiantes y las caracterizaciones de estos, en concordancia con el marco teórico y la teoría que fundamenta esta investigación. Ver tabla 7 e ilustración 18.

<i>El investigador</i>	<i>El caso Omegas</i>	<i>Caracterización de los argumentos</i>
Ana va al parque zoológico Santafé ubicado en la ciudad de Medellín, en su recorrido por la zona de aves observa que en cada una de las jaulas hay águilas de cola blanca así: en la jaula número uno hay dos águilas, en la jaula número dos hay cinco águilas, en la jaula número tres hay 8 águilas y así sucesivamente. De tal manera que con el número de águilas en cada jaula se forma la secuencia: 2, 5, 8, 11, 14,...	Después de leer el enunciado los estudiantes los estudiantes dan inicio al acto argumentativo.	Por medio del discurso argumentativo de cada estudiante se puede develar cierto grado de <u>comprensión y uso de ecuaciones</u> en una proposición dada que así lo requiera.
Partiendo de que cada número de la secuencia representa las águilas que contiene cada jaula, ¿cuántas águilas hay en la jaula N° 15? ¿Cuál fue tu razonamiento? Descríbelo.	Estudiante 2. Entonces coloco jaula 3, 4, 5, 6, 7...Raz. Estudiante 3. Como así, si no se necesitan todas las jaulas, apenas la jaula 15. Ref. Estudiante 1. Entonces coloco en la J 15, la jota equivale a 15, ¿cuánto es que es 3 por 15? Raz. Preg.Inf Estudiante 4. Es 45. Afir. Estudiante 1. ¿Sí? Preg. inf. Estudiante 2. entonces 45 menos 1 da 44. Exp. Estudiante 1. Ahora el número de águilas que hay en la jaula 15 es 44. Ese sería el resultado del punto. Concl	De acuerdo con Onrubia, (2005) en la interacción que ocurre entre los estudiantes que conforman el caso de los Omegas se puede apreciar cómo a partir de los argumentos aportados por cada uno de los ellos, poco a poco de <u>manera colectiva</u> van logrando la construcción de la secuencia de las águilas percibidas por Ana en el zoológico, hasta culminar con la fórmula que representa dicha sucesión.

El investigador	El caso Omegas	Caracterización de los argumentos
Ana considera que el número de águilas en cada jaula es posible obtenerlo mediante la ecuación $2.n$ donde n representa el número de jaulas (1, 2, 3, 4,...) ¿están de acuerdo o en desacuerdo con esta afirmación? ¿En qué se basan para decir esto?	<i>En la <u>ilustración 25</u> se puede apreciar el argumento de los estudiantes, donde manifiestan que no es posible obtener el número de águilas por medio de esta ecuación ya que al resolver la operación y sustituir el valor de cada jaula, en la jaula número dos (2) el resultado no coincide con la secuencia dada por el investigador.</i>	<i>Se observa que el argumento dado por los estudiantes es válido, y es verificado por medio de la ejemplificación.</i>
Si no están de acuerdo, justifiquen cómo Ana puede obtener la ecuación que le permita deducir el número de águilas en cada jaula. ¿Por qué consideran que este proceso es el más acertado?, ¿En qué referentes o conceptos se apoyan para decidir que su explicación es válida?	Estudiante 3. ¿No se puede con una potencia? Preg. Inf. Estudiante 1. ¿Entonces cuál sería la potencia? Preg. Inf. Estudiante 1. Bueno, ya creo saber cuál puede ser la fórmula. Afir. Estudiante 3. Escogiendo una letra que simboliza el número de jaulas. Raz. Estudiante 4. Podría ser J. Exp. Estudiante 1. Luego el número de aumento en la secuencia es 3, es el número que hace que la secuencia aumente. Exp. Estudiante 1. Ella trata de buscar una operación que dé como resultado, el número de águilas en cada jaula. Que en este caso es multiplicación y resta entre la secuencia. Exp. Just. Estudiante 4. El número de la diferencia es tres, porque todos se llevan tres. Just. Estudiante 2. Tres se multiplica por el número de jaulas, que sería J. Exp. Estudiante 1. Sí, por cada jaula se le resta uno, es decir, menos uno para que pueda dar el resultado del número de águilas. Just	<i>La práctica argumentativa de los Omegas se ve enriquecida por las justificaciones que hacen de cada una de sus afirmaciones, las explicaciones que son verificables y los conectivos textuales que dan fuerza a sus aserciones. De acuerdo con (Toulmin, 2003)</i>

Tabla 7. Argumentaciones inductivas Omegas

Fuente: elaboración propia

De las diferentes interacciones de los estudiantes se evidencia un trabajo colectivo, que les permitió avanzar en la utilización de lenguaje simbólico para representar cantidades, patrones y regularidades; apoyando sus argumentaciones con lenguaje cotidiano de acuerdo con (Domínguez, 2009).

En La ilustración 17 se hace referencia a la interactividad desarrollada por el caso de los Omegas en el programa Argonaut/Digalo sobre esta categoría, De este mapa se puede decir que sus conversaciones están fuertemente ligadas a las vivencias en su ambiente escolar, donde aparecen expresiones como “el número de aumento de la secuencia es tres (3)” para expresar la razón de la progresión; “la secuencia es...” para referirse a la sucesión o progresión. Además se evidencia que existe un error a la hora de respaldar sus argumentos, ya que se fundamentan en las progresiones geométricas, al creer que el hecho de multiplicar tres por el número de jaulas los está llevando a este tipo de concepto.

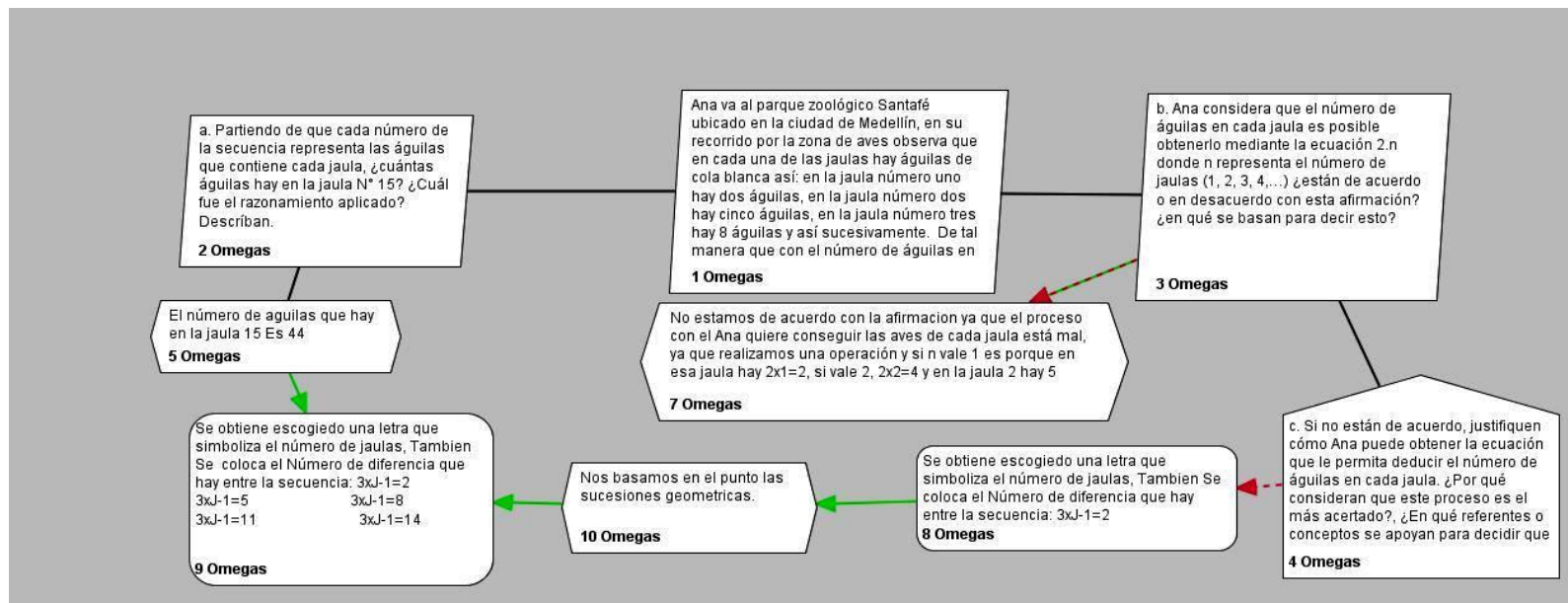


Ilustración 17. Primer episodio caso Omegas

Fuente: elaboración propia

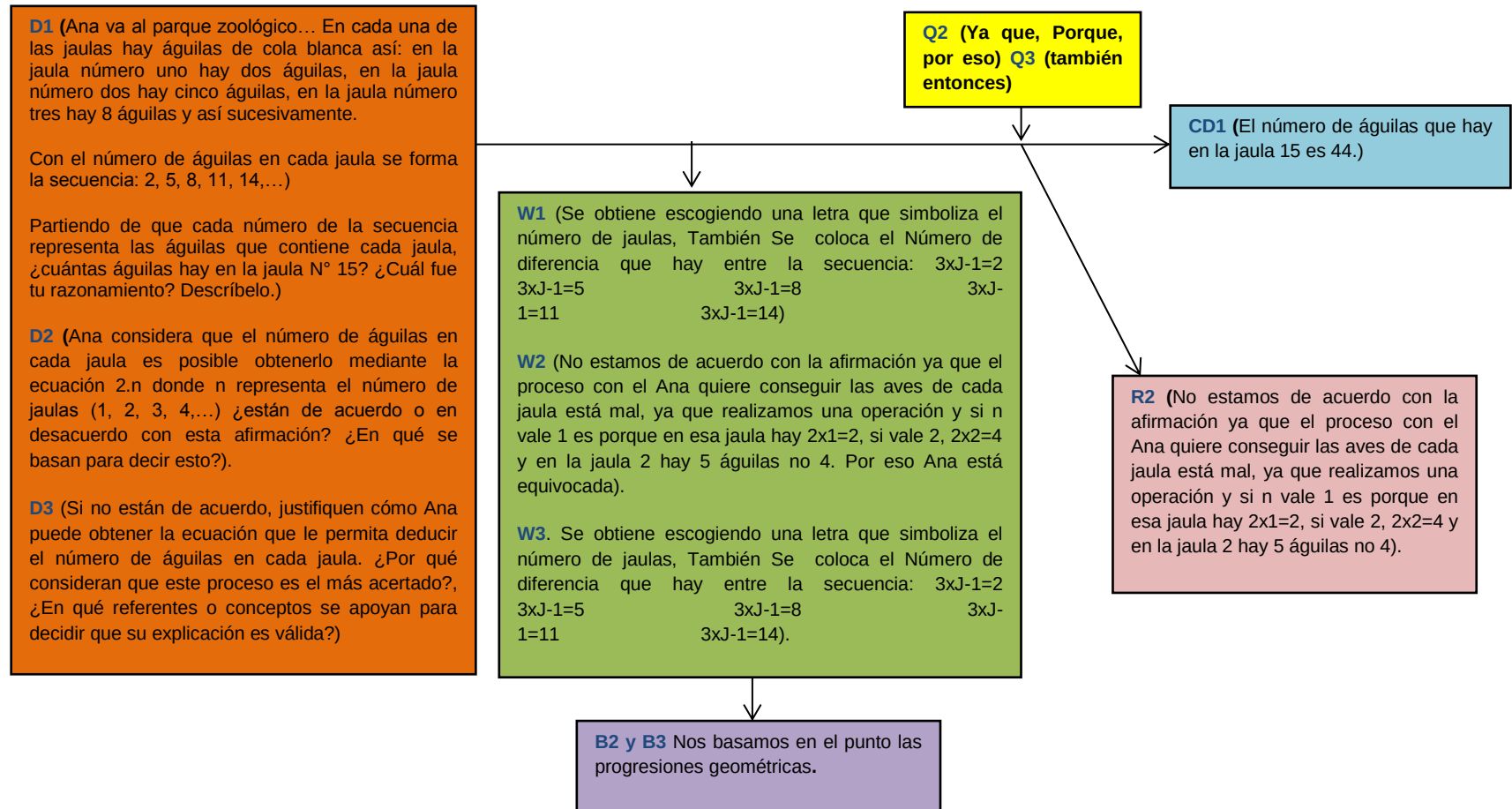
El encuentro entre los Omegas brinda para esta investigación elementos que hacen parte del esquema de Toulmin (2003) que enmarcan la actividad argumentativa de los estudiantes, estos se describen y analizan en la [tabla 8](#) teniendo en cuenta el [esquema 18](#) donde se visualizan sus argumentos, los registros escritos y las grabaciones de audio.

Respaldo, conocimiento o apoyo	Refutaciones o contra-argumentaciones	Calificador modal	Conclusiones
	Justificaciones (garantías)		
Sucesos geométricos (se observa confusión en el concepto de progresión geométrica y aritmética)	No están de acuerdo con la ecuación 2.N para solucionar la progresión. Justifican: Ya que si n vale 1, $2 \times 1 = 2$, si n vale 2, $2 \times 2 = 4$ y en la jaula 2 hay 5 aves.	Ya que (conector más utilizado por los estudiantes para justificar un argumento) entonces, bueno, luego, (conectores utilizados para concluir) también (conector utilizado para mostrar una secuencia) porque, es decir, así, ahora, (conectores utilizados para justificar un argumento) Pero (conector utilizado para refutar un argumento)	Entonces (45.-1) da 44, ahora el número de águilas que hay en la jaula 15 es 44. La ecuación se obtiene escogiendo una letra que <u>simboliza</u> el número de jaulas. También se coloca el número de diferencia que hay en la secuencia 3j-1

Tabla 8. Actividad argumentativa Omegas episodio 1.

Fuente: Elaboración propia

En esta actividad argumentativa los Omegas muestran fortalezas en cuanto a argumentos de tipo inductivo. Dichos elementos que intervienen en sus discursos argumentativos se muestran en la (ilustración 18) que recoge cada una de las partes de un argumento de los Omegas en relación Toulmin (2003).



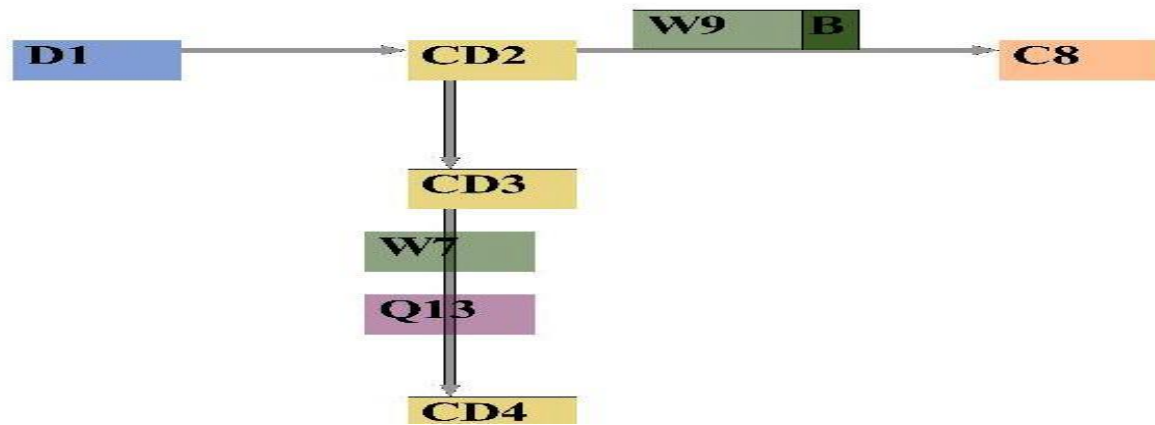


Ilustración 18. Mapa de argumentos razonamiento inductivo caso Omegas
Fuente: Elaboración propia

4.2.2 Categoría razonamiento deductivo

Del encuentro de los estudiantes se extrajeron los fragmentos más representativos para este episodio y se muestra una interpretación de sus argumentaciones, de acuerdo a los referentes conceptuales de esta investigación Ver tabla 9.

En esta tarea se observa que los estudiantes que conforman el caso Omegas pretenden llegar a la generalización de la conjetura por medio de la construcción de diferentes igualdades algebraicas, aplicando los conceptos de la propiedad uniforme y propiedad inversa de la multiplicación. En la argumentación de este enunciado los estudiantes tienen dificultades para explicar con claridad su razonamiento. Se identifica por lo menos un intento por parte de los estudiantes, para llegar a la conclusión enunciado, de acuerdo con (Chico y Planas, 2011) ver ilustración 19.

El investigador	El caso Omegas	Caracterización de los argumentos
Manuel recordó esta regla de la aritmética: Para saber si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$; son iguales, se debe multiplicar en cruz para encontrar $a.d$ y $b.c$ Si $a.d = b.c$, entonces las fracciones son iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a.d = b.c$	Estudiante 2. Haber dice que construyamos un argumento utilizando las propiedades del producto de números reales, para justificar si la regla recordada por Manuel es válida o no. Hay que construir un argumento, pero... ¿Por dónde empezamos? preg. Inf Estudiante 1. También dice que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a.d = b.c$ ¿Recuerdan cuando la profe nos explicó cómo comprobar si las fracciones son iguales? Eso es lo que piden aquí Raz. Resp. Estudiante 4. Sí, por ejemplo $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$, multipliquemos en cruz y verán. Afir. Estudiantes 1 y 3. $18 \times 7 = 126$ y $14 \times 9 = 126$, si son iguales, tienes toda la razón. Just. Estudiante 4. Entonces multipliquemos en cruz esas letras. Raz Estudiante 2. Yo lo hago, sería a por...si, $ad=bc$ Raz. ¿Y qué más hacemos? Preg. inf. Estudiante 4. Hagamos unos ensayos y escribe:	En esta práctica argumentativa los Omegas a partir de la <u>verificación de las conjeturas</u>, <u>apoyadas</u> en explicaciones de la docente (argumentos de autoridad) paso a paso se van adentrando en la generalización de sus argumentos, sus aseveraciones están fuertemente apoyadas en las propiedades del producto de los números reales (Weston, 1994).

$$ad = bc$$

$$\frac{ad}{d} = \frac{cb}{b}$$

$$\frac{ad}{d} = \frac{cb}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{cb}{db} \quad \text{Raz.}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

El investigador	El caso Omegas	Caracterización de los argumentos
Manuel recordó esta regla de la aritmética: Para saber si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$; son iguales, se debe multiplicar en cruz para encontrar $a.d$ y $b.c$ Si $a.d = b.c$, entonces las fracciones son	Estudiantes 4. Creo que es eso lo que necesitamos. Afir Estudiante 3. ¿Y las propiedades? Preg. inf Estudiante 1. Cancelativa es una. Afir Estudiante 2. ¿Cancelativa? ¿Esa cuál es? Preg.inf Estudiante 1. Es que se me olvida el nombre. Afir Estudiante 3. Yo recuerdo la modulativa, esa es el orden de los sumandos no altera el producto. Just Estudiante 2. Sumandos no, factores. Exp. Estudiante 4. Aquí no cambiamos el orden. Expl	

iguales	Estudiante 3. Miremos el cuaderno. Resp
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $a.d =$	Todos los estudiantes: Se quedan observando el cuaderno y comparan con lo que el estudiante 4 escribió. Raz.
$b.c$	Estudiantes 1. Eso se parece a la propiedad uniforme y creo que a la inversa.
Él se preguntó si esto siempre funciona, pero no sabe cómo argumentarlo.	Afir
Construyan un argumento utilizando las propiedades del producto de números reales, para justificar si la regla recordada por Manuel es válida o no. Escribe tus conclusiones ¿En qué propiedades basaron sus argumentos?	Estudiante 2. Entonces escribamos se aplica la propiedad uniforme que es multiplicar por el mismo número y la propiedad inversa. Concl

Tabla 9. Argumentaciones deductivas Omegas

Fuente: Elaboración propia

En el anexo nº10. Se presenta parte del razonamiento utilizado por los Omegas en la construcción del argumento, el cual en conjunto con la práctica argumentativa anterior devela los inicios de los Omegas en argumentos de tipo deductivo, pese a que faltó apoyar sus argumentos en otras propiedades del producto de números reales, se observa que interiorizaron dicho proceso, en relación con las teorías de (Alfonso y otros, 2014)

La solución de este episodio se basa en construcciones de conceptos interiorizados por lo Omegas, y sus imaginaciones, estableciendo relaciones entre sus ideas, lo explicado en clase por la docente y la interacción entre compañeros. Tratando de acomodar sus pensamientos con símbolos matemáticos y fórmulas, buscando generalizaciones en la conclusión del episodio.

En la tabla 10 se muestra de manera puntual los elementos del esquema de Toulmin (2003), que resultan de la actividad argumentativa de los Omegas en esta categoría.

Respaldo, conocimiento o apoyo	Refutaciones o contra-argumentaciones	Calificador modal	Conclusiones
	Justificaciones (garantías)		
Explicaciones de la docente	Justifican:	También (conector utilizado para mostrar una secuencia)	Si $ad = bc$ entonces las fracciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son iguales.
Cuaderno de apuntes	$ad = bc$ $\frac{ad}{d} = \frac{cb}{b}$	Por ejemplo (utilizado para justificar un argumento)	
Propiedad uniforme e inversa del producto de números reales.	$\frac{ad}{d} = \frac{cb}{b}$ $\frac{a}{b} = \frac{cb}{db}$ $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$	Entonces (Utilizado para afirmar un argumento o concluirlo)	

Tabla 10. Actividad argumentativa Omegas episodio 2.

Fuente: Elaboración propia.

La ilustración 19 recoge las partes del esquema de Toulmin (2003), evidenciadas en los argumentos de los estudiantes.

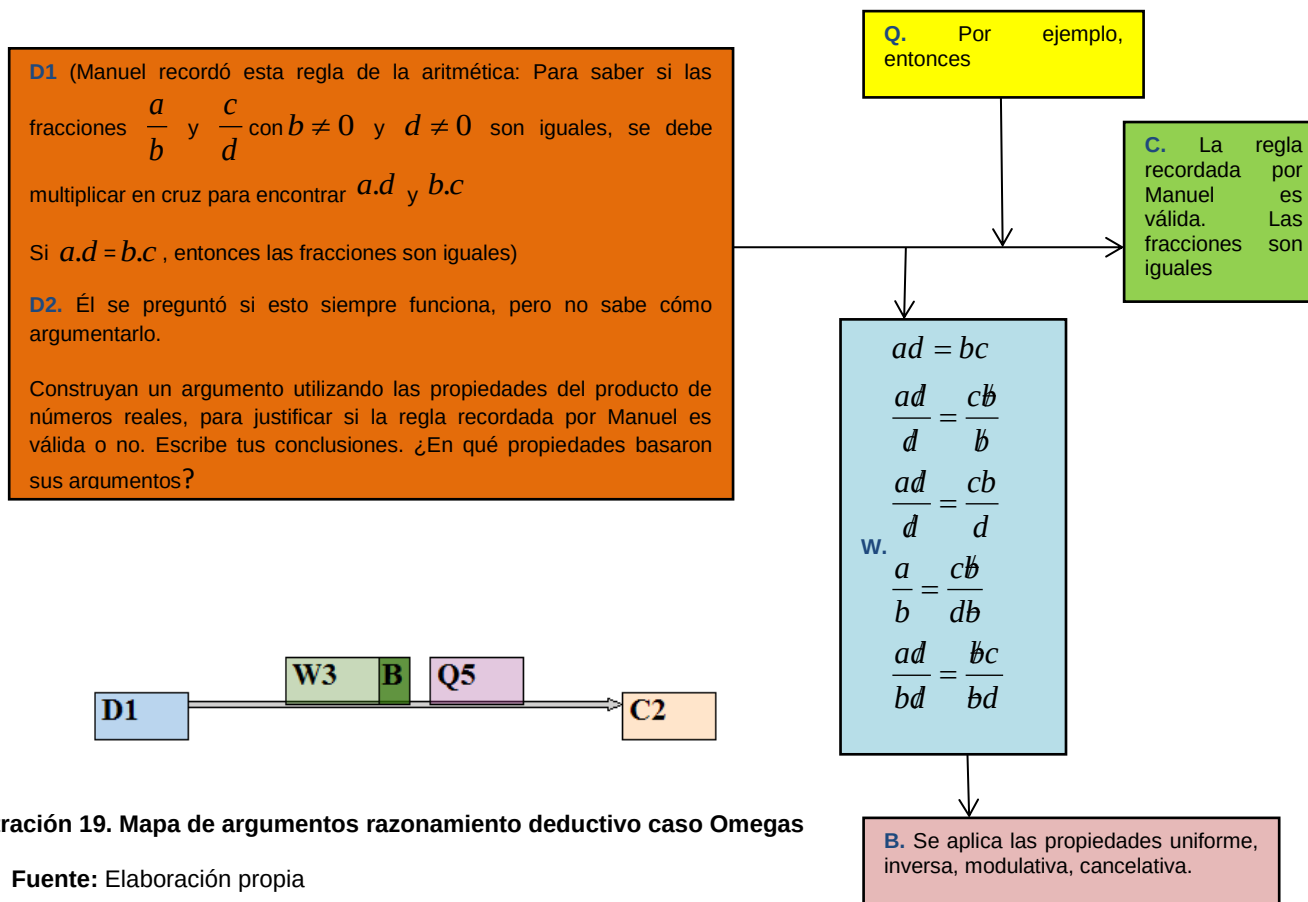


Ilustración 19. Mapa de argumentos razonamiento deductivo caso Omegas

Fuente: Elaboración propia

4.2.3 Categoría razonamiento abductivo

En este episodio los Omegas se esfuerzan por construir un argumento que convenza a sus compañeros de que la menor distancia entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$, donde H está sobre $\vec{l}$ y $\vec{l}$ es perpendicular a $\overline{PH}$.

La validez de la conclusión del argumento se sustenta en el teorema de Pitágoras, aunque hacen mal uso en la representación de este, al escribir los catetos como $(H+M)^2$ y $(H+P)^2$ Ver tabla 11.

En el análisis del episodio presentado en la tabla 11 y la tabla 12 se evidencia que los Omegas justificaron este episodio apoyándose en aspectos particulares como: la visualización, conceptos y propiedades aprendidas y explicaciones de la docente (ver ilustración 20). En relación con (Weston, 1994; Alfonso y otros, 2014).

Inicialmente trazan una línea diagonal del punto P a un punto de la carretera llamado por ellos M, y construyen un triángulo rectángulo, justifican que es un triángulo rectángulo porque la recta $\vec{l}$ es perpendicular a $\overline{PH}$.

Después de construir el triángulo soportan el argumento en el teorema de Pitágoras explicando que una hipotenusa siempre es mayor en longitud que un cateto, con esto se evidencia que la distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$, que corresponde a un cateto del triángulo rectángulo.

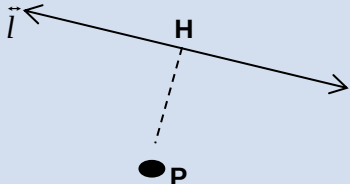
El investigador	El caso Omegas	Caracterización de los argumentos
Desarrolle un argumento lógico para convencer a sus compañeros de que la distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$ donde H está sobre $\vec{l}$ y $\vec{l}$ es perpendicular a $\overline{PH}$ 	Estudiante 1. Tracemos una línea de P a la carretera. Raz Estudiante 4. Sí, tracemos a ver que se forma Afir Estudiante 3. Pongamos M al punto donde llega la recta, ¿es en mayúscula? Raz. Estudiante 4. Así, se forma un triángulo con un ángulo de 90° Afir. Estudiante 2. De 90° y ¿por qué? Preg. Estudiante 4. Porque en el episodio de Mauricio dice que las rectas son perpendiculares y eso significa que los ángulos son de 90° Just	En su escrito los estudiantes argumentan que el camino PH es más corto que el que ellos han llamado PM (ver <u>ilustración 28</u>), ya que en cualquier triángulo rectángulo la Hipotenusa siempre es el lado de mayor longitud en un triángulo rectángulo y como ellos lo enuncian dicho teorema $PM^2=PH^2+HM$, aunque presentan un error en la escritura de los catetos. Por lo que se refiere a la conclusión de la argumentación, es evidente que en este proceso los estudiantes la soportan con elementos de tipo empírico, gráfico y simbólico Chico y Planas (2011) De ahí que en la construcción colectiva de la conclusión se considere que con la gráfica realizada por los Omegas y sus respaldos en la teoría de Pitágoras justifiquen y validen la solución presentada en este episodio Cañadas (2007).

Tabla 11. Argumentaciones abductivas Omegas

Fuente: Elaboración propia

Luego de los estudiantes pensar por un momento en cómo construir el argumento inicialmente requerido en este episodio concluyen su práctica argumentativa como se muestra en la ilustración 19.

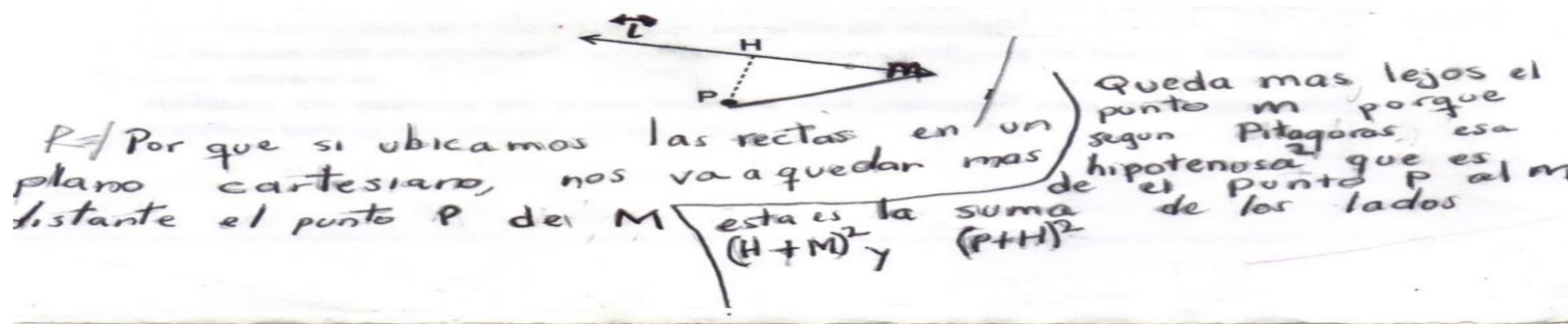


Ilustración19. Tercer episodio caso Omegas

Fuente: Estudiantes caso Omegas

En la tabla 12 se presenta un análisis de la actividad argumentativa de los estudiantes en relación a Toulmin (2003).

Respaldo, conocimiento o apoyo	Justificaciones (garantías)	Calificador modal	Conclusión
Teorema de Pitágoras. Líneas perpendiculares Triángulo rectángulo.	Al trazar una línea del punto P, al punto B se forma un triángulo rectángulo, el cual tiene un ángulo de 90°, Lo que indica que el camino más corto es PH, que es un cateto del triángulo	Porque, (utilizado por los estudiantes para concluir), Según (utilizado para darle fuerza o respaldo a lo que se quiere decir)	La distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta $\vec{l}$ es la longitud de $\overline{PH}$

Tabla 12. Actividad argumentativa Omegas episodio 3.

Fuente: Elaboración propia

En la ilustración 20 muestra los elementos que componen la actividad argumentativa de los Omegas en esta categoría atendiendo al esquema de Toulmin. Se puede decir a partir de este que los estudiantes intentan relacionar elementos simbólicos con el lenguaje natural empleado a diario en su contexto escolar.

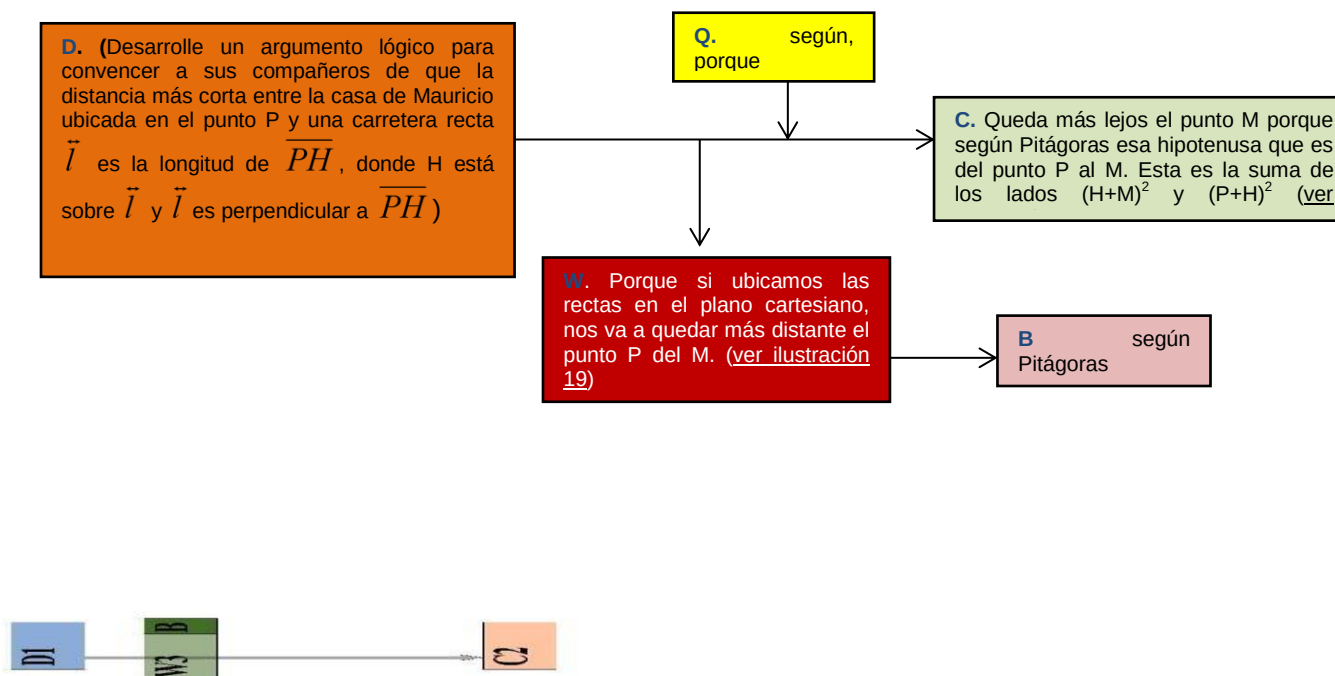


Ilustración 20. Tercer episodio caso Omegas
Fuente: Elaboración propia

5. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Si bien, en toda fase de desarrollo de la actividad matemática el proceso de argumentar debe estar presente con el objetivo de potenciar el pensamiento matemático y propiciar habilidades o competencias argumentativas. La actividad matemática debe estar en pro de la producción y validación de conjeturas, generalidades, proposiciones, entre otros; para ello el proceso de argumentar debe enriquecerse cada vez más. Sobre las bases de las ideas expuestas (Alfonso y otros, 2014, p. 89)

Al respecto, partiendo de los resultados del análisis en esta investigación los estudiantes utilizan el lenguaje natural y simbólico para llegar a la conclusión de un argumento, bien sea de tipo inductivo, deductivo o abductivo. Donde cada uno de los actos argumentativos de los estudios de caso está fuertemente marcado por las vivencias, conocimientos y la percepción de los estudiantes; intrínsecamente relacionados con la forma en que ellos observan y comprenden el contexto sociocultural en el cual se desarrollan diariamente.

Es así que, cuando se le pide a un estudiante justificar un enunciado y soportar sus afirmaciones, estos recurren a enseñanzas de los docentes, algunas propiedades de la adición, producto de números reales, teoremas geométricos y otras informaciones obtenidas de textos, internet e incluso de sus compañeros que integran el estudio de caso.

De manera similar el deseo por verificar sus afirmaciones, a partir de ejemplos numéricos que se han contemplado en el aula de clases está siempre presente en cada uno de los argumentos de los estudios de caso, tendiendo a la algoritmación en lugar de la generalización.

Los diferentes conectivos utilizados por los casos “Memories” y “Omegas” en los argumentos inductivos, deductivos y abductivos guardan coherencia con el nivel educativo de los estudiantes; de manera similar los respaldos con los que fundamentan sus teorías muestran conocimientos que han sido asimilados por los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Además, desarrollar argumentaciones en ambientes virtuales de aprendizaje, permite que se lleven a cabo procesos de interactivos entre los estudiantes, y de estos con las argumentaciones, fomentando el desarrollo de autonomía y el deseo de aprender de manera conjunta (apoyo mutuo).

En la actividad argumentativa de los estudios de caso Memories y Omegas se identifican algunas dificultades a la luz de los argumentos abductivos y deductivos, mostrando las falencias estos poseen para integrar aspectos algebraicos en situaciones que son abordables desde las matemáticas. La argumentación en matemáticas de los estudios de caso es muy similar, se destacan buenos argumentos en la categoría de razonamiento inductivo, no igual en el razonamiento deductivo.

Al caracterizar los episodios a partir del esquema de Toulmin (2003) se develaron aspectos de la práctica argumentativa de los estudiantes del grado 9°, al explorar la multiplicidad de sus argumentaciones en matemáticas. Los enunciados a argumentar por los estudiantes están en relación con su nivel educativo y el contexto socio cultural en el que ellos se desenvuelven, sin dejar perder en estos la estructura de los conceptos matemáticos que se requieren.

6. RECOMENDACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Es fundamental iniciar a los estudiantes en argumentaciones en matemáticas, con el fin de potenciar procesos como: la comunicación, el razonamiento y solución de problemas, en donde además de tener estudiantes críticos y analíticos también se cuente con estudiantes propositivos, prestos a enfrentarse y dar solución a diferentes situaciones que se le presenten en su cotidianidad.

Así mismo, las actividades matemáticas deben generar momentos de reflexión para que los procesos de conjeturar y argumentar aporten al desarrollo del pensamiento matemático y al desarrollo de otro tipo de competencias que atañen a los distintos campos del saber (Alfonso y otros, 2014, p. 89)

Por medio de encuentros interactivos, los estudiantes pueda desarrollar autonomía en el uso de conceptos, operaciones, propiedades y habilidades matemáticas que los con lleven al planteamiento de preguntas, la toma de decisiones, y se familiaricen con la construcción de argumentos formales e informales en matemáticas.

De esta manera es importante que los estudiantes en su quehacer diario en el aula de matemáticas desarrollen procesos donde se establezca conexión entre el conocimiento y aprendizaje matemático con habilidades argumentativas. Considerando razonamientos básicos de las matemáticas dentro de los cuales los estudiantes se vean motivados a generar procesos de discusión, explicación, justificación, verificación y conclusión de una proposición matemática, conjetura o argumentación matemática.

Con respecto a las argumentaciones deductivas queda aún el compromiso de seguir fortaleciendo en los estudiantes este aspecto, para que logren entender la relación que en matemáticas se da entre expresiones de tipo simbólicas y expresiones del lenguaje natural.

Se tiene entonces la tarea como docentes de seguir incursionando a los estudiantes en la práctica de la argumentación de diversas formas de razonamiento; y destacar su papel en el campo de las matemáticas, con el objetivo de que interioricen aspectos relevantes en los procesos comunicativos y argumentativos en matemáticas.

7. REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

- Aguirre, M., Codina, A., y Lupiáñez, J. L. (2000). El papel de la tecnología en la demostración matemática.
- Alcaldía de Medellín. (2013). Resultados de ciudad Olimpiadas Medellinenses del Conocimiento 2012. Análisis de resultados de las Olimpiadas Medellinenses del Conocimiento 2012.
- Alfonso, I. Á., Bautista, J. L. Á., Carranza, E. V., y Álvarez, M. N. S. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números*, (85), 75-90.
- Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 5(06).
- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas
- Bolívar, C y Martín, M. A. (2010). La actividad demostrativa en básica secundaria, un ejemplo de análisis.
- Cabero, J. (2007). Las necesidades de las TIC en el ámbito educativo: oportunidades, riesgos y necesidades. *Tecnología y Comunicación Educativas*, 21(45).
- Cañadas, M. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).
- Castiblanco. A, C. (s.f). Proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia” y sus avances.

- Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. UNO, 54, 55-67.
- Chico, J. J., y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situación de aprendizaje matemático en pareja. En Investigación en Educación Matemática XV (pp. 319-328).
- Congreso de la República de Colombia. (8 de Febrero de 1994). Ley General de Educación. Ley 115.
- Crespo, C. (2005a). La importancia de la argumentación matemática en el aula.
- Crespo, C. R. (2005b). El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo (Doctoral dissertation, Tesis de maestría en ciencias en matemática educativa. México: Cinvestav).
- Crespo, C., Farfán, R. M., y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13 (3), 283-306.
- Cruz, I. M. y Puente, Á. P. (2012). Innovación educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la matemática básica. Edmetec, 1(2), 130-150.
- De Acedo, M. L. S. (2001). La argumentación: una forma de razonamiento informal. Revista de psicología general y aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología, 54(3), 355-370.
- De Pinto, E. P., y de Rojas, Y. M. (2006). Cinco paradigmas para abordar lo real. Telos, 8(1), 106-121.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). The sage Handbook of Qualitative Research. Third Edition. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Introduction. The Discipline and practice of Qualitative Research: pp. 1-13.

Domínguez, E. (2009). Las TIC como apoyo al desarrollo de los procesos de pensamiento y la construcción activa de conocimientos. Zona próxima: revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación, (10), 146-155.

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. La Lettre de la Preuve.

Fiallo, E., y Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10º en Santander (Colombia).

Friese, S. (2012). Atlas. ti 7 guía rápida

Gibelli, T. I., y Chiecher, A. (2013, April). Estrategias de aprendizaje y autorregulación usando TIC. In II Jornadas Nacionales de TIC e Innovación en el Aula.

Giraldo, M. (2012). El Concepto de Ambiente Virtual de Aprendizaje desde una perspectiva mediacional. Monográfico maestría en Educación (p. 300). Medellín, Colombia: Editorial UPB.

Godino, J. D., y Recio, Á. M. (2001). Significados Institucionales de la Demostración: Implicaciones para la educación matemática. Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 19(3), 405-414.

González, J. (2000). El paradigma interpretativo en la investigación social y educativa: nuevas respuestas para viejos interrogantes. Cuestiones pedagógicas: Revista de ciencias de la educación, (15), 227-246.

González, M., y Lora, W. (2011). La argumentación en matemáticas: Una nueva estrategia en el proceso docente educativo.

- González, M., y Montes de Oca, N. (2010). Estrategia didáctica sustentada en un modelo comunicativo para favorecer la argumentación de ideas en el lenguaje matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática educativa* (pág. 1392). Vol.23. México.
- Guba, E., y Lincoln, Y. (2002). Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa. Compilación de Denman, C; y Haro, J. A. Por los rincones. *Antología de métodos cualitativos en la investigación social*, pp. 113-145. Sonora: Colegio de Sonora.
- Gutiérrez, Á. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. *Actas de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*
- Habermas, J. 1987. "Teoría de la acción comunicativa. Volumen 1: Racionalidad de la acción y racionalización social". Taurus, Madrid, 1987.
- Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula—towards a framework of developmental proof. *Journal of Curriculum Studies*, 45 (3), 354-378.
- Herrera, C. (2009). Pruebas sin palabras: una propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas.
- Hoffmann, M. (1998). ¿Hay una "lógica" de la abducción?. *Analogía Filosófica*, 12(1), 41-56.
- Homero, F. Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98
- Huapaya Gómez, E., y Sandoval Peña, J. C. (2011). Mejoramiento de competencias matemáticas mediante TIC: Primer año-secundaria (CO). *XIII Conferência Interamericana De Educação Matemática*.

IEEE Learning Technology Standards Committee. (2002). Draft standard for learning object metadata.

Instituto Colombiano Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. (2012). Pruebas SABER 3°, 5° y 9° 2012. Resultados Censales.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics.

Laborde, C. (2002). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

Larios, V., y González, N. G. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, 13(4), 147-160.

León de Vitoria, C. (1997). Impacto y retos de la teoría social, histórica y cultural de Lev Vygotsky. *Cuaderno UCAB*, 1, 13-20.

Lucumi, P. (2013). Discusión colaborativa de casos incorporando el ambiente de aprendizaje digalo. Grupo de investigación ECOS. Escuela Normal Superior de Ubaté.

Majó, J. (2003). Nuevas tecnologías y educación. En Conferencia de presentación del 1er informe de las TIC en los centros de enseñanza no universitaria, UOC.

Malva, A., Puppo, J., y Rold, G. (2009). APRENDER A DEMOSTRAR: Reflexiones para la educación matemática.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.

- Màrques Graells, P. (2000). Impacto de las TIC en la Educación: funciones y limitaciones. Departamento de Pedagogía Aplicada, Facultad de Educación, UAB.
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 87-125.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.
- Ministerio de educación Nacional. (2006a). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Obtenido de Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que Aprenden.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006b). Plan Nacional Decenal de Educación.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- National Council of Teachers of Mathematics . (1991). Principles and Standards for School Mathematics. . Obtenido de Professional Standards "Evaluation of Teaching": Standard 5: Mathematics as Problem Solving, reasoning, and Communication:
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Principles and standards for School Mathematics. Obtenido de Curriculum & Evaluation: grados 5-8 y 9-12: Estándar 3 - Matemáticas como Razonamiento.

- National Council of Teachers of Mathematics.(2008). "The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics".
- Onrubia, J. (2005). Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento. RED. Revista de Educación a Distancia, número monográfico II, 16.
- Onrubia, J., Colomina, R., y Engel, A. (2008). Los entornos virtuales de aprendizaje basados en el trabajo en grupo y el aprendizaje colaborativo. Psicología de la educación virtual. Madrid: Morata, 233-252.
- Organisation for Economic Co-operation and Development (OCDE). (2013). Results in Focus.
- Pech, V. y Ordaz, M. (2009). El concepto de función en situaciones variacionales. Un estudio de las argumentaciones de los estudiantes. Red CIMATES.
- Peláez, A. (2013). Monográfico Maestría en Educación. Escuela de Educación y Pedagogía. Obtenido de Editorial Universidad Pontificia Bolivariana. Vol. 11. pp. 99-112.
- Pineda Ballesteros, E., Tellez Acuña, F. R., y Landazábal Cuervo, D. P. (2011). Representación del conocimiento, Argumentación y Modelado en los Clubes de Matemáticas Mediados por TI (CO). En XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.
- Planas, N., y Morera, L. (2010). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. El desarrollo de competencias en las clases de matemáticas, 275-300.
- Rodríguez, F. y Gutiérrez, A. (2012). Software DeMMaTTouL: una herramienta para la investigación sobre la estructura argumentativa de la demostración. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F.

- J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 457 - 468). Jaén: SEIEM
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33(3), 135-165.
- Samper, C., Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L., y Echeverry, A. (2011). Geometría dinámica, implicación y abducción: un estudio de caso. Comunicación presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (26-30 de junio de 2011). Recife, Brasil.
- Sánchez, E y Mercado, M. (2012). Formulación de conjeturas en actividades con Cabri-Géomètre.
- Sandoval, C. A. (1996). Investigación cualitativa. ICFES, Asociación Colombiana de Universidades e instituciones Universitarias Privadas.
- Savater, F. (2004). El valor de educar. Editorial Ariel Barcelona: p. 32
- Sardá Jorge, A., & Sanmartí Puig, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 405-422.
- Soto, J. C. (2008). Lev Semionovich Vygotsky y el Aprendizaje Sociocultural.
- Soto, W. H., Guerrero, K. G., y Beltrán, J. E. P. (2010). Las inferencias y el proceso de aprendizaje de la matemática. *Revista Educación y Desarrollo Social*. Vol, 4(2). 167-175
- Srinivas, H. (2010). What is collaborative learning. National Institute of Science Education.

- Stahl, G., Koschmann, T. & Suthers, D. (2006). Aprendizaje Colaborativo Apoyado por Computador: Una perspectiva histórica. Cambridge handbook of the learning sciences [Computer-supported collaborative learning: An historical perspective](C. Collazos Trans.), pp. 409-426.
- Stake, R. E. (1999). Investigación con estudio de caso. Madrid: Ediciones Morata.
- Taylor, S. J., y Bogdan, R. (1987). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona, Editorial Paidós
- Tébar, L. (2013). El valor de la mediación para potenciar el desarrollo cognitivo y la relación educativa en el aula.
- Toulmin (2003). Los usos de la argumentación traducción de María Morrás y Victoria Pineda, Ed. Península Barcelona, 2007. pp. 330.
- Trujillo, J. F. (2007). STEPHENTOULMIN. Los usos de la argumentación Traducción de María Morrás y Victoria Pineda, Ed. Península Barcelona, 2007. pp. 330. Praxis Filosófica, (25), 159-168.
- Villarreal, J., & Herrera, N. (2010). Contribución de la enseñanza de conceptos al razonamiento matemático la enseñanza para la comprensión./
- Weston, A. (1994). Las claves de la argumentación. Barcelona: Ariel.
- Yin, R. K. (2009). Investigación sobre estudio de caso: Diseño y Métodos. Applied SAocial Research Methonds Series, 5.

8. ANEXOS

Anexo 1. Investigaciones internacionales en argumentación y/o TIC.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/país
Marrades y Gutiérrez (2000)	• Empírico y deductivo • estudio de caso	Cabri- Géomètre	• Enseñanza de conceptos y propiedades geométricas, para ayudar a los estudiantes a mejorar su concepción de la naturaleza de la argumentación matemática y mejorar sus habilidades./España
Planas y Morera, (2010)			• Situaciones problema para analizar las argumentaciones de los estudiantes, a partir de las interacciones entre estos/España
Chico y Planas (2011)	• Informal (intensión argumentativa)		• Situaciones problema para interpretar indicadores discursivos en el aprendizaje matemático/España.
Cañadas (2007)	• Inductivo		• Modelo de razonamiento inductivo, para describir el proceso de los estudiantes/España
González y Montes de Oca (2010)			• Modelo comunicativo que permiten mostrar las relaciones que se dan en el proceso de formación y desarrollo de la habilidad argumentativa/México.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/país
Hemmi, Lepik y Viholainen (2013)			Indaga sobre la incorporación de la argumentación en matemáticas y la demostración en los planes de estudio de matemáticas en los países de Estonia, Finlandia y Suecia.
Malva, Puppo y Roldán (2009)	Deductivo		Implementan situaciones de demostración: directa, contra-recíproco y absurdo, con el interés de que en los planes de estudio de matemáticas sea retomada la demostración/Argentina.
Larios y González (2010)	Deductivo	Cabri	Abordan el estudio de la geometría a partir de los niveles propuestos por Kuzniak, Gagatsis, Ludwing y Marchini (2007), en ambientes dinámicos de aprendizaje/México.
Pech y Ordaz (2009)	- Inductivo - Deductivo		Actividades que incorporaran variación y cambio, experimentadas en un grupo de estudiantes del COBAY, donde se analizaron sus producciones ante una situación no escolar/México.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/país
Sánchez y Mercado (2012)	Deductivo	Cabri- Géomètre	Comprobación de la efectividad del software (CABRI) en la visualización de demostraciones/México.
Cruz y Puente (2012)		Herramientas online de la Web 2.0 (simuladores de la Biblioteca Nacional, Manipuladores de la Universidad Estatal de UTAH, Desmos Graphing Calculator, Conceptboard)	Actividades para motivar la participación y el aprendizaje activo de los estudiantes, además de desarrollar las competencias matemáticas sugeridas en el proyecto PISA/República Dominicana.
Huapaya y Sandoval (2011)		Blog, calculadora científica, software graficadores (Wimplot, graphcalc, FW27), applets, entre otros.	Estrategia para el mejoramiento de las competencias matemáticas, el estudio de las características de la estructura matemática y aprovechamiento de las tecnologías como recursos facilitadores del proceso/Perú.
Miyazaki (2000)	- Inductivo - Deductivo		Desarrolla tres ejes fundamentales (contenido de la argumentación, representación de la argumentación y pensamiento de los estudiantes) para analizar el paso de una argumentación inductiva a una demostración/Japón.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/país
Codina y Lupiáñez, (1999)	• Argumentación • Demostración	Cabri- Géomètre	• Establece una distinción entre demostración y argumentación a partir de los conectivos empleados y el paso de las premisas a la conclusión./España
Gutiérrez (2007)	• Demostración	Cabri- Géomètre	• Muestra la importancia de enseñar a los estudiantes a demostrar desde los primeros niveles de enseñanza, aprovechando los beneficios que brinda el software de geometría dinámica, para visualizar y comprobar proposiciones/España
Chico y Planas (2011)	• Informal (intensión argumentativa)		• Situaciones problema para interpretar indicadores discursivos en el aprendizaje matemático/España
Cañadas (2007)	• Inductivo		• Modelo de razonamiento inductivo, para describir el proceso de los estudiantes/España
Godino y Recio (2001)	• Deductivo		• Relaciones entre la palabra demostración con las nociones de explicación, argumentación, razonamiento y verificación (en matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas.

Fuente: Elaboración propia

Anexo 2. Investigaciones nacionales en argumentación y/o TIC.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/Ciudad
Pineda, Téllez y Landazábal (2011)	• Empírico y deductivo • Estudio de caso	software Simas, Digalo y Freestyler	• Resolución de problemas para el desarrollo de competencias argumentativas, interpretativas y propositivas, apoyados en los referentes teóricos de Polya (2012)/Bucaramanga.
Fiallo y Gutiérrez (2007)	• Estudio de caso		• Test diagnóstico para identificar los tipos de razonamientos que poseen los estudiantes/Santander.
Bolívar y Martín (2010)	• Deductivo • Estudio de caso	Cabri-	• Tareas matemáticas, para aportar elementos a la problemática de la demostración, apoyados en la actividad demostrativa definida por Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006)/Bogotá.
Samper, Perry, Molina, Camargo y Echeverry (2011)	• Inductivo • Deductivo • Abductivo • Estudio de caso	Cabri	• Resolución de problemas en un entorno de geometría dinámica, para identificar y describir los tipos de demostraciones de los estudiantes/Bogotá.

Autor/es	Razonamiento/Método de investigación	Mediador tecnológico	Intervenciones de enseñanza/Ciudad
Herrera (2009)			Propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas a través de actividades que potencien el sentido y la comprensión del trabajo del pensamiento matemático en la escuela/Medellín
Alfonso, Bautista, Carranza y Soler (2014)	- inductivo - Deductivo - Abductivo - Estudio de caso		En la aplicación de tres tareas matemáticas caracterizan cinco actividades (la visualización, Identificar patrones, relaciones, regularidades o propiedades, formular conjeturas, Verificar conjeturas y generalizar conjeturas), empleadas en la validación de conjeturas en el contexto de la actividad argumentativa/Bogotá.
Villarreal y Herrera (2010)			Tareas matemáticas en las que se proponen la resolución de un problema o aprehensión de un concepto, para observar los niveles de razonamiento de los estudiantes, basándose en el enfoque de enseñanza para la comprensión/Medellín.

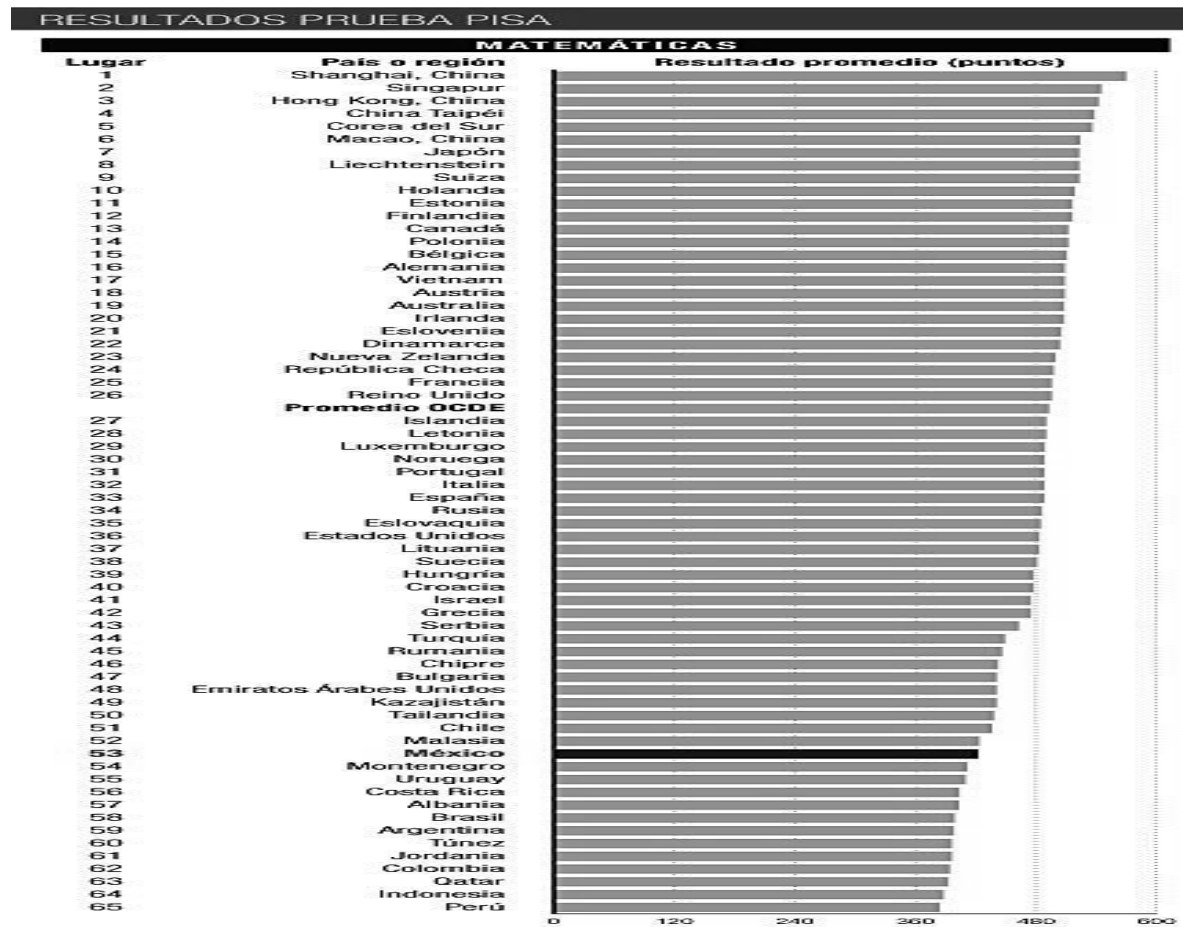
Fuente: Elaboración propia.

Anexo 3. Niveles de competencia en matemáticas (Pisa)

Puntos		Lo que saben hacer los alumnos	
	Nivel 6	En el nivel 6, los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar la información procedente de sus investigaciones y de los modelos que han creado al enfrentarse a problemas. Pueden relacionar representaciones y diversas fuentes de información y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los alumnos de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemáticos avanzados. Dichos alumnos utilizan su entendimiento y comprensión junto con el dominio de las relaciones y las operaciones matemáticas simbólicas y formales para desarrollar nuevos enfoques y estrategias a la hora de tratar situaciones inusitadas. En este nivel los alumnos pueden formular y transmitir de manera precisa sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, interpretaciones, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.	
	Nivel 5	En el nivel 5, los alumnos saben de desarrollar y trabajar con modelos en situaciones complejas identificando los condicionantes y estableciendo suposiciones. Son capaces de seleccionar, comparar y valorar estrategias de resolución de problemas para tratar los problemas complejos relacionados con estos modelos. Los alumnos de este nivel saben trabajar de una manera estratégica utilizando destrezas de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, representaciones relacionadas adecuadas, descripciones gráficas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Son capaces de reflexionar sobre sus acciones y de formular y transmitir sus interpretaciones y razonamientos.	
	Nivel 4	En el nivel 4, los alumnos saben trabajar de una manera efectiva con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que conllevan condicionantes y exigen que se realicen suposiciones. Son capaces de seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, y relacionadas directamente con las características de las situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar destrezas bien desarrolladas y razonar de una manera flexible y con algo de perspicacia en estos contextos. Son capaces de elaborar y transmitir sus explicaciones y argumentaciones relativas a sus interpretaciones, argumentos y acciones.	
	Nivel 3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar claramente los procedimientos descritos, incluidos aquellos que precisan decisiones consecutivas. Son capaces de seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas. Los alumnos de este nivel pueden interpretar y utilizar representaciones de diferentes fuentes de información y extraer conclusiones directas de ellas. Son también capaces de desarrollar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.	
	Nivel 2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que no exigen más que una deducción directa. Son capaces de extraer la información necesaria de una única fuente de información y utilizar un único método de representación. Los alumnos de este nivel saben usar fórmulas, procedimientos, convenciones y algoritmos elementales. Son capaces de razonar de manera directa y de hacer una lectura literal de los resultados.	
	Nivel 1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relativas a contextos habituales en que está presente toda la información pertinente y las preguntas están bien definidas. Son capaces de identificar la información y de realizar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias y que se deduzcan de manera inmediata del estímulo dado.	

Fuente: http://evalua.educa.aragon.es/admin/admin_1/file/Matematicas%20PISA.pdf

Anexo 4. Resultados en matemáticas. Pisa (2012)



Fuente: <http://www.adnpolitico.com/ciudadanos/2013/12/03/pisa-ranking-de-los-mejores-y-peores-paises-en-educacion>

Anexo 5. Investigaciones en demostración y TIC Latinoamérica

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Ferrero, M. y Ferraris C. (2008). Un análisis de razonamientos implicados en la resolución grupal de una demostración.	CLAME "Comité Latino Americano de Matemática Educativa	• Establecer indicadores de la presencia de contenidos matemáticos en una argumentación. • Analizar los rasgos heurísticos presentes en situaciones de validación • Examinar las interrelaciones entre los distintos componentes de aprender a demostrar	• Registro etnográfico de la interacción en pequeños grupos durante la resolución de una tarea en clase, correspondiente a la materia Geometría Euclídea del Plano del Profesorado en Matemática.
Malva, A; Puppo, J. y Roldán G. (2009). Aprender a demostrar: Reflexiones para la educación matemática.	CLAME "Comité Latino Americano de Matemática Educativa	• Favorecer una inclusión efectiva y eficaz de la demostración en la educación matemática de los jóvenes.	• Actividades que favorecen la internalización de habilidades para demostrar, validar, justificar, explicar, argumentar, mostrar; acercándose a las demostraciones contextualizadas desde la lógica y los sistemas formales.
Llanos, V. y Otero, R. (2010). Imágenes en los libros de matemática de la enseñanza secundaria: un análisis descriptivo de las imágenes externas y su relación con la argumentación	CLAME "Comité Latino Americano de Matemática Educativa	• Analizar las argumentaciones matemáticas en textos de nivel medio.	• Clasificación de las imágenes utilizadas por los textos para representar argumentaciones. Con el objetivo de decorar el texto, no tienen vinculación con el contenido matemático que se desarrolla en el libro, ni aportan a la argumentación.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo		Resumen
Bautista. V. y Rodríguez. F. (2012). Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones.	"RED CIMATES" Red de Centros de Investigación Matemática Educativa.	•	Diseñar una secuencia didáctica tomando argumentos históricos.	• La historia en la enseñanza de un concepto puede generar excelentes resultados para su enseñanza - aprendizaje.
Jiménez. J. e Inzunza. S. (2011). Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones.	"RED CIMATES" Red de Centros de Investigación Matemática Educativa.	•	Investigar el nivel de razonamiento y pensamiento estadístico con que cuentan los estudiantes de la licenciatura en matemáticas.	• Por medio de ítems evalúan el razonamiento y el pensamiento estadístico de los estudiantes encontrando que Los estudiantes se ubican en los niveles bajos de razonamiento estadístico.
Larios. V. y Gonzáles. N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica.	Revista RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.	•	Buscar que los estudiantes en particular de nivel medio construyan demostraciones recurriendo a propiedades geométricas dentro de ambientes dinámicos.	Se aborda el estudio de la geometría a partir de tres niveles propuestos por Kuzniak, Gagatsis, Ludwig y Marchini (2007, p. 955) a saber: Geometría I. Geometría natural con fuente de validación, Geometría II. Geometría natural y axiomática basada en leyes hipotéticas deductivas y Geometría II. Geometría formal y axiomática.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Crespo. C; Farfán. R. y Lezama. M. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales.	Revista RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.	Indagar a cerca de la construcción sociocultural de la argumentación en matemáticas.	Este trabajo presenta una visión de las argumentaciones y demostraciones matemáticas desde la óptica de la socioepistemología. Permite comprender que en distintos escenarios las argumentaciones utilizadas poseen características distintas de las que posee la argumentación deductiva.
Hernández. H; Pérez. A. y Ordoñez. A. (2009). Argumentaciones de los estudiantes en la modelación y experimentación de la ley de Torricelli.	"RED CIMATES" Red de Centros de Investigación Matemática Educativa.	Verificar experimentalmente que se cumplen las condiciones para la aplicación de la ley de Torricelli.	Experiencia didáctica, la cual consiste en la comparación de la modelación matemática del teorema de Torricelli y el resultado de la experimentación de esta ley.
Pech. V. y Ordaz. M. (2009). El concepto de función en situaciones variacionales. Un estudio de las argumentaciones de los estudiantes	Revista RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.	- Analizar las producciones de los estudiantes al presentarles a la función en situación variacional - Explorar si las actividades diseñadas favorecen el surgimiento de argumentaciones variacional	El tratamiento otorgado al concepto de función no propicia ideas de variación y cambio en los estudiantes, propicia la memorización y algoritmia, desembocando esto en una serie de errores y obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia

Anexo 6. Investigaciones en argumentación y TIC otros países

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Salgado, M., y Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años.	FUNES	Obtener y confrontar visiones y opiniones de razonamiento inductivo empleado por alumnos/as de educación infantil.	Propuesta pedagógica que pone de manifiesto la potencialidad del razonamiento en la etapa infantil. El tipo de metodología no contribuyó a un conocimiento profundo y sistemático, ya que algunos niños/as en vez de dar sus opiniones, se conformaron con asentir o rebatir a los otros.
Bolívar, Cristina; Martín, Mayerly Andrea (2010). La actividad demostrativa en básica secundaria, un ejemplo de análisis	FUNES	Caracterizar la actividad matemática que llevan a cabo grupos de estudiantes de grado noveno, del Instituto Pedagógico Nacional, cuando se enfrentan a una tarea en la que tienen que formular una conjetura y demostrarla.	Se muestra la actividad demostrativa en educación básica secundaria, mediada por el uso de un programa de geometría dinámica. Se diseñan un conjunto de problemas encaminados a que los estudiantes identifiquen propiedades comunes al rectángulo y al trapecio isósceles.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Villarreal, J. y Herrera, N. (2010). Contribución de la enseñanza de conceptos al razonamiento matemático la enseñanza para la comprensión.	FUNES	Propuesta de solución al problema de mejorar el razonamiento de los estudiantes a partir de la enseñanza de los conceptos.	Las observaciones en el aula de clase mostraron que existían dificultades en el nivel de los procesos de pensamiento que se utilizaban los estudiantes al resolver los problemas matemáticos o querer aprender un concepto, estas dificultades consistían en la no aplicación del proceso necesario para resolver la tarea planteada fuera ésta el comprender, el realizar, explicar o verificar.
Herrera, C. (2009). Pruebas sin palabras: una propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas.	FUNES	Que el estudiante pueda formular, argumentar y demostrar a través de gráficos relacionados con una expresión matemática conceptos matemáticos.	Propuesta para la formulación, argumentación y demostración en el aula de matemáticas a través de actividades que potencien el sentido y la comprensión del trabajo del pensamiento matemático en la escuela. Para ello se busca desarrollar los procesos generales en matemática.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Englis, M; y Mejía, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas.	FUNES	Utilizar el esquema completo de Toulmin en la investigación en Educación Matemática	Esta investigación está basada en el esquema de argumentación propuesto por Toulmin (1958) y permite analizar argumentos contruidos para reducir el nivel de incertidumbre asociado a una conjetura, al mismo tiempo que permite el análisis de distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos en matemáticas.
Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situación de aprendizaje matemático en pareja.	FUNES	Relacionar avances en el aprendizaje matemático con interacciones entre estudiantes caracterizadas con indicadores	Ilustra situaciones con intención argumentativa, que facilitan avances en el aprendizaje matemático: Refutación, validación, cuestionamiento, paráfrasis y ampliación. Caracterizados como elementos que contribuyen a hacer efectiva la intención argumentativa, sin que todos ellos intervengan con la misma intensidad en la elaboración de razones.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Samper, C; Perry, P; Molina, Ó; Camargo, L. y Echeverry, A. (2011). Geometría dinámica, implicación y abducción: un estudio de caso.	FUNES	• Detectar invariantes y formularlos como regularidades en calidad de propiedades, a partir de argumentos inductivos	Este estudio se centró en identificar formulación de implicaciones (Arzarello, 2007) y procesos abductivos que llevan a cabo estudiantes cuando apoyados en un programa de geometría dinámica, resuelven un problema cuyo fin es descubrir un hecho geométrico, formular una conjetura y demostrarla.
Roig, A; Llinares, S. y Penalva, M. (2010). Aprendiendo sobre la comunicación matemática: características de las estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno on-line.	FUNES	• Analizar la estructura argumentativa en una discusión online entre estudiantes para profesores de enseñanza secundaria cuando están analizando aspectos de la comunicación matemática.	Los resultados indican que los estudiantes fueron capaces de establecer conexiones entre las características del patrón de discusión y del patrón extractivo/focalización (Cobb y Bauersfeld, 1995) en diferentes momentos del extracto de la lección que ellos habían visto.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Cañadas, María C. (2007). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.	FUNES	• Describir y caracterizar el razonamiento inductivo empleado por estudiantes de tercero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria en la resolución de problemas que pueden ser modelizados mediante una progresión aritmética de números naturales cuyo orden sea 1 o 2.	Los 359 estudiantes participantes resolvieron una prueba individual escrita compuesta por seis problemas. El análisis de las producciones de los estudiantes permite obtener resultados sobre los pasos de razonamiento inductivo que emplean y las estrategias que utilizan.
Fiallo, E. y Gutiérrez, Á. (2007). Tipos de demostración de estudiantes del grado 10° en Santander (Colombia).	FUNES	• Indagar y analizar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes de 10° de tres instituciones educativas del Municipio de Santander-Colombia al inicio del curso.	Se presentan los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a tres grupos de estudiantes de 10° grado de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyo objetivo apuntaba a indagar y analizar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso.

Referencia completa	Nombre de la fuente	objetivo	Resumen
Hemmi, K; Lepik, M. y Viholainen, A. (2013). Analysing proof-related competences in Estonian, Finnish and Swedish mathematics curricula towards a framework of developmental proof.	Taylor & Francis Group	analizar y comparar cómo se dirigen las competencias argumentativas a desarrollarse de acuerdo con el plan de estudios nacional de Estonia, Finlandia y Suecia.	Se revisa el plan de estudio de estos países con el fin de elevar el papel de la demostración y la argumentación en todos los niveles escolares y para todos los grupos de estudiantes. Para ello se crea un marco de análisis de las competencias argumentativas que podrían estar conectados con el desarrollo de la comprensión y las habilidades relativas a la argumentación y demostración matemática los alumnos.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 7. Consentimiento informado

 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR <i>"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"</i>		 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR <i>"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"</i>	
Medellín, 26 de agosto de 2013		Medellín, 26 de agosto de 2013	
Señores: Padres de familia		Señores: Padres de familia	
Reciban un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9º2 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.		Reciban un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9º3 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.	
Luz Helena Caraballo Martínez Docente investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de investigación Profesor U de A	Luz Helena Caraballo Martínez Docente investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de investigación Profesor U de A
Nombre del acudiente	Nombre del estudiante	Nombre del acudiente	Nombre del estudiante
<u>Beatriz Elena Toboada</u>	<u>Lizeth Juliana Morán</u>	<u>Yanet Bedoya C.</u>	<u>María Camila Espinoza</u>
Firma del acudiente	Firma del estudiante	Firma del acudiente	Firma del estudiante
<u>Beatriz Elena Toboada</u>	<u>Lizeth Juliana Morán</u>	<u>Yanet Bedoya C.</u>	<u>Camila Espinoza B.</u>

 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR <i>"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"</i>		 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR <i>"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"</i>	
Medellín, 26 de agosto de 2013		Medellín, 26 de agosto de 2013	
Señores: Padres de familia		Señores: Padres de familia	
Reciben un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9º1 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.		Reciben un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9º2 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.	
Luz Helena Caraballo Martínez Docente Investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de Investigación Profesor U de A	Luz Helena Caraballo Martínez Docente Investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de Investigación Profesor U de A
Nombre del acudiente <u>Norma Lina Hernández</u>	Nombre del estudiante <u>ALEJANDRO HERRERA HERNÁNDEZ</u>	Nombre del acudiente <u>Gloria Patricia Tascón C</u>	Nombre del estudiante <u>Andrés Felipe Giraldo T</u>
Firma del acudiente <u>Norma Lina Hernández</u>	Firma del estudiante <u>Alejandro Herrera H.</u>	Firma del acudiente <u>Gloria Patricia Tascón C</u>	Firma del estudiante <u>Andrés Felipe Giraldo T</u>

 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR "Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"		 MUNICIPIO DE MEDELLÍN INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR "Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"	
Medellín, 26 de agosto de 2013		Medellín, 26 de agosto de 2013	
Señores: Padres de familia		Señores: Padres de familia	
Reciben un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9°3 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9° en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.		Reciben un cordial saludo En la clase de matemáticas del grado 9°2 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9° en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados. Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros. Agradezco su atención y colaboración.	
Luz Helena Caraballo Martínez Docente Investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de investigación Profesor U de A	Luz Helena Caraballo Martínez Docente Investigadora I.E Maestro Arenas B.	John Henry Durango Urrego Asesor de Investigación Profesor U de A
Nombre del estudiante <u>Lina P.</u>	Nombre del estudiante <u>Lina Bolívar B.</u>	Nombre del estudiante <u>Marisel Perez</u>	Nombre del estudiante <u>Daniela Alvarez</u>
Firma del estudiante <u>Lina P.</u>	Firma del estudiante <u>Lina Bolívar B.</u>	Firma del estudiante <u>Marisel Perez</u>	Firma del estudiante <u>Daniela A.</u>



MUNICIPIO DE MEDELLÍN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR
"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"



Medellín, 26 de agosto de 2013

Señores:
Padres de familia

Reciban un cordial saludo

En la clase de matemáticas del grado 9º2 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC".

Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros.

Agradezco su atención y colaboración.

Luz Helena Caraballo Martínez
Docente investigadora
I.E Maestro Arenas B.

John Henry Durango Urrego
Asesor de investigación
Profesor U de A

Nombre del acudiente

Adriana Giraldo

Nombre del estudiante

Maria Paula Giraldo

Firma del acudiente

Adriana Giraldo

Firma del estudiante

Maria Paula G



MUNICIPIO DE MEDELLÍN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA MAESTRO ARENAS BETANCUR
"Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa"



Medellín, 26 de agosto de 2013

Señores:
Padres de familia

Reciban un cordial saludo

En la clase de matemáticas del grado 9º2 de la institución educativa Maestro Arenas Betancur orientada por la docente Luz Helena Caraballo Martínez, en la cual participan sus hijos, se va a desarrollar un proyecto de investigación llamado "argumentaciones de los estudiantes del grado 9º en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC". El objetivo de dicho proyecto es "caracterizar las argumentaciones de ellos en matemáticas y en su cotidianidad a través de ambientes de aprendizaje mediados por TIC".

Quiero de manera formal solicitar su autorización para que sus hijos formen parte de la investigación, como protagonistas de la misma, y en esta medida presentaría en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de sus hijos, en forma de grabaciones, videos, fotos, actividades de clase entre otros.

Agradezco su atención y colaboración.

Luz Helena Caraballo Martínez
Docente investigadora
I.E Maestro Arenas B.

John Henry Durango Urrego
Asesor de investigación
Profesor U de A

Nombre del acudiente

José Samoyar

Nombre del estudiante

Camila Samoyar

Firma del acudiente

José Samoyar

Firma del estudiante

Camila

Anexo 8. Tareas de matemáticas

	Municipio de Medellín Institución Educativa Maestro Arenas Betancur <i>“Con alegría y disciplina por los caminos de la excelencia educativa”</i>	
---	---	---

Tareas Matemáticas 9°

Argumentación y TIC

Docente: Luz Helena Caraballo Martínez

Nombre del grupo participante: _____

Participantes:

Sección: _____ **Grado:** _____

Queridos estudiantes:

Les pido que analicen y argumenten cada episodio, con base en lo aprendido en matemáticas en el grado actual

Los episodios 1, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 14 y 15 serán argumentados por cada equipo (Memories y Omegas) en el programa Argonaut/Digalo, en el cual no podrán modificar sus escritos después de insertados. Estos sólo pueden ser modificados por la docente moderadora.

Los episodios 2, 4, 5, 6, 11 y 13 serán desarrollados utilizando papel y lápiz. Si piensan que se equivocan al justificar, explicar, argumentar o demostrar estos episodios, no borren, tracen una línea sobre estos.

Realicen los cálculos y/o procedimientos que consideren necesarios para cada episodio. Escriban todo lo que piensan, no se limiten.

Categoría 1 (Razonamiento inductivo)

Episodio 1

Ana va al parque zoológico Santafé ubicado en la ciudad de Medellín, en su recorrido por la zona de aves observa que en cada una de las jaulas hay águilas de cola blanca así: en la jaula número uno hay dos águilas, en la jaula número dos hay cinco águilas, en la jaula número tres hay 8 águilas y así sucesivamente.

De tal manera que con el número de águilas en cada jaula se forma la secuencia: 2, 5, 8, 11, 14,...

1. Partiendo de que cada número de la secuencia representa las águilas que contiene cada jaula, ¿cuántas águilas hay en la jaula N° 15? ¿Cuál fue tu razonamiento? Descríbelo.

2. Ana considera que el número de águilas en cada jaula es posible obtenerlo mediante la ecuación $2.n$ donde n representa el número de jaulas (1, 2, 3, 4,...) ¿están de acuerdo o en desacuerdo con esta afirmación? ¿en qué se basan para decir esto?

3. Si no están de acuerdo, justifiquen cómo Ana puede obtener la ecuación que le permita deducir el número de águilas en cada jaula. ¿Por qué consideran que este proceso es el más acertado?, ¿En qué referentes o conceptos se apoyan para decidir que su explicación es válida?

Episodio 2

El zoológico Santafé ofrece para el público (niños y adultos) la siguiente tarifa:

Tarifas:

 **Tarifa Plena:**

Niños (Menores de 2 años)	Niños (Entre los 2 y 12 años)	Adultos (Mayores de 13 años)
Gratis	\$ 4.000	\$ 9.000

Figura 1. Tarifas zoológico Santafé

Fuente: Tomada de <http://www.zoologicosantafe.com/visitantes/horarios-y-tarifas>.

Si x representa el costo de la entrada para niños “y” y el costo de la entrada para adultos, a. ¿cuál podría ser la ecuación que permita calcular la entrada para 10 niños (entre los 2 y 12 años) y para 17 adultos?, b. ¿por qué consideras que es la acertada? Justifica tu afirmación.

Episodio 3

A carolina le interesa saber el número de pasos (x) que debe dar de su casa a la ferretería de su tío Juan, para ello debe resolver la siguiente ecuación $5x^2 + 19x - 45 = 5x(x + 2)$ y acertar el valor de x .

- ¿Cómo puede Carolina resolver su enigma? Sustenten y justifiquen cada paso del proceso.
- ¿Qué concluyen del proceso realizado?

Nota. (Utilicen las propiedades estudiadas de los números reales)

Episodio 4

La mamá de Andrés quiere decorar su sala con tres materas, cada una tiene forma hexagonal (polígonos rosados) al igual que las baldosas de su sala (polígonos azules) como se muestra en la figura:

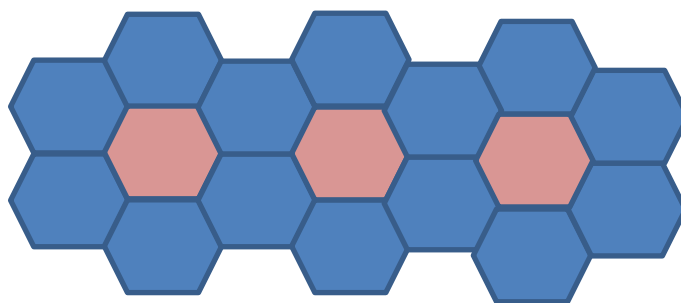


Figura 2. Las materas

Fuente: Adaptado de Morera, L; Chico, J; Badillo, E. & Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: Reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Revista SUMA*. pp. 9-20.

- a. ¿Cuántas baldosas existen alrededor de las tres materas?
- b. ¿En el caso de que fueran 10 materas, cuántas baldosas habrían a su alrededor?, ¿Por qué sostienes dicha conclusión?
- c. Escriban la secuencia de baldosas para 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...,15 materas.
- d. Elabora una tabla que muestre la secuencia número de materas Vs número de baldosas.
- e. Es posible obtener una ecuación que permita conocer el número de baldosas para un número n de materas. Si es posible ¿Cuál sería? ¿En qué te apoyaste para obtenerla? Escribe tus conclusiones.
- f. ¿Existen otras formas de dar solución a las preguntas anteriormente planteadas? Descríbelas.

Episodio 5

La profesora Patricia en sus ratos libres se dedica a la floricultura, a ella le encanta las rosas y las hortensias. En su finca de Santa Elena tiene una parcela, en esta sembró rosas rodeadas por hortensias siguiendo una forma cuadrada como se muestra a continuación:



Figura 3. Rosas y hortensias

Fuente: Adaptado de Morera, L; Chico, J; Badillo, E. & Planas, N. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria: Reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. *Revista SUMA*. pp. 9-20.

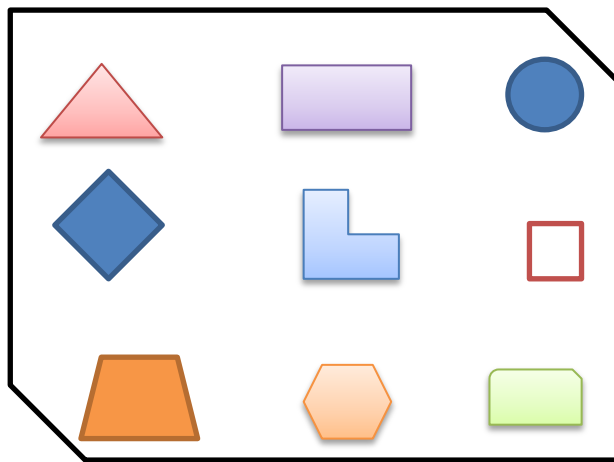
a. Explica: ¿cuántas hortensias y rosas hacen falta para 6 filas de rosas?, ¿cómo lo has hecho?

b. Para el caso general de n filas de rosas ¿Cuántas rosas se necesitan? Y ¿cuántas hortensias? ¿cómo obtuviste este resultado o expresión? ¿Por qué esta expresión es válida? ¿En qué te apoyas para sustentar esto? Escriban sus conclusiones.

c. La profesora Patricia recibe un mayor ingreso por las rosas que por las hortensias. Por tanto le interesa tener más cantidad de rosas que de hortensias. Manteniendo la forma mostrada en la figura anterior, ¿es esto posible? ¿cómo se puede evidenciar esto? Dialoga con tus compañeros y escriban sus opiniones. Si esto no es posible, ¿cuáles pueden ser las causas? ¿De qué forma puede cumplir sus expectativas?

Episodio 6

Observa la siguiente ilustración



- Pueden afirmar que todas las figuras son cuadriláteros. ¿Por qué?
- ¿En qué se fundamentan para hacer dicha conjetura?
- Escriban sus conclusiones.

Categoría 2 (Razonamiento Deductivo)

Episodio 7

Claudia, en uno de sus libros de matemáticas de 9° observa la siguiente proposición:

La suma de cinco números enteros consecutivos, es igual a cinco veces el número del centro.

Tengan en cuenta que n es el primer número, $n+1$ el segundo, $n+2$ el tercero, $n+4$ el cuarto y $n+5$ el quinto número.

- a. Cómo pueden ustedes demostrar que la afirmación es verdadera o falsa.
- b. Justifiquen cada paso
- c. Escriban sus argumentos y conclusiones.

Episodio 8

Demuestra la proposición:

Si dos números son impares, entonces su suma es un número par.

Ayuda: tomar $a=2.n+1$ es un número impar y $b=2.k+1$ es el otro número impar y hallar $a+b$.

Justifiquen cada paso; empleando las propiedades de la adición de números reales. ¿Qué conclusión obtuvieron?

Episodio 9

Carlos calculó que la velocidad de escape de los gases en el motor de un cohete satisface la ecuación $x^2 - 6 \cdot x + 45 = 0$. Si la ecuación tiene soluciones reales, la cámara de combustión no sufrirá daños; pero si las soluciones son complejas, la cámara corre el riesgo de dañarse.

- a. ¿Puede funcionar el cohete con esta velocidad de escape de los gases?
- b. ¿En qué se basan para sustentar lo antes dicho?
- c. Escriban sus opiniones y conclusiones.

Fuente: Tomado de Rodríguez, M. y Melo, C. (2007). Saber matemáticas 9° (p. 183). Bogotá: Editorial escuelas del Futuro.

Episodio 10

Natalia después de realizar algunas operaciones con números reales concluye que “Si a y b son números reales entonces se cumple que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ”.

- Refuten o acepten esta afirmación.
- ¿Cómo pueden demostrar que esto es verdadero o falso?
- ¿Por qué sostienen dicha afirmación?
- Escriban sus conclusiones.

Episodio 11

Manuel recordó esta regla de la aritmética:

Para saber si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$; son iguales, **se debe**

multiplicar en cruz para encontrar $a.d$ y $b.c$

Si $a.d = b.c$, entonces las fracciones son iguales.

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \text{ si } a.d \neq b.c$$

Él se preguntó si esto siempre funciona, pero no sabe cómo argumentarlo.

- Construyan un argumento utilizando las propiedades del producto de números reales, para justificar si la regla recordada por Manuel es válida o no. Escribe tus conclusiones.
- ¿En qué propiedades basaron sus argumentos?

Fuente: Reformado de

http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L1_T4_text_final_es.html

Episodio 12

Si tomamos como universo a todos los hombres de la Tierra y tenemos las proposiciones abiertas

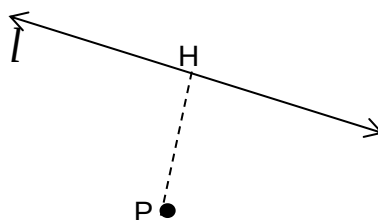
- x es un hombre mortal**
- x es hombre colombiano**
- x llegó a Neptuno**

- ¿Qué pueden concluir de cada una de las anteriores afirmaciones, si x hace referencia a todos los hombres de la Tierra?
- Escriban sus apreciaciones

Categoría 3 (Razonamiento abductivo)

Episodio 13

Desarrolle un argumento lógico para convencer a sus compañeros de que la distancia más corta entre la casa de Mauricio ubicada en el punto P y una carretera recta l es la longitud de $\overline{PH}$, donde H está sobre l y l es perpendicular a $\overline{PH}$



Episodio 14

Expliquen y argumenten por qué en un triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a 180° . ¿En qué se están apoyando para concluir esto?

Episodio 15

Muestre cómo se puede probar que si el cuadrado de un número natural es impar, es porque dicho número es impar. Justifiquen su razonamiento y escriban en que se fundamentaron y conclusiones.

Anexo 9. Encuesta mediador tecnológico

Encuesta sobre uso y accesibilidad del programa Argonaut/Digalo	
"Un maestro es una brújula que activa los imanes de la curiosidad, el conocimiento y la sabiduría en los alumnos". Ever Garrison. El presente instrumento tiene como objetivo evaluar la efectividad del mediador tecnológico en el desarrollo de aprendizajes colaborativos. La información recolectada en este cuestionario es de carácter confidencial y académico. Por favor lea cada una de los enunciados que se presentan a continuación y escriba si está de acuerdo o en desacuerdo, justifique cuando sea necesario. *Obligatorio Sexo * Esta pregunta es obligatoria. Edad * Categoría:Funcionabilidad del sistema El software educativo impulsa su participación en el proceso de aprendizaje * El software educativo presenta la información de una forma amena que le motiva e interesa. * 	
Se puede acceder con facilidad al software * El programa actualiza la información de manera inmediata * Categoría:Usabilidad del software El software educativo es fácil de usar * Las herramientas del sistema son fáciles de ubicar * El programa te permite eliminar el trabajo que otros han realizado * El programa te permite corregir tus argumentaciones * ¿El software limita tus argumentos? * ¿El programa te permite salir de el en cualquier momento y guardar el trabajo realizado en la red? * ¿El programa permite guardar tus creaciones en el equipo? * 	

Anexo 10. Categoría razonamiento deductivo Omegas



ANEXO 11. El Programa ARGUNAUT³⁶

Diseñado por el grupo Kishurim³⁷ de la Universidad Hebrea de Jerusalem, es gratuito, pero se debe pedir autorización para su uso al profesor Raul Drachmanen al correo (drachil@netvision.net.il) para recibir los archivos de instalación y el manual vía e-mail. Argunaut. Integra los programas DIGALO 2 y una Interfaz del Moderador" ("Moderators Interface", o "MI"³⁸), que posibilita crear mapas de los argumentos.

³⁶ Se caracteriza por su naturaleza abierta y su adaptabilidad (a una variedad de plataformas diferentes, contextos y usuarios)

³⁷El Grupo Kishurim se especializa en el desarrollo de nuevas metodologías y herramientas pedagógicas basadas en la discusión en clase y en el diálogo y la argumentación con fines educativos. Tomado de: http://www.kishurimgroup.org/about_sp.asp

³⁸ Apunta a proveer al moderador de discusiones electrónicas sincrónicas de una solución total para obtener una imagen más completa del contenido de la discusión

En la parte superior de la herramienta DIGALO 2 se puede observar una barra de herramientas que contiene formas y flechas, que constituyen la "ontología" del mapa.

El valor predeterminado es de 7 formas (reclamación, información, comentario, idea, argumento, pregunta, explicación) y 3 flechas (oposición, apoyo y enlace o neutral). Como se observa en la ilustración 21.

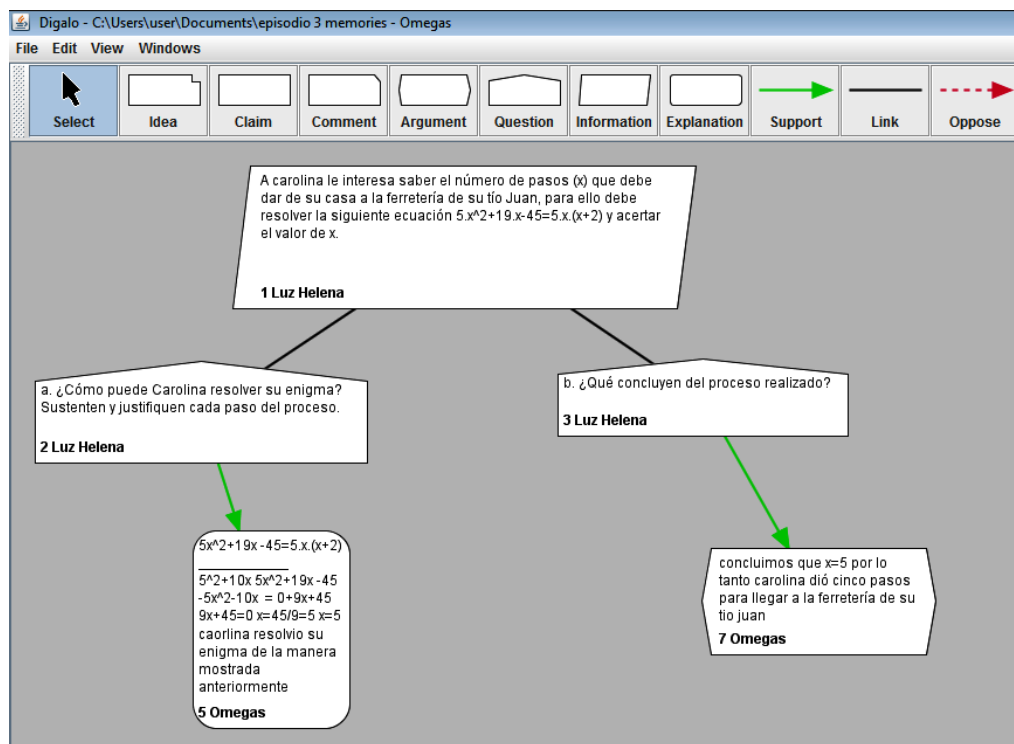


Ilustración 211. Ontologías programa Digalo

Fuente: Elaboración propia

("awareness") así como también de opciones de retroalimentación e intervención. El sistema también dispone de elementos tecnológicos interesantes para facilitar la reflexión luego de la discusión y su análisis.

Cuando un participante quiere decir algo, elije la forma que considera más adecuada, hace clic en la pantalla y se abre una ventana con preguntas, información, explicación y reclamación. Así que los estudiantes además de expresar sus ideas y trabajar de forma colectiva, pueden generar preguntas de forma sincrónica y asincrónica para ser resueltas por sus compañeros y hacer una reclamación si no están de acuerdo con un argumento dado, con el objetivo de realizar un trabajo colaborativo e interactivo, además generar competencias argumentativas, cognitivas y de trabajo en equipo.

Además de los docentes (Pineda y otros, 2011) de la UNAD y en Bucaramanga, este programa ha sido implementado por (González, 2013) y (Lucumi, 2013) en la Escuela Normal Superior de Ubaté-Colombia como herramienta pedagógica para el desarrollo de competencias argumentativas en el grado 10°.