

**ESTUDIO NUMÉRICO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
RÍGIDAS UTILIZANDO ODE45, ODE23, ODE15S Y ODE23S.**

AUTOR. EDUAR VALENCIA MORALES

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MEDELLÍN
2019**

**ESTUDIO NUMÉRICO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
RÍGIDAS UTILIZANDO ODE45, ODE23, ODE15S Y ODE23S.**

AUTOR. EDUAR VALENCIA MORALES

Trabajo de grado para optar al título de Magister en ciencias y matemáticas

Asesor

JUAN CARLOS VÁSQUEZ BETANCUR

Doctorado en Física

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

FACULTAD DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

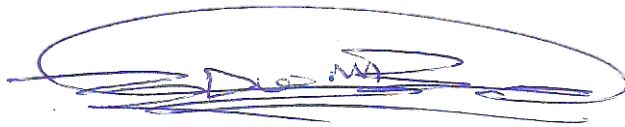
2019

Lunes, 26 de agosto de 2019

Eduar Valencia Morales

“Declaro que este trabajo de grado no ha sido presentado con anterioridad para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en ésta o en cualquiera otra universidad”. Art.92, parágrafo, Régimen Estudiantil de Formación Avanzada.

Firma.



Agradecimientos

Primeramente, doy gracias a Dios, por haberme bendecido con salud, fortaleza, paciencia y sabiduría para poder culminar satisfactoriamente esta Maestría; así mismo a mi familia, por su apoyo incondicional y hacer parte de este nuevo reto de desarrollo profesional.

Al Dr. Diego Alejandro Muñoz Durango por haberme introducido a la temática, al Dr. Primitivo Acosta-Humaney por ayudarme a consolidar el anteproyecto y muy especialmente a mi asesor Dr. Juan Carlos Vásquez Betancur por su apoyo profesional durante la consecución de este proyecto, también por su infinita paciencia y bondad, fue de gran apoyo en los momentos difíciles, lo admiro y lo respeto.

A todos los profesores y compañeros y a todos los que de una u otra forma estuvieron presentes y formaron parte de este propósito.

Dedicatoria

Dedico este esfuerzo a mi hijo Juan Pablo que sin saberlo aún me inspiro y ayudo a lograrlo, Ana María gracias por estar en mí. Edilia, madre está presente en todo lo que soy y lo que emprendo. Los amo profundamente.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	4
1.1. Pregunta problema	5
2. JUSTIFICACIÓN.....	5
3. OBJETIVOS.....	6
3.1. Objetivo general:.....	6
3.2. Objetivos específicos:	6
4. MARCO REFERENCIAL	6
4.1. Definición de rigidez	6
4.2. El Sistema de Ecuaciones VAN DER POL, SE-VDP.....	8
5. METODOLOGÍA.....	13
6. Análisis cualitativo preliminar de las soluciones gráficas de SEVDP	14
6.1. Desde la no rigidez de SEVDP hasta su moderada rigidez	15
6.2. Observación de la rigidez	20
7. Análisis CUANTITATIVO, ESTADÍSTICO descriptivo.....	24
7.1. Estudio comparativo de SEVDP no rígidos y moderadamente rígidos.....	25
7.1.1. Costo computacional de la aproximación numérica	25
7.1.2. Precisión de la solución numérica	29
7.2. Estudio comparativo de SE-VDP rígidos.	32
8. ANÁLISIS DEL ERROR permitido – tolerancia relativa	40
9. Anexos.....	49
10. conclusiones	57
11. RECOMENDACIONES	58
REFERENCIAS	59

TABLA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Ciclo limite variando la condición inicial para un parámetro $\mu = 10$.....	15
Gráfica 2. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 2$ y la tolerancia relativa igual al 10%.	16
Gráfica 3. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa igual al 1%.	16
Gráfica 4. . Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y modificando la tolerancia relativa.	17
Gráfica 5. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro μ variable y la tolerancia relativa igual al 0.1%.	17
Gráfica 6. Solución aportada por: ode15s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa variando ascendentemente: 10%, 1%, 0.1%, 0.01% y 0.001%.	18
Gráfica 7. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s variando el parámetro μ: 0.1, 2, 50, 100 y 500; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.	19
Gráfica 8. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ: 1000; y la tolerancia relativa igual al 10%.	20
Gráfica 9. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ: 5000; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.	20
Gráfica 10. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ: 10000; y la tolerancia relativa igual al 0.001%.	21
Gráfica 11. Solución aportada por: ode15s variando el parámetro μ: 1000, 5000 y 1000; y la tolerancia relativa igual a 1%.	22
Gráfica 12. Solución aportada por: ode15s con parámetro μ: 5000; y variando la tolerancia relativa: 10%, 1%, 0., 1%, 0.01% y 0.001%.....	22
Gráfica 13. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ: 5000; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.	23
Gráfica 14. Comparación de las ‘funciones evaluadas’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	26

Gráfica 15. Comparación del ‘tiempo de ejecución’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	27
Gráfica 16. Comparación de los ‘pasos empleados’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	27
Gráfica 17. Comparación del costo computacional de acuerdo con los pasos empleados y las funciones evaluadas.	28
Gráfica 18. Comparación de los ‘intentos fallidos’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	29
Gráfica 19. Comparación de los ‘pasos exitosos’ utilizados por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	32
Gráfica 20. Comparación de las ‘funciones’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	33
Gráfica 21. Comparación del ‘tiempo de ejecución’ utilizado por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.	34
Gráfica 22. Comparación de los ‘pasos exitosos’ utilizados por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.	34
Gráfica 23. Comparación de las ‘derivadas parciales’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	35
Gráfica 24. Comparación de las ‘descomposición LU’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.	36
Gráfica 25. Comparación de las ‘soluciones de sistemas lineales’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa	36
Gráfica 26. Comparación del costo computacional, cociente entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de las Exp6 a 8.	38
Gráfica 27. Comparación de los ‘intentos fallidos’ utilizadas por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.	39
Gráfica 28. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa igual al 0.001%.	42
Gráfica 29. Comparación del patrón de referencia con las soluciones de acuerdo con la disminución de la tolerancia.	44

Gráfica 30. Comparación de disminución del error relativo al disminuir la tolerancia relativa.	45
Gráfica 31. Comparación de medidas rango, tendencia central y dispersión para Exp9	48

CONTENIDO DE TABLAS

Tabla 1. Clasificación de las experimentaciones de acuerdo con el parámetro μ	14
Tabla 2. Convergencia de soluciones aportadas por ode15s según su la tolerancia relativa y variando el parámetro μ.	18
Tabla 3. Convergencia de soluciones aportadas por ode15s variando la tolerancia relativa y el parámetro μ.	23
Tabla 4. Análisis ANOVA para el dato intentos fallidos.	30
Tabla 5. Comparación de la correlación para los cuatro solucionadores según el dato intentos fallidos	31
Tabla 6. Correlaciones entre los datos de las tablas de la Exp6 a 8.....	37
Tabla 7. Costo computacional de acuerdo con el cociente entre pasos empleados y las funciones evaluadas de la Exp6 a 8.	38
Tabla 8. Análisis ANOVA para el dato intentos fallidos	40
Tabla 9. Datos estadísticos arrojados por la Exp9 sobre el análisis del error.	46
Tabla 10. ANOVA de comparación del error relativo promedio.....	46
Tabla 11. Datos encontrados en la Exp1, para el parámetro $\mu = 0.1$ y modificando la tolerancia relativa.	49
Tabla 12. Datos encontrados en la Exp2, para el parámetro $\mu = 2$ y variando la tolerancia relativa.	50
Tabla 13. . Datos encontrados en la Exp3 sobre el parámetro $\mu = 50$ y variando la tolerancia relativa.	51
Tabla 14. Datos arrojados por la Exp4 con el parámetro $\mu = 100$ y variando la tolerancia relativa.	52
Tabla 15. . Datos suministrados por la Exp5 con el parámetro $\mu = 500$ y variando la tolerancia relativa.	52
Tabla 16. Datos encontrados en la Exp6 con el parámetro $\mu = 1000$ y variando la tolerancia relativa.	53
Tabla 17. Datos proporcionados por la Exp7 con el parámetro $\mu = 5000$ y variando la tolerancia relativa.	53

Tabla 18. Datos encontrados en la Exp8 con el parámetro $\mu = 10000$ y variando la tolerancia relativa.....	54
Tabla 19. Costo computacional, razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode23.	54
Tabla 20. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode45.	55
Tabla 21. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode15s.....	55
Tabla 22. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode23s.....	55

INTRODUCCIÓN

“The only limit to this revolution is our own imagination, and the one remaining impediment is our own lethargy” (Flanagan, 1974).

Se presenta inicialmente los aspectos teóricos más relevantes del proyecto de forma general y los artículos recientes con características en común.

En la actualidad no es posible desarrollar un proyecto de carácter científico sin la ayuda de la computadora. Además, las matemáticas aplicadas han desarrollado técnicas o métodos del orden numérico para solucionar problemas complejos de la industria y la ciencia. Para este propósito se usan lenguajes de alto nivel como MATLAB quien implementó técnicas o métodos numéricos, explícitos e implícitos, dando como resultado posibilidades computacionales como: ode23, ode45, ode15s y ode23s entre otros que hacen parte de los solucionadores de ecuaciones diferenciales de este laboratorio de matrices.

Este trabajo de profundización encara modelos matemáticos presentados mediante ecuaciones diferenciales (ED) que requieren ser resueltos explícitamente. La solución de una ED puede ser encontrada usando procedimientos analíticos que contribuyen con respuestas exactas y continuas. Sin embargo, muchas de estas son un desafío porque requieren de otras estrategias para ser evaluadas después del fallo de un acercamiento riguroso y ordenado de normas lógicas preestablecidas que gobiernan pasos algebraicos finitos que dirigen siempre a una misma solución. Los métodos numéricos, utilizando operaciones aritméticas, ofrecen una alternativa, con una naturaleza diferente, para afrontarlo de manera aproximada. Las ED se clasifican en ordinarias (EDO) y parciales (EDP) en atención a las derivadas que las constituyen.

La modelación de los fenómenos que atraen el interés del investigador, de carácter físico y químico, por ejemplo, es el sistema empleado para evaluar los aspectos intrínsecos del sistema de ecuaciones de Van Der Pol (SE-VDP). Las derivadas contenidas y

conformantes de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas (SEDOR) son las bases para consolidar este objetivo. Los métodos numéricos para solucionar SEDOR son la preocupación de este estado. El aspecto empleado para clasificar las ED de este estudio aparece cuando se intenta integrar numéricamente el sistema de ecuaciones originando dos categorías de acuerdo con el modo de amortiguamiento igual o desigual presentado por las componentes del sistema en no rígidas y rígidas. Para aproximar numéricamente SEDOR existe un amplio número de estrategias como los métodos lineales multipaso y los métodos de Runge-Kutta. La precisión y el tiempo de procesamiento de estos métodos se observan desde la Computación Científica (CC). Golub (2009) define “scientific computing is a synthesis of applied mathematics, numerical analysis and computer science”. Desde este aspecto se implementa y evalúa algoritmos que converjan aproximándose a una solución del problema pretendido atendiendo criterios de estabilidad, precisión y costo computacional.

En el análisis numérico los sistemas iterativos juegan un papel importante para predecir, con relativa precisión, la evolución de los sistemas modelados con ED en el tiempo. En este proyecto se toma problemas de valor inicial (PVI), la forma general para este modelo es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(0) = 0$$

Según Kutz (2005) los métodos más comunes aplicados en PVI encontrados son: Euler, Runge-Kutta y Adams. Requieren de una situación inicial en el sistema seguido de un progreso a un paso o pasos minúsculos de forma iterativa. Estos proporcionan un esquema de pequeños avances para alcanzar la evolución del sistema pretendido en este proceso los métodos pueden ser implícitos o explícitos. No obstante, no todos los sistemas presentan características de estabilidad. Entonces se tiene métodos para cuantificar el error de trabajar con aproximaciones y de determinar el costo computacional además de los que determinan los aspectos de estabilidad.

Otro aspecto importante es el error del cálculo numérico, diferentes tipos de error son evaluados en la solución de ED. El error de truncamiento está ligado al orden del método numérico y el error de redondeo que se preocupa de las cifras significativas en el

proceso de iteración. La estabilidad absoluta limita la solución, numéricamente aproximada, a un dominio finito (Hindmarsh, 1986). El costo computacional es directamente proporcional al orden del método numérico, Gonzales-longatt (2006) concluyen, después de un estudio comparativo con MATLAB, que los resultados son consecuentes con la teoría, mostrando la conveniencia para resultados de menor error el Método de Runge-Kutta de 4to orden. MATLAB tiene comandos para evaluar las PVI como: ode23 y ode45. Se puede ver más en Bash (2015).

En términos generales, resolver numéricamente una ED se requiere una rutina de pasos. Para las de primer orden se usa un algoritmo de pequeños avances mediante la definición de derivada. En caso de encontrar una de segundo orden se debe convertir en una de primer orden y resolver por cualquier método de los expuestos para PVI. En el proceso de discretizar ED se consigue un enorme sistema de ecuaciones lineales que se soluciona mediante el modelo $Ax = b$. Los métodos, más importantes, para resolver estos sistemas son según Kutz (2005): Eliminación Gaussiana, iteración de Jacobi, descomposición LU, iteración Gauss-Seidel, métodos residuales por pasos CG, Transformada de Fourier. Se puede ver más en Arcos (2003). MATLAB ha construido rutinas para resolver PVI. Basado en un grupo de técnicas de solución que permite resolver problemas complejos lineales y no lineales de manera eficiente y precisa. Solo se necesita la condición inicial y MATLAB itera el algoritmo para encontrar la solución con la precisión requerida.

Los estudios sobre la solución de EDO mediante métodos numéricos son variados y numerosos. Al respecto: Butcher (2007) realizó un detallado análisis de EDO con los métodos Runge-Kutta dando origen al tablero de Butcher donde organiza los coeficientes del método, la representación de los coeficientes en una matriz para estos métodos fueron objeto de análisis para Jackiewicz (2009) en su estudio sobre metodos generales lineales para EDO. Auzinger, Karner, Koch y Uller (2000) tomaron una EDO y aproximaron una solución numerica desde los valores propios con direccionamiento polinomial; el estudio de la propagacion del error metodos generales lineales para EDO fue realizado por Butcher, Jackiewicz y Wright (2006), y sobre el error global sobre metodos de discretizacion para EDO, Iserles (2002) estima el error acumulado y presenta una estrategia para optimizar la cantidad de pasos o la amplitud de estos.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el campo de la ciencia aplicada se presenta grandes desafíos como el modelamiento matemático de los fenómenos físicos que según su enfoque constituyen diferentes áreas como, por ejemplo: la mecánica, la electricidad y la electrónica, la química, la biología, etc. y el tratamiento para la obtención de una solución de estos problemas. En la actualidad estos problemas son abordados desde el aspecto numérico con el objetivo de obtener una respuesta aproximada con la ayuda de un computador, como estrategia alternativa al fracasado intento de una respuesta exacta mediante el estudio riguroso analítico.

El aspecto numérico para resolver científicamente un modelo matemáticamente planteado es entonces una amplia necesidad y ha dado origen al análisis numérico moderno una disciplina que aglomera múltiples métodos numéricos, iterativos con esquemas de pasos con precisión arbitraria y en consecuencia computacionalmente costosos en menor o mayor grado, para abordar esta situación en pro de una solución (L. F. Shampine, I. Gladwell, 2003). De lo anterior, este proyecto pretende abordar las estrategias de solución de problemas matemáticos haciendo uso de un software fácilmente posible, versátil y con poder de visualizar los modelos expresados con ecuaciones diferenciales ordinarias. Siendo el interés central de este esfuerzo planteado: el estudio riguroso y sistemático del problema transitorio de la rigidez de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables y diferenciados en escala y sus factores asociados: error de cálculo e inestabilidad al evaluarse en escalas de tiempo que contienen muchos pasos mediante el empleo de solucionadores o funciones de Matlab al modelo oscilatorio de Van Der Pol. En la literatura se encuentran estudios similares como: (Abelman & Patidar, 2008), (Omale, Ojih, & Ogwo, 2014) y (Yatim, Ibrahim, Othman, & Suleiman, 2013) con diferentes modelos matemáticos y sin modificar el conjunto de variables que este estudio pretende. Otros de mayor relevancia se mencionan más adelante.

De esta manera se pretende profundizar en los métodos numéricos implícitos, de modo particular y sus asociaciones como estrategias, para evaluar y solucionar modelos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas; que dependen de un factor

ajustable, variable, determinante de rigidez. Esta empresa de orden académico incluye tácitamente un estudio paralelo de los métodos numéricos explícitos, que presentan fallas para evaluar los pretendidos, lo que los hace apropiados para sistemas con características de no rigidez. El cual será el soporte para contrastar los elementos que arroje el desarrollo de este proyecto de profundización.

1.1. Pregunta problema

El interrogante que delimitó este proyecto fue: ¿Cuáles son los factores fundamentales en el proceso de resolver numéricamente un problema modelado descrito mediante ecuaciones diferenciales rígidas?

2. JUSTIFICACIÓN

Como se mencionó anteriormente existe la necesidad de resolver problemas de la vida cotidiana modelados matemáticamente y si no se tiene la posibilidad de una solución analítica el camino a seguir es la aproximación numérica que se acerque lo mejor posible a la real. De esta forma se deben evaluar las estrategias disponibles hacia este propósito para conocer sus factores y características que determinen cuales son las más adecuadas y que respondan a patrones de ajuste en pro de una mayor confianza en el procedimiento y solución obtenida. Este proyecto apuntó a este objetivo.

3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo general:

Hacer un análisis profundo y sistemático de los diferentes métodos y estrategias de integración numérica usado por los solucionadores de Matlab en el sistema de ecuaciones de Van Der Pol para casos no rígidos y rígidos.

3.2. Objetivos específicos:

- Examinar y evaluar la singularidad y la coexistencia de los métodos numéricos para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias rígidas y no rígidas empleados por Matlab.
- Solucionar el sistema propuesto e inspeccionar los diferentes errores condicionando la integración a un parámetro de rigidez o no rigidez del modelo no lineal.
- Comparar e interpretar las diferentes soluciones numéricas aproximadas encontradas mediante la integración sistemática del modelo.

4. MARCO REFERENCIAL

4.1. Definición de rigidez

La característica de rigidez en un ED aparece en modelos físicos de vibraciones y/o oscilatorios e igualmente en modelos de reacciones químicas. Un modelo matemático se puede tratar mediante la rigurosidad del análisis matemático no obstante existe un amplio número de casos que solo les es posible una aproximación mediante métodos numéricos que permitan tomar un paso discreto enorme, en tiempo asociado, a un amortiguamiento

pequeño y constante dentro del problema. Lográndose una solución completamente variable sobre cada escala de tiempo. De esta forma si el sistema es alterado nominalmente en cualquiera de sus componentes se obtiene una respuesta inmediata en una muy diferente solución en un problema asociado a valores iniciales. A esa rápida respuesta o perturbación obtenida se le llama rigidez.

Matemáticamente el fenómeno de rigidez no está definido permitiéndose acercamientos a este problema de las ED desde diferentes ángulos dando pie a definiciones de orden práctico o empírico y desde la sistematización del proceso numérico de integración, Brugnano, Mazzia, & Trigiante (2011) reúnen las diferentes aproximaciones de definición en su artículo, Fifty Years of Stiffness:

D1: Systems containing very fast components as well as very slow components.

D2: They represent coupled physical systems having components varying with very different times scales: that is they are systems having some components varying much more rapidly than the others.

D3: A stiff system is one for which $\lambda_{\max}$ is enormous so that either the stability or the error bound or both can only be assured by unreasonable restrictions on h ... Enormous means enormous relative to the scale which here is $\bar{t}$ (the integration interval).

D4: Stiff equations are equations where certain implicit methods . . . perform better, usually tremendous better, than explicit ones.

D5: Stiff equations are problems for which explicit methods don't work.

D6: If a numerical method with a finite region of absolute stability, applied to a system with any initial condition, is forced to use in a certain interval of integration a step length which is excessively small in relation to the smoothness of the exact solution in that interval, then the system is said to be stiff in that interval.

(Söderlind, Jay, & Calvo, 2015) realiza un estudio histórico y crítico sobre las diferentes definiciones de rigidez y presenta una nueva aproximación llamada indicador de rigidez en términos definidos con las normas logarítmicas del campo vectorial de la

ecuación diferencial. Para realizar este cometido entre otros problemas usa en detalle el SE-VDP.

El concepto de rigidez toma protagonismo cuando las computadoras se involucran en el proceso de solución de SEDOR. Este proceso usa una rutina que toma un paso en el tiempo para resolver un problema de valor inicial, destacándose una amplia variedad de opciones para controlar el error, relativo y absoluto, que responde a facturas de tolerancia que obedecen a objetivos de convergencia y estabilidad perseguidos llamados restricciones. En términos generales, el proceso emplea métodos implícitos, que ofrecen incrementar la estabilidad pero que endurecen el camino hacia la solución debido a que implica, cada vez que se recorre un paso en el tiempo, resolver un sistema de ecuaciones no lineales cuya solución es un nuevo valor de vector de variables dependientes. Esto significa que se debe tratar con una matriz jacobina y resolver un sistema de ecuaciones lineales que requieren de la iteración de Newton para resolver la no linealidad del problema. Esto es un problema computacionalmente costoso para resolver. Esta es la razón por la cual existen diferentes métodos para solucionar sistemas rígidos como: Diferenciación hacia atrás, diagonalización implícita, Adams-Multon y Gauss-Radau; con otras más derivadas de las anteriores. Se puede ver más en Celaya,(n.d.).

4.2. El Sistema de Ecuaciones VAN DER POL, SE-VDP.

El sistema de ecuaciones que se pretende en el proyecto nace en el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica desde la teoría de circuitos eléctricos resonantes. Como objeto de estudio se introduce un modelo matemático de circuito conformado por resistores, inductancias y capacitancias (RLC) coexistiendo con un triodo, válvula electrónica, que genera una secuencia de pulsos de corriente que puede tener variados rangos de cambio.

Este modelo es expresado por una ecuación diferencial para la carga Q y la corriente I es igual a Q' . La ecuación es derivada por la ley de voltaje de Kirchhoff que requiere que la suma de las caídas de voltaje presentado por sus componentes, RQ' , $1/C Q$ y LQ'' , sea igual al voltaje $V(t)$ suministrado. Generando la siguiente ED de segundo orden:

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = V(t) \text{ para } Q(0) \text{ y } Q'(0) \text{ dadas}$$

Escalando las variables tiempo y carga se obtiene:

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

Donde y y y'' son la carga y la corriente escaladas y μ es una función de los parámetros del modelo inicial.

La anterior ecuación es llamada Van Der Pol y para valores diferentes de μ se convierte en una ecuación diferencial de segundo orden, con características de rigidez y no rigidez parametrizable. Esta fue formulada por Balthazar Van de Pol en 1920, antecedentes y evaluación mediante RADAU se encuentra en Mazzia & Magherini, (2008).

Esta ecuación puede ser reformulada como un sistema de ED mediante: $y_1(t) = y(t)$ y $y_2(t) = y'(t)$ por definición la derivada de y_1 debe ser y_2 y la derivada de y_2 es y'' la cual debe ser resulta la ED de segundo orden. Presentando el sistema equivalente:

$$y_1' = y_2 \text{ para } y_1(0) = y(0) \text{ y}$$

$$y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \text{ para } y_2(0) = y'(0)$$

En el proceso de resolver numéricamente, la anterior, se genera un sistema lineal que esencialmente deriva a una matriz Jacobiana. Matriz que tiene un escalar multiplicador y la

matriz identidad. En este empeño se usa el método de Krylov para desarrollar la matriz como un operador debido que esta es la Jacobiana de una función dada (Tokman, 2005). Entonces la matriz puede ser trabajada con un proceso de diferencia de cocientes y escogiendo el paso pequeñamente correcto se puede desatender los más grandes términos en beneficio de la estabilidad y precisión.

4.3.Solucionadores de EDO de Matlab

Las ED modernas o los modelos matemáticos expresados con ellas requieren de un laboratorio de matrices para ser estudiados, comprendidos y aproximados en cuanto a su solución. Es aquí donde Matlab centra la atención como instrumento científico de computación que facilita el acercamiento al modelo planteado en busca de una solución de alta precesión facturado el costo de los cálculos de acuerdo con parámetros de tolerancia que permitan estabilizar la evaluación. “Matlab has become an extremely important problem-solving environment (PSE) for both teaching and research” (L. F. Shampine, I. Gladwell, 2003).

El propósito planteado es en primera instancia: identificar la procedencia del error, cuantificar el error basado en los componentes individuales de las operaciones aritméticas y minimizarlo de acuerdo con las necesidades. Por último, comparar los errores numéricos de los métodos de integración basados en esquemas de pasos, rígidos. La validación de este propósito se hace con el modelo seleccionado SE-VDP.

Para este cometido se selecciona la suite de solucionadores de EDO prestando especial interés en su sistema de pasos adaptativo en el tiempo en función del comportamiento de la solución y ajustando parámetros de relativa y absoluta tolerancia. De esta se selecciona: ode23 y ode45 para sistemas no rígidos, métodos embebidos Runge-Kutta explícitos; el primero de segundo y tercer orden y el segundo de cuarto y quinto orden; y para sistemas rígidos ode15s que es un método de orden variable basado en las fórmulas de integración numérica y ode23s estructurado en la fórmula modificada de segundo orden de

Rosenbrock, ambos implícitos, Ashino et al., (2000) . La documentación sobre los solucionadores se encuentra en Choose an ODE Solver - MATLAB & Simulink,(n.d.).

Matlab cuenta, además, con otras alternativas: ode113 para problemas no rígidos y tolerancias al error estrictas, ode23t para sistemas moderadamente rígidos usa la regla trapezoidal y ode23tb para problemas rígidos usa la regla trapezoidal y la diferenciación por atraso.

Los solucionadores escogidos se emplearán sistemáticamente para estudiar el comportamiento del error en un sistema adaptativo buscando comprender como la precisión se incrementa en la medida de que el tamaño del paso en el tiempo se reduce. Sumado a lo anterior, el obtener soluciones aproximadas donde la magnitud en la dispersión de los valores calculados permita la eliminación de la incertidumbre es de gran importancia mediante el empleo de algoritmos estables donde los errores pequeños se presenten y conserven de principio a fin de los cálculos.

4.4. Referentes Teóricos

Los estudios sobre ecuaciones diferenciales rígidas son variados y numerosos, pero haciendo énfasis en la temática expuesta se encuentran algunos relevantes con características similares:

Los avances tempranos sobre software para solucionar EDO son presentados por Shampine y Reichelt, (1997) muestra y compara los desarrollos de Matlab en cuanto a sus funciones solucionadoras para EDO rígidas y no rígidas usando diversos problemas incluido SE-VDP en su modelo no rígido. Este trabajo es la base de este estudio numérico centrándose en SE-VDP observando los resultados de las experimentaciones al modificar su estado de oscilación y verificando el error relativo atendiendo una solución de referencia.

Ashino, Nagase y Vaillancourt, (2000) soluciona el SE-VDP usando el método de Runge-Kutta y aplicando el código ode23 con el propósito de estudiar características de precisión y estabilidad en los métodos de diferencias finitas para solucionar EDO.

Una comparación de los métodos más recientes para el estudio SEDOR de una reacción química mediante solucionadores de Matlab y métodos no estándar de diferencias finitas se puede encontrar en Abelman & Patidar, (2008), donde se resalta la ventaja de la no restricción del tamaño del paso que ofrece este laboratorio de matrices.

El empleo de SE-VDP en áreas de la salud se puede observar en Hensley, Martin, Ghosh, & Hartmeister, (2008) usado para modelar los sistemas cardiovascular y respiratorio y en Harikrishna, Osei, Kamiska, & Majumdar, (n.d.) quienes lo utilizan para modelar los comunes desordenes, movimientos, del cuerpo ocasionados por la enfermedad de Parkinson. Empleando igualmente de solucionadores de Matlab como ode45 y ode15s.

Celaya (n.d.) en su tesis sobre métodos numéricos para SEDOR, presenta un estudio de la semidiscretización del método de los elementos finitos en solucionadores de Matlab, ode45 y ode15s, para solucionar SEDOR. Además, analiza y contrasta los elementos computacionales adaptativos que hacen posible la integración haciendo uso de los mismos.

Omale, Ojih y Ogwo (2014) realiza un análisis matemático de PVI de EDO rígidas y no rígidas usando Matlab donde señala la importancia y relevancia de sus códigos o funciones, solucionadores, solucionando seis problemas incluido el SE-VDP. La diferencia con lo que se pretende radica en las experimentaciones planteadas que parten desde un modelo no rígido hasta lograr la rigidez del modelo, atendiendo el error relativo y el desempeño de cada solucionador hasta conseguir observar la mejor opción en cuanto al solucionador en cada estado del modelo, SE-VDP.

Söderlind et al., (2015) emplea ampliamente SE-VDP entre otros modelos para estudiar los nuevos acercamientos en pro de una definición rigurosa de rigidez en concordancia con las observaciones prácticas computacionales.

Por último, Weiner, Kulikov, Beck y Bruder, (2017) presenta un integrador de SEDOR en modo automático usando tripletas de dos pasos diagonalmente implícitas equipadas con controladores de error locales y globales para proporcionar precisiones preasignadas y las compara con los solucionadores de Matlab ODE15s y ODE23s experimentando con SE-VDP y otros modelos.

5. METODOLOGÍA

Como marco de simulación y evaluación, se acometió por un análisis sistemático que involucró tres variables independientes: los cuatro solucionadores, los parámetros μ : 0.1, 2, 50, 100, 500, 1000, 5000 y 10000 y las tolerancias relativas: 10%, 1%, 0.1%, 0.01%, y 0.001%. Dando un total de 130 evaluaciones en los estudios de no rigidez, moderadamente rígidas y rigidez, ya que entre μ : 1000 a 10000 solo se utilizaron ode15s y ode23s. Así, SE-VDP se evaluó con cada solucionador modificando el parámetro de rigidez y la tolerancia relativa. Más 20 evaluaciones del ejercicio de análisis de error y 4 evaluaciones del ejercicio para hallar la solución de referencia. Para un total de 154 evaluaciones agrupadas en 10 experimentaciones numéricas. Donde se procura lo siguiente:

- a. Se evalúa los solucionadores de la suite de Matlab: ode23, ode45, ode15s y ode23s. Los dos primeros para sistemas no rígidos y los últimos para sistemas rígidos. Seleccionados por ser los más recomendados por Matlab en Choose an ODE Solver - MATLAB & Simulink,(n.d.), Modificando el parámetro μ y la tolerancia relativa.
- b. Se observa los aspectos de ejecución de cada experimentación para analizar el costo computacional en cada solucionador empleado.
- c. Se realiza un análisis cualitativo preliminar.
- d. Se realiza un análisis estadístico descriptivo de los datos obtenidos.
- e. Se efectúa un análisis del error relativo

Los parámetros de ejecución μ son: 0.1, 2, 50, 100, 500, 1000, 5000 y 10000. Así mismo se modifica la tolerancia relativa: 10%, 1%, 0.1%, 0.01%, y 0.001%. De esta manera el estudio comparativo se clasifica en ocho ejercicios de experimentación numérica que varían dependiendo del parámetro μ de la siguiente forma:

Tabla 1. Clasificación de las experimentaciones de acuerdo con el parámetro μ .

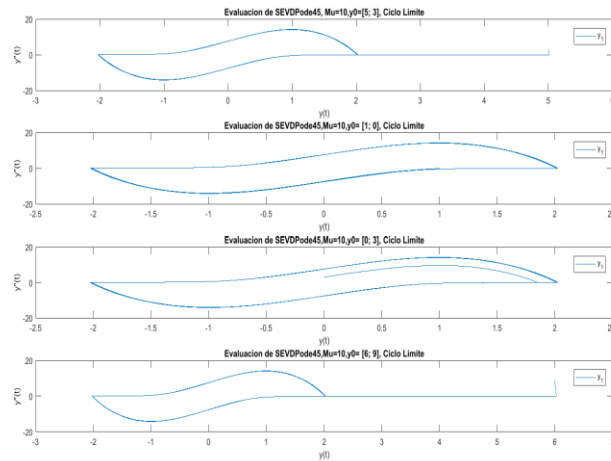
Experimentación	Parámetro μ	Tipo de SEVDP
Exp1	0.1	No rígida
Exp2	2	No rígida
Exp3	50	Moderadamente rígida
Exp4	100	Moderadamente rígida
Exp5	500	Moderadamente rígida
Exp6	1000	Rígida
Exp7	5000	Rígida
Exp8	10000	Rígida

La cantidad de experimentaciones que se diseñaron fueron teniendo en cuenta que según (Higham, 2009) “an algorithm can be stable as a means for solving one problem but unstable when applied to another problema”. Al modificar el parámetro μ SE-VDP adquiere otras particularidades que lo transforma en un problema nuevo.

6. ANÁLISIS CUALITATIVO PRELIMINAR DE LAS SOLUCIONES GRÁFICAS DE SEVDP

Este tipo de acercamiento inicial responde a cuestionamientos iniciales que pretendían un conocimiento primario de SE-VDP que facilitara la obtención de los datos. Datos que deberían atender rasgos de homogeneidad en los resultados para cada una de las variables de ejecución: los solucionadores, parámetro μ y tolerancia relativa. De igual forma estimar los datos que se iban obteniendo en cuanto al peso que estos podían aportar en el ejercicio formulado.

La pregunta inicial de este ejercicio de simulación indaga sobre el valor inicial para realizar las experimentaciones numéricas. Evaluando con valores diferentes se observó que, sin importar el valor inicial, SE_VDP muestra tendencias de afinidad hacia los valores, 2 y -2, intervalo de convergencia como ciclo limite, (Hafeez, Ndikilar, & Isyaku, 2015).



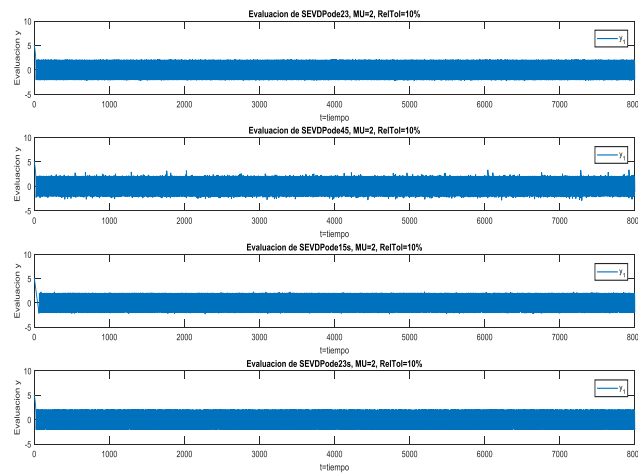
Gráfica 1. Ciclo limite variando la condición inicial para un parámetro $\mu = 10$

Enseguida se resolvió la incógnita, que apuntaba al valor límite de tiempo de simulación de SE_VDP, suficientemente amplio, para observar el límite de convergencia. Observando graficas 3, 7 y 12 se verifica que el límite de convergencia inicia su tendencia significativa después de diez veces más el parámetro μ en evaluación.

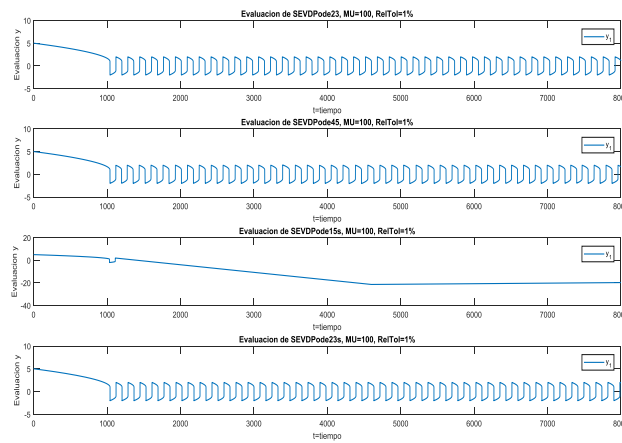
De esta manera se unificó, para todas las experimentaciones y de los cuatro solucionadores, el tiempo de simulación entre 0 y 800 para los parámetros μ inferiores o iguales a 500 y entre 0 y 150000 para los mayores a este valor para ode15s y ode23s. Con una condición inicial de $[5, 3]^T$ para todas las experimentaciones. Lo anterior obedeció a que para μ igual a 500 los tiempos de ejecución superaban los 30 minutos en algunos casos y para parámetros superiores los solucionadores ode23, ode45 no era posible la ejecución presentando problemas por excesivo tiempo o no convergencia en la solución.

6.1. Desde la no rigidez de SEVDP hasta su moderada rigidez

Con lo anterior como soporte se procedió con las experimentaciones numéricas, evaluando individualmente, para cada solucionador: ode23, ode45, ode15s y ode23s. modificando μ y la tolerancia relativa encontrando soluciones como estas:



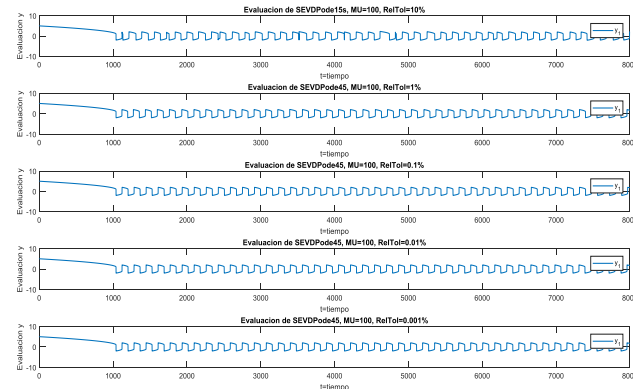
Gráfica 2. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 2$ y la tolerancia relativa igual al 10%.



Gráfica 3. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa igual al 1%.

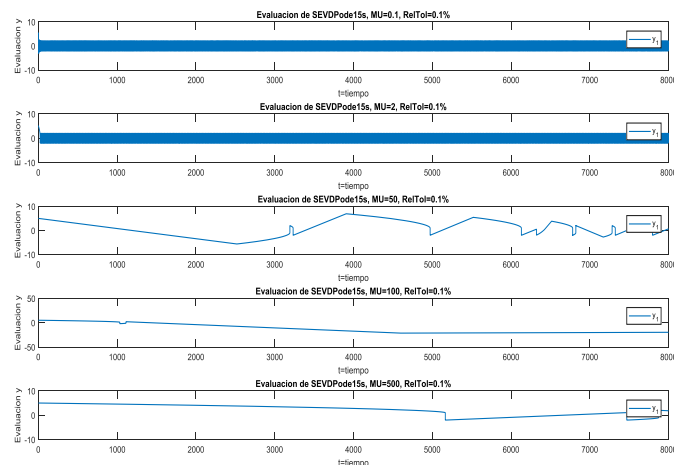
En el aspecto cualitativo la tendencia hacia el ciclo límite es la característica de importancia a observar, ejemplo de esto la gráfica 2 para un parámetro $\mu = 2$ y la tolerancia del 10%. La particularidad encontrada es primero de convergencia hacia el ciclo límite $[-2, 2]$ en las soluciones aportadas por los solucionadores ode23, ode45 y ode23s. Y segundo, la no convergencia que se presenta en la solución al tomar el parámetro μ tal como se puede

observar en la gráfica 3 para una tolerancia relativa de 1%. En el caso del solucionador ode15s. O, contrario a lo anterior, soluciones aparentemente convergentes como la mostrada en la Grafica 4 para una tolerancia relativa variable y sosteniendo el parámetro μ .



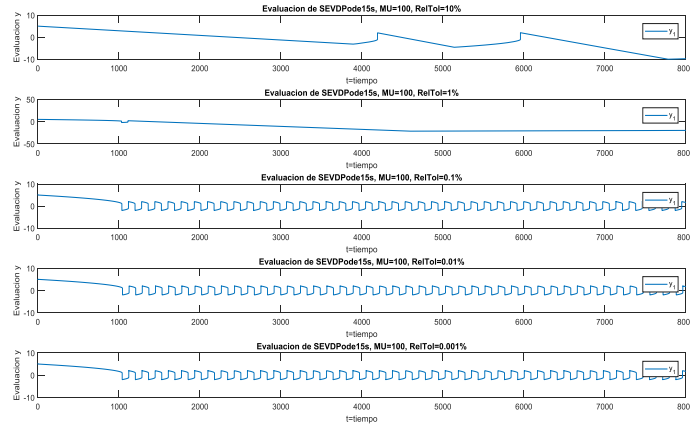
Gráfica 4. . Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y modificando la tolerancia relativa.

Sin embargo, ode15s presenta un comportamiento disimilar como se puede observar en la gráfica 5 al fijar la tolerancia a 0.1% por ejemplo.



Gráfica 5. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro μ variable y la tolerancia relativa igual al 0.1%.

En este punto, se puede concluir que, haciendo que la tolerancia relativa sea constante las evaluaciones con el solucionador ode15s convergen en las experimentaciones 1 y 2, y no es convergente para las experimentaciones con parámetros $\mu=50$ o superiores tal como lo muestra la gráfica 6 que sostiene el parámetro, pero varía la tolerancia relativa.



Gráfica 6. Solución aportada por: ode15s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa variando ascendentemente: 10%, 1%, 0.1%, 0.01% y 0.001%.

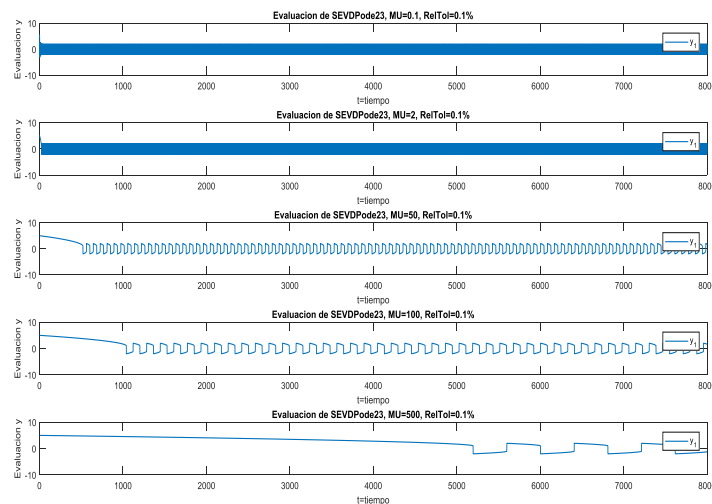
Además, al permanecer con el parámetro μ constante y modificando la tolerancia relativa el solucionador ode15s no converge para las dos tolerancias mayores: 10% y 1%. Esta característica esta consignada en la tabla 2.

Tabla 2. Convergencia de soluciones aportadas por ode15s según su la tolerancia relativa y variando el parámetro μ .

Convergencia		RelTol %				
μ	10	1	0.1	0.01	0.001	
0.1	si	si	si	si	si	
2	si	si	si	si	si	
50	no	no	si	si	si	
100	no	no	si	si	si	
500	no	no	no	si	si	

En la literatura encontrada se recomienda a ode15 como mejor opción después de ode45 en caso de que esta última no funcione, (L. F. Shampine, I. Gladwell, 2003). Solucionador que es adecuado para evaluar numéricamente EDO rígidas. En este ejercicio se observa que no converge cuando se aumenta la tolerancia, mayor que 0.1% que Matlab asume por defecto, e incrementando el parámetro μ , característica de rigidez.

Los resultados de las evaluaciones aportadas por el solucionador ode23 permiten verificar el cambio de periodo en el ciclo límite $[-2, 2]$ y el desigual tiempo, pero con un patrón, en el que inicia la tendencia hacia el intervalo de convergencia. Esta característica de disminución del periodo de oscilación se puede observar en la siguiente gráfica:

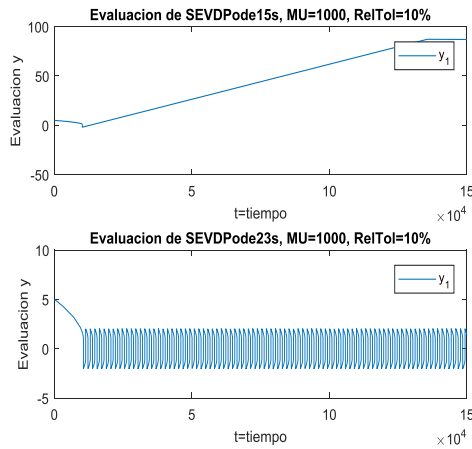


Gráfica 7. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s variando el parámetro μ : 0.1, 2, 50, 100 y 500; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.

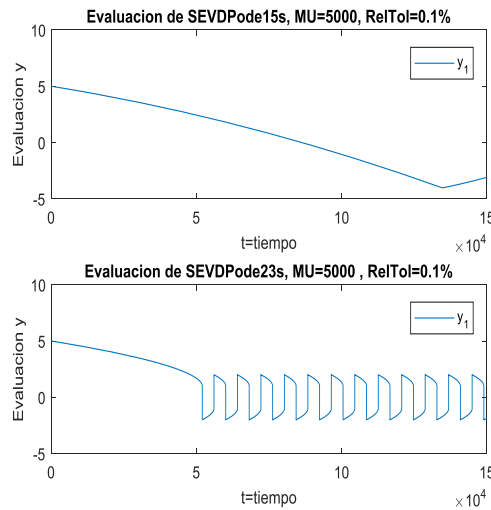
Regresando a los solucionadores ode23 y ode45, estos presentan soluciones similares en frecuencia de la oscilación modificando el periodo y el tiempo en el que inicia esta alternancia al variar el parámetro μ . En el caso de la tolerancia se puede observar que tiene relación directa con la amplitud del periodo oscilador con tendencia hacia el ciclo límite $[-2, 2]$. Los anteriores son los que proveen resultados más estables en atención a las características mencionadas.

6.2. Observación de la rigidez

Las experimentaciones 6, 7 y 8 fueron restringidas para los solucionadores: ode15s y ode23s por ser los adecuados para evaluar SE-VDP en su condición de rigidez. En las experimentaciones anteriores, 1 a 5, los tiempos de ejecución fueron muy elevados para las evaluaciones con ode23 y ode45, haciendo imposible la convergencia de resultados para parámetros como: 1000, 5000 y 10000 se obtuvieron graficas como las siguientes:



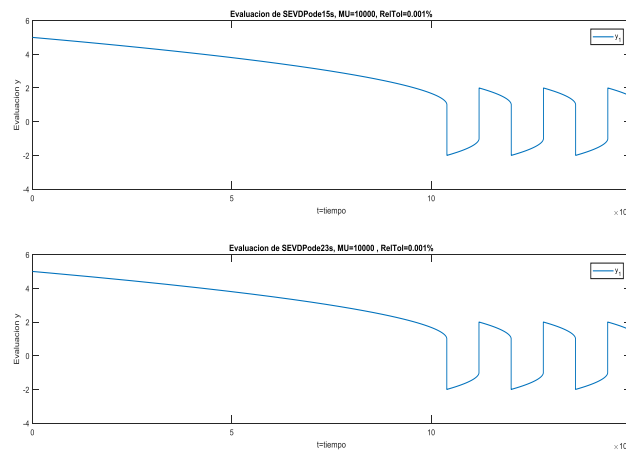
Gráfica 8. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ : 1000; y la tolerancia relativa igual al 10%.



Gráfica 9. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ : 5000; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.

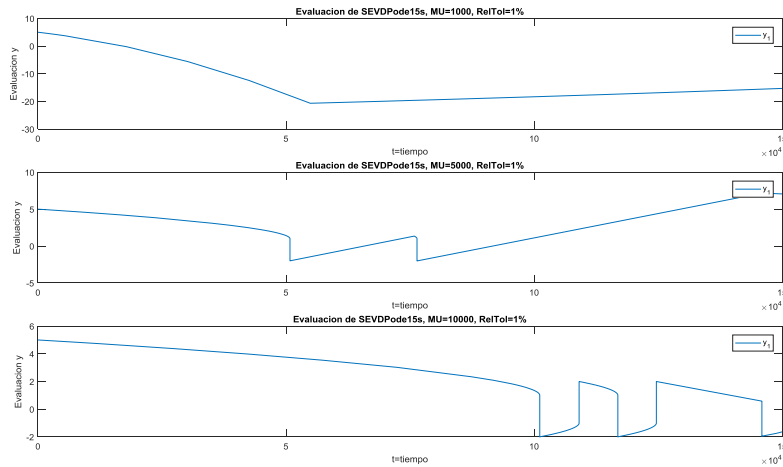
Las soluciones aportadas por el solucionador implícito ode15s presentan características similares a las encontradas en la sección anterior de no rigidez y mediana rigidez.

En las gráficas anteriores se observa la no convergencia de la solución con ode15s y sin embargo con las mismas condiciones el solucionador de un solo paso ode23s converge numéricamente con amplios cambios en su periodo de oscilación. Esto como consecuencia de mayor tiempo de evaluación, aspecto significativo, empleado por este solucionador para tender hacia el ciclo limite $[-2, 2]$. Además, sin importar lo grande del parámetro y una pequeña, adecuada, tolerancia ode15s converge señalando características similares a ode23s. Un ejemplo de lo anterior se observa en la gráfica siguiente:

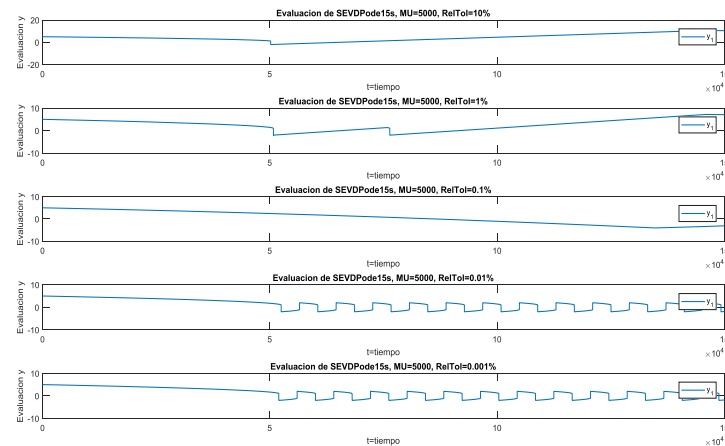


Gráfica 10. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ : 10000; y la tolerancia relativa igual al 0.001%.

Avistando el solucionador multipaso ode15s como de cuidado en el manejo de las tolerancias y parámetros perseguidos por este proyecto se evaluó teniendo en cuenta dos aspectos: la tolerancia relativa estable y modificando el parámetro e inversamente a lo dicho. Tal como lo muestran la gráfica 11 y 12.



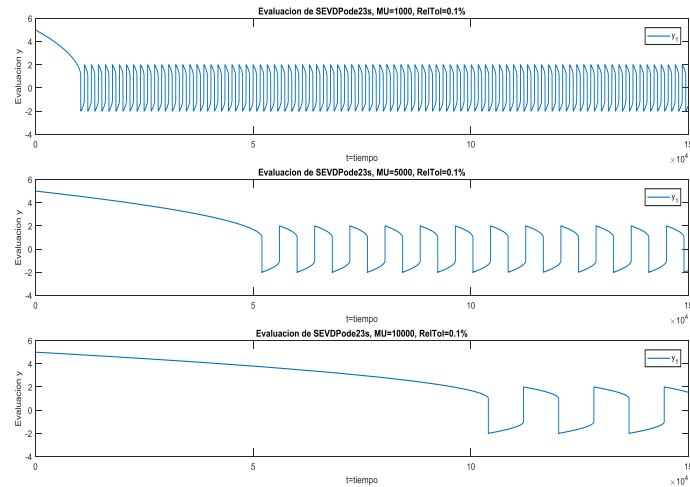
Gráfica 11. Solución aportada por: ode15s variando el parámetro μ : 1000, 5000 y 10000; y la tolerancia relativa igual a 1%.



Gráfica 12. Solución aportada por: ode15s con parámetro μ : 5000; y variando la tolerancia relativa: 10%, 1%, 0., 1%, 0.01% y 0.001%

Entonces, ampliando el parámetro de SE-VDP hace que las soluciones numéricas del solucionador de precisión variable de 1 a 5, ode15s, tiendan hacia el intervalo de convergencia si se sostiene la tolerancia. Entonces se puede inferir que este solucionador implícito presenta las mismas características en condiciones inversas. Para corroborar lo primero se necesitaría un tiempo de simulación mayor al planteado por este estudio.

Con lo anterior en mente se practicó lo mismo para ode23s y confirmó buenos resultados, en términos de convergencia, y aspectos variables en cuanto a tiempo de convergencia y periodo al incrementar el parámetro μ y sosteniendo igual la tolerancia relativa en las evaluaciones.



Gráfica 13. Solución aportada por: ode15s y ode23s con el parámetro μ : 5000; y la tolerancia relativa igual al 0.1%.

Según lo observado se puede afirmar que el solucionador de un solo paso ode23s presenta mejores resultados en términos de convergencia en los resultados contrastados por los mismos con ode15s en atención a los aspectos restrictivos de este propósito: parámetro μ , tolerancia relativa y tiempo de simulación. La característica de convergencia o no convergencia del solucionador multipaso ode15s se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 3. Convergencia de soluciones aportadas por ode15s variando la tolerancia relativa y el parámetro μ .

Convergencia	RelTol %				
μ	10	1	0.1	0.01	0.001
1000	no	no	si	si	si
5000	no	no	no	si	si
10000	no	no	no	si	si

7. ANÁLISIS CUANTITATIVO, ESTADÍSTICO DESCRIPTIVO

El análisis cualitativo se realizó teniendo en cuenta los datos proporcionados por Matlab, a través del comando stats, en cada ejecución de las ocho experimentaciones numéricas, Exp1 a Exp8. El estudio se divide en dos partes uno para los parámetros μ menores o iguales a 500 y los iguales a 1000 y superiores, SEVDP moderadamente rígidos y rígidos.

El comando stats proporciona datos ajustados a la ejecución del algoritmo del solucionador al evaluar SE-DOR como los siguientes:

Stats para ode23s:

57076 successful steps

170 failed attempts

285722 function evaluations

57076 partial derivatives

57246 LU decompositions

171738 solutions of linear systems

Elapsed time is 6.640019 seconds.

En el caso de no rigidez y moderada rigidez las veinte evaluaciones de las experimentaciones 1 a 5 fueron realizadas sistemáticamente, modificando el parámetro μ : 0.1, 2, 50, 100, 500 y disminuyendo la tolerancia relativa comenzando con 10% hasta 0.001%. Los datos fueron consignados en las tablas 6 a 10 que muestran los solucionadores: ode23, ode45, ode15s y ode23s.

La segunda parte se elaboraron las Exp6, 7 y 8. Mediante los solucionadores implícitos ode15s y ode23s adecuados para evaluar SE-VDP en su estado de rigidez con un total de 30 evaluaciones para cada parámetro μ .

7.1. Estudio comparativo de SEVDP no rígidos y moderadamente rígidos.

Para realizar este ejercicio se tuvo en cuenta los datos que aplican por igual a todos los solucionadores agrupados de la siguiente forma: funciones evaluadas, pasos empleados, pasos exitosos, intentos fallidos y tiempo de ejecución.

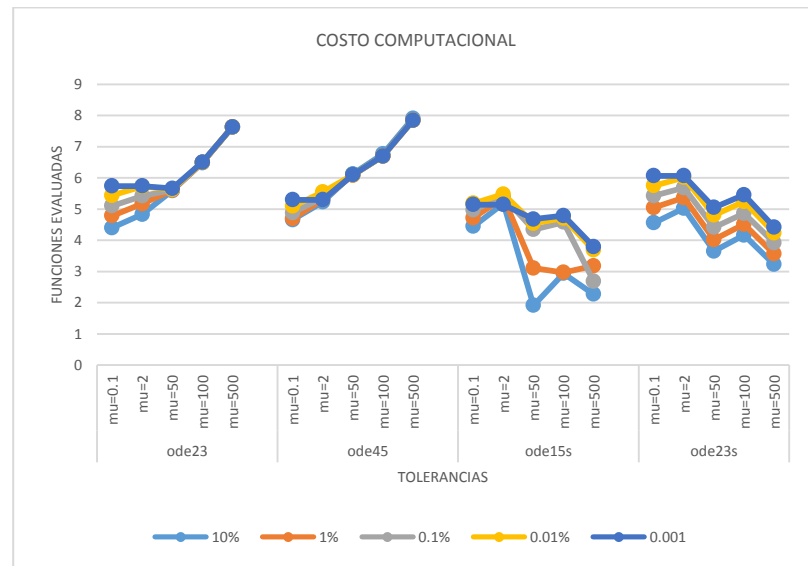
Los aspectos perseguidos por este proyecto son el costo computacional y la precisión.

7.1.1. Costo computacional de la aproximación numérica

La cantidad de operaciones que un procesador realiza desarrollando un algoritmo en busca de una solución aproximada para una ecuación matemática, ED, de un modelo como el SE_VDP determina el costo operacional del cálculo numérico. Por lo tanto, la observación de la cantidad de funciones evaluadas y el tiempo de ejecución determinan el costo computacional. Cabe aclarar que el tiempo de ejecución es subjetivo a las capacidades que posea el ordenador usado en el proceso de evaluación. Sin embargo, para justificar su empleo en confirmar la anterior afirmación se unificó el tiempo de simulación $[0, 8000]$ y el intervalo inicial $[5, 3]^T$ para todas las evaluaciones en las Exp1 a 5.

De esta manera se contrastaron la cantidad de funciones evaluadas por cada solucionador, grafica 14, modificando las variables: parámetro μ y tolerancia relativa. Encontrando que para los solucionadores ode23 y ode45 la cantidad de funciones evaluadas aumenta directamente con el incremento del parámetro de rigidez. De forma opuesta, se registra un descenso de estas al aumentar μ . Además, en el estado de no rigidez las funciones evaluadas responden de forma inversa cuando se disminuye la tolerancia en los cuatro solucionadores. Entonces a menor tolerancia relativa permitida en las evaluaciones mayor cantidad de funciones evaluadas.

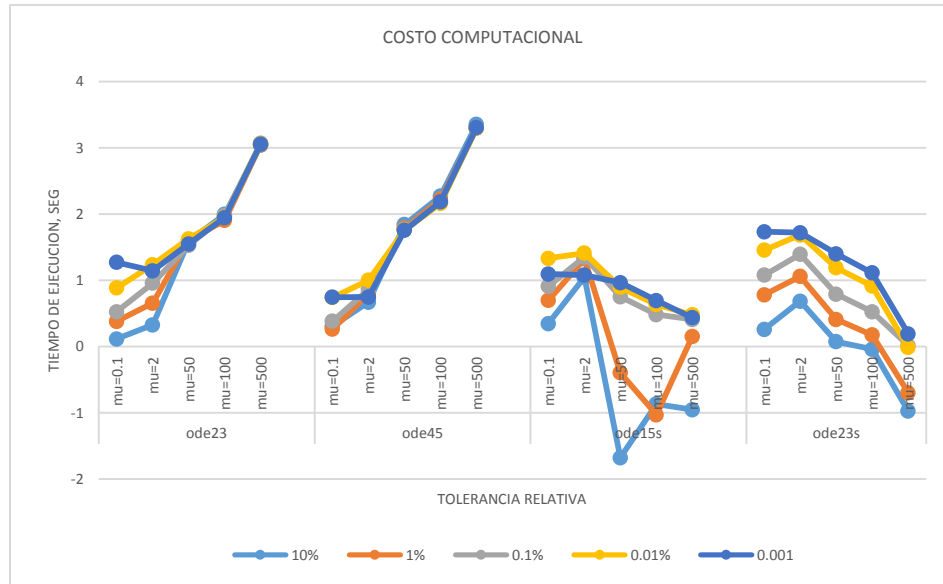
Para catalogar las funciones realizadas como el costo computacional de las evaluaciones se contrasto con el comportamiento del tiempo de ejecución de los solucionadores en iguales condiciones.



Gráfica 14. Comparación de las ‘funciones evaluadas’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

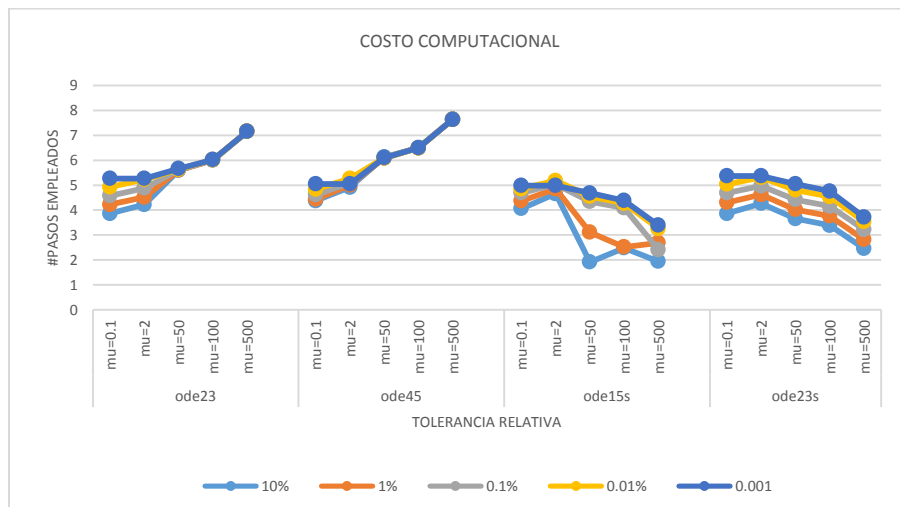
Guardando las proporciones se observa que el comportamiento de la variable tiempo de ejecución presenta igual o similares características como las descritas anteriormente: al aumentar μ aumentan el tiempo de ejecución de ode23 y ode45 e inversamente para ode15s y ode23s. la exigencia en el cálculo con menor tolerancia incrementa el tiempo de ejecución en el grupo de solucionadores, esto se puede ver en la gráfica 15.

Consecuencia de lo anterior la cantidad de funciones evaluadas determina el costo operacional de las exp1 a 5. Estos dos aspectos tienen una correlación de 0.999 obtenida con los datos de las cien evaluaciones desarrolladas en las cinco experimentaciones. Adicional a lo anterior, se observa la especialización de los solucionadores los explícitos: ode23 y ode45 para problemas no rígidos y los implícitos: ode15s y ode23s para problemas rígidos. Un costo computacional muy cerrado en los dos primeros y en los últimos un costo menor para ode15s previa verificación de convergencia en la tabla 2.



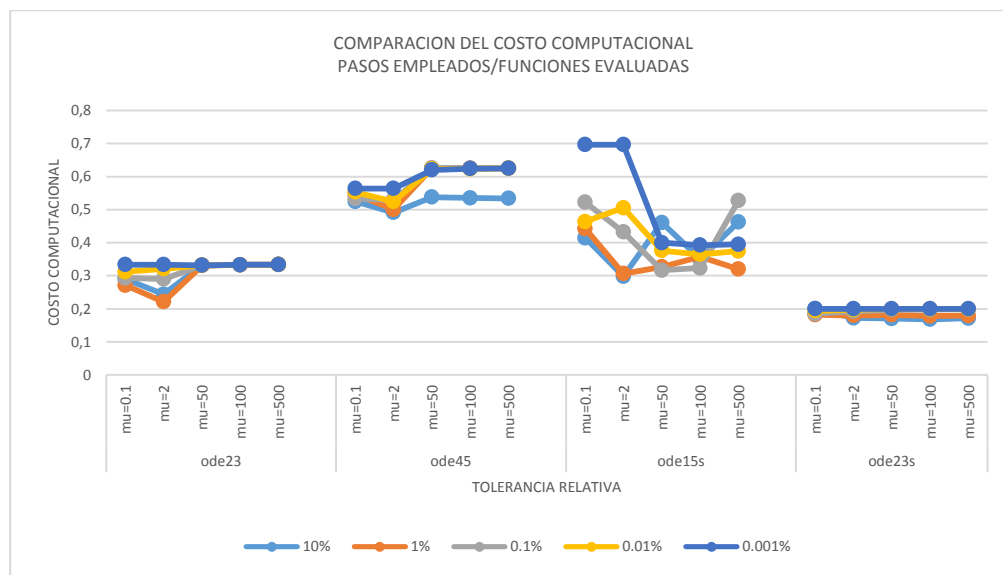
Gráfica 15. Comparación del 'tiempo de ejecución' utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

Aunque el dato pasos empleados presenta características similares con una correlación de 0.998 con el dato funciones evaluadas, grafica 16, este no agrupa las funciones evaluadas en su conteo por presentar una magnitud menor. Entonces, Al estimarlo como el gasto operacional del procesador no sería un dato real.



Gráfica 16. Comparación de los 'pasos empleados' utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

Igualmente, la suma de los datos: pasos exitosos e intentos fallidos en algunos casos son mayores a los pasos empleados, tabla, son otro ejemplo por lo cual este dato no fue tenido en cuenta en este primer análisis de costo computacional. Sin embargo, si la tarea fuese evaluar las funciones de SE-VDP y los pasos empleados el trabajo para llevarla a cabo se tendría el costo computacional, promedio para cada solucionador.



Gráfica 17. Comparación del costo computacional de acuerdo con los pasos empleados y las funciones evaluadas.

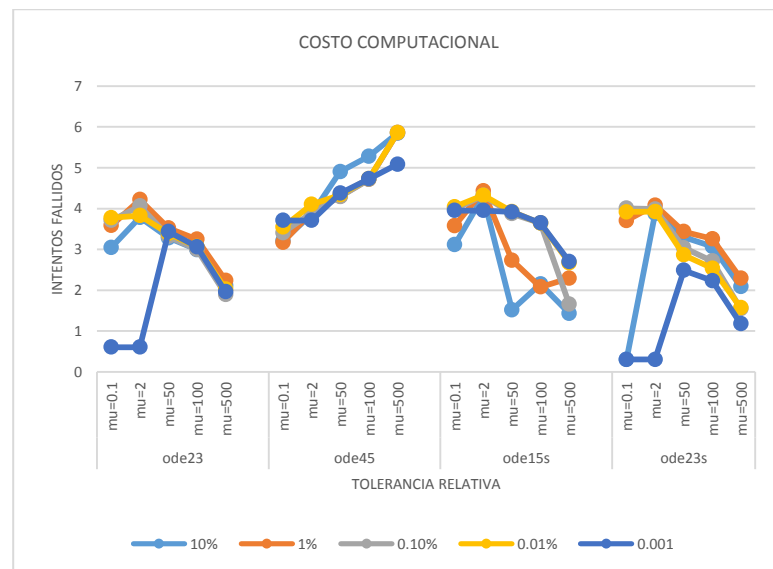
La clasificación del costo operacional que responde a la razón entre los datos: pasos empleados y funciones evaluadas permiten clasificar al grupo de solucionadores, grafica 17. Entonces, los cuatro solucionadores reaccionan incrementando su costo computacional al disminuir la tolerancia relativa. En cuanto a la variación del parámetro μ los cambios para los solucionadores explícitos corresponden a su especialización por lo tanto aumentan levemente su costo computacional al aumentar de no rígido a moderadamente rígido. Y ode23 hace lo inverso, propio a su especialización en casos de rigidez, disminuyendo el costo computacional al aumentar el parámetro μ . Por último, ode15s es un caso que

presenta no conversión según la tabla 2 y es el único solucionador donde los datos pasos exitosos y pasos empleados no son iguales, tablas 16 a 18. Así, el mejor solucionador, en el ejercicio de las cinco experimentaciones numéricas, fue ode23s seguido por ode23. En tercer lugar, estuvo ode45 pues presento convergencia proporcionando los datos para este análisis.

La cuantificación del costo computacional se puede observar en las tablas 19 a 22.

7.1.2. Precisión de la solución numérica

Se tiene como idea principal que la precisión, el valor de la solución más ajustado a la solución real, tiene relación inversamente proporcional con la cantidad de intentos fallidos; a menos intentos fallidos mayor precisión. Al observar la gráfica 17. Los solucionadores ode23 y ode23s presentaron el comportamiento mencionado aún con la variación del parámetro μ .



Gráfica 18. Comparación de los 'intentos fallidos' utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

Para estos solucionadores la precisión es mayor para SE-VDP no rígido y para sistemas moderadamente rígidos la precisión aumenta al incrementar el parámetro μ .

En consecuencia, se observa que los solucionadores ode23 y ode23s ofrecen una mayor precisión al aumentar la tolerancia y que esta característica puede ser corroborada por los intentos fallidos que arroje el solucionador empleado. Estas afirmaciones se evaluarán cuando se analice el error relativo más adelante.

En el caso de ode45 la precisión disminuye al aumentar el parámetro e igualmente al aumentar la tolerancia relativa. Y el solucionador ode15s presenta características de no convergencia, tabla 2, que no dejan atender la totalidad de los datos. Sin embargo, para los dos parámetros μ mayores, donde si converge, la precisión es demasiado baja y se incrementa al disminuir la tolerancia. Lo anterior obedece a que ode45 trabaja con pasos largos en la simulación.

Si se pudiera cuantificar la precisión usando el dato intentos fallidos, con los aspectos mencionados y usando la totalidad de las evaluaciones, la mayor precisión la ofrecería el solucionador ode23s seguido por ode23, ode15s y por último ode45. Esto se pudo observar mejor al practicar el siguiente análisis ANOVA:

Tabla 4. Análisis ANOVA para el dato intentos fallidos.

Anova: Single Factor

SUMMARY

<i>Groups</i>	<i>Count</i>	<i>Sum</i>	<i>Average</i>	<i>Variance</i>
ode23	25	75891	3035.64	15662985.91
ode45	25	3609213	144368.52	66824827929
ode15s	25	172033	6881.32	61481754.31
ode23s	25	72342	2893.68	15480147.39

ANOVA

<i>Source of Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
Between Groups	3.68272E+11	3	1.22757E+11	7.337840838	0.000176322	2.699392598
Within Groups	1.60602E+12	96	16729363204			

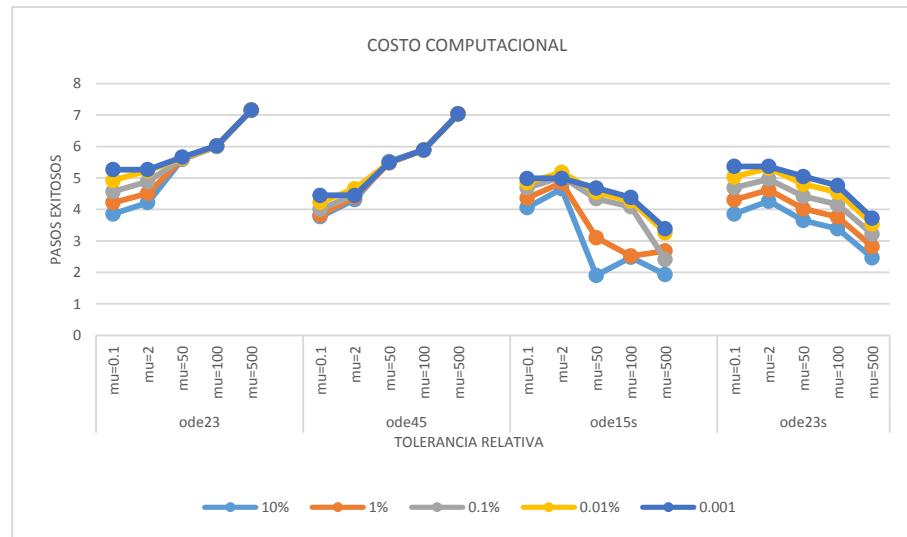
Total	1.97429E+12	99
-------	-------------	----

La amplia diferencia entre las medias del solucionador ode45 lo clasifica en último lugar de precisión en el aporte de sus resultados. Según el p-valor < 0.05 la tolerancia relativa (dependiente) y solucionador (independiente) están relacionadas razón por la cual existen diferencias significativas entre el grupo de solucionadores. los solucionadores no responden por igual a la variación de: la tolerancia y del parámetro μ , según el vertical análisis anterior. Con el ánimo de visualizar el comportamiento horizontal que explicara lo disímil del dato intentos fallidos aportados por los solucionadores se calculó la correlación:

Tabla 5. Comparación de la correlación para los cuatro solucionadores según el dato intentos fallidos

	<i>ode23</i>	<i>ode45</i>	<i>ode15s</i>	<i>ode23s</i>
ode23	1			
ode45	-0.381650381	1		
ode15s	0.854404638	-0.452587962	1	
ode23s	0.901355114	-0.37425156	0.796108615	1

Los solucionadores ode23 y ode23s presentan registros parecidos en cada evaluación sin embargo el solucionador ode45 muestra una correlación negativa con sus homólogos solucionadores de EDO debido al registro de cantidades de amplia diferencia en magnitud.



Gráfica 19. Comparación de los 'pasos exitosos' utilizados por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

Los pasos exitosos son muestra del perfeccionamiento de la solución al disminuir el grado de tolerancia estos empiezan a aumentar sin problemas aun con el cambio de parámetro μ . La grafica 18 corrobora lo mencionado, se puede ver un descenso en los solucionadores ode15s y ode23s, pero está relacionado con la variación del dato funciones evaluadas.

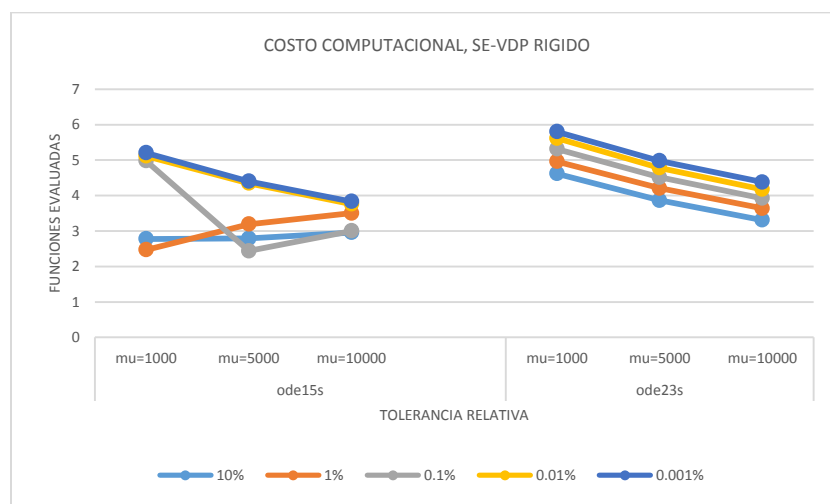
7.2. Estudio comparativo de SE-VDP rígidos.

Este fragmento comprende el estudio de las Exp6, 7 y 8 que por lo extenso o amplio del parámetro μ le atribuye un aspecto de rigidez a SE-VDP en la totalidad de las experimentaciones. Los datos obtenidos mediante el comando stats de Matlab fueron agrupados metódicamente en las tablas 11 a 13. En este empeño se tomó la totalidad de las variables aportadas por los solucionadores ode15s y ode23s a los cuales se restringe esta experimentación numérica por ser los adecuados para problemas rígidos. Estas variables fueron: tiempo de ejecución, pasos exitosos, intentos fallidos, funciones evaluadas, pasos empleados, derivadas parciales, descomposición LU y solución de sistemas lineales.

7.2.1. Costo computacional en evaluación de la rigidez

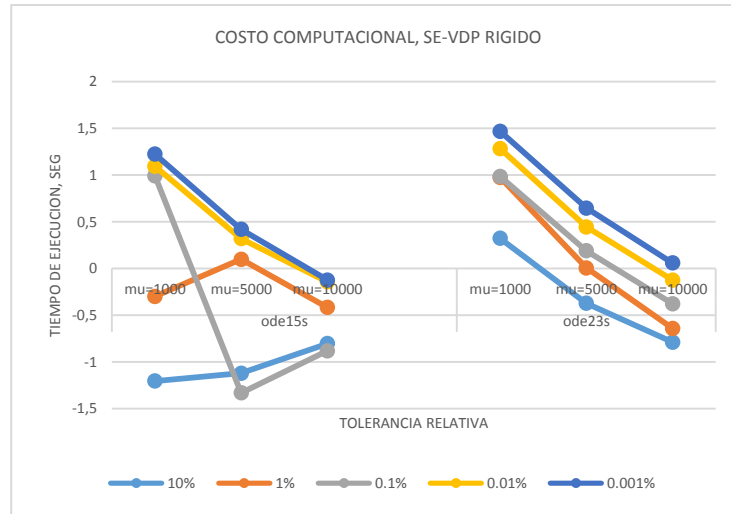
De los anteriores en consideración se tiene que los datos pasos exitosos y pasos empleados son iguales para ambos solucionadores y las derivadas parciales son iguales a estos solo para el solucionador de un solo paso ode23s. Lo que constituye a este solucionador, comparado con su similar multipaso, como costoso a nivel computacional porque resuelve derivadas parciales en cada uno de sus pasos. Entonces, el solucionador implícito ode15s es menos costoso porque evalúa menos derivadas parciales por cada paso registrado.

El solucionador ode15s solo presenta convergencia para los dos valores menores de la tolerancia relativa unido a los dos parámetros μ más extensos en evaluación. Lo que condujo a pensar que bajo las características de la experimentación planteada ode23s se clasifica como el solucionador más adecuado para resolver SE-VDP en estado de rigidez.



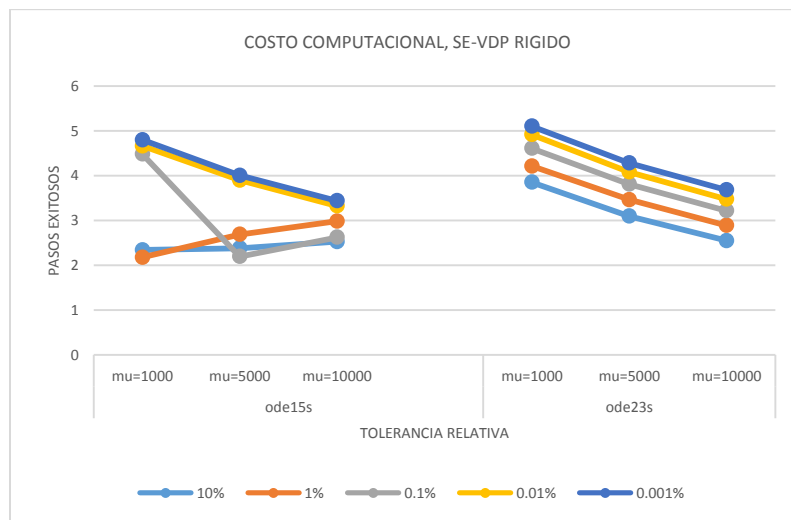
Gráfica 20. Comparación de las ‘funciones’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

Ode15s en sus únicos puntos de convergencia, μ igual a 5000 y 10000 y haciendo la tolerancia relativa 0.01 y 0.001, muestra un aumento de las funciones evaluadas en la medida que la tolerancia decrece, grafica 19. Esta característica en la solución aproximada aportada por el solucionador implícito ode23s es decrecientemente perfecta. Contrastando al evaluar ode15 a 0.1 de tolerancia de error permitida.



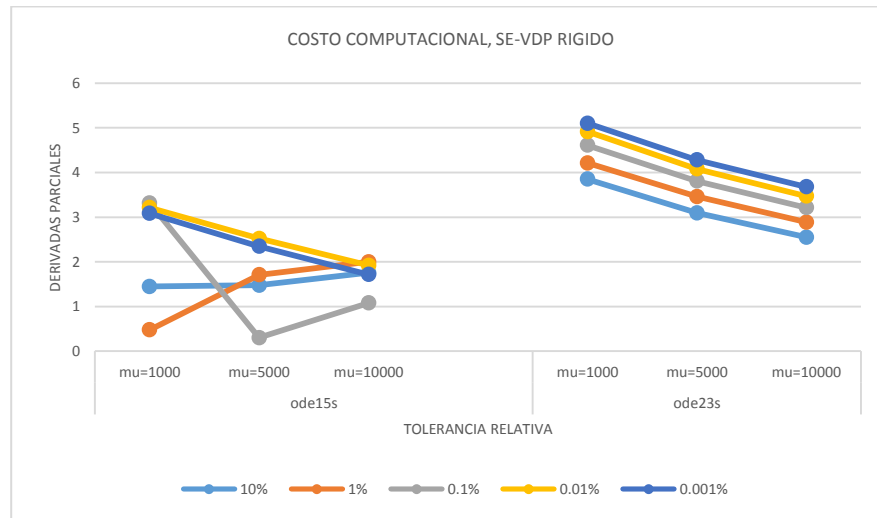
Gráfica 21. Comparación del ‘tiempo de ejecución’ utilizado por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.

En las mismas condiciones y guardando las proporciones el tiempo de ejecución recrea el mismo comportamiento ante la variación del μ y la tolerancia relativa, grafica 20. Disminuyendo el tiempo de ejecución al aumentar el parámetro μ y haciendo lo opuesto en el caso de que la tolerancia al error decrece.



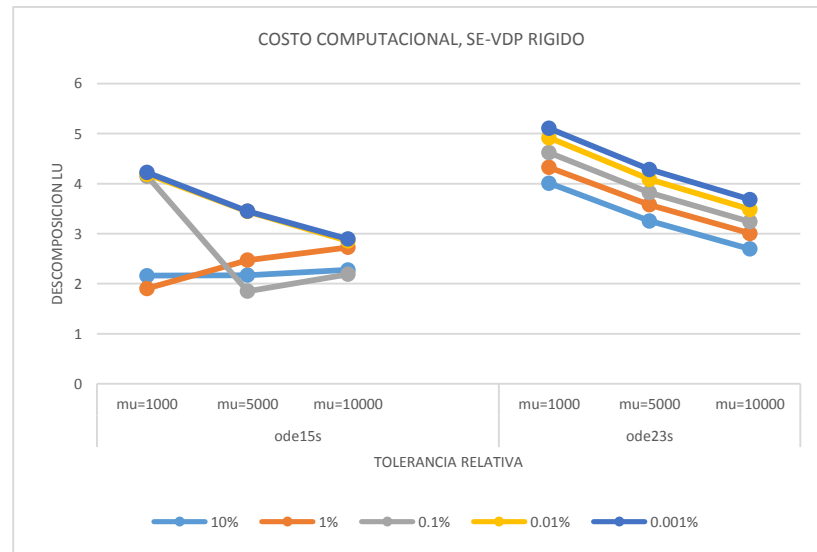
Gráfica 22. Comparación de los ‘pasos exitosos’ utilizados por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.

Los datos de solución de derivadas parciales caracterizan los solucionadores explícitos ode15s y ode23s usados en este proyecto y son una muestra de que poseen “An exceptionally strong routine for the numerical approximation of partial derivatives makes this possible”, de acuerdo con (Shampine & Reichelt, 1997b).



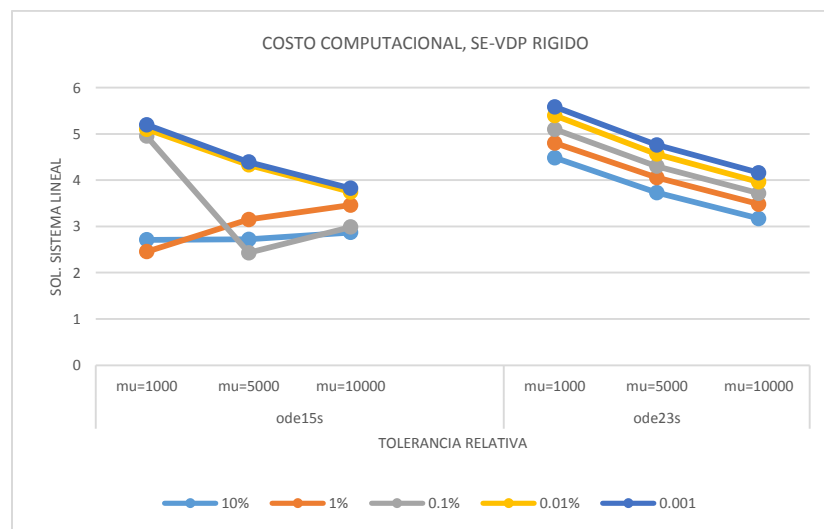
Gráfica 23. Comparación de las ‘derivadas parciales’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

El solucionador ode15s deja la puerta abierta para pensar que desde sus escasos puntos de convergencia hacia el ciclo limite $[-2, 2]$, logrado en las experimentaciones numéricas de no rigidez, moderada rigidez y rigidez, en adelante con un tiempo de simulación más amplio se consolide como el mejor para evaluar SE-VDP. Lo anterior, correspondiendo al menor número de evaluaciones de derivadas parciales y descomposición LU observadas en las gráficas 25 y 24. Haciendo lo propio ode23s incrementa las mismas con la disminución de la tolerancia relativa y disminuyendo estas operaciones al aumentar su rigidez.



Gráfica 24. Comparación de las ‘descomposición LU’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa.

En una proporción un poco mayor cada solucionador hace lo equivalente con la cantidad de soluciones de sistemas lineales, grafica 26. Esta aumenta con la disminución del error permitido y decrece con el aumento del parámetro μ .



Gráfica 25. Comparación de las ‘soluciones de sistemas lineales’ utilizadas por cada solucionador en las Exp1 a Exp5 modificando la tolerancia relativa

Teniendo en cuenta lo encontrado en el primer análisis que involucraba mediana rigidez para SE-VDP, era de esperarse que el registro de los datos obedeciera la tendencia inicial. A mayor rigidez menor gasto computacional y a la menor tolerancia al error, aumento del costo computacional. Por lo tanto, bajo estas condiciones y por tener características idénticas a las exp1 a 5, la Exp6 a 8 permiten clasificar a ode23s como la mejor propuesta para aproximar una solución de SE-VDP. Y ode15s invita a ampliar el tiempo de simulación de desarrollo del ejercicio para lograr resultados que permitan una comparación con su similar.

En el intento por cuantificar el costo de la rigidez en la Exp6 a 8, se analizaron la correlación de los datos como variables en centrándose una correlación fuerte entre los datos: funciones evaluadas, pasos empleados y tiempo de ejecución, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

Tabla 6. Correlaciones entre los datos de las tablas de la Exp6 a 8

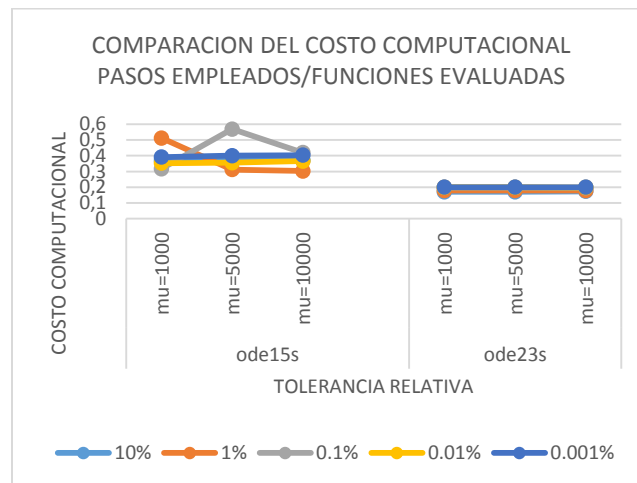
	<i>TIEMPO, SEG</i>	<i>PASOS EXITOSOS</i>	<i>INTENTOS FALLADOS</i>	<i>FUNCIONES EVALUADAS</i>	<i>PASOS EMPLEADOS</i>	<i>DERIVADAS PARCIALES</i>
TIEMPO, SEG	1					
PASOS						
EXITOSOS	0.986088084	1				
INTENTOS						
FALLADOS	0.210052195	0.143547003	1			
FUNCIONES						
EVALUADAS	0.946101792	0.972615012	0.059187509	1		
PASOS						
EMPLEADOS	0.986088084	1	0.143547003	0.972615012	1	
DERIVADAS						
PARCIALES	0.83024926	0.874701398	-0.072961171	0.962779482	0.874701398	1

Con las características anteriores se efectuó un análisis del costo computacional igual al anterior, de la Exp1 a 5. Entonces el costo computacional siendo igual al cociente de los pasos empleados entre las funciones evaluadas, arrojo los siguientes resultados discriminados en la siguiente tabla:

Tabla 7. Costo computacional de acuerdo con el cociente entre pasos empleados y las funciones evaluadas de la Exp6 a 8.

COSTO	ode15s			ode23s		
	mu=1000	mu=5000	mu=10000	mu=1000	mu=5000	mu=10000
10	0.369127517	0.393495935	0.371428571	0.170355418	0.169901586	0.173170732
1	0.511864407	0.312138728	0.302992126	0.178727926	0.178362032	0.178258867
0.1	0.317035641	0.56884058	0.419161677	0.19811174	0.197692968	0.19575331
0.01	0.352051009	0.355942891	0.365587675	0.199258084	0.198943254	0.197909732
0.001	0.391031205	0.399706768	0.402993836	0.199751507	0.199690257	0.199716714

La siguiente grafica obedece a la tabla anterior:

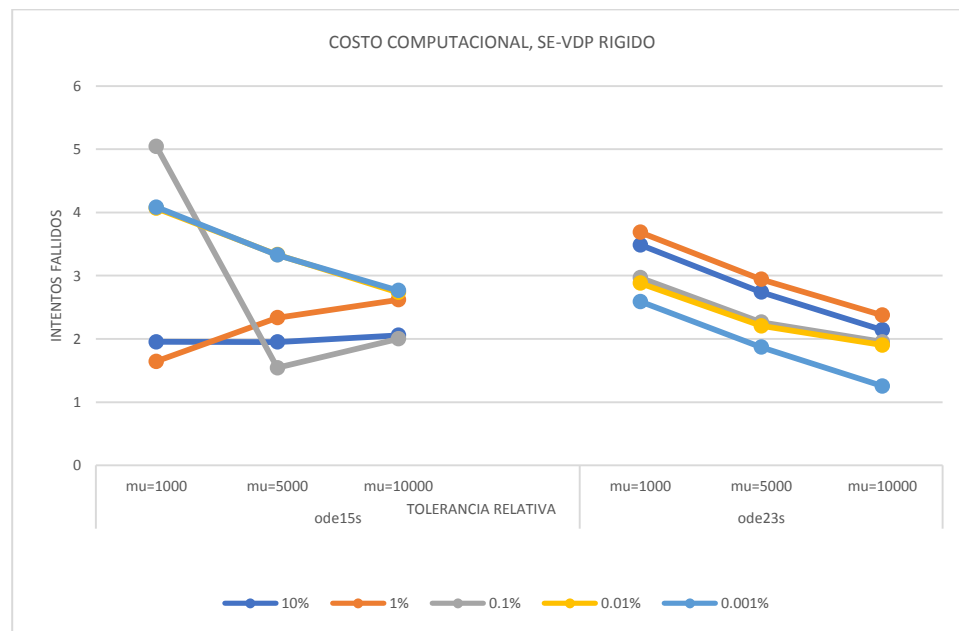


Gráfica 26. Comparación del costo computacional, cociente entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de las Exp6 a 8.

En la gráfica anterior se puede observar que el mejor solucionador de SE-VDP en esta experimentación numérica teniendo en cuenta el costo computacional con las características mencionadas es el de un solo paso ode23s. Reconociendo las particularidades de leve disminución de costo computacional al aumentar el parámetro μ de rigidez y aumento de este al disminuir la tolerancia relativa.

7.2.2. Precisión en la evaluación de la rigidez

Este aspecto se analizó atendiendo la argumentación hecha en l Exp1 a 5. La precisión está relacionada con el dato intentos fallidos, grafica 27. En una lectura inicial estos tienen un registro contrario al anterior en el caso del costo computacional del solucionador ode23s. Estos decrecen cuando disminuye la tolerancia al error permitido y cuando aumenta su parámetro μ de rigidez.



Gráfica 27. Comparación de los ‘intentos fallidos’ utilizadas por cada solucionador en las Exp6 a Exp8 modificando la tolerancia relativa.

Se efectuó análisis ANOVA para observar la afinidad entre las variables tolerancia relativa y solucionador.

Tabla 8. Análisis ANOVA para el dato intentos fallidos

Anova: Single Factor

SUMMARY

<i>Groups</i>	<i>Count</i>	<i>Sum</i>	<i>Average</i>	<i>Variance</i>
ode15s	15	141738	9449.2	812164036.9
ode23s	15	12431	828.7333333	1827817.067

ANOVA

<i>Source of Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
Between Groups	557343341.6	1	557343341.6	1.36940766	0.251777976	4.19
Within Groups	1139588595	28	406995927	4		6
Total	1195322929	29				

La amplia diferencia entre las medias del solucionador ode15s lo clasifica en último lugar de precisión con el aporte de sus resultados. Según el p-valor > 0.05 la tolerancia relativa (dependiente) y solucionador (independiente) no están relacionadas, razón por la cual no existen diferencias significativas entre el grupo de solucionadores. Los solucionadores responden por igual a la variación de: la tolerancia y del parámetro μ , según el análisis vertical anterior. Con correlación de 0.0026682 entre las variables independientes se puede determinar que, aunque estas respondan de igual manera a los cambios de tolerancia y de parámetro μ lo hacen en distintas proporciones a favor del solucionador de un solo paso ode23s.

8. ANÁLISIS DEL ERROR PERMITIDO – TOLERANCIA RELATIVA

El análisis comparativo anterior arrojó de manera concluyente que la variación de la tolerancia relativa en el proceso de cálculo numérico ejecutado por Matlab es directamente

proporcional al costo computacional que al momento formalizaba la hipótesis de poseer conexión inversa con la precisión.

“If appropriate error tolerances are used the numerical solution will not stray too far from the desired stable solution”, afirma (Byrne & Thompson, 2013) en un estudio sobre la importancia del control del error. En Matlab se tiene la facilidad de modificar el valor de la tolerancia relativa y absoluta. La tolerancia relativa es consecuente con la longitud del paso y la absoluta se focaliza en la cercanía del estado a cero. La tolerancia relativa por defecto de los solucionadores es $10e-3$ y cuando se asume un valor igual o superior a este la tolerancia relativa se establece en $10e-6$. En el caso contrario, la tolerancia absoluta se establece en el producto del máximo valor del estado actual y la tolerancia relativa, (“Choose an ODE Solver - MATLAB & Simulink,” n.d.) . En este estudio se modificó solo la tolerancia relativa y la absoluta se dejó la de defecto por las razones expuestas.

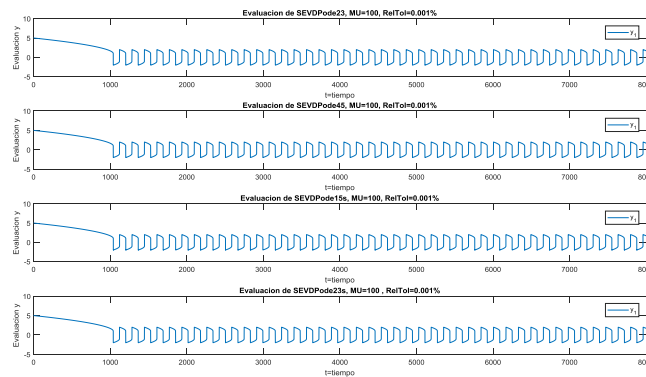
El principal problema por resolver para realizar este ejercicio comparativo fue el encontrar una fuente en la literatura disponible, con condiciones semejantes a este proyecto, que se pudiera usar como referente debido a que hasta el momento SE-VDP no tiene solución analítica continua. Teniendo en cuenta su importancia se procedió a obtener una solución utilizando un promedio de los resultados aportados por los solucionadores: ode23, ode45, ode15s y ode23s evaluados en una pequeñísima tolerancia y que fue posible para todos los involucrados, estrategia empleada por (Dallas, MacHairas, & Papadopoulos, 2017) . La tolerancia relativa empleada fue de $10e-12\%$ para un valor inicial de $[5, 3]$ en un intervalo de tiempo de simulación de $[0, 8000]$ que garantizo igualmente la oscilación del sistema. Siendo esta la Exp9, encontrar un patrón de comparación.

Como se puede ver en la gráfica 16, La cantidad de pasos empleados por cada solucionador son desiguales y por la naturaleza de homogeneidad de este empeño se escogieron en igual cantidad y en el mismo intervalo de tiempo que asegurara la verificación del periodo de SE-VDP. La muestra seleccionada fue de 500 puntos en una serie de tiempo entre $[1000, 2000]$. Esta muestra además de ser representativa minimizo los cálculos para su análisis al ser tomados utilizando un parámetro μ igual a 100, que presenta soluciones convergentes como las mostradas en la gráfica 28. Este parámetro fue seleccionado por haber involucrado un bajo tiempo computacional en la Exp4.

El análisis comparativo de las soluciones numéricas aportadas por cada solucionador (*SNodexx*) de la Exp9 con la solución numérica de referencia (*SNr*) dio cuenta del error relativo (*Er*) mediante la siguiente ecuación:

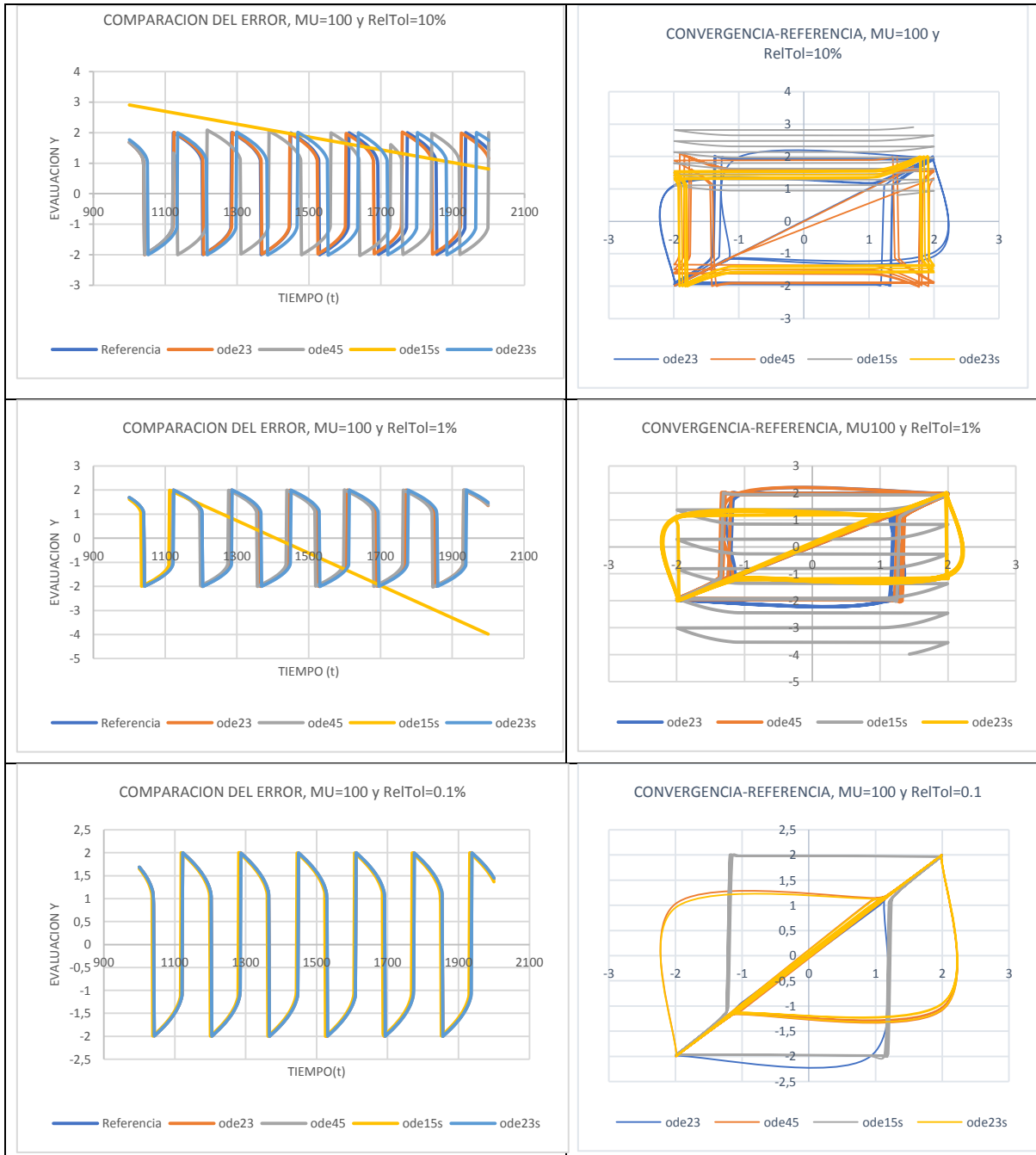
$$Er = (SNr - SNodexx)/SNr$$

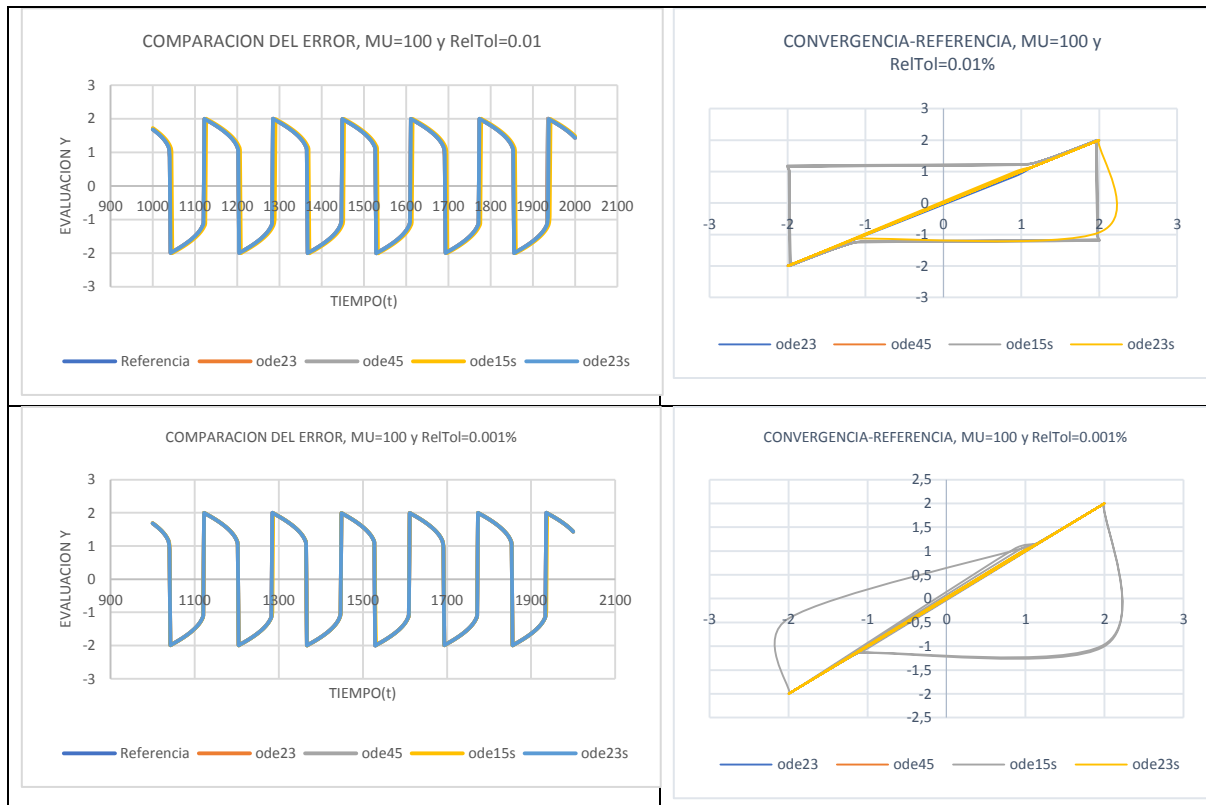
Los datos de las evaluaciones se organizaron y procesaron en Excel como plataforma seleccionada para su análisis descriptivo.



Gráfica 28. Solución aportada por: ode23, ode45, ode15s y ode23s con el parámetro $\mu = 100$ y la tolerancia relativa igual al 0.001%.

La variación de la tolerancia progresivamente logró un ajuste positivo escalonado en las soluciones registradas. Este progreso hacia el patrón de referencia se puede ver en la gráfica 29.





Gráfica 29. Comparación del patrón de referencia con las soluciones de acuerdo con la disminución de la tolerancia.

El error relativo decrece en la medida que la tolerancia relativa disminuye, esto es una constante en la totalidad de los solucionadores de Matlab, grafica 30. Lo anterior indicado por los valores de la media y la desviación estándar.



Gráfica 30. Comparación de disminución del error relativo al disminuir la tolerancia relativa.

Los datos fueron consignados en la tabla 4. La Exp9 evaluó los solucionadores implicados en este proyecto modificando sistemáticamente los valores de la tolerancia relativa, para un total de 20 ejercicios en la búsqueda del solucionador de mayor precisión.

Tabla 9. Datos estadísticos arrojados por la Exp9 sobre el análisis del error.

ANALISIS DEL ERROR RELATIVO						
TOTALES	RelTol %	ode23	ode45	ode15s	ode23s	TIEMPO
MAXIMO	10	3.055609812	2.766818327	3.424288618	1.78930464	2000
	1	3.14000508	3.094017783	3.864120655	1.590610113	2000
	0.1	3.16759676	1.540469297	3.311531145	1.532420866	2000
	0.01	0.075656717	0.031155385	1.599994668	1.466439959	2000
	0.001	0.002837604	0.002402477	1.50036669	0.042184424	2000
MINIMO	10	4.0633E-09	4.198E-06	0.001826208	0.040543691	1000
	1	5.6381E-06	5.22501E-06	0.001208866	0.003295874	1000
	0.1	5.36426E-06	5.40943E-06	0.011526294	0.000278315	1000
	0.01	5.39797E-06	5.40177E-06	0.014671907	7.70938E-05	1000
	0.001	4.60236E-06	2.89313E-08	0.000961528	6.42727E-05	1000
MEDIA	10	0.220547141	1.400429532	1.248597577	0.527154244	1500
	1	0.098503744	0.294943851	1.177411262	0.057784464	1500
	0.1	0.008511789	0.01872229	0.167899944	0.016772382	1500
	0.01	0.00044433	0.00026848	0.113371275	0.004315004	1500
	0.001	3.23037E-05	1.66236E-05	0.011490123	0.000532536	1500
DESVIACION ESTANDAR	10	0.645910528	0.912214957	0.957580178	0.673764826	289.542751
	1	0.464192074	0.763748784	1.005074591	0.242733607	289.542751
	0.1	0.141636252	0.135495729	0.606645273	0.13286964	289.542751
	0.01	0.003399739	0.001422738	0.341183215	0.065662756	289.542751
	0.001	0.000134677	0.00011377	0.100845258	0.002479172	289.542751

La clasificación de los solucionadores, Tabla 9, se realizó promediando las variables: media y desviación estándar de acuerdo con su comportamiento al disminuir la tolerancia relativa. Entonces se obtuvo, mediante un análisis ANOVA, que los resultados que más se ajustan al patrón de referencia, tabla 10, fueron los arrojados por ode23 seguidos por ode23s y ode45, con evaluaciones muy similares, y por último ode15s.

Tabla 10. ANOVA de comparación del error relativo promedio

Anova: Single

Factor

SUMMARY

Groups	Count	Sum	Average	Variance
ode23	5	0.3280393	0.065607862	0.00922368

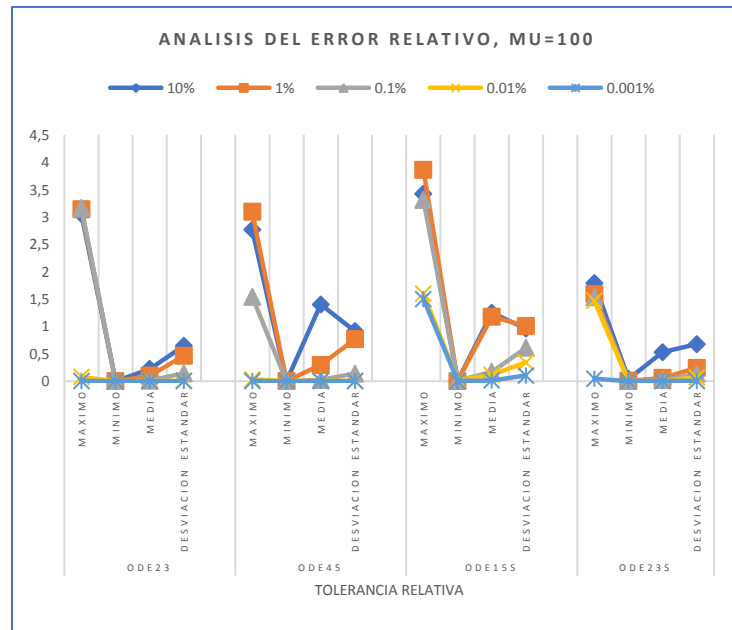
ode45	5	1.7143808	0.342876155	0.365181264
ode15s	5	2.7187702	0.543754036	0.377031598
ode23s	5	0.6065586	0.121311726	0.051987046

ANOVA

<i>Source of</i>						
<i>Variation</i>	<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>P-value</i>	<i>F crit</i>
Between Groups	0.720630771	3	0.240210257	1.195933306	0.342939041	3.238871517
Within Groups	3.21369435	16	0.200855897			
Total	3.93432512	19				

Resumen	ode23	ode45	ode15s	ode23s
Error relativo Promedio	0.065607862	0.342876155	0.543754	0.121311726
Desviación estándar	0.251054654	0.362599196	0.6022657	0.223502

El error relativo promedio de ode23s es casi el doble del mejor promedio, con desviación estándar por poco iguales, y el peor promedio es de ode15s, siendo más de ocho veces mayor que el de ode23. Teniendo en cuenta el p-valor del análisis ANOVA mayor a 0.05, las variables, error y solucionador, no están relacionadas y por lo tanto no hay diferencias significativas entre el grupo de solucionadores. Lo que quiere decir, grafica 31, que todos los solucionadores responden disminuyendo el error cuando la tolerancia relativa decrece.



Gráfica 31. Comparación de medidas rango, tendencia central y dispersión para Exp9

En el estudio de la precisión anterior se encontró que mediante el análisis de los datos intentos fallidos proporcionados por las cien evaluaciones efectuadas en las Exp1 a 5. Los solucionadores que ofrecían mayor precisión fueron ode23s y ode23 en la solución de SE-VDP. Coincidiendo con lo anterior encontrado en el estudio del error relativo con menos error a los mismos dos solucionadores. lo que nos dice que el dato intentos fallidos es un buen indicador primario de la precisión del solucionador.

En cuanto a la estabilidad la idea general es que si pequeñas perturbaciones no causan que la solución numérica diverja de la solución verdadera entonces el método numérico es estable. Atendiendo esta idea se puede pensar que entre mayor número de pasos se necesiten para llegar a una aproximación numérica el solucionador es menos estable. Entonces, según lo anterior los solucionadores basados en los métodos de Runge-Kutta poseen una región de estabilidad más amplia, como el ode23.

9. ANEXOS

9.1. Tablas de Datos

Esta experimentación numérica se realizó en un computador tipo escritorio con las siguientes características: compañía Hewlett Packard, modelo p7-1236s, procesador Intel(R) Core™ i3-2120 CPU@ 3.30GHz, con una memoria RAM de 6.00 GB (5.89 GB usables) y sistema operativo de 64-bits. Y MATLAB R2017a con una licencia de estudiante.

Las evaluaciones se realizaron modificando el parámetro y la tolerancia relativa obteniendo los siguientes datos:

Tabla 11. Datos encontrados en la Exp1, para el parámetro $\mu = 0.1$ y modificando la tolerancia relativa.

DATOS MU=0.1									
SOLUCIONA DOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOS ICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE23	10	1.301529	7243	1106	25048	7244			
	1	2.399512	16587	3824	61222	16584			
	0.1	3.354068	37339	5097	127309	37340			
	0.01	7.658344	84839	5940	272338	84840			
	0.001	18.709744	183950	4	551863	183951			
ODE45	10	2.025356	5934	1604	45229	23737			
	1	1.821823	6736	1484	49321	26945			
	0.1	2.410739	10186	2548	76405	40745			
	0.01	5.493424	17056	3488	123265	68225			
	0.001	5.569346	27998	5085	198499	111993			
ODE15S	10	2.218389	11550	1300	27880	11551	636	3128	25971
	1	4.95631	23174	3805	52404	23175	2	6555	52397
	0.1	8.096249	48788	9619	93434	48789	2	15790	93427
	0.01	21.514538	70748	10988	152484	70749	1	17956	152480
	0.001	12.42361	96754	8910	138867	96755	2	20365	138860
ODE23S	10	1.819898	7251	2	36261	7252	7251	7253	21759
	1	6.04712	20232	5056	111274	20233	20232	25288	75864
	0.1	11.992952	49139	10161	266019	49140	49139	59300	177900
	0.01	28.551761	108761	8265	560337	108762	108761	117026	351078

	0.001	54.042426	232741	2	1163710	232742	232741	232743	698229
--	-------	-----------	--------	---	---------	--------	--------	--------	--------

Tabla 12. Datos encontrados en la Exp2, para el parámetro $\mu = 2$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=2									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE23	10	2.119037	16515	6053	67705	16516			
	1	4.517569	32681	16589	147811	32682			
	0.1	9.071917	76601	11508	264328	76602			
	0.01	17.218084	170114	6698	530437	170115			
	0.001	13.928157	183950	4	551863	183951			
ODE45	10	4.675199	20623	7357	167881	82493			
	1	6.320414	25088	8311	200395	100353			
	0.1	7.257007	30125	7825	227701	120501			
	0.01	10.034651	46203	12559	352573	184813			
	0.001	5.579199	27998	5085	198499	111993			
ODE15S	10	11.121552	45170	20074	151622	45171	9699	29353	122524
	1	21.080195	70927	27105	231483	70928	8337	37537	206471
	0.1	22.452604	106861	20954	247238	106862	6	35621	247219
	0.01	25.711764	151695	21019	300143	151696	5	37786	300127
	0.001	11.991705	96754	8910	138867	96755	2	20365	138860
ODE23S	10	4.832324	18396	7479	106940	18397	18396	25875	77625
	1	11.458519	41757	12084	232955	41758	41757	53841	161523
	0.1	24.66773	92046	9671	479575	92047	92046	101717	305151
	0.01	48.373367	205099	8363	1042220	205100	205099	213462	640386
	0.001	52.132599	232741	2	1163710	232742	232741	232743	698229

Tabla 13. . Datos encontrados en la Exp3 sobre el parámetro $\mu = 50$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=50									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE23	10	38.804584	391684	1907	1180770	391685			
	1	40.454368	400423	3320	1211230	400424			
	0.1	33.724274	409324	2067	1234170	409325			
	0.01	42.398921	427820	2435	1290770	427821			
	0.001	35.471609	460685	2724	1390230	460686			
ODE45	10	69.317124	334553	79948	2487010	1338213			
	1	61.24119	302897	20022	1937520	1211589			
	0.1	58.722982	304982	19672	1947930	1219929			
	0.01	57.541942	308836	21555	1982350	1235345			
	0.001	56.841628	314369	23676	2028270	1257477			
ODE15S	10	0.020958	81	33	178	82	3	54	168
	1	0.401182	1285	541	3935	1286	120	739	3574
	0.1	5.651891	22079	7493	69730	22080	1277	9431	65898
	0.01	7.831668	35063	8384	93236	35064	916	11130	90487
	0.001	9.225038	47883	8207	119773	47884	733	11566	117573
ODE23S	10	1.185441	4498	1986	26469	4499	4498	6484	19452
	1	2.556867	10539	2726	58149	10540	10539	13265	39795
	0.1	6.167978	26115	1094	132765	26116	26115	27209	81627
	0.01	15.424024	63727	728	320094	63728	63727	64455	193365
	0.001	25.012814	112317	305	562213	112318	112317	112622	337866

Tabla 14. Datos arrojados por la Exp4 con el parámetro $\mu = 100$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=100									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE23	10	98.891326	1014010	980	3044970	1014011			
	1	80.213117	1026270	1754	3084070	1026270			
	0.1	94.94621	1033150	991	3102430	1033154			
	0.01	88.668651	1042550	1160	3131140	1042553			
	0.001	88.066554	1059280	1154	3181290	1059277			
ODE45	10	186.824742	780361	190892	5827520	3121445			
	1	166.727584	778696	51782	4982870	3114785			
	0.1	149.567825	779948	51418	4988200	3119793			
	0.01	144.993386	781590	53737	5011960	3126361			
	0.001	153.022888	784104	53205	5023860	3136417			
ODE15S	10	0.135051	303	142	868	304	42	219	741
	1	0.093099	332	119	932	333	23	170	862
	0.1	3.037299	12263	4424	37961	12264	796	5576	35572
	0.01	4.291885	18713	4329	51325	18714	522	5735	49758
	0.001	4.93496	24164	4440	61594	24165	434	6132	60291
ODE23S	10	0.91204	2448	1177	14596	2449	2448	3625	10875
	1	1.493194	5800	1806	32614	5801	5800	7606	22818
	0.1	3.342876	14288	517	72476	14289	14288	14805	44415
	0.01	8.184745	34935	344	175365	34963	34935	35279	105837
	0.001	12.951295	57076	170	285722	57077	57076	57246	171738

Tabla 15. . Datos suministrados por la Exp5 con el parámetro $\mu = 500$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=500									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE23	10	1095.959237	14283700	128	42851600	14283749			
	1	1114.185528	14292700	173	42878700	14292725			
	0.1	1175.441967	14300200	78	42900800	14300190			
	0.01	1150.512701	14301800	106	42905600	14301751			
	0.001	1135.355915	14303400	91	42910600	14303443			
ODE45	10	2267.514898	10874200	701020	81451600	43496953			

	1	1980.000841	10813300	720923	69205600	43253349			
	0.1	2010.581074	10833400	722174	69333600	43333713			
	0.01	1994.704699	10827300	721936	69295500	43309229			
	0.001	2035.590698	10827400	121907	69296000	43309673			
ODE15S	10	0.110986	86	27	188	87	6	51	169
	1	1.422198	485	197	1519	486	50	272	1368
	0.1	2.565862	256	45	487	257	6	88	468
	0.01	3.01386	1815	467	4850	1816	69	637	4642
	0.001	2.720109	2465	501	6246	2466	53	665	6086
ODE23S	10	0.105757	289	122	1692	290	289	411	1233
	1	0.200157	659	195	3688	660	659	854	2562
	0.1	1.032675	1644	35	8292	1645	1644	1679	5037
	0.01	0.966194	3444	37	17297	3445	3444	3481	10443
	0.001	1.553362	5263	15	26348	5264	5263	5278	15834

Tabla 16. Datos encontrados en la Exp6 con el parámetro $\mu = 1000$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=1000									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE15S	10	0.062351	219	90	596	220	28	145	511
	1	0.501582	150	44	295	151	3	80	285
	0.1	9.767896	30287	111428	95535	30288	2072	14153	89318
	0.01	12.367391	45992	11663	130643	45993	1629	15457	125755
	0.001	16.725978	62616	12138	160133	62617	1215	16659	156487
ODE23S	10	2.099489	7088	3079	41613	7089	7088	10167	30501
	1	9.452315	16314	4856	91284	16315	16314	21170	63510
	0.1	9.678917	40749	932	205692	40750	40749	41681	125043
	0.01	19.217677	82021	762	411637	82022	82021	82783	248349
	0.001	29.324815	126686	391	634223	126687	126686	127077	381231

Tabla 17. Datos proporcionados por la Exp7 con el parámetro $\mu = 5000$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=5000									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE15S	10	0.075756	241	89	615	242	30	148	524

	1	1.254138	485	217	1557	486	51	296	1403
	0.1	0.046555	156	35	276	157	2	71	269
	0.01	2.084746	7902	2157	22203	7903	333	2774	21203
	0.001	2.61746	10086	2122	25236	10087	221	2811	24572
ODE23S	10	0.423246	1242	551	7316	1243	1242	1793	5379
	1	1.012933	2889	877	16203	2890	2889	3766	11298
	0.1	1.543337	6443	184	32596	6444	6443	6627	19881
	0.01	2.777703	12010	161	60374	12011	12010	12171	36513
	0.001	4.431254	19082	74	95563	19083	19082	19156	57468

Tabla 18. Datos encontrados en la Exp8 con el parámetro $\mu = 10000$ y variando la tolerancia relativa.

DATOS MU=10000									
SOLUCIONADOR	RelTol %	TIEMPO, SEG	PASOS EXITOSOS	INTENTOS FALLADOS	FUNCIONES EVALUADAS	PASOS EMPLEADOS	DERIVADAS PARCIALES	DESCOMPOSICION LU	SOLUCION SISTEMA LINEAL
ODE15S	10	0.156902	337	114	910	338	57	188	738
	1	0.3818	961	416	3175	962	100	533	2874
	0.1	0.131516	419	100	1002	420	12	154	965
	0.01	0.717728	2111	543	5777	2112	83	714	5527
	0.001	0.749669	2745	582	6814	2746	52	778	6657
ODE23S	10	0.162844	354	139	2050	355	354	493	1479
	1	0.228014	773	237	4342	774	773	1010	3030
	0.1	0.41918	1640	90	8383	1641	1640	1730	5190
	0.01	0.750838	2972	80	15022	2973	2972	3052	9156
	0.001	1.14409	4793	18	24004	4794	4793	4811	14433

Tabla 19. Costo computacional, razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode23.

COSTO	ode23				
RelTol %	$\mu = 0.1$	$\mu = 2$	$\mu = 50$	$\mu = 100$	$\mu = 500$
10	0.289204727	0.24394062	0.33171998	0.333011819	0.333330587
1	0.270883016	0.22110668	0.33059287	0.332764821	0.333329252
0.1	0.293302123	0.28979904	0.33166014	0.333014444	0.333331546
0.01	0.31152465	0.32070727	0.33144635	0.332962755	0.333330637
0.001	0.333327293	0.33332729	0.33137395	0.332970902	0.333331228

Tabla 20. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode45.

COSTO	ode45				
RelTol %	$\mu = 0.1$	$\mu = 2$	$\mu = 50$	$\mu = 100$	$\mu = 500$
10	0.5248181	0.491377821	0.538081	0.535639	0.534022
1	0.546319	0.500775967	0.62533	0.625099	0.624998
0.1	0.5332766	0.529207162	0.626269	0.625435	0.625003
0.01	0.5534823	0.524183644	0.623172	0.62378	0.624993
0.001	0.5641993	0.564199316	0.619975	0.624304	0.624995

Tabla 21. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode15s.

COSTO	ode15s				
RelTol %	$\mu = 0.1$	$\mu = 2$	$\mu = 50$	$\mu = 100$	$\mu = 500$
10	0.414311	0.297919	0.460674	0.35023	0.462766
1	0.442237	0.306407	0.326811	0.357296	0.319947
0.1	0.522176	0.432223	0.31665	0.323068	0.527721
0.01	0.463977	0.505412	0.376078	0.364618	0.374433
0.001	0.696746	0.696746	0.39979	0.392327	0.394813

Tabla 22. Costo computacional razón entre los pasos empleados y las funciones evaluadas de ode23s.

COSTO	ode23s				
RelTol %	$\mu = 0.1$	$\mu = 2$	$\mu = 50$	$\mu = 100$	$\mu = 500$
10	0.199994	0.172031	0.169972	0.167786	0.171395
1	0.18183	0.179254	0.181258	0.177868	0.178959
0.1	0.184724	0.191935	0.196708	0.197155	0.198384
0.01	0.194101	0.196791	0.199092	0.199373	0.199167
0.001	0.2	0.2	0.199778	0.199764	0.199787

9.2. Código de Matlab empleado

Para la realización de este ejercicio se usó el oscilador de Van Der Pol (SE_VDP), la literatura del SE_VDP es extensa y el fenómeno es observado desde diferentes ángulos,

para este ejercicio se tuvo como soporte base los ejercicios de Mazzia, Iavernaro, & Magherini, (2006) y Hernández, (2010).

Para las experimentaciones anteriores se empleó los códigos Matlab para los solucionadores ode45, ode23, ode15s y ode23s. Se seleccionó la suite de solucionadores de EDO prestando especial interés en su sistema de pasos adaptativo en el tiempo en función del comportamiento de la solución y ajustando parámetros de relativa y absoluta tolerancia. De esta se seleccionó ode23 y ode45 para sistemas no rígidos, métodos explícitos embebidos Runge-Kutta; el primero de segundo y tercer orden y el segundo de cuarto y quinto orden; y para sistemas rígidos ode15s que es un método de orden variable basado en las fórmulas de integración numérica y ode23s estructurado en la fórmula modificada de segundo orden de Rosenbrock ambos implícitos.

Para aplicar cada solucionador se emplea primero el código-función que contiene el sistema de ecuaciones propuesto:

```
%SE_VDP sistema de ecuaciones de Van Der Pol
function ydert=SEVDP(t,y)
%ydert=SEVDP(t,y);
%ydert(1)=y(2);
%ydert(2)=mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
mu=100;
ydert=[y(2); mu*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

En conjunto con el código para cada solucionador es odexx, como el siguiente:

```
%solucion_SEVDPode23
%solucion de SE_VDP
%mediante SEVDP.m
tspan=[0 20];
y0= [2; 0];
disp(''), disp('Stats for ode23:')
tic,
options=odeset('stats','on', 'AbsTol', 1e-8, 'RelTol', 1e-6);
[t2,y2]= ode23('SEVDP',tspan, y0, options);
plot(t2,y2(:,1), t2,y2(:,2), '--');
xlabel('t2=tiempo');
ylabel('y2');
title('solucion SEVDPode23')toc
```

10. CONCLUSIONES

Con la realización del ejercicio experimental se encontró que el solucionador explícito ode23 es el más adecuado para evaluar a SE-VDP en su estado de no rigidez y en una moderada rigidez. Debido a que los solucionadores ode23 y ode45 incrementaron el número de pasos utilizados en la medida que se aumentó el parámetro de rigidez μ se registró a ode23s como la mejor alternativa en casos de rigidez de SE-VDP porque este solucionador explícito disminuyó el costo operacional en el procedimiento. De la misma manera, se observó que estos solucionadores respondían positivamente ante la disminución de la tolerancia relativa, sin importar la variación del parámetro de oscilación, acercándose mayormente a la solución de referencia encontrada, pero con un aumento en la cantidad de evaluación de funciones y pasos utilizados. La utilización de los solucionadores implícitos en la evaluación de SE-VDP en su estado de no rigidez generó una buena solución, pero con mayor costo computacional.

El solucionador implícito ode15s no mostró convergencia en la totalidad de las experimentaciones como las que arrojaron sus similares por lo tanto no se sugiere como la primera alternativa para evaluar SE-VDP.

Por último, los solucionadores ode23 y ode23s se presentaron como los más precisos para evaluar SE-VDP en la totalidad de las experimentaciones y recomiendan como las mejores opciones para aproximar una solución del sistema estudiado sin dejar de observar los aspectos: parámetro de rigidez y tolerancia relativa relacionados en este proyecto.

11. RECOMENDACIONES

Se recomienda realizar estudios similares con ayuda de otros modelos matemáticos existentes para ampliar el margen de confianza de las soluciones aproximadas aportadas por: ode23, ode45, ode15s y ode23s. lo mismo para otros solucionadores que posee Matlab.

Igualmente se recomienda ampliar el tiempo de simulación para observar la convergencia de la evaluación del solucionador implícito ode15s. y conocer por que se recomienda como una buena opción para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

REFERENCIAS

- Abelman, S., & Patidar, K. C. (2008). Comparison of some recent numerical methods for initial-value problems for stiff ordinary differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 55(4), 733–744. <http://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.05.012>
- Ashino, R., Nagase, M., & Vaillancourt, R. (2000). Behind and beyond the MATLAB ODE suite. *Computers and Mathematics with Applications*, 40(4), 491–512. [http://doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)00175-9](http://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00175-9)
- Auzinger, W., Karner, E., Koch, O., & Uller, E. W. (2000). Collocation methods for the solution of eigenvalue problems for singular ordinary differential equations. *2000 Mathematics Subject Classification*, (5), 1–11.
- Brugnano, L., Mazzia, F., & Trigiante, D. (2011). Fifty years of stiffness. *Recent Advances in Computational and Applied Mathematics*, 1–21. http://doi.org/10.1007/978-90-481-9981-5_1
- Butcher, J. (2007). Runge-Kutta methods. *Scholarpedia*, 2(9), 3147. <http://doi.org/10.4249/scholarpedia.3147>
- Byrne, G. D., & Thompson, S. (2013). Error Control Matters. *Lecture*, 1–10.
- Celaya, E. A. (n.d.). *Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales rígidas. Aplicación a la semidiscretización del Método de Elementos Finitos*.
- Choose an ODE Solver - MATLAB & Simulink. (n.d.). Retrieved January 21, 2018, from https://www.mathworks.com/help/matlab/math/choose-an-ode-solver.html?s_tid=gn_loc_drop
- Dallas, S., MacHairas, K., & Papadopoulos, E. (2017). A Comparison of Ordinary Differential Equation Solvers for Dynamical Systems with Impacts. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 12(6). <http://doi.org/10.1115/1.4037074>
- Flanagan, D. (1974). The future of scientific communication. *Federation Proceedings*, 33,

1721–1723.

Hafeez, H. Y., Ndikilar, C. E., & Isyaku, S. (2015). Analytical Study of the Van der Pol Equation in the Autonomous Regime. *PROGRESS IN PHYSICS Issue*, 11(3), 1–4.

Harikrishna, A., Osei, D. E., Kamiska, M. W., & Majumdar, S. (n.d.). On numerical study of Parkinson tremor. <http://doi.org/10.1101/065318>

Hensley, N., Martin, C., Ghosh, B., & Hartmeister, F. (2008). Cardiorespiratory Synchronization, a Mathematical Model. Retrieved from https://ttu-ir.tdl.org/ttu-ir/bitstream/handle/2346/19390/Hensley_Nicholas_Thesis.pdf?sequence=1

Hernández, S. L. (2010). El oscilador de Van Der Pol. *Matematicas E Ingenieria*, 93–102.

Higham, N. J. (2009). Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, 718.

Hindmarsh, A. C. (1986). Differential Equations, 19, 67–71.

Iserles, A. (2002). On the global error of discretization methods for highly-oscillatory ordinary differential equations. *Bit*, 42(3), 561–599. <http://doi.org/10.1023/A:1022049814688>

Jackiewicz, Z. (2009). *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. <http://doi.org/10.1002/9780470522165>

L. F. Shampine, I. Gladwell, S. T. (2003). *Solving ODEs with MATLAB*.

Mazzia, F., Iavernaro, F., & Magherini, C. (2006). Test set for initial value problem solvers. *Report* 43/2006, (December). Retrieved from <https://pitagora.dm.uniba.it/~testset/report/testset.pdf>

Mazzia, F., & Magherini, C. (2008). Test Set for Initial Value Problem Solvers.

Omale, D., Ojih, P. B., & Ogwo, M. O. (2014). MATHEMATICAL ANALYSIS OF STIFF AND NON-STIFF INITIAL VALUE PROBLEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION USING MATLAB, 5(9).

Shampine, L. F., & Reichelt, M. W. (1997a). Solving ODEs with MATLAB. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1), 1–22. <http://doi.org/10.1137/S1064827594276424>

- Shampine, L. F., & Reichelt, M. W. (1997b). The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1), 1–22. <http://doi.org/10.1137/S1064827594276424>
- Söderlind, G., Jay, L., & Calvo, M. (2015). Stiffness 1952–2012: Sixty years in search of a definition. *BIT Numerical Mathematics*, 55(2), 531–558. <http://doi.org/10.1007/s10543-014-0503-3>
- Tokman, M. (2005). Efficient integration of large stiff systems of ODEs with exponential propagation iterative (EPI) methods. <http://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.08.032>
- Weiner, R., Kulikov, G. Y., Beck, S., & Bruder, J. (2017). New third- and fourth-order singly diagonally implicit two-step peer triples with local and global error controls for solving stiff ordinary differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 316, 380–391. <http://doi.org/10.1016/j.cam.2016.06.013>
- Yatim, S. A. M., Ibrahim, Z. B., Othman, K. I., & Suleiman, M. B. (2013). A numerical algorithm for solving stiff ordinary differential equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013. <http://doi.org/10.1155/2013/989381>