



6. Desarrollo del pensamiento de estudiantes de grado undécimo mediante un proceso de objetivación del concepto de límite funcional¹

Claudia Patricia Quintero Quintero
claudia.quintero@udea.edu.co

Diana Victoria Jaramillo Quiceno
diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen

La presente ponencia se inscribe en la modalidad de interculturalidad y educación. Esta ponencia consta del resultado de una investigación realizada en el marco de un doctorado en educación, en la línea de educación matemática, en la Universidad de Antioquia. El objetivo de esta investigación fue analizar el desarrollo del *pensamiento teórico* de estudiantes de grado undécimo, en sus procesos de objetivación del *límite de una función* de variable real en un punto. El diseño metodológico lo realizamos desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. Diseñamos e implementamos *Actividades Orientadoras de Enseñanza* enmarcadas en la *Teoría de la actividad*. Cada una de las estudiantes protagonistas de la investigación en la dialéctica individuo/colectivo, desarrolló cierto nivel –inacabado– de *pensamiento teórico*. Dicho nivel estuvo determinado, además, por sus formas particulares de tomar conciencia progresiva del objeto cultural.

Palabras clave: teoría de la actividad; límite de una función de variable real, conciencia.

Abstract

This presentation is framed within the intercultural and education modality. As a result of a research done for a Doctoral study in Mathematical Education. The aim of this study was the analysis of the development of the theoretical thinking in tenth graders, and their objectivation of the limit of a function of real variable at a point. The method was designed from a qualitative paradigm under a critical-dialectical approach. Teaching oriented activities were framed in the Activity theory. Each of the students who participated in this research of the individual/group dialectics developed certain level –unfinished– of theoretical thinking. Such a level was also determined by their particular progressive awareness of the cultural object.

Key words: activity theory, limit of a function of real variable, awareness.

¹ La ponencia aquí presentada es resultado de una tesis doctoral (realizada en la Universidad de Antioquia) finalizada en el año 2018, intitulada: Desarrollo del pensamiento teórico de estudiantes de grado undécimo en un proceso de objetivación del concepto de límite de una función.



● Planteamiento del problema

El currículo escolar del contexto latinoamericano, en general, está organizado bajo la influencia de la estructura formal del análisis matemático. Dicha organización conlleva, en general, a una enseñanza que propende por el empleo memorístico de algorítmicos para el cálculo del *límite*, mas no por la apropiación de su concepto. Este hecho se transforma en una problemática que se hace evidente en las dificultades a las que se enfrentan muchos maestros para la enseñanza de dicho concepto matemático y, en especial, en las que se enfrentan sus alumnos para su aprendizaje. En esa línea, coincidimos con Cantoral (1995) y Blázquez et al (2006) cuando plantean que la incorporación del concepto de *límite* al currículo escolar conlleva a una serie de problemas teóricos y prácticos que deben discutirse desde otras apuestas epistemológicas, gnoseológicas, metodológicas y ontológicas a las tradicionales. Así, consideramos que dichas apuestas deben, además, dirigirse hacia una enseñanza que posibilite un aprendizaje que, a su vez, fomente el desarrollo del *pensamiento* de los estudiantes (en el sentido de Davidov (1988) y Kopnin (1978).

Davidov (1988) plantea que la escuela fomenta en los alumnos un *pensamiento empírico*. Es decir, un *pensamiento* que, al igual que el *teórico*, tiene formas específicas de generalización y abstracción, pero, en la mayoría de los casos, constituye obstáculos para la formación de conceptos. El mismo autor plantea cómo el contenido curricular y los métodos del sistema escolar tradicional en general, orientan la formación de los escolares hacia este tipo de *pensamiento*, el cual dificulta la aproximación teórica de los estudiantes al saber.

En el sentido de lo expuesto anteriormente, la pregunta que orientó el proyecto de investigación referido fue: ¿cómo puede desarrollarse el *pensamiento teórico* de estudiantes de undécimo grado, en un proceso de objetivación del concepto de *límite de una función en un punto*?

● Marco teórico

El marco teórico que construimos como parte del proceso de búsqueda de la respuesta a la pregunta de investigación, fue el resultado de un tejido entre la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2017, entre otros), el desarrollo del *pensamiento teórico* (Vigotsky, 1989, 1991; Kopnin, 1978; Davidov, 1988 y Moura, 2010) y el concepto de *límite de una función* real de variable real (Caraça, 1951; Laurentiev y Nikolski, 1976, entre otros). Este tejido estuvo fundamentado en el materialismo histórico-dialéctico.

Comprendemos la objetivación, desde Radford (2006, 2017, entre otros) como un proceso social, dinámico y creativo en el que el aprendizaje surge de las unidades dialécticas individuo/colectivo, individuo/cultura, cuando el sujeto "*toma conciencia progresiva*" (Radford, 2006, p. 116) de un algo encontrado en la cultura y lo dota de sentido.



Davidov (1988) considera que contrariamente al *pensamiento empírico*, el *pensamiento teórico* posibilita al sujeto comprender la esencia del objeto estudiado mediante la elaboración de los datos observados dialécticamente. Esto es, identificar las conexiones internas de las propiedades de los objetos analizados, sus contradicciones y singularidades, como parte de un todo integrado. De esta manera, como lo expresa el mismo autor, en el *pensamiento teórico* el concepto surge como una actividad psíquica que le posibilita al sujeto la develación de la esencia del objeto idealizado.

El concepto de *infinitésimo* que propusimos abordar a las estudiantes coincide con los planteamientos de Cauchy y Caraça (1951). Esto es, el *infinitésimo* comprendido como una variable que toma valores sucesivos, tan cercanos “a cero cuánto se desee” (Caraça, 1951, p. 219). Esto es, como un instrumento de naturaleza dinámica que posibilita analizar la infinidad de estados posibles entre dos estados cualquiera de un fenómeno en movimiento. Desde nuestra postura ontológica, es esta la esencia del *infinitésimo* y por ende, fue a la luz de ella que analizamos su aproximación paulatina por las estudiantes protagonistas de la investigación. Las tres estudiantes se aproximaron al concepto de *infinitésimo* –cimiento del concepto de *límite de una función de variable real*– en imbricación con el concepto de vecindad. En esa misma línea, el concepto de *límite de una función en un punto* que pretendimos que las estudiantes objetivaran fue, esencialmente el planteado por Caraça (1951). Es decir, el concepto de *límite* como un objeto matemático y, a su vez, como un método que posibilita entender la mutabilidad de los fenómenos. Esto es, el *límite de una función en un punto*, como un número resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades de los valores de la *función* en la vecindad del punto de interés. Un resultado que conlleva un método dialéctico para determinar el estado del fenómeno estudiado, en interrelación con sus estados vecinos. Dialéctico, en primer lugar, porque contiene en sí mismo una de las categorías fundamentales de la dialéctica: el movimiento –en este caso, hallar el *límite de una función* mediante aproximaciones sucesivas–. En segundo lugar, porque como método dialéctico permite explicar el fenómeno por medio de las concatenaciones de sus aspectos constitutivos. Esta concepción ontológica del *límite de una función*, lejos de ser una concepción simplista, se aparta del formalismo matemático contenido en la definición topológica o en la definición métrica de Weierstrass; un formalismo que puede dificultar la comprensión de su esencia en el nivel escolar. Dicha concepción ontológica va en dirección a la planteada por Cauchy, la cual es, también, de carácter dinámico.

● Metodología

El estudio lo realizamos desde un paradigma cualitativo, bajo un enfoque crítico-dialéctico. A la luz de este nos basamos, en primer lugar, en el concepto de dialéctica asumido por Kopnin (1978). Para este autor la dialéctica se concibe como un método de conocimiento de la esencia de los fenómenos de la realidad; fenómenos –naturales y sociales– que están en permanente interrelación, movimiento y cambio. En segundo lugar, concebimos la relación sujeto/objeto de



conocimiento, según los planteamientos de Sánchez (1998). Esto es, una relación que se entiende como unidad y no como una relación bipolar.

● **Producción conjunta de registro y datos**

Para dicha producción partimos de *Actividades Orientadoras de Enseñanza (AOE)* (Moura, 2010) realizadas por tres estudiantes de undécimo grado de una institución de carácter oficial de la ciudad de Medellín. Las AOE, propuestas por Moura (2010) y su equipo de colaboradores, se enmarcan en la *Teoría de la actividad*. En este sentido, la *actividad* puede interpretarse como un proceso de humanización a través del cual el sujeto identifica las necesidades que surgen de su relación con el entorno. En la AOE tanto el maestro como el estudiante son sujetos en *actividad*, pero con necesidades y, por ende, motivos diferentes. Esto es, el maestro tiene la necesidad de enseñar y el estudiante tiene la necesidad de aprender, lo que genera objetivos divergentes. La AOE sugiere pensar, planificar y desarrollar los encuentros en el aula de clase, de manera tal que se generen interacciones –entre el maestro y el estudiante– que re-signifiquen el saber matemático socialmente construido. En esa dirección, diseñamos ocho AOE como medio para el desarrollo del *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del *límite de una función* de las estudiantes y, a su vez, para la producción conjunta de registros y datos. Cada una de las AOE implicó dos sesiones mínimas. Además del tiempo requerido para el desarrollo en el interior de los grupos conformados por las estudiantes, cada AOE tuvo un espacio de socialización grupal, acción que consideramos fundamental en el proceso de objetivación.

● **Análisis de los datos**

Para el análisis de los datos producidos realizamos un estudio de casos, bajo las consideraciones de Yin (2010) y una triangulación entre los datos, nuestra mirada como investigadoras y el marco teórico. En esa línea, analizamos el caso de tres estudiantes protagonistas de la investigación; la manera en que las estudiantes desarrollaron el *pensamiento teórico* en el proceso de objetivación del concepto de *límite*, en el contexto escolar al que pertenecían. Las unidades de análisis fueron los enunciados (verbales y no verbales) de las estudiantes, presentes en las acciones y operaciones realizadas por estas en el desarrollo de las AOE.

● **Resultados**

En el proceso de análisis emergieron dos categorías de análisis: “El movimiento: carácter indefectible de la naturaleza”, y, “Límite de una función real de variable real: una manera particular de conocer la mutabilidad de los fenómenos”. En ambas categorías analizamos la manera en la que cada protagonista de la investigación, desde su modo particular de ser/aprender, fue aproximándose de forma paulatina al concepto de *límite de una función puntual*. El grado de



desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes en su proceso de *objetivación del límite de una función*, se produjo en concordancia con el proceso sociohistórico del desarrollo del *pensamiento* del ser humano; esto es, a través de la *actividad –práctica y mental–*. Esta *actividad*, traducida al contexto escolar corresponde a la *actividad pedagógica*, constituida por la *actividad* de enseñanza en dialéctica con la *actividad* de aprendizaje. En esa dirección, fueron las AOE las que posibilitaron a las estudiantes sumergirse en un proceso de *objetivación* de un objeto del saber matemático escolar.

● El conocimiento del objeto a partir de su contemplación directa

En el desarrollo de algunas AOE las estudiantes establecieron una relación con el objeto de estudio en la que primaron juicios aislados, como resultado de una descripción superficial a partir de la interacción con este. Tal relación se pudo evidenciar, por ejemplo, en la AOE denominada “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. En ella, las estudiantes realizaron asociaciones simples de elementos que observaron en la manifestación del fenómeno (el desplazamiento de un cuerpo en una trayectoria rectilínea). Estas asociaciones se hicieron evidentes en expresiones verbales enunciadas por las estudiantes respecto a una de las acciones contenidas en la *actividad* en mención: “explica el desplazamiento del cuerpo (la burbuja) en la manguera”:

“La burbuja tiene un movimiento que no es constante, pero es continuo” (Eliza, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”, 21 de julio de 2017).

“La burbuja posee un movimiento rectilíneo variante, más o menos rápido” (Dana, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”, 21 de julio de 2017).

“Esta tiene un movimiento rectilíneo variable” (Ana, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”, 21 de julio de 2017).

El ejemplo anterior denota una aproximación de las estudiantes al fenómeno a partir de la mera percepción. En otras palabras, el tipo de *pensamiento* que emplearon las tres estudiantes fue un *pensamiento* de carácter *empírico*. Sin embargo, esto no fue un impedimento para que se interesaran por el estudio del objeto, o fenómeno y que, posteriormente, comenzaran a visualizar algunos de sus aspectos.

● El proceso de objetivación del límite de una función en un punto

En la realización de cada AOE las estudiantes se aproximaron de forma paulatina al objeto de estudio, por medio de la interacción con sus compañeras de aula y con la maestra, a través de una relación dialógica. La realización de las AOE estuvo permeada por el trabajo colectivo en el que la voz del otro –maestra o compañera de la *actividad* de estudio– cobró un significado fundamental



tanto en el proceso de desarrollo del *pensamiento* de las estudiantes, como en su proceso de objetivación del concepto *límite de una función*. Un ejemplo se encuentra en uno de los momentos de la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada “¿Límite?” En ella, Ana le explicó a Dana la necesidad del uso del *infinitésimo* como parte de la solución al problema planteado en la *actividad*. Así, cuando Ana expresó el resultado de su reflexión, Dana logró ver lo que antes no había sido visible para ella. Es decir, cuando Dana enunció, “¡Ah, claro, yo no había entendido! Es que no es el punto exacto, sino en la... vecindad. ¡Ay, claro!”, su enunciado apareció como resultado de la influencia de la voz de Ana en su razonamiento. Es decir, el proceso de formación de conceptos en Dana –*infinitésimo* y *vecindad*– se encontraba en la categoría intersíquica en la cual la colaboración de su compañera de *actividad* se volvió fundamental en la solución del problema y, por consiguiente, en su proceso de aprendizaje.

Las estudiantes se aproximaron al concepto de *infinitésimo* y de *límite* de una función de forma paulatina y, desde sus particularidades, mediante el desarrollo de las AOE. En el momento de la socialización de la AOE “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”, por ejemplo, las estudiantes dieron cuenta de su proceso de aproximación paulatina al concepto de *infinitésimo*, mediante enunciados verbales (y gestuales) como:

Ah, sí, sí. Si fuera un solo segmento, pues, no cambiaría, estaría ahí quieto... (Ana, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. Socialización 28 de julio de 2017).

O sea, ¿qué es como una especie de variable, o...algo así? (Dana, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. Socialización 28 de julio de 2017)

Sí. Es que... vea que según lo que usted dibujó ahí [señalando la gráfica en la que resalté la variable] se nota claramente que son todos esos números, pequeñitos que están en la vecindad del número y, obviamente, están cambiando (Eliza, “Análisis de la posición de un cuerpo en un instante dado”. Socialización 28 de julio de 2017).

El concepto de *límite de una función* asumido en la investigación fue asequible para las estudiantes protagonistas; hecho identificado en sus procesos de *objetivación*, especialmente en los procesos de Eliza y Ana. Un ejemplo de lo enunciado se evidenció en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* denominada, “Límite de una función”, y específicamente en la respuesta de la pregunta N°2 (la cual contenía la representación gráfica de la *función* a estudiar). La pregunta a la que hacemos alusión es, “¿Es posible hallar el valor de $f(0)$? Explica”. Las respuestas de las tres estudiantes dieron cuenta del establecimiento de una relación entre el concepto de *función*, *infinitésimo* y *límite de la función* dada. Aunque en la pregunta problematizadora no era explícita la acción de hallar el *límite de la función* en el origen, las tres estudiantes emplearon dicho concepto –como aproximaciones sucesivas– como instrumento para hallar la solución a la situación. Las estudiantes, en el proceso de su búsqueda de la respuesta a la pregunta que motivó su *actividad mental*, visualizaron el objeto *límite* como un método para solucionar la situación matemática dada.



● Aproximación a un pensamiento teórico

Desde el materialismo dialéctico el movimiento es concebido como la propiedad fundamental de la materia; esta no puede ser concebida sin movimiento. En esa línea, una de las formas del movimiento es el mecánico, el cual puede ser estudiado a través del *límite de una función*. Esta forma de movimiento fue identificada por las estudiantes en *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, como por ejemplo en la denominada “Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado”. En esta, ante nuestra pregunta sobre el fenómeno físico principal identificado por las estudiantes en el sistema burbuja-manguera, Eliza y Ana respondieron:

Es el movimiento...Porque es lo que estamos viendo. La burbujita se desplaza por la manguera (Ana, “Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado,” 18 de julio de 2017).

El movimiento de la burbuja...Porque es el cambio que la burbuja hace en su recorrido. En ningún momento, la burbuja para (Eliza, “Determinación de la posición de un cuerpo en un instante dado,” 18 de julio de 2017).

Ambas estudiantes identificaron el movimiento mecánico como fenómeno principal manifiesto en la *Actividad Orientadora de Enseñanza* en mención, lo que dio cuenta del reflejo del objeto en sus conciencias, como producto de su *actividad mental* en dialéctica con la *actividad práctica*.

En la última *Actividad*, “Límite de una función en un punto”, en la situación N°5, tanto Eliza como Dana evidenciaron en sus operaciones dificultades para hallar la solución a la situación-problema planteada, debido, principalmente, a la falta de apropiación del establecimiento de relaciones de orden en la recta numérica. Contrariamente, Ana resolvió la situación denotando una apropiación del concepto referido.

● Conclusiones

A partir de la triangulación que realizamos durante el proceso investigativo, podemos decir que:

Dana dedujo nexos entre aspectos del *límite de una función*. Sin embargo, algunas de sus operaciones en la última *Actividad Orientadora de Enseñanza*, la cual tuvo un carácter de síntesis, no nos permite afirmar que Dana se haya apropiado de este concepto matemático. Es decir, que haya dotado de sentido el significado de *límite de una función* y lo haya empleado como medio de sus elaboraciones teóricas.

Aunque Eliza presentó dificultades en la solución de algunas situaciones-problema, contenidas en determinadas *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, en general ella evidenció un proceso de toma de conciencia progresiva de la esencia del objeto cultural al que se aproximó. Las



dificultades que referimos aquí obedecieron, principalmente, a la falta de apropiación de conceptos matemáticos que eran requisitos para la operatividad del *límite de una función*. Dificultades, principalmente, en operaciones algebraicas y en las propiedades de orden en el sistema de los números reales. Estas se convirtieron, a su vez, en una forma de impedimento para aplicar correctamente el concepto de *límite* en situaciones que exigían su empleo. Sin embargo, durante todo su proceso de *objetivación*, a lo largo de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*, Eliza denotó algunas características del *pensamiento teórico* como la deducción de conexiones en el objeto (fenómeno/esencia, particular/general) y el uso consciente del *límite* como un método. El cálculo del valor resultante de la interdependencia del conjunto de las posibilidades del comportamiento de la *función* en la vecindad del punto de interés, Eliza lo halló mediante aproximaciones sucesivas, mas con la limitante mencionada anteriormente.

Ana interiorizó la esencia del objeto *límite* y la transformó en un concepto que, a su vez, empleó como medio para la solución de situaciones que contienen dicho concepto; Ana se apropió del concepto. De esta manera, ella dio cuenta de una aproximación a un *pensamiento teórico*, lo cual se evidenció, además de lo concluido en el párrafo anterior, en las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* detalladas en la segunda categoría de análisis de esta tesis.

Desde el materialismo histórico-dialéctico, el desarrollo del *pensamiento* en general –y del *pensamiento teórico* en particular– no puede abordarse en términos absolutistas; admite gradaciones. Así, en el caso de esta investigación las diferentes gradaciones (no lineales) del desarrollo del *pensamiento teórico* de las estudiantes obedecieron, de un lado, al mismo carácter dialéctico del desarrollo de todo fenómeno –natural o social– y, de otro lado a las condiciones singulares de las tres estudiantes protagonistas. En ese sentido, en sus procesos de toma de conciencia progresiva al objeto cultural, Eliza, Dana y Ana realizaron un movimiento de lo particular (cada aspecto del *límite de una función* contenido en cada situación desencadenadora de aprendizaje) a lo general (el uso del concepto de *límite* como método para resolver situaciones que lo contenían) y viceversa (especialmente Eliza y Ana). Así mismo, las estudiantes realizaron reflexiones que les posibilitaron hallar vínculos en el objeto matemático. Sin embargo, no nos es posible afirmar que las estudiantes, especialmente Dana, hayan alcanzado un “nivel superior” (Rubinstein, 1974, p. 444) en su *pensamiento teórico*.

Desde la concepción ontológica y epistemológica que asumimos, consideramos que, aunque Dana evidenció reflexiones teóricas durante varias AOE, en su *pensamiento* predominaron características de un nivel empírico. Por su parte, Ana y Eliza desarrollaron un nivel de *pensamiento teórico* que les posibilitó comprender elementos constitutivos del objeto de estudio, a través del desarrollo de la *actividad* de aprendizaje en que se sumergieron por medio de la realización de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza*. Un nivel que, probablemente, les posibilite aproximarse, con posterioridad, al lenguaje formal del *límite de una función*.



● Referencias

- Cantoral R (1995). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. En: *Antologías-I Publicaciones Centroamericanas*, (7), pp.1-24. ISBN:9977-64-769-0 Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/263010052_Hacia_una_didactica_del_calculo_basada_en_la_cognicion
- Caraça, B de J. (1951). O método dos límites. En: *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá Da Costa. p. 213-227.
- Davidov V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú: Progreso.
- Kopnin, P.V. (1978). A dialéctica como lógica y teoría do conhecimento. Río de Janeiro: Civilização Brasileira.
- Laurentiev, M.A y Nikolski, S.M (1976). Límites. En A.D. Aleksandrov. (Ed). *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Editorial. p. 108-117.
- Moura, M. O. (2010). A atividade pedagógica na Teoría Histórico-Cultural. Brasília: Liber Livro.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, p. 103-129.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En: D'Amore, B y Radford, L. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. p. 115-136.
- Rubinstein, S.L. (1974). *Principios de psicología general*. México, D.F: Grijalbo S.A
- Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Vigotsky (1989). La génesis de las funciones psíquicas superiores. En *El proceso de formación de la psicología marxista*. Moscú: Rusia. Editorial Progreso p. 138-155.
- Vigotsky, L. S. (1991). *A formação social da mente*. Sao Paulo, Brasil: Martins Fontes Editora Ltda.
- Yin, R.K. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Bookman: Sao Paulo.