

EVALUACIÓN DE LA SOSTENIBILIDAD DEL SISTEMA DE PENSIONES
MEDIANTE EL USO DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES Y REGRESIÓN
LINEAL

SANTIAGO JIMÉNEZ LONDOÑO

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MEDELLÍN, COLOMBIA

2020

EVALUACIÓN DE LA SOSTENIBILIDAD DEL SISTEMA DE PENSIONES
MEDIANTE EL USO DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES Y REGRESIÓN
LINEAL

SANTIAGO JIMÉNEZ LONDOÑO

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ASESOR

JAVIER DARÍO FERNÁNDEZ LEDESMA

PHD EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2020

19 de noviembre de 2020

“Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad”
Art 92 Régimen Discente de Formación Avanzada.

A handwritten signature in black ink on a light green background. The signature is cursive and appears to read 'Santiago Jiménez Londoño'.

Santiago Jiménez Londoño

AGRADECIMIENTOS

A la bondad y honestidad con la que nos construyen intelectualmente los que nos rodean.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS	7
LISTA DE GRÁFICAS	8
LISTA DE ILUSTRACIONES	9
LISTA DE ECUACIONES	10
GLOSARIO	11
RESUMEN	15
1. INTRODUCCIÓN	15
2. MARCO CONCEPTUAL: LAS REDES NEURONALES ARTIFICIALES EN PERSPECTIVA ECONÓMICA	20
2.1.1. Redes Neuronales Artificiales	20
2.1.1.1. Aplicaciones de las Redes Neuronales Artificiales	26
2.1.2. Sistema Pensional Colombiano	31
3. ANTECEDENTES: UN PANORAMA DEL SISTEMA PENSIONAL COLOMBIANO	33
3.1.1. Estructura demográfica colombiana	33
3.1.2. Cobertura	38
3.1.2.1. Etapa de acumulación	38
3.1.2.2. Etapa de desacumulación	39
3.1.3. Equidad	40
3.1.3.1. Equidad vertical	41
3.1.3.2. Equidad horizontal	44
3.1.4. Sostenibilidad financiera	46
3.1.4.1. Modelo PROST	47
3.1.5. Estructura del mercado laboral colombiano	49
4. METODOLOGÍA	53
4.1.1. Recolección de información	54
4.1.1.1. Muestra	54
4.1.1.2. Descripción de las principales variables	56
4.1.1.3. Variables construidas	58

4.1.1.4.	Transformación de los datos	59
4.1.2.	Regresión lineal múltiple	60
4.1.2.1.	Preselección de variables	60
4.1.2.2.	Análisis de regresión	60
4.1.3.	Redes neuronales	61
4.1.3.1.	Arquitectura y configuración de la red	63
5.	RESULTADOS	65
5.1.1.	Resultados de la aplicación de regresión múltiple	65
5.1.2.	Resultado de la aplicación de redes neuronales	72
6.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	76
7.	REFERENCIAS	79
8.	ANEXOS	86

Índice de tablas

Tabla 1. Evolución de las Redes Neuronales Artificiales	25
Tabla 2. Diferencias entre modelos estadísticos y modelos de Redes Neuronales Artificiales.....	53
Tabla 3. Variables utilizadas	54
Tabla 4. Supuestos y test del modelo de regresión multivariable.....	61
Tabla 5. Comparación de Redes Neuronales Artificiales frente a modelos tradicionales.....	62
Tabla 6. Asociaciones lineales.....	65
Tabla 7. Variables preseleccionadas	68
Tabla 8. Comunalidades.....	69
Tabla 9. Regresión jerárquica por etapas.....	71
Tabla 10. Redes neuronales	73

Índice de gráficas

Gráfico 1. Conceptos clave en Redes Neuronales Artificiales.....	23
Gráfico 2. Tasa de crecimiento por grupos poblacionales	34
Gráfico 3. Pirámide poblacional colombiana discriminada por género, 1985 y 2020	36
Gráfico 4. Razón de dependencia e Índice de envejecimiento, 1985 - 2020	37
Gráfico 5. Cotizantes efectivos sobre la Población Económicamente Activa, 1997 – 2017	38
Gráfico 6. Cobertura en fase de Desacumulación.....	40
Gráfico 8. Inequidad y Regresividad del sistema de pensiones: número de pensionados por decil de ingreso (Inequidad y regresividad).....	42
Gráfico 9. Inequidad y Regresividad del sistema de pensiones: Distribución de subsídios por quintil de ingreso	43
Gráfico 10. Inequidad y Regresividad del sistema pensional: tasa de remplazo por género	45
Gráfico 11. Inequidad y Regresividad del sistema pensional: pensiones promedio con subsidio por genero	45
Gráfico 12. Sostenibilidad financiera del sistema de pensiones.....	48
Gráfico 13. Mercado laboral colombiano: estadísticas de informalidad y desempleo	50
Gráfico 14. Mercado laboral colombiano: productividad Total de los Factores (PTF) a niveles actuales de la paridad del poder adquisitivo (PPA)	51
Gráfico 15. Ejemplos de datos linealmente separables e inseparables	63
Gráfico 16. Matriz de correlaciones	86
Gráfico 17. Prueba de autocorrelaciones	86
Gráfico 18. Prueba de independencia	87
Gráfico 19. Estacionariedad	88
Gráfico 20. Primera diferencia logarítmica	88
Gráfico 21. Correlaciones 3D	93

Índice de ilustraciones

Ilustración 1. Arquitectura de la red neuronal	72
--	----

Índice de ecuaciones

Ecuación 1. Tasa total de afiliados	58
Ecuación 2. Índice de Dependencia.....	59
Ecuación 3. Elegibilidad	59
Ecuación 4. Generosidad	59
Ecuación 5. Razón de gasto	59
Ecuación 6. Análisis de regresión	60
Ecuación 7. Modelo de evaluación I	70
Ecuación 8. Modelo de evaluación II	71
Ecuación 9. Tasa de afiliación (TA)	90
Ecuación 10. Tasa de desempleo (D).....	90
Ecuación 11. Tasa de empleo vulnerable (EV)	90
Ecuación 12. Tasa de interés real (r)	91
Ecuación 13. PIB per capita	92
Ecuación 14. Tasa de crecimiento PIB	92

Glosario

PIB: Para Mankiw (2014) el producto interior bruto o PIB indica la renta total del país y el gasto total en su producción de bienes y servicios, resumiendo los datos económicos en una única cifra que representa el valor monetario de la actividad económica en un determinado periodo de tiempo, de tal forma que suele considerarse como el mejor indicador de los resultados de la economía. De esta forma, el PIB logra sintetizar el comportamiento de la actividad económica, aunque es importante aclarar que, esta medida, solo toma la producción nueva. Para Colombia el PIB es medido periódicamente y publicado el Departamento Nacional de Estadística (DANE).

Índice de precios al consumidor (IPC): El Índice de Precios al Consumidor (IPC) evalúa la variación promedio de los precios de bienes y servicios con respecto a un año base. Según Mankiw (2014) este indicador mide el nivel de precios, donde sus principales fuentes son datos administrativos (gasto del gobierno, recaudación de impuestos, los programas de educación, la defensa, etc.) y datos estadísticos de encuestas oficiales (a establecimientos minoristas, empresas manufactureras y explotaciones agrícolas).

Este indicador es un índice de canasta fija, es decir, se evalúa a partir de una cesta de bienes y servicios predeterminada. Este es un índice de precios de tipo Laspeyres, por lo que se evalúan los precios ponderados por las cantidades frente al periodo base.

En Colombia la canasta fija se determina a partir de una encuesta de ingresos y gastos familiares. Además, se establece un sistema de ponderación para promediar las variaciones individuales de cada artículo de la canasta y posteriormente realizar un seguimiento a este. El número de artículos con los cuales cuenta la canasta familiar delimitada en Colombia es cercano a 405.

Un incremento generalizado y continuo de los precios de en una economía se le denomina inflación. En este caso, el incremento de los precios en la canasta familiar es una buena aproximación a la variación de los artículos más transados regularmente por los hogares. Sin embargo, existen otras formas de realizar las mediciones sobre la inflación, entre ellos el deflactor implícito de cuenta nacionales y el Índice de Precios al Productor (IPP).

PIB per cápita: Para Mankiw (2014) el PIB real per cápita mide la renta de la persona media de la economía. El PIB per cápita determina la producción del producto interno en razón de la población total, de tal manera que permite evaluar

qué proporción del producto se le puede asignar estadísticamente a cada habitante. Debido a la heterogeneidad del ingreso y teniendo en cuenta que esta medida puede ser entendida como un promedio se debe tener en cuenta que no es totalmente fidedigna, así que, si bien puede tenerse en cuenta como una medida de referencia sobre la producción, no refleja de manera exacta el comportamiento individual de los agentes.

Consumo agregado: El consumo establece los bienes o servicios demandados por un agente económico en un periodo determinado de tiempo. Mientras tanto, Morettini (2002) explica el consumo agregado, entendido a partir de la función de consumo keynesiana. Esta medida agrupa el consumo de los agentes, el nivel de renta y la propensión marginal a consumir. De esta forma, el consumo agregado se puede entender como: $C = \underline{C} + cY$, donde c es la propensión marginal a consumir, Y es el nivel de renta y \underline{C} es el consumo. De esta misma forma, Morettini (2002) aclara que, aunque el consumo depende del ingreso real disponible según la función keynesiana, donde $C = f(Yd)$, existen también otros determinantes objetivos y subjetivos del consumo que van desde cambio desde el nivel de ingreso real, los impuestos o las expectativas (objetivos), hasta la precaución, el orgullo o la avaricia (subjetivos).

Mercado laboral: Para Erly (2012) se denomina mercado de trabajo o mercado laboral al conjunto de relaciones entre empleadores (oferentes de empleo o demandantes de trabajo) y personas que buscan trabajo remunerado por cuenta ajena. Este mercado cuenta con rasgos que lo diferencian de otros tipos de mercados, principalmente en la cobertura de los derechos laborales, garantizados través de instituciones y seguridad jurídica. Entre tanto, Rosano (2010) aclara que para entender este mercado es necesario entender, como en cualquier otro mercado, las condiciones de oferta y demanda. La oferta laboral está entendida por el conjunto de elecciones individuales de los agentes entre ocio y consumo, donde la elección de consumo determinará su disposición a participar en el mercado. Mientras tanto, la demanda laboral, se deriva de la función de producción, la cual, entendida desde la teoría neoclásica, representa el capital y la mano de obra.

Tasa de afiliación: Para Colpensiones (2020) la afiliación es el proceso mediante el cual una persona se vincula al Sistema General de Pensiones (SGP) de manera permanente, o hasta cumplir el tiempo mínimo requerido para solicitar el cambio de régimen. Así mismo, la afiliación es el proceso de vinculación a una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP). De manera que, la tasa de afiliación al sistema de

pensiones refleja el número de afiliados, tanto contribuyentes a RPM como a RAIS, en razón de la población total o la población económicamente activa.

Tasa de interés real: La tasa de interés de tipo real (r) puede ser entendida como el consumo adicional que podemos obtener en el futuro (Varian, 2010). En una economía la tasa de interés real representa el precio del dinero en el mercado financiero que puede ser determinado por un número indeterminado de fuerzas, algunas transitorias (Zhang & Yi, 2016) que pueden afectar la inflación como movimientos en los precios del petróleo, cambios en la política fiscal y ajustes salariales y otras que afectan la tasa de interés nominal como la política monetaria.

Resumen

Uno de los mayores retos que tendrán que enfrentar las naciones según los estudios económicos de la OCDE en los próximos años es el envejecimiento poblacional y con ello el gasto público y social que acarrea sostener vía subsidios o pensiones la calidad de vida de su población.

Actualmente Colombia – sus tomadores de decisiones y la sociedad en general - pareciera no dimensionar la gran catástrofe que se avecina en materia fiscal y social si no se adoptan las recomendaciones de diferentes entidades internacionales y expertos frente al sistema general de pensiones.

Esta investigación pretende hacer un análisis teórico y matemático de la viabilidad del sistema de pensiones en temas fiscales y sociales para poder buscar cómo a través de políticas de Estado en temas laborales y fiscales se le puede dar una solución eficiente a la demanda de los cotizantes, no cotizantes, población vulnerable y fondos de pensión.

La evaluación es innovadora porque compara métodos econométricos tradicionales con las nuevas tendencias en análisis de datos como lo son las Redes Neuronales Artificiales ya que son un método muy potente para realizar predicción de datos con base en algoritmos evolutivos complejos que pueden modificar su arquitectura y potenciar el desarrollo de la predicción a realizar, lo que no pasa con los modelos econométricos clásicos donde la arquitectura no puede modificarse por sí misma para hacer el modelo más eficiente.

Palabras clave: Macroeconomía, econometría, redes neuronales, sistema de pensiones

1. INTRODUCCIÓN

«El pensamiento no es más que un relámpago en medio de una larga noche. Pero ese relámpago lo es todo». (Poincaré)

Necesidad de un sistema pensional eficiente

Los sistemas pensionales, en términos generales, albergan su razón de ser en el alcance de dos objetivos, a saber, en primer lugar, garantizar un umbral de consumo persistente a lo largo de la vida de una persona que refleje un esquema de satisfacción global concordante con las necesidades moralmente justificables de cualquier persona. En este sentido, el primer objetivo del sistema de pensiones es evitar una drástica reducción en la capacidad personal de consumo de una persona en su vejez, garantizando un nivel de bienestar independiente del ahorro o la disminución en su capacidad de trabajo.

En segundo lugar, el sistema pensional se propone garantizar tasas sostenidas de consumo agregado en la economía, esto es, se propone garantizar que el nivel global de consumo al interior de una economía será constante a pesar de las variaciones demográficas de la población, dando como resultado un comportamiento óptimo del PIB a pesar de la salida del mercado laboral de una proporción significativa de la fuerza laboral. En este sentido, el sistema pensional funciona como mecanismo de proyección de la economía ante la disminución en la capacidad de consumo de las personas de mayor edad en la sociedad.

Para Parra-Polaina *et al.* (2020) el objetivo en el cual se encaminan todos los países es el de estructurar un sistema pensional que de manera sostenible logre mejorar el nivel de vida de la población pensionada por vejez, sobrevivencia e invalidez. De igual forma, para Bosch *et al.* (2018) los sistemas pensionales son contratos sociales que tienen como principal objetivo proporcionar un consumo digno a los adultos mayores en aquellos años en los que es más difícil generar un ingreso.

Pese al rol central de estos objetivos en el buen comportamiento de la economía, el sistema pensional colombiano presenta problemas en su desempeño. Veamos en detalle algunos de ellos. En primer lugar, la cobertura del sistema representa alrededor del 23% de la población, esto sobre una base de un 40% de cotizantes con respecto al total de afiliados (López & Sarmiento G., 2019), lo cual implica que el sistema pensional, en un muy bajo estándar, cumple con su objetivo en términos

de beneficiarios, pero presenta una relación cotizante – beneficiario insostenible en el tiempo.

A su vez, el esquema de distribución del mercado laboral supone un factor distorsivo para el sistema pensional, esto es que, gran parte de la población que alcanza beneficios pensionales se concentra en el sector de mayor educación y ocupación urbana en contraste con el mercado laboral rural, el cual presenta altas tasas de informalidad y trabajo no asalariado (López Castaño & Lasso Valderrama, 2012). En tercer, y último lugar, uno de los principales factores distorsivos en el sistema pensional es la administración de los fondos de pensiones por debajo de la frontera de eficiencia, de manera que sus rendimientos están por debajo de su margen de posibilidad (Jara, Gómez, & Pardo, 2005). Desde esta perspectiva, el sistema pensional colombiano está caracterizado por una estructura que no logra pensionar una proporción mayoritaria de la población, y además presenta defectos relativos a su esquema de inversiones, mercado laboral y tasas de afiliación.

Algunos de los problemas del sistema pensional colombiano se remiten a su estructura de origen, esto es, el sistema pensional colombiano fue creado en 1946 al momento de creación del régimen de reparto o el régimen de prima media (RPM) y comenzó a arrojar las primeras señales de alerta en los años sesenta debido a la baja cobertura del sistema y a las bajas tasas de sostenibilidad fiscal, esto debido a que el régimen nunca fue actualizado según las evoluciones macroeconómicas del mercado laboral, que para la fecha seguía con tasas de informalidad muy altas (Moreno R. & Ortiz , 2010).

Desde la perspectiva legal, el Sistema General de Pensiones está regulado por la Ley 100 de 1993 que fue firmada por el entonces presidente Cesar Gaviria, y reformaba hasta ese entonces el sistema de salud y seguridad social colombiano, introduciendo nuevos cambios que darían un giro drástico en la concepción de salud pública en Colombia. La ley, fundamentada en el artículo 48 de la Constitución Política de Colombia, prohíbe la posibilidad de liquidar una pensión por menos de un salario mínimo lo que desencadena en una barrera jurídica para la sostenibilidad del sistema al largo plazo, esto en la medida establece el deber del Estado de asegurar el cumplimiento en los pagos de la pensión sin tomar en consideración si la condiciones particulares del beneficiario, creando la posibilidad de un amplio esquema de compensación mediante subsidios al segmento de la población con menores aportes, esto sin ningún mecanismo alternativo de ingreso al sistema. Como resultado, para el esquema de protección a la vejez el Estado se ha visto obligado a desarrollar instrumentos que intentan suplir parcialmente esa cobertura,

pero que, en la práctica funcionan de manera desarticulada y distan de constituir un sistema multipolar (Becerra, Forero y Villar, 2015).

Los principales problemas del sistema pensional colombiano son: i) la existencia de deficiencias institucionales, ii) baja cobertura presente y futura, iii) alto costo del RPM, iv) alta inequidad, v) deficiente funcionamiento de RAIS en su fase de acumulación y vi) un alto riesgo jurídico (Bosch et al., 2015, pp. 8). Como menciona Bosch, et al., (2015) un factor determinante en la estructuración del comportamiento del sistema de pensiones deriva de la actividad jurisprudencial y el latente riesgo jurídico. Desde esta perspectiva, la respuesta de los jueces a los alegatos jurídicos relativos a pensiones restringe el sistema, sin considerar sus efectos en la administración y asignación de beneficios pensionales. A manera de ejemplo, existe un caso en relación con la Sentencia T-074/2016 que sienta un precedente entorno a algo llamado familia extendida y fue motivada por una tutela donde un sobreviviente (nieta) de un accidente reclamara la pensión amparado bajo el concepto de “hijos” del artículo 47 de la Ley 100/1993; esta decisión que a simple vista parecer ser sencilla, aumentó el valor presente neto del pasivo pensional que recae sobre las finanzas públicas en 6 billones de pesos (Corte Suprema de Justicia, 2016). También hizo que 3.460 trabajadores afiliados al RAIS ya no pudieran cumplir con los requisitos para acceder a un ingreso pensional porque se incrementó con esta decisión el monto de capital necesario para una pensión de salario mínimo a determinadas edades.

Así las cosas, el sistema pensional colombiano presenta una extensa diversidad de problemas. En temas de cobertura, en Colombia solamente el 40% de los hombres en edad productiva está cotizando actualmente, las mujeres por su parte lo hacen en un 25%. De esta forma, para 2015 según Bosch, et al., (2015), solo el 18,8% de los adultos mayores de 60 años logre tener una pensión contributiva. Para Parra, et al., (2020), la cobertura al sistema pensional ha avanzado, llegando en 2019 a ser del 10,6% para RPM y 26,1% para RAIS. Sin embargo, los retos en cobertura se mantienen, en 2019, aún 63,3% de la PEA no se encontraba afiliada al sistema. Adicionalmente, existe una gran diferencia territorial en términos de pensiones, lo que se traduce en una concentración de sus beneficiarios en el área urbana, dejando un déficit significativo en el área rural en términos de acceso a pensiones.

En contraste con algunos países de América Latina, Colombia se encuentra con una de las coberturas más bajas, solo superando a México y Perú. Paralelo a ese fenómeno, se presentan tasas significativas de desigualdad en el ingreso y la distribución de las pensiones. A manera de ilustración, una cifra alarmante es la que corresponde con el 76% de la población en edad de pensionarse, la cual percibe

ingresos menores a un salario mínimo. Por otra parte, los que reciben pensión enfrentan una tendencia problemática, a saber, en su mayoría, las pensiones muestran una tendencia a ser regresivas, ya que el 20% de la población que percibe mayores ingresos y está en mejor situación económica termina recibiendo el 50,8% de los fondos destinados para las pensiones, esto según un estudio del Departamento Nacional de Planeación – DNP del año 2017. Claramente la regresividad pensional es susceptible a las variaciones macroeconómicas y las instrucciones de política social, pese a esto, se puede ver en países como Argentina, Costa Rica y Uruguay, que el aporte y una transferencia pensional ayudan a reducir la desigualdad. La razón principal, según lo observado, es que este tipo de esquemas en Colombia solo terminan beneficiando a las poblaciones de mayores ingresos. Según Bosch, et al., (2015), la población que contribuye con más de cinco salarios mínimos al RPM, equivalente al 3% de la población total, recibe la gran mayoría de los beneficios (\$728 millones por afiliado).

La consideración detallada de estos hechos plantea retos significativos a la administración de pensiones en lo venidero en materia institucional, fiscal, de equidad y progresividad (Bosch, et al., 2015; pp. 9). Estos retos deberán ser enfrentados con rigor sin pretenden albergar una expectativa razonable de solución inmediata. Así las cosas, la delimitación de las causas de estos fenómenos, así como sus efectos y atributos asociados deberán pasar por un filtro donde prime el método científico, es decir, observación metódica, comprobación, experimentación y formulación y análisis de hipótesis, con miras a ser el sustento racional de las políticas orientadas a la solución de estos problemas. Desde esta perspectiva, se hace menester la aplicación de metodologías novedosas que permitan estimaciones precisas y sofisticadas de los fenómenos pertinentes en el diagnóstico, explicación y evaluación del comportamiento del sistema pensional. En el marco de la aplicación de nuevas metodologías surge la inteligencia artificial como un instrumento para el análisis de datos y una alternativa con respecto a los métodos clásicos, esto sobre la base de la extendida falla del sistema, la cual se deriva de la baja capacidad de innovación en la solución de sus problemas estructurales. Desde este punto de vista, las redes neuronales artificiales podrán brindar un esquema de solución innovador en relación con la determinación de causas del bajo desempeño del sistema pensional, además de la búsqueda de soluciones, especialmente por su capacidad de identificación de patrones se pueden realizar diagnósticos precisos.

Nos proponemos entonces la búsqueda de una alternativa de estimación a través redes neuronales artificiales para el sistema de pensiones, con la expectativa de lograr un diagnóstico, explicación y evaluación de su desempeño, esto en un

estándar de alta sofisticación y precisión. Además de realizar una exploración sobre los determinantes del sistema a través del análisis de regresión, donde se podrá conocer la asociación lineal entre un conjunto de variables seleccionadas para encontrar correlaciones significativas y debatir su causalidad a partir de los hechos estilizados conocidos. De esta forma, se tuvo como objetivo general evaluar la sostenibilidad del régimen de pensiones de prima media a través de las variables filtradas.

Para llevar a cabo el presente proyecto se plantearon como objetivos específicos:

- Realizar una selección de variables por medio de la reducción de datos y análisis de componentes para la construcción de un modelo explicativo.
- Realizar un modelo de mínimos cuadrados ordinarios analizando la sostenibilidad del régimen de prima media a través de las variables seleccionadas.
- Implementar modelos de inteligencia artificial y analizar a través del MMSE el aporte de las variables del modelo seleccionado sobre la razón de gasto.

Así las cosas, el modelo econométrico resultante de la aplicación de estas redes a la evaluación del sistema pensional, deberá basarse en un panel de datos confiable que permita estimar, a través de test normalmente usados para evaluaciones de impacto, el desempeño del sistema con métodos como el *Propensity Score Matching* o el *Average Treatment Effect*. Adicionalmente evaluar causalidades a través de Granger y cointegración. Estas y otras herramientas econométricas serán las encargadas de fundamentar las soluciones y las propuestas que se le otorgarán al sistema general de pensiones mediante una aproximación a su estimación desde el uso aplicado de redes neuronales artificiales.

En conclusión, nos propondremos brindar un diagnóstico, explicación y evaluación del comportamiento del sistema pensional, con un enfoque particular en la identificación de patrones a través de la metodología de RNA y debatir causalidades, a partir de los hechos estilizados identificados, Granger y cointegración, con los resultados del análisis de regresión. Es así como el resultado de este trabajo brindará un análisis que aporte al diagnóstico del sistema pensional y sea útil para para la toma de decisiones en materia de política social.

2. MARCO CONCEPTUAL: LAS REDES NEURONALES ARTIFICIALES EN PERSPECTIVA ECONOMETRICA

El presente texto pretende describir y delimitar el área de aplicación de las Redes Neuronales Artificiales (o RNA) a la predicción y analítica del desempeño del sistema pensional colombiano. En este sentido, en lo sucesivo nos propondremos delimitar la noción de las Redes Neuronales Artificiales y sus aplicaciones a problemas económicos, así como los atributos del sistema pensional colombiano y la forma en la cual las RNA podrían contribuir a una formulación y reforma del sistema pensional con miras a maximizar su estabilidad.

2.1.1. Redes Neuronales Artificiales

Las RNA son un sistema de computación que pretende el diseño de inteligencias artificiales a partir de la imitación de los parámetros del aprendizaje biológico de los seres humanos y otros animales (Gurney, 1997; Suzuki, 2013). Los trabajos en redes neuronales artificiales tienen un desarrollo relativamente nuevo en la medida en que se sentaron sus primeros precedentes en 1943 con McCulloch y Pitts, quienes escribieron los primeros fundamentos de la computación neuronal en su trabajo *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity* en el cual planteaban como los eventos neuronales pueden tratarse mediante una lógica proposicional.

McCulloch y Pitts (1943) entendían que existe un trabajo de dos o más vías en una red neuronal donde cada red se comporta bajo un supuesto distinto. Sin embargo, el primer desarrollo de redes neuronales llegó en 1957 con Frank Rosenblatt, donde en su trabajo *The perceptron a perceiving and recognizing automaton* dio origen al *perceptrón*. Este primer desarrollo de redes neuronales se basaba en un sistema propuesto dependiente de principios probabilísticos más que deterministas para su funcionamiento. El perceptrón se podía considerar como una caja negra con una cámara de televisión en su interior y una impresora alfabética o un conjunto de luces como señal de salida (Rosenblatt, 1957). Esta primera analogía realizada por Rosenblatt resulta útil para describir el funcionamiento de los *inputs* y *outputs* de las redes neuronales. Tres años después de haber sido desarrollada la red neuronal más antigua, Bernard Widrow y Marcian Hoff utilizaron el modelo de redes neuronales aplicados al problema de filtros adaptativos utilizados para eliminar ecos en las líneas telefónicas. Esta red neuronal desarrollada y titulada en un reporte técnico como *Adaptive switching circuits* funcionaba bajo el ingreso de *inputs* que

podían tomar el valor de -1 o 1 para cinco variables y *outputs* que después de pasar por un proceso de sumatoria y un cuantificador podrían tomar un valor igualmente de -1 o 1, esto daba lugar a un proceso iterativo que permitía el entrenamiento de la neurona adaptativa (Widrow & Hoff, 1960).

Para el año de 1967, Stephen Grossberg desarrolló en su artículo *Nonlinear defference-diferential equations in prediction and learning theory* la que podía ser interpretada como una teoría de aprendizaje artificial o una teoría de predicción cuyo objetivo era discutir la predicción de eventos individuales. La teoría realizaba una descripción matemática de un tipo de experimento confrontado por una maquina M (Grossberg, 1967). En 1969 Marvin Minsky y Seymour Papert con la publicación de su libro *Perceptrons. An introduction to computational geometry* demostraron las limitaciones del perceptrón desarrollado por Rosenblatt en 1957, dado que no era capaz de resolver funciones relativamente fáciles como el aprendizaje de funciones no lineales, estas críticas frenaron, al menos hasta la década de los 80, el auge de las investigaciones sobre redes neuronales. A pesar de ello, brindaron en su libro algunas contribuciones clave para la teoría de los perceptrones. En 1985 John Hopfield motivó de nuevo las investigaciones de redes neuronales con su libro *Neural computation of decisions in optimization problems*. Allí se demostraba como las redes neuronales podían resolver rápidamente problemas de optimización usando algunas estrategias presentadas por el mismo Hopfield. Desde este año el número de investigaciones relacionadas con redes neuronales artificiales ha venido creciendo acompañadas con el desarrollo de nuevas aplicaciones.

Por otra parte, a pesar de que el desarrollo de las redes neuronales deriva en una definición variante en proporción con el crecimiento de las investigaciones relacionas, se mantiene una tradición que delimita la definición base de las RNA, definición cimentada en principios compartidos por las primeras tesis de McCulloch y Pitts en 1943 y Frank Rosenblatt 1957. Murcia (2015) al hablar sobre redes neuronales artificiales afirma que su definición varía según el autor: modelo matemático, herramienta estadística, arreglo de procesamiento computacional o sistema de aprendizaje adaptativo, etc. En ese sentido Murcia (2015) recopila algunas definiciones de autores como Kung, Fausett, Hassoun, Bishop y Lin & Lee de la década de los noventa:

“Sistema caracterizado por una red adaptativa combinada con técnicas de procesamiento de información paralelo” (Kung, 1993).

“Sistema de procesamiento de información que tienen características de funcionamiento comunes con las redes neuronales biológicas” (Fausett, 1994).

“Una red neuronal es un modelo computacional, paralelo, compuesto de unidades procesadoras adaptativas con una alta interconexión en ellas” (Hassoun, 1995).

“Desde la perspectiva del reconocimiento de patrones las redes neuronales son una extensión de métodos de clásicos estadísticos” (Bishop, 1995).

“Sistema de procesamiento de la información que hacen uso de algunos de los principios que organizan la estructura del cerebro” (Lin & Lee, 1996).

Xin Yao (1999) propone nuevas definiciones relevantes para el entendimiento redes neuronales con la implementación del concepto de *Evolutionary artificial neural networks* (EANNs) como una clase de especial de red neuronal en el que la evolución es una forma fundamental de adaptación. además del concepto de EANNs se pueden identificar temas clave para el entendimiento de las RNA como el perceptrón multicapa, el entramiento de la red, la feria del aprendizaje artificial, la optimización y la simulación.

Gráfico 1. Conceptos clave en Redes Neuronales Artificiales



A pesar de que la gran diversidad de definiciones aparentemente reflejan una ausencia de consenso aplicable sobre la totalidad del campo de las RNA, existen una serie de consideraciones base que podrán ser asumidas como una definición generalizable de las redes neuronales artificiales, estas son, en primer lugar, la analogía biológica, es decir, el intento de las redes neuronales artificiales de producir un comportamiento equivalente al funcionamiento de las neuronas biológicas en términos de aprendizaje, memoria y adaptación. En segundo lugar, la orientación de las RNA a un comportamiento "inteligente" lo implica una adaptación creciente del sistema a los nuevos datos, dando lugar a predicciones y soluciones de complejidad creciente sin una programación de base orientada a estos resultados. Por último, las redes neuronales artificiales deberán tener restricciones a manera de umbrales o condiciones lógicas que darán lugar al tipo de *outputs* producidos por cada neurona artificial. Así las cosas, asumiremos esta definición como base para las discusiones sucesivas en torno a las redes neuronales artificiales, es decir, entenderemos las RNA como sistemas computacionales orientados a la reproducción del proceso biológico de aprendizaje mediante la imitación del comportamiento del sistema neuronal animal.

Pese a la complejidad de las redes neuronales artificiales y al estado embrionario de su desarrollo, las áreas de aplicación de las RNA han mostrado un crecimiento significativo en las últimas décadas. Esto es, sobre la base de una capacidad predictiva de notablemente alta, el rango de aplicación ha comprendido un número creciente de disciplinas y problemas científicos que encuentran soluciones satisfactorias en el uso de las RNA. Así las cosas, la aplicabilidad de las Redes Neuronales Artificiales se muestra bastante alta, dando lugar a una cobertura amplia de objetivos analizados mediante su uso, desde la predicción de la evolución de precios en commodities de origen forestal (Matzenbergera, 2013), hasta la capacidad de pronóstico de las tasas de mortalidad en el área de cuidados intensivos de los hospitales nacionales (Holmgren, Andersson, Jakobsson, & Frigyesi, 2019), en este sentido, las redes neuronales artificiales da cuenta de una alta versatilidad y aplicabilidad. Desde esta perspectiva, nos proponemos explorar las principales aplicaciones de las RNA a la solución de problemas económicos, esto con miras a establecer el marco analítico y los principales antecedentes de la aplicación de redes neuronales artificiales a la administración de pensiones, para nuestro caso, del sistema pensional colombiano.

Si bien, como ya fue dicho, las áreas de aplicación de las redes neuronales artificiales abarcan un amplio espectro de solución de problemas, el uso más extendido de estas está centrado en su capacidad predictiva, esto es, el gran volumen de las investigaciones de redes neuronales artificiales aplicadas se concentra en someter a prueba su capacidad predictiva en contraste con métodos econométricos clásicos; en este sentido, las redes neuronales artificiales han encontrado acogida en los estudios económicos en la medida en la que su aplicación pretende maximizar la capacidad predictiva de la econometría en áreas de alta incertidumbre como los mercados bursátiles, las tasas de cambio, el crecimiento económico y la eficiencia del gasto, entre otros.

Las redes neuronales artificiales dan cuenta de una alta flexibilidad en su aplicación y las condiciones requeridas para su operación, esto es, su aplicación requiere una menor exhaustividad en los datos manipulados, así como en la naturaleza de los casos, en la medida en la que los métodos clásicos de análisis no logran la misma precisión en términos de predicción debido a que actúan sobre supuestos de distribución normal poblacional, las redes neuronales artificiales se muestran preferibles en tanto no actúan sobre estos supuestos, lo que les permite una mayor adaptación a la naturaleza real de la información económica (Shachmurove, 2002).

Tabla 1. Evolución de las Redes Neuronales Artificiales

Autor(es)	Publicación	Hallazgos
McCulloch y Pitts (1943)	<i>A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity</i>	Planteaban como los eventos neuronales pueden tratarse mediante una lógica proposicional, donde existe un trabajo de dos o más vías en una red neuronal donde cada red se comporta bajo un supuesto distinto.
Frank Rosenblatt (1957)	<i>The perceptron a perceiving and recognizing automaton</i>	Dio origen al perceptrón.
Widrow & Hoff (1960)	<i>Adaptive switching circuits</i>	Utilizaron el modelo de redes neuronales aplicados al problema de filtros adaptativos utilizados para eliminar ecos en las líneas telefónicas.
Stephen Grossberg (1967)	<i>Nonlinear difference-differential equations in prediction and learning theory</i>	Teoría de aprendizaje artificial o una teoría de predicción cuyo objetivo era discutir la predicción de eventos individuales. La teoría realizaba una descripción matemática de un tipo de experimento confrontado por una maquina M.
Minsky y Papert (1969)	<i>Perceptrons. An introduction to computational geometry</i>	Demostraron las limitaciones del perceptrón desarrollado por Rosenblatt en 1957, dado que no era capaz de resolver funciones relativamente fáciles como el aprendizaje de funciones no lineales. Brindaron algunas contribuciones clave para la teoría de los perceptrones.
Hopfield (1985)	<i>Neural computation of decisions in optimization problems</i>	Demostró como las redes neuronales podían resolver rápidamente problemas de optimización usando algunas estrategias presentadas por el mismo Hopfield.
Xin Yao (1999)	<i>Evolving Artificial Neural Networks</i>	Propone nuevas definiciones relevantes para el entendimiento redes neuronales con la implementación del concepto de <i>Evolutionary artificial neural network</i> .

2.1.1.1. Aplicaciones de las Redes Neuronales Artificiales

Sometiendo a prueba la capacidad predictiva de las redes neuronales artificiales, algunos estudios han centrado sus esfuerzos en predecir el comportamiento de los mercados bursátiles, así como las variaciones de tasas de cambio, además de la analítica en los niveles y comportamiento de ventas. En un estudio orientado a la aplicación de las redes neuronales artificiales al pronóstico de ventas, (Ruelas Santoyo & Laguna González, 2014) lograron determinar que, en contraste con el método de Holt el método Winters y la metodología Box Jenkins, las redes neuronales artificiales logran una mayor capacidad predictiva a un estándar de error más bajo.

Por otra parte, la aplicación de las redes neuronales artificiales a la predicción del comportamiento de los commodities muestra resultados notables, en un estudio realizado por Ramyar & Kianfa (2017) se encontró que, en contraste con los “vector Autoregressive Models” , las RNA logran predecir el precio del crudo con mayor precisión, y, en este sentido, su utilización permite la reducción de la incertidumbre de este mercado así como de las políticas económicas que sobre él se basan, dando como resultado una mayor tecnificación y racionalización del mercado del crudo (2017). En la predicción del valor de cierre en los precios del crudo de tipo West Texas International y Brent, la redes neuronales también han mostrado un desempeño destacado, esto es, la comparación de su utilización para la predicción del precio dio resultados de mayor precisión y con mayor facilidad que los obtenidos mediante el método GARCH (Ortiz Arango, 2017), desde esta perspectiva, las redes neuronales artificiales muestran una tendencia a superar los métodos econométricos clásicos en cuanto a la predicción y diagnóstico de fenómenos económicos, constituyendo así una alternativa viable sobre los métodos tradicionalmente utilizados.

En cuanto a la aplicación de las redes neuronales artificiales a la medición, diagnóstico y predicción del desempeño económico del mercado de la electricidad, los estudios establecen un desempeño superior de las capacidades analíticas de las RNA en contraste con las alternativas de medición vigentes, esto es, la precisión de las mediciones y predicciones de las redes neuronales artificiales, además de sus bajos niveles de error y facilidad de ejecución, mostraron un desempeño más eficiente y óptimo que la utilización de un modelo GARCH, esto en cuanto a su aplicación al análisis de la variación de precios de la energía (Fernando, Cadavid, & Molina, 2008). En Cuanto a la reducción de la volatilidad de precios del mercado de energía eléctrica, las redes neuronales artificiales, en razón de su capacidad

predictiva, dan cuenta de la posibilidad de racionalización del mercado y de protección de los consumidores ante la volatilidad y alta incertidumbre. En un análisis de los precios de los contratos de energía, la red neuronal artificial fue capaz de una predicción mucho más precisa que aquella obtenida mediante la implementación del modelo ARIMA, ajustándose de manera óptima al carácter no lineal de los datos (Velásquez Henao & Franco Cardona, 2010), y en este sentido, proveyendo una base para la racionalización del mercado mediante la predicción de su volatilidad.

Por otra parte, la gama de consideraciones pertinentes en la estructuración de política monetaria, implica altos estándares de certeza referidos a las expectativas de inflación, tasa de interés y, en general, a las condiciones del mercado financiero; dadas estas exigencias de información y precisión científica en los datos que sustentan la política monetaria, el conocimiento detallado de la tasa de cambio de la divisa nacional con respecto a las demás constituye un área de vital importancia en la formulación de política pública económica. Desde esta perspectiva, la predicción de los niveles de variación, así como de los valores de cambio de las divisas en altos estándares de precisión supone una necesidad en los estudios econométricos (Kumar, 2010). Sobre esta base, es decir, intentando responder a la necesidad de precisión en la información sobre la tasa de cambio, se ha explorado en la aplicación de las redes neuronales artificiales a la predicción de estas tasas, dando como resultado predicciones de alta precisión, superando los modelos lineales autorregresivos, y, además, mostrando información oculta de mercado a la par que evidencia la ineficiencia del mercado de cambio (Pandaa & Narasimhanb, 2007). En relación con la tasa de cambio del peso colombiano con respecto al dólar, las redes neuronales artificiales han mostrado una superioridad significativa en términos de capacidad predictiva, esto es, la utilización de RNA en la predicción de la tasa de cambio peso – dólar han logrado establecer una relación de alta fiabilidad entre los datos pronosticados y la operación real de los mercados, esto a un margen de error del 0,0614% (Zapata Garrido & Díaz Mojica, 2008). Desde esta perspectiva, la aplicación de redes neuronales a la predicción de las tasas de cambio da cuenta de una fiabilidad notable, logrando situarse como una alternativa deseable sobre los métodos de medición tradicionales, y cimentando la base para una mayor precisión en la formulación de política pública en materia económica en general, y monetaria en particular (Bernanke & Mihov, 1998; Toporowski, 2019).

En cuanto a la predicción del comportamiento de los mercados bursátiles, las necesidades de una alta capacidad predictiva y de información de alta precisión están presentes en razón de su comportamiento variable, en este sentido, la

aplicación de métodos econométricos sofisticados para la estimación de variaciones, el pronóstico de precios, así como de los movimientos de oferta y demanda están fuertemente relacionados con las operaciones naturales de estos mercados (Leitch & Tanner, 1991; Gleason & Lee, 2003). Desde esta perspectiva, las ventajas que brinda la aplicación de redes neuronales artificiales a la estimación precisa de información económica proporcionan fuertes incentivos para su aplicación en la predicción del comportamiento de los mercados bursátiles, los cuales precisan de altas capacidades predictivas (Hameed, Morck, Shen, & Yeung, 2015; Stickel, 1991). Sobre la base de este razonamiento, diversos estudios han intentado aplicar redes neuronales artificiales al análisis de estos mercados encontrando una superioridad relativa en su capacidad de estimación (Weber, Weber, Goesele, & Rudiger Kabst, 2018). Si bien el patrón general de superioridad de las redes neuronales artificiales se rompe una vez puesto a prueba en competencia con los modelos alternativos de predicción econométrica en relación con la estimación del comportamiento de los índices bursátiles, muestran un mejor rendimiento en niveles de menor calidad de los datos, menor cantidad de modelos a contrastar y menor entrenamiento de la red, lo que equivale a resultados, en general, de una precisión ligeramente menor que sus alternativas por costos logísticos y necesidad de datos mucho menores (Jabbour & Maldonado, 2009), de lo que se puede derivar que la imprecisión se compensa altamente por los menores costos y versatilidad de aplicación.

Tomando en consideración la aplicación de las redes neuronales artificiales al comportamiento de los mercados bursátiles, un caso significativo es la estimación del precio del café colombiano en la bolsa de New York, la cual mostró superioridad en la capacidad predictiva en relación con los demás métodos disponibles (Velásquez Henao & Aldana Dumar, 2007). En este sentido, la utilización de redes neuronales artificiales aplicadas a los mercados bursátiles da cuenta de una alta capacidad predictiva, dando lugar a un mejor esquema de distribución de información del mercado (Höpken, Eberle, Fuchs, & Lexhagen, 2020), derivando así en una mejoría general de las decisiones tomadas por los agentes involucrados (Panda & Narasimhan, 2006; Christakis, Barbaris, & Spentzos, 2010).

Si bien las redes neuronales artificiales dan cuenta de un desempeño óptimo en relación con la predicción de fenómenos asociados al funcionamiento de los mercados, es razonable albergar dudas en torno a esta misma capacidad en relación con problemas de más alta complejidad analítica, este sentido, la aplicación de las RNA a estimación de fenómenos macroeconómicos será un rasero de

evaluación significativo a la hora de explorar su aplicabilidad a la evaluación del sistema pensional colombiano.

La medición de fenómenos macroeconómicos mediante el uso de redes neuronales artificiales, si bien incipiente, ha arrojado algunas conclusiones de peso, esto es, su utilización ha supuesto una innovación significativa en cuanto a la predicción y análisis del comportamiento de fenómenos como la inflación, la dirección de un determinado sector económico, la tendencia del índice de precios al consumidor, el nivel de desarrollo económico, y la predicción de crisis (Hafeez & Kar, 2018). Las redes neuronales artificiales, en este sentido, supondrían una herramienta relevante en el direccionamiento y formulación de la política económica. Con miras a establecer la forma en la que estas redes pueden contribuir a la estimación de fenómenos macroeconómicos veremos su aplicación en algunos de los principales objetos de evaluación económica.

La estimación de los mercados de capitales, relevante en la medida en la que determina en gran parte los volúmenes de inversión extranjera, precisa una predicción eficaz de su comportamiento con miras a la formulación racional de una política económica (Bond, 1977; Goodman, Neamtiu, Shroff, & White, 2014). En este sentido, la aplicación de redes neuronales artificiales a su medición ofrece expectativas de profundización en la calidad y precisión de la información. La aplicación de redes neuronales a la predicción del comportamiento de los mercados de capitales ha brindado elementos significativos para la evaluación del comportamiento macroeconómico. En un estudio orientado a la predicción del comportamiento de las económicas de México y Estados Unidos (Trigo & Sabatino, 2007) determinaron la capacidad de estimación de las redes neuronales artificiales para predecir el comportamiento económico de ambos países a partir de la medición de su flujo de capitales. Por otra parte, la aplicación de estas redes al entendimiento del *stock sectors*, esto a partir de la modelación de cada sector mediante el uso de 19 variables económicas relevantes para cada uno de ellos, dio como resultado un incremento en la capacidad predictiva de los inversores en proporción con la calidad de los índices utilizados para el entrenamiento de la red (Stansell & Eakins, 2004).

Por otra parte, la estimación de la inflación, proceso envuelto en la utilización de una gran diversidad de métodos econométricos de precisión variable, es objeto de una aplicación creciente de mecanismos de medición alternativos en la búsqueda de pronósticos óptimos (Gramlich, 1983; Cogley, 2002; Alchian & Klein, 1973). Con miras a responder a este objetivo, la aplicación de las redes neuronales artificiales al estudio de la inflación ha logrado proporcionar resultados ajustados al carácter

no lineal de los datos, permitiendo así proveer pronósticos de alta precisión referidos a la relación existente entre los volúmenes totales de masa monetaria y el grado de inflación resultante (Geman & Bienenstock, 1994; Aristizábal, 2006). En relación con la estimación del índice de precios al consumidor, las redes neuronales han probado una alta eficacia en la identificación de patrones en las series de tiempo que superan las aproximaciones clásicas realizadas sobre la base de modelos Box y Jenkins (Velásquez Henao & Montoya Moreno, 2005). Desde esta perspectiva, las RNA suponen una herramienta eficaz, y de utilización creciente, en la predicción del comportamiento de la inflación, con una superioridad probada sobre los métodos de estimación clásicos.

En último lugar, tomaremos en consideración las aproximaciones de justicia global y desarrollo internacional, esto es, veremos en cierto detalle las aplicaciones de redes neuronales artificiales a la estimación de fenómenos macroeconómicos de escala global. En la búsqueda de los factores más relevantes en la promoción del desarrollo económico y la disminución de la desigualdad en países en vía desarrollo, la aplicación de redes neuronales artificiales pretende proveer la gama de datos pertinentes para la determinación de los factores que incentivan, con altos estándares de certeza, la prosperidad en entornos de pobreza, así como la optimización de recursos (Coskuner, Jassim, Zontul, & Karateke, 2020; Srivastava, 2017). En este sentido, las RNA pretenden el alcance de parámetros científicos en la formulación de políticas de desarrollo internacional, abandonando así los altos márgenes de incertidumbre en los efectos de las políticas, así como el espacio para su formulación sobre bases ideológicas (Agrawal, Gans, & Goldfarb, 2019).

Buscando ejecutar estos objetivos, se exploró en la aplicación de redes neuronales artificiales en la determinación de los principales factores explicativos de las variaciones de desarrollo entre países, pretendiendo determinar así los atributos pertinentes de las políticas económicas internacionales que esperen lograr de forma certera niveles deseables de desarrollo. De esta forma, se logró establecer que el control de la calidad de las regulaciones y de la corrupción, el empleo industrial, la globalización tecnológica y la inversión en investigación son atributos asociados a la disminución de la desigual y el aumento del desarrollo económico (Parada Rojas & Ríos Bolívar, 2018).

Vemos, de esta manera, como la utilización de redes neuronales artificiales ha contribuido de forma notable al aumento en la precisión en la capacidad de estimación de fenómenos financieros y de mercado, así como a la estimación de fenómenos macroeconómicos de larga envergadura como la inflación, las

variaciones en el crecimiento del PIB y los patrones de desarrollo económico. Por otra parte, las redes neuronales artificiales han mostrado una superioridad significativa en relación con los métodos econométricos clásicos, esto en términos de su mayor precisión y capacidad predictiva (Rodríguez-Rueda & Turias-Domínguez, 2017). Desde esta perspectiva, su aplicación a la estimación de los fenómenos asociados a la gestión del sistema pensional colombiano se ve ampliamente justificada en razón de las expectativas de precisión y eficacia derivadas de la aplicación de estas redes.

2.1.2. Sistema Pensional Colombiano

Ahora, entrando en nuestro caso de estudio, el sistema pensional colombiano, se identifica uno de los principales problemas de los sistemas pensionales en general, y del colombiano en particular, es el creciente desajuste entre el número de afiliados y el número de beneficiarios (Ebbinghaus & Whiteside, 2012; Peterson, 1999), esto es, existe una tendencia a un esquema en el que el número de afiliados, en primer lugar, no logra alcanzar el umbral de cotización para lograr los beneficios pensionales, y, en segundo lugar, no logra alcanzar cantidades suficientemente amplias de cotizantes para ser autosostenible, esto con una cobertura de pensionados es aproximadamente 23% sobre una base de cotizantes del 40% (López & Sarmiento G., 2019).

Desde esta perspectiva, la predicción eficaz del crecimiento en las tasas de afiliación, remplazo y beneficiarios constituye una necesidad primaria si se pretende determinar las causas asociadas al comportamiento ineficiente del sistema pensional (Hill, 2007). Si bien amplios estudios sobre la materia han logrado delimitar los problemas del sistema, es decir, las proyecciones sobre crecimiento poblacional, calidad del trabajo y número pronosticado de pensionados en relación con las implicaciones para la administración de pensiones (Montenegro, Llano, Eslava, Karim, & Cáceres, 2018), no se han aportado conclusiones definitivas sobre las causas precisas asociadas a cada uno de los fenómenos originarios del comportamiento del sistema pensional.

La evaluación del sistema de pensiones, principalmente orientada a la determinación del número de beneficiarios proyectados (López & Sarmiento G., 2019), la gestión de portafolios de inversión (Reveiz, León, Laserna, & Martínez, 2008) y la influencia del mercado laboral en el comportamiento del sistema (López Castaño & Lasso Valderrama, 2012), presenta, sin embargo, un déficit significativo en términos de su capacidad de estimación de la cantidad de la población que

accederá el sistema pensional, esto a partir de la más amplia gama de variables pertinentes. Si bien existe una amplia cantidad de estas estimaciones, la experimentación metodológica es baja, y, en este sentido, la utilización de redes neuronales es prácticamente nula en contraste con los métodos de medición clásicos.

Desde esta perspectiva, aparece como necesidad teórica y práctica la aplicación de esquemas evaluativos sofisticados al conocimiento del comportamiento del sistema pensional colombiano, esto con miras a delimitar de forma certera, las causas y fenómenos asociados a la baja eficiencia del sistema. Sobre la base de la probada superioridad de las redes neuronales artificiales en comparación con métodos econométricos clásicos, tenemos razones para suponer, de manera razonable, que su aplicación arrojaría resultados significativos en la estimación del comportamiento del sistema pensional colombiano.

3. ANTECEDENTES: UN PANORAMA DEL SISTEMA PENSIONAL COLOMBIANO

Con miras a la realización de nuestro objetivo central, a saber, la evaluación del sistema pensional colombiano mediante la aplicación de Redes Neuronales Artificiales, y la estimación de calidad, estabilidad perspectiva de sostenibilidad en el mediano y largo plazo de este sistema, nos propondremos una aproximación a las principales variables de estimación del desempeño pensional con miras a establecer un primer diagnóstico sobre la materia en relación con el caso colombiano.

Para la realización de este propósito, adoptaremos enfoque de evaluación caracterizado por el seguimiento de las directrices de la guía para el análisis del sistema de pensiones. Esta guía, basada en el diagnóstico elaborado por Villar & Forero (2018) denominado *Elementos para una propuesta de reforma del sistema de protección económica para la vejez en Colombia*, parte de cuatro principios que determina todo sistema pensional debería cumplir: i) cobertura, ii) equidad, iii) solidaridad y iv) sostenibilidad y las consideraciones del Marco Fiscal de Mediano Plazo (2019) donde evalúa los principales retos del Régimen de Prima Media en tres aspectos: i) Gastos, ii) Deuda y iii) Tendencias del envejecimiento de la población. En ese sentido, este diagnóstico analizará: i) las tendencias de envejecimiento de la población, ii) la cobertura, iii) equidad, iii) sostenibilidad financiera del sistema y, además, iv) la estructura de mercado laboral colombiano.

Desde esta perspectiva, en lo sucesivo nos propondremos una aproximación detallada al comportamiento del sistema pensional colombiano siguiendo los parámetros de evaluación previamente mencionados, esto, con miras al establecimiento de una línea base que permita la determinación de su comportamiento futuro mediante el uso de Redes Neuronales Artificiales.

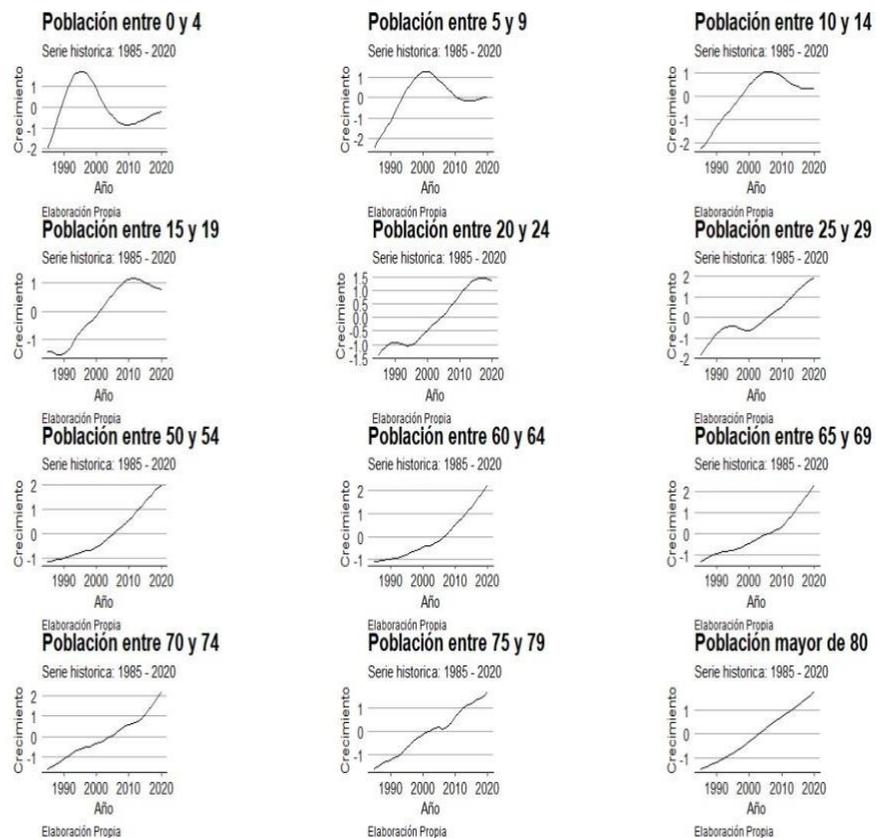
3.1.1. Estructura demográfica colombiana

Los registros poblacionales entre 1985 y 2020 han mostrado una transición demográfica marcada por un crecimiento acelerado grupos poblacionales específicos. La población mayor de 25 años crece, cada vez, a un ritmo más acelerado. Mientras tanto, la tasa de crecimiento para la población entre 0 y 19 años ha empezado a caer y, en casos específicos como el de la población entre 0 y 4 años, la tasa de crecimiento ha estado cerca de ser negativa.

Para los más jóvenes, la población entre 0 y 4 años, la tasa de crecimiento había aumentado intermitentemente desde 1985, sin embargo, después de tocar su pico de crecimiento entre 1995 y 1998, su crecimiento ha caído más de un punto porcentual, incluso acercándose a terreno negativo (**ver gráfico II**). La desaceleración de las tasas de crecimiento es un efecto que también se ha presentado en las poblaciones entre 5 y 9 años, 10 y 14 años y 15 y 19 años y últimamente en el grupo entre 20 y 24 años. Para cada caso, como es de esperarse, la caída en las tasas de crecimiento se ha presentado en años consecutivos: **entre 2000 y 2003 para el grupo entre 5 y 9 años, entre 2007 y 2009 para el grupo entre 10 y 14 años, entre 2011 y 2013 para los grupos poblacionales entre 15 y 19 años.**

Por otro lado, la tasa crecimiento para las poblaciones mayores a 25 años es cada vez más empinada. Estos grupos poblacionales se acercan a crecimientos cercanos al 2% y, en algunos casos, como el de la población entre 60 y 75, ya la han superado esta tasa. Desde el año 2000 la tasa de crecimiento para estos grupos se ha acelerado aún más de sus tasas precedentes hasta 1985.

Gráfico 2. Tasa de crecimiento por grupos poblacionales



Fuente: Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).

Estos cambios en el crecimiento de los grupos poblacionales de adultos y adultos mayores, que crecen cada vez más, y jóvenes, que desaceleran sus tasas de crecimiento incluso acercándose a terreno negativo, son hechos que representan cambios para la estructura demográfica. Es así como la pirámide poblacional colombiana ha cambiado siguiendo la tendencia mundial, donde se proyecta que las tasas de natalidad serán progresivamente menores, mientras que el número de adultos mayores crecerá tanto en volumen como en pesos porcentuales relativos frente a la población joven.

Los determinantes del proceso de envejecimiento poblacional se fueron marcando desde principios del siglo XX cuando la industrialización acompañada por un proceso de urbanización cambió la estructura productiva del país, impulsando el crecimiento del sector servicios y la pequeña empresa e incrementando el empleo total (Gaviria et al., 2013). En consecuencia, gracias a los cambios socioeconómicos, los aumentos en el nivel educativo de la población, el uso generalizado de anticonceptivos, la reducción de la mortalidad infantil y los nuevos desarrollos científicos y tecnológicos, las dinámicas demográficas se encaminaron hacia el envejecimiento poblacional (Lloyd-Sherlock, 2010; Stewart, 2020).

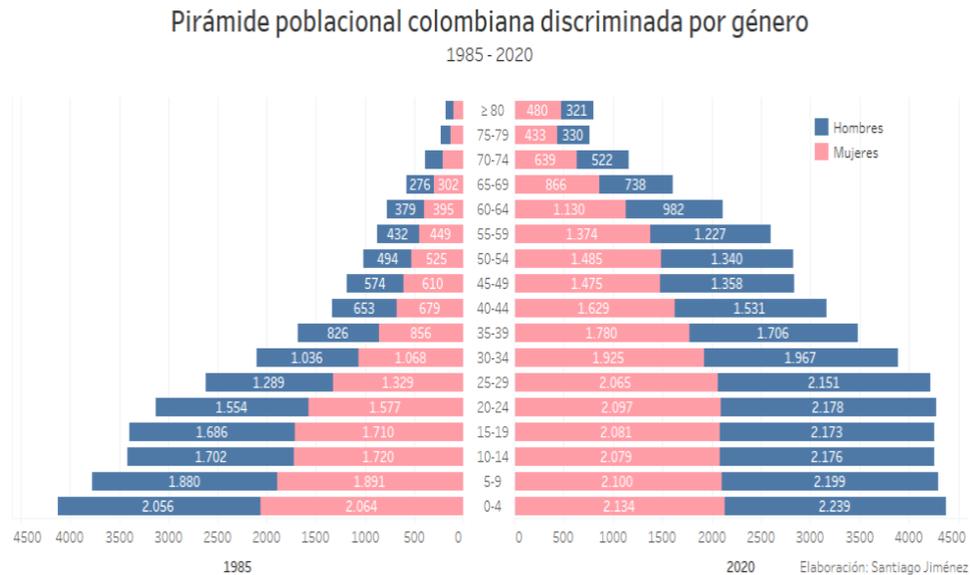
Mientras tanto, la comparativa entre la pirámide poblacional discriminada por género para 1985 y 2020 refleja dos grandes fenómenos: i) una reducción relativa sobre el crecimiento de la base de la pirámide poblacional y ii) un envejecimiento diferencial por género donde hay una mayor longevidad para las mujeres.

El primer fenómeno supone una ventana de oportunidades demográfica en cuanto la proporción de personas en edades potencialmente productivas es relativamente elevada en relación con las personas en edades potencialmente inactivas (menores de 15 y mayores de 60) (Cardona Arango & Peláez, 2012). Esta relación de dependencia, que constituye uno de los principales fundamentos del bono demográfico, también conocido como “ventana demográfica de oportunidades”, resulta importante para entender la composición de una etapa demográfica donde hay una tendencia creciente de la población activa del mercado laboral y, en consecuencia, un periodo que puede elevar las tasas de crecimiento económico per cápita y los niveles de bienestar de la población (CEPAL, 2008).

Mientras tanto, el segundo fenómeno supone un efecto multicausal que determina tanto la mortalidad masculina como la longevidad femenina. Más allá de los determinantes del fenómeno sus efectos resultan particularmente importantes para este estudio. Las generaciones de mujeres mayores que enfrentan la viudez debido

a la mayor longevidad no experimentaron procesos de educación formal y participación laboral generalizados (Ginn, 2003; Ginn & Arber, 1991; Even & Macpherson, 1994). En consecuencia, según Gaviria et al. (2013), muchas de estas personas, que trabajaron durante su vida productiva en actividades laborales no remuneradas, carecen de pensión, seguros de vejez y recursos materiales suficientes para la supervivencia, por lo que viven en condiciones de pobreza (Evandrou & Falkingham, 2009).

Gráfico 3. Pirámide poblacional colombiana discriminada por género, 1985 y 2020



Fuente: Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).
Elaboración propia.

Tanto la razón de dependencia, que evalúa el promedio de personas dependientes por cada 100 personas en edad de trabajar, como el índice de envejecimiento, que evalúa el peso de la población mayor con relación a la población infantil y adolescente, nos ayudan diagnosticar el estado de las variables demográficas, especialmente a entender la transición demográfica y la evolución del bono demográfico.

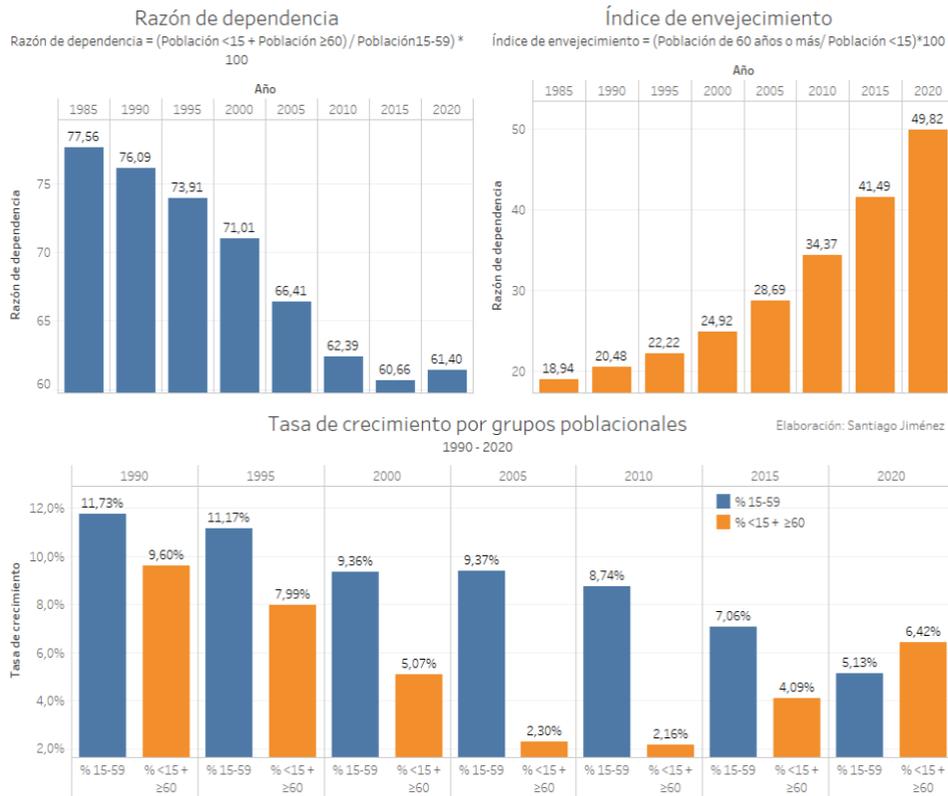
En primer lugar, la razón de dependencia en 35 años ha caído en más de 16 puntos porcentuales, especialmente en los periodos 2000 – 2005 y 2005 – 2010, cuando la tasa cayó 4,6% y 4,02%, respectivamente. Para 2015 la razón de dependencia se desaceleró, rebotando para 2020 en 75 puntos básicos. Este es el primer rebote para nuestro horizonte de 35 años responde al crecimiento en el peso relativo de las personas dependientes que, durante la última década, han dejado de

desacelerarse hasta rebotar entre 2010 y 2020, pasando de 2,16% a 6,42% y superando en 2020, por primera vez, la tasa de crecimiento de la población económicamente activa.

En segundo lugar, el índice de envejecimiento durante las últimas tres décadas se triplicó. El peso relativo de la población mayor se ha incrementado aceleradamente, entre finales del siglo XX este grupo poblacional que crecía a tasas de 8,2% pasó a crecer a en la última década a una tasa promedio de 20,2%.

En conclusión, tal como se muestra en el gráfico IV, durante las últimas dos décadas la estructura poblacional ha cambiado, resaltando el envejecimiento poblacional. Esto lo demuestra el rebote en la razón de dependencia en 2020 y la consecuente aceleración del índice de envejecimiento. Igualmente, los cambios sobre el bono demográfico se pueden ver en la desaceleración de la tasa de crecimiento de los grupos poblacionales entre 15 y 59 y la aceleración de simultanea de la tasa de crecimiento de la población mayor.

Gráfico 4. Razón de dependencia e Índice de envejecimiento, 1985 - 2020



Fuente: Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).
 Elaboración propia.

3.1.2. Cobertura

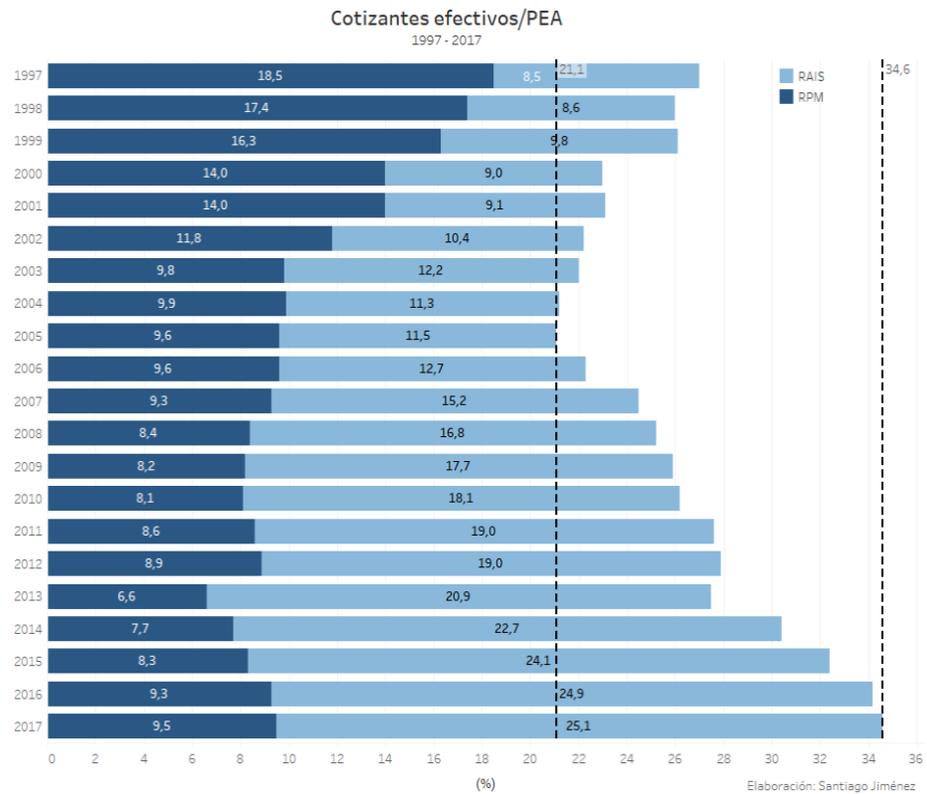
La cobertura del sistema de pensiones se puede analizar en función de dos parámetros: i) la proporción de ocupados que cotizan y ahorran para su pensión y ii) la proporción de pensionados del sistema sobre la población mayor (Villar & Forero, 2018). Esta discriminación también se puede entender como: i) etapa de acumulación y ii) etapa de des acumulación.

3.1.2.1. Etapa de acumulación

El número de cotizantes al sistema de pensiones ha aumentado 1,6 veces entre 2005 y 2017. La naturaleza de este crecimiento no es homogénea entre el Régimen de Prima Media (RPM) y el Régimen de Ahorro Individual (RAIS). Entre 1997 y 2017 mientras el promedio de cotizantes a RPM cayó en 2,7%, el promedio en RAIS aumentó en 5,8%, este fenómeno responde al cambio en la estructura del sistema que se volcó en las últimas dos décadas sobre el ahorro individual, de tal forma que el porcentaje de cotizantes efectivos en RAIS pasó de representar el 31% en 1997 al 72% en 2017.

Además de la baja proporción histórica del número de cotizantes, que, para el 2017, apenas representó un poco más de una tercera parte de la población activa, según Cavallo & Serebrisky (2016) las tasas más bajas de cotización se encuentran en la población pobre (<US \$4 diarios), de los cuales menos del 10% cotiza, y vulnerable (US \$4 – US \$10 diarios), de los cuales cerca del 30% lo hace. Mientras tanto, dado que cerca del 70% de la población de altos ingresos (>US \$50 diarios) cotiza, la discrepancia entre el porcentaje de trabajadores pobres y de altos ingresos que cotizan hace de Colombia uno de los países más heterogéneos comparativamente frente a América Latina en este indicador (Rivas T & Silva D, 2017).

Gráfico 5. Cotizantes efectivos sobre la Población Económicamente Activa, 1997 – 2017

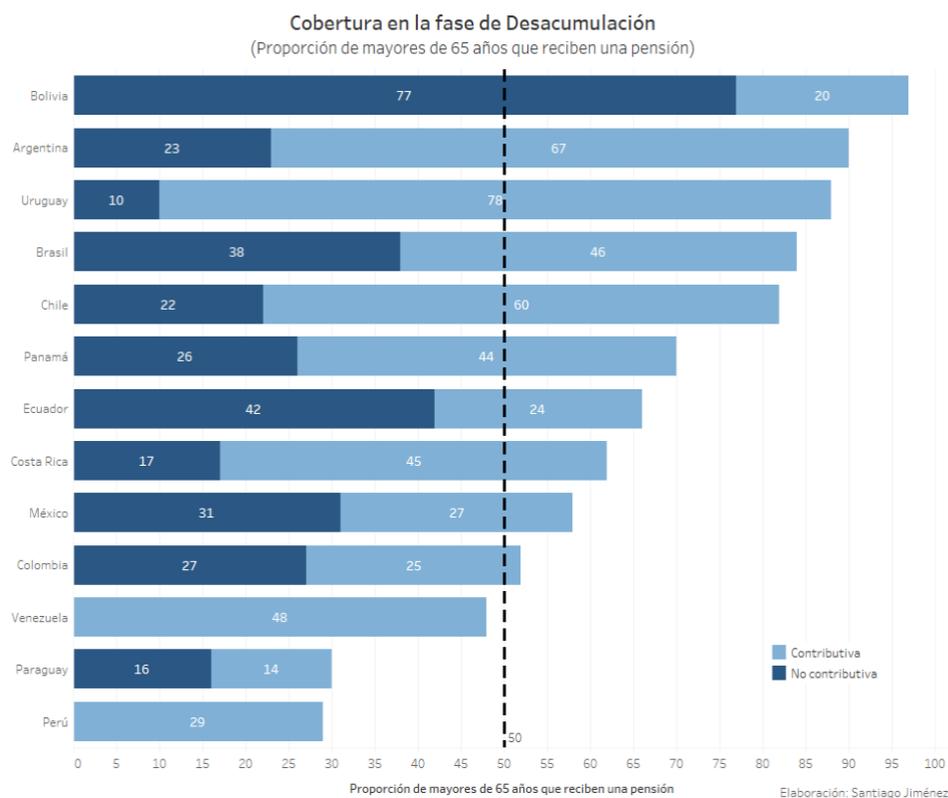


Fuente: Villar, Becerra & Forero (2018). Elaboración propia

3.1.2.2. Etapa de desacumulación

La cobertura en la fase de desacumulación resulta apenas cercana al 25% (Villar & Forero, 2018). Además, los pronósticos sugieren que la cobertura se recudirá en el futuro a alrededor del 17% (Núñez & Castañeda, 2012; Vaca, 2012). Mientras tanto, actualmente las probabilidades de pensionarse resultan bajas, con 8,7% para RPM y 11,1% para RAIS, escenario donde los calificados tienen en promedio hasta 25 veces más probabilidades de pensionarse (35% - 45%) que los no calificados (1,5%) (López & Lasso, 2012).

Gráfico 6. Cobertura en fase de Desacumulación



Fuente: L. Villar, D. Forero (2018). Elaboración propia.

En síntesis, la baja cobertura del sistema, reflejada por el número de cotizantes que apenas representa un tercio de la población activa y agravada en los grupos de ingresos pobres y vulnerables, junto con la alta densidad de cotizaciones para cumplir los requisitos de pensión representan algunos de los mayores cuellos de botella para la etapa de acumulación. Mientras tanto, las tendencias a la disminución sobre la cobertura y la baja cobertura para los calificados, que aún no supera el 50% y la casi nula cobertura para los no calificados representa los mayores problemas para la etapa de des acumulación.

3.1.3. Equidad

Los problemas de equidad y regresividad en el sistema de pensiones responden, según Villar & Forero (2018), a dos fuentes: i) la composición del número de contribuyentes, concentrados en los deciles superiores de ingreso y ii) las reglas establecidas para el cálculo del Régimen de Prima Media. Estos problemas se

pueden evidenciar en función de la equidad vertical del sistema, a través de la tasa de reemplazo, y la equidad horizontal, a través del número de pensionados por decil de ingreso y los subsidios implícitos en el sistema de pensiones.

3.1.3.1. Equidad vertical

Dadas las distorsiones en la fase de acumulación, especialmente frente a la proporción de cotizantes por nivel de ingresos, donde la población de menos ingresos apenas se acerca al 10% y de vulnerables al 30% el número de pensionados ha aumentado en función del decil de ingreso. En este escenario, el percentil de ingresos más altos concentra el 44% de los pensionados, mientras que en el percentil de ingresos más bajos el número de pensionados es diez veces menor, con apenas el 4,3% de los pensionados del sistema.

Esta distribución de pensionados es la respuesta a los problemas evidenciados en las etapas de acumulación y des acumulación. De esta forma los problemas de equidad vertical responden, en primer lugar, al acceso al sistema de pensiones, que no es inclusivo en la medida que, de la población pobre y vulnerable, cotizan aproximadamente entre el 10% y 30% de los trabajadores, respectivamente, conjunto a las bajas posibilidades de pensionarse (8,7% en RPM y 11,1% en RAIS).

En segundo lugar, las diferencias en capacidad de ingresos y estabilidad laboral entre los trabajadores calificados y no calificados llevan a que los primeros tengan 25 veces más probabilidades de pensionarse que los segundos. Esta es una respuesta coherente con el fenómeno de informalidad del mercado laboral colombiano. El núcleo del empleo informal¹ (los no asalariados sin educación superior) ha aumentado desde 1984, cuando como porcentaje de la población en edad de trabajar (PET) representaba cerca del 16%. En 2010 este núcleo de empleo formal pasó a representar el 21% de la PET y cerca del 37% del empleo en las siete grandes ciudades (López, 2010).

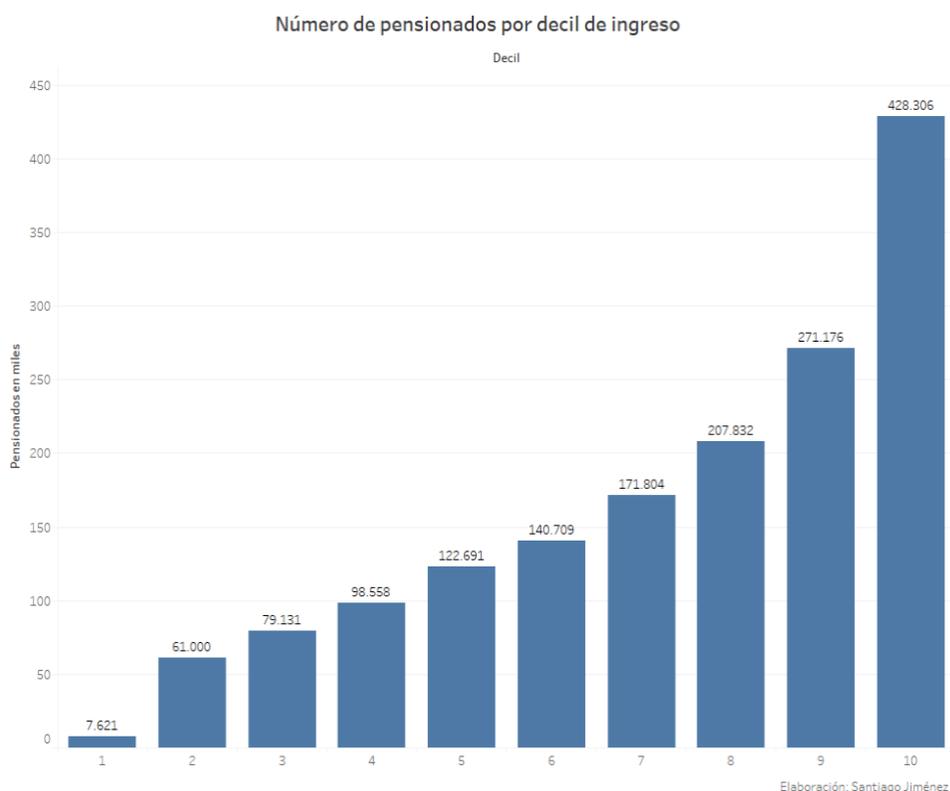
Para 2020 la proporción de informalidad más baja se encuentra en las principales ciudades como Medellín, Manizales o Bogotá, las cuales cuentan con tasas de informalidad del 40%, es decir, 2 de cada 5 trabajadores son informales. Mientras tanto, en ciudades como Cúcuta el porcentaje de empleo informal llega al 71,4%.

¹ Esta medida, para López (2010): se trata de trabajadores por cuenta propia; jornaleros; trabajadores no remunerados, servidores domésticos y (pequeños) patrones; sin ingresos o con pobres remuneraciones: la mediana en las siete ciudades era de 0.80 salarios mínimos mensuales en los primeros tres trimestres del 2009.

En tercer lugar, las reglas establecidas para el cálculo del beneficio en el Régimen de Prima Media han llevado a que los mayores subsidios implícitos sean recibidos por las pensiones de mayor magnitud, esto es, por el percentil de ingresos más altos (Villar & Forero, 2018). Según los cálculos de Fedesarrollo el 74,2% de los subsidios son recibidos por el 40% de los pensionados de mayor ingreso, abarcando tres cuartas partes de los subsidios del sistema, haciendo del sistema de pensiones el sector más regresivo y de peor focalización de los subsidios públicos. Tal como se muestra en el gráfico VIII, según Fedesarrollo, los subsidios en el sistema de pensiones están concentrados en los quintiles más altos de ingresos. Este hecho, resalta la regresividad del sistema de pensiones y los fallos en materia de focalización del sistema.

Para Villar & Forero (2018) estos subsidios se financian con las contribuciones de las personas más vulnerables del sistema que no alcanzan a cumplir los requisitos de pensión mínima, tanto en RPM como en RAIS. Para RPM la devolución de los aportes para aquellos que no alcanzan los requisitos de una pensión mínima no reconoce los rendimientos financieros que obtuvieron durante su periodo de cotización. Mientras tanto, en RAIS no se devuelven las contribuciones al fondo de garantía de pensión mínima pese a que no se hacen beneficiarios del mismo. Los problemas de equidad vertical responden, entonces, a la cobertura de los más vulnerables y la regresividad sobre los subsidios del sistema.

Gráfico 7. Inequidad y Regresividad del sistema de pensiones: número de pensionados por decil de ingreso (Inequidad y regresividad)



Fuente: Superintendencia Financiera. Elaboración propia.

Gráfico 8. Inequidad y Regresividad del sistema de pensiones: Distribución de subsidios por quintil de ingreso

Sector	Magnitud del subsidio (% del PIB)	Focalización (% del subsidio por quintil de ingreso)				
		1	2	3	4	5
Educación (Inc. formación para el trabajo)	2,97%	25,70%	23,40%	21,40%	18,10%	11,40%
Pensiones (Inc. Colombia Mayor)	2,31%	4,30%	7,80%	13,70%	23,40%	50,80%
Salud	1,85%	33,70%	23,60%	19,70%	15,10%	8,00%
Servicios Públicos	0,66%	21,80%	23,20%	22,90%	20,40%	11,70%
Atención a la pobreza	0,46%	33,40%	23,00%	15,00%	17,20%	11,50%
Atención a la primera infancia	0,42%	32,03%	27,24%	22,13%	15,39%	3,22%
Vivienda	0,22%	11,30%	22,50%	29,60%	26,60%	10,00%

Otros	0,16%	48,70%	35,70%	7,50%	5,40%	2,60%
Distribución Total	9,00%	22,40%	19,90%	18,80%	18,80%	20,20%

Fuente: Fedesarrollo, DNP

3.1.3.2. Equidad horizontal

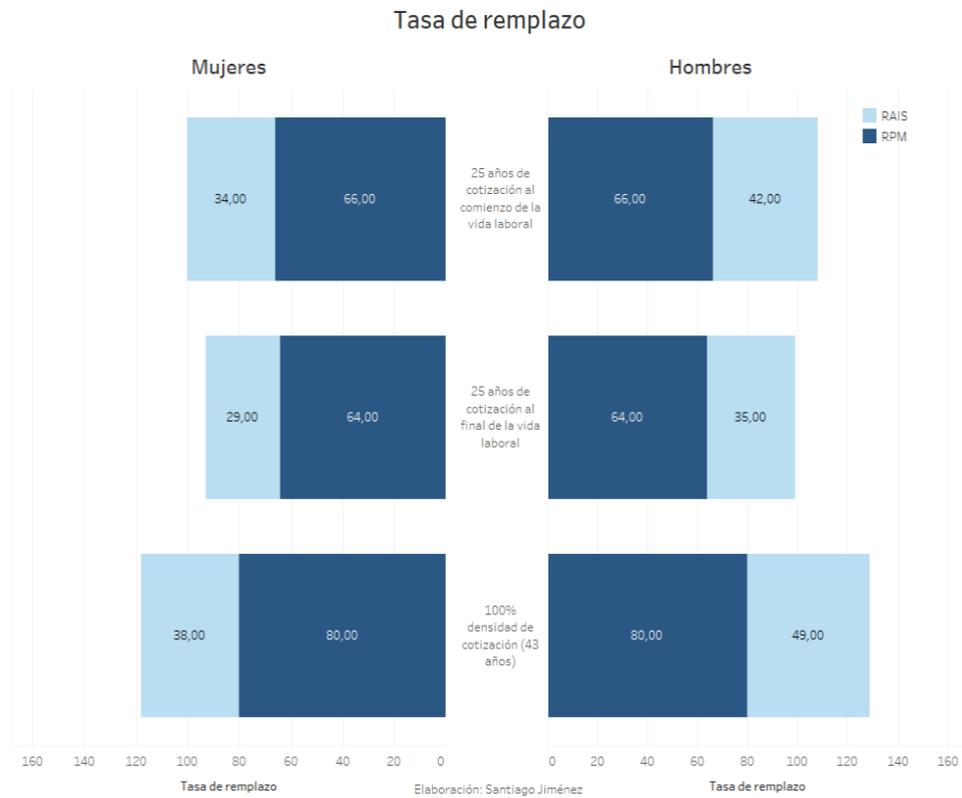
El régimen contributivo, de manera atípica internacionalmente, opera con dos sistemas que manejan parámetros distintos y compiten entre sí. Los beneficios para un afiliado de RPM difirieren los obtenidos por un afiliado a RAIS a pesar de cotizar bajo las mismas condiciones. Mientras en RAIS el número de semanas necesarias para obtener una pensión mínima es menor RPM es un régimen de beneficios definidos.

Por medio de la tasa de reemplazo se puede analizar el porcentaje de ingresos que recibirá un jubilado con respecto a sus ingresos como cotizante. Las diferencias entre la tasa de reemplazo en RPM (que usualmente resulta más alta) y RAIS para un individuo que cotiza bajo las mismas condiciones es considerada como el subsidio implícito del Estado en RPM.

Tanto los cálculos de Villar, Becerra & Forero (2017) como los cálculos de Fedesarrollo (2019) sugieren subsidios implícitos en el sistema contributivo público. En el caso de Villar, Becerra & Forero (2017) se trabajó bajo el supuesto de tasas de descuento real anual del 4% y se diferenció por densidades de cotización, suponiendo salarios reales constantes y crecientes. Su resultado arroja tres hallazgos: i) existen subsidios implícitos en RPM, ii) los subsidios favorecen a los individuos con salarios crecientes más que los que cuentan con salarios reales estables y iii) estos subsidios son mayores para las mujeres que para los hombres, Villar & Forero (2018) explica que este último fenómeno responde a que dada la mayor longevidad de las mujeres y la edad de pensión más temprana estas tienen que financiar una mayor cantidad de reparticiones.

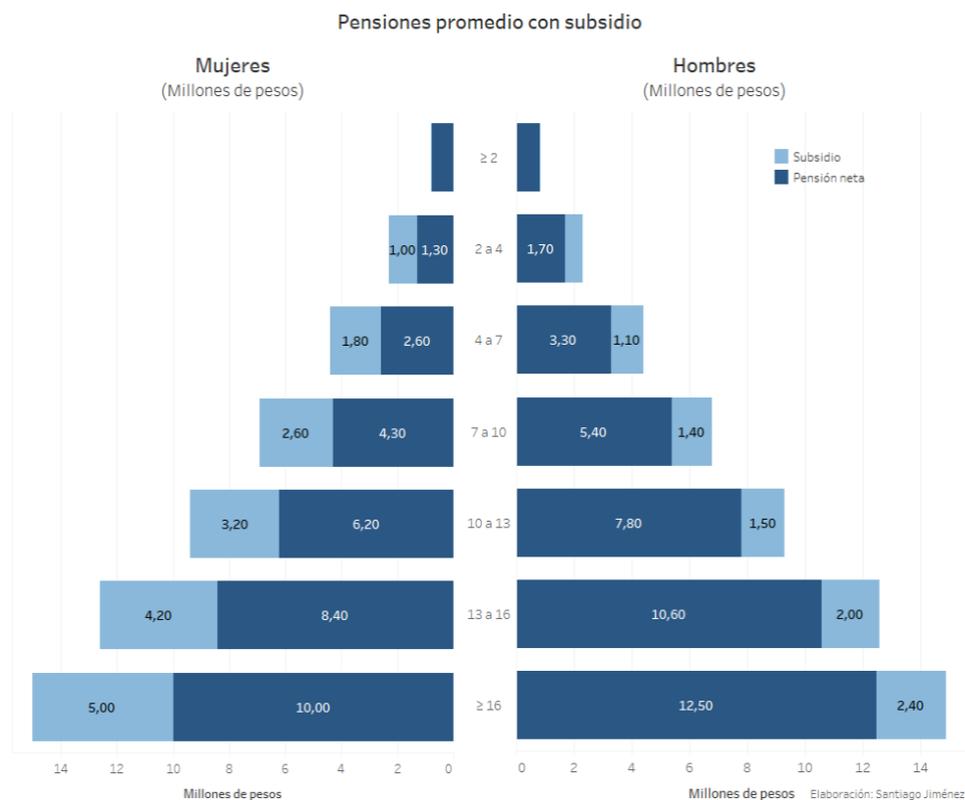
Mientras tanto, los cálculos de Fedesarrollo (2019), que discriminan por número de salarios mínimos cotizados y género sugieren igualmente que los subsidios son mayores en mujeres que en hombres y aumentan en función del número de salarios mínimos cotizados, de esta manera, los subsidios para las mujeres que cotizaron más de 16 salarios mínimos puede llegar a ser de 5 millones de pesos, mientras que una persona que cotiza menos de 2 salarios mínimos no recibe ningún subsidio.

Gráfico 9. Inequidad y Regresividad del sistema pensional: tasa de remplazo por género



Fuente: Villar, Becerra, Forero & Ortega (2017). Elaboración propia.

Gráfico 10. Inequidad y Regresividad del sistema pensional: pensiones promedio con subsidio por genero



Fuente: Superintendencia Financiera. Cálculos Fedesarrollo (2019). Elaboración propia.

3.1.4. Sostenibilidad financiera

Los trabajadores de los regímenes públicos, tanto prima media como regímenes especiales, en una proporción significativa, no alcanzan a financiar con los aportes de sus cotizaciones las pensiones otorgadas por el sistema. Este, que es el principal problema del régimen contributivo público, lleva a que el Estado tenga que dirigir una porción del Presupuesto General de la Nación (PGN) para cubrir el faltante (Villar & Forero, 2018; Farné & Nieto Ramos, 2017). Gran parte de los recursos destinados del PGN cubren pagos a beneficiarios que se encuentran en regímenes en proceso de marchitamiento y regímenes especiales (Magisterio y Militares).

Las correcciones al sistema se han dado al menos en tres momentos con: i) la Ley 100 de 1993, ii) las Leyes 797 y 860 de 2013 y iii) el Acto Legislativo 01/2005. Con la Ley 100 de 1993 se reformó el sistema de seguridad social colombiano y se dio paso a la institucionalidad encargada del sistema contributivo público y privado.

Después de la Ley 100 de 1993 llegaron los ajustes al sistema con las Leyes 797 y 860 de 2003 que ajustaron el número de semanas, la tasa de reemplazo, el porcentaje de contribuciones, además de que se regularon los traslados y se creó el Fondo de Garantía de Pensión Mínima. Después, con el Acto Legislativo 01 de 2005 se señaló como límite máximo de las pensiones, en el régimen público, 25 salarios mínimos a partir del 31 de julio de 2010 y se adelantó el régimen de transición reduciendo en 13 puntos del PIB la deuda pensional de la Nación.

Debido a estos cambios legislativos el Valor Presente Neto (VPN) de la deuda pensional ha caído en un 54% desde 1992, un año antes de la implementación de la Ley 100. Además, por las mismas razones, la evaluación de la senda de pago pensional, es decir, del pago de mesadas pensionales con cargo al presupuesto, se proyecta, después del 2021, caerá en un horizonte de 9 años cerca de 0,4% del PIB.

3.1.4.1. Modelo PROST

El modelo PROST² desarrollado por el Banco Mundial es un mecanismo de simulación del sistema de pensiones, este ejercicio no considera los regímenes especiales y el sector informal, por lo tanto, sus resultados se dan un marco de análisis que dista de la realidad, que es, sin embargo, razonable y manejable en tanto refleja el problema de sostenibilidad del RPM y se ajusta a las reformas, siendo el modelo PROST un punto inicial de estudio frente a los cambios paramétricos introducidos. De esta forma, el modelo PROST se puede ajustar para entender desde la estructura demográfica y las proyecciones poblacionales, hasta el efecto de un cambio a un régimen multipilar, los ajustes de los niveles de pensiones y las cotizaciones que “equilibrarían” el sistema.

Así, este modelo ofrece estimaciones que contribuyen a ilustrar el problema de sostenibilidad del sistema del Régimen de Prima Media. Las variables que tiene en cuenta el modelo son: i) el envejecimiento demográfico y ii) la maduración de los sistemas de pensiones (MFMP, 2019).

En primer lugar, el ensanchamiento de la pirámide poblacional se puede traducir en mayores presiones fiscales en el mediano y largo plazo. Tanto así que para 2050, según las proyecciones poblacionales de las Naciones Unidas, la población mayor

² Pension Reform Options Simulation Toolkit, por sus siglas en ingles.

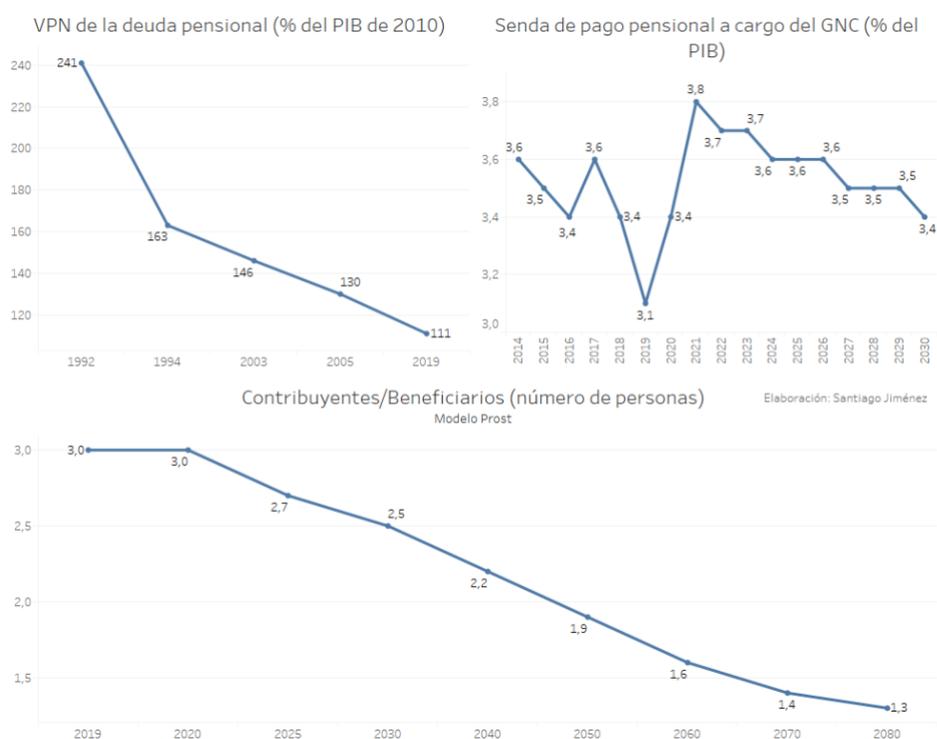
de 60 años pasará a representar el 27,5% de la población contra el 12% reportado por el DANE para 2018.

En segundo lugar, frente a la maduración del sistema, la evaluación del modelo en el Marco Fiscal de Mediano Plazo de 2019 determinó aumentos en el gasto de pensiones para cerrar las diferencias entre lo abonado por los cotizantes de pensión y los pensionados. Los recursos requeridos para este rubro, después del agotamiento en las reservas del Instituto de Seguros Social para hacer frente a las pensiones de RPM, pasó de 2,1% a 3,4% del PIB entre 2001 y 2018.

En ese sentido, los resultados del modelo indican que la insostenibilidad del sistema aumenta en el tiempo, hecho que es muy preocupante debido a que los regímenes especiales ocupan dos terceras partes del gasto pensional están excluidos de la estimación, por lo tanto, las necesidades de recursos del sistema son mayores a las que captura el modelo. El modelo estima que, para que RPM sea autosostenible³, el Ingreso Base de Cotización o tasa de contribución de un afiliado debe ser casi tres veces mayor (2,7), debido a que actualmente se ubica en 13% y debería llegar, según la estimación, a 35% en 2019 y aumentar en promedio 100 puntos básicos anuales. El modelo también contempla, dada la transición poblacional y pérdida del bono demográfico, que el número de contribuyentes por cada beneficiario caerá sustancialmente.

Gráfico 11. Sostenibilidad financiera del sistema de pensiones

³ El criterio de autosostenibilidad de RPM se refiere a que no sea necesario realizar aportes de la Nación para cumplir con sus obligaciones en materia pensional.



Fuente: MFMP, 2019. DNP Y DGRESS. Elaboración propia.

3.1.5. Estructura del mercado laboral colombiano

Por último, existen dos grandes problemas en el mercado laboral colombiano relacionados con las dificultades en cubrir los problemas del sistema de seguridad social: i) la informalidad laboral y ii) la productividad laboral.

En primer lugar, la creación de empleo en Colombia ha estado sesgada en función de la dotación educativa de la fuerza de trabajo, el desempeño del empleo más educado ha sido positivo, mientras que el mercado ha excluido el empleo menos educado, intensificando el ciclo de vida laboral donde según López (2010): “Los jóvenes comienzan trabajando como asalariados; son objeto de una elevada rotación y experimentan tasas altas de desempleo; terminan su vida productiva trabajando como independientes en empleos informales y sufriendo tasas de desempleo menores.”.

Por otro lado, los precios mínimos en el mercado laboral generan problemas de asignación. En nuestro caso, el salario mínimo no ayuda a los más pobres y perjudica la generación de empleo no calificado (López, 2010). Las tendencias del

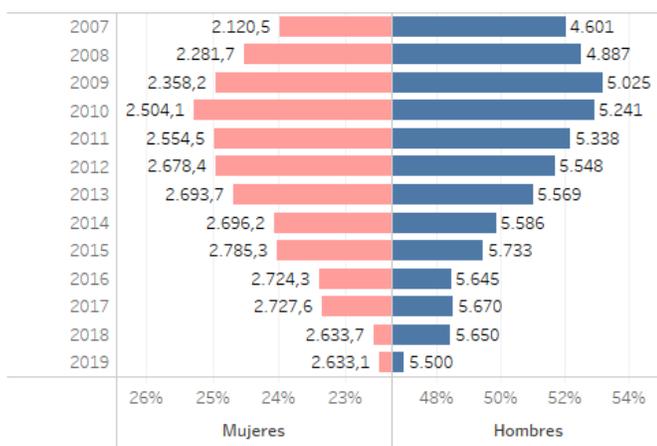
salario mínimo muestran que su peso relativo frente al PIB per cápita mensual es alto (60%), comparativamente con países desarrollados como España y EEUU (30%) y países de la región como México (20%) o Chile (38%) en 2009. Además, los salarios indirectos como los costos por seguridad social, prestaciones sociales y vacaciones también son factores que reducen los incentivos para la creación de empleo formal. De esta forma, López (2010) argumenta que el salario mínimo no sirve a los más vulnerables porque: i) sus miembros no trabajan como asalariados sino como independientes y ii) quienes sí lo hacen y laboran como obreros y empleados asalariados son objeto de evasión alta.

En segundo lugar, las estadísticas de la informalidad laboral permiten conocer el perfil socioeconómico de un empleado informal. Según Galvis (2012) 45% de los empleados informales son mujeres, los individuos cuentan con una edad media de 38 años, el 66% cuenta con menores de edad en el hogar, afirman trabajar por cuenta propia en un 39%, el 31% labora en empresas con 31 o más empleados y el 23% en empresas con entre 2 y 5 empleados y el 51% pertenece a la rama de actividad de servicios privados.

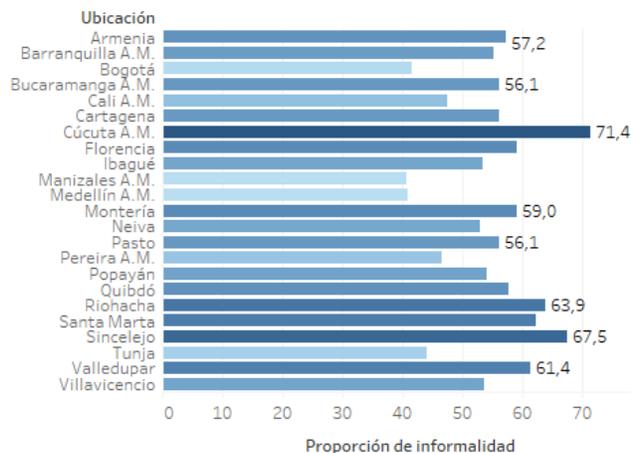
Gráfico 12. Mercado laboral colombiano: estadísticas de informalidad y desempleo

Informales sobre el número de ocupados

2007 - 2019

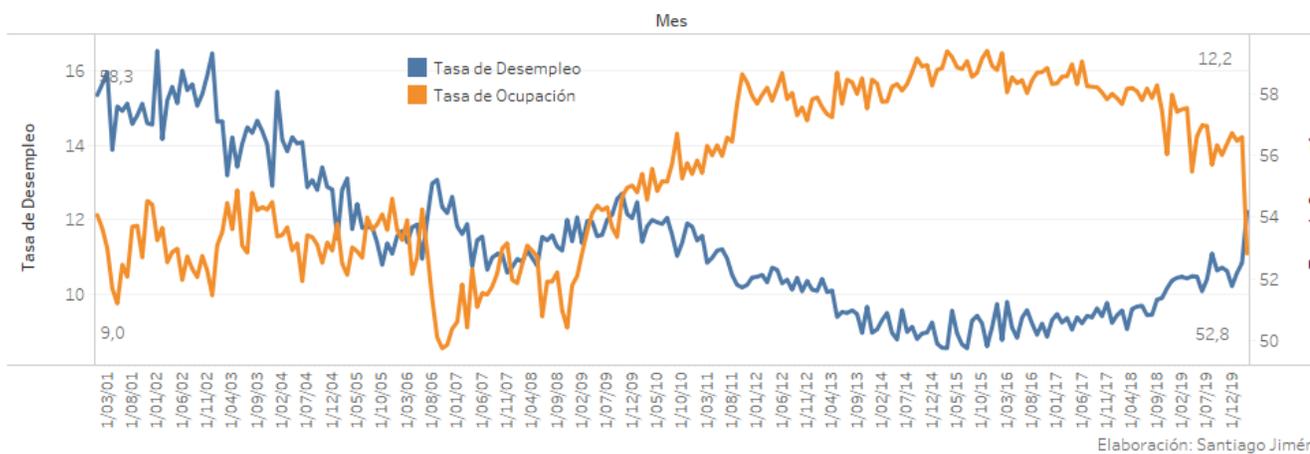


Proporción de informalidad por ciudades



Tasa de desempleo y ocupación desestacionalizadas, DANE

2001 - 2020



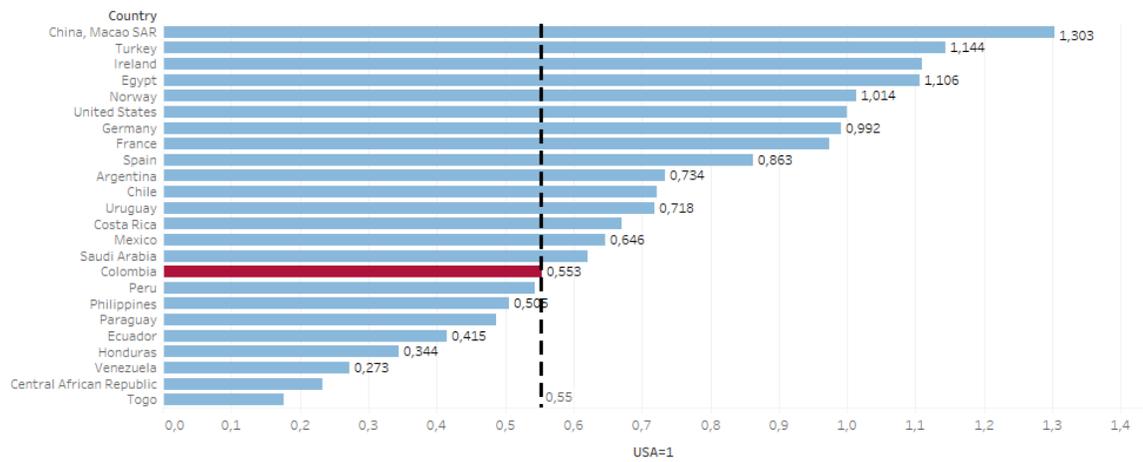
Elaboración: Santiago Jiménez

Fuente: Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE).
Elaboración propia.

Gráfico 13. Mercado laboral colombiano: productividad Total de los Factores (PTF) a niveles actuales de la paridad del poder adquisitivo (PPA)

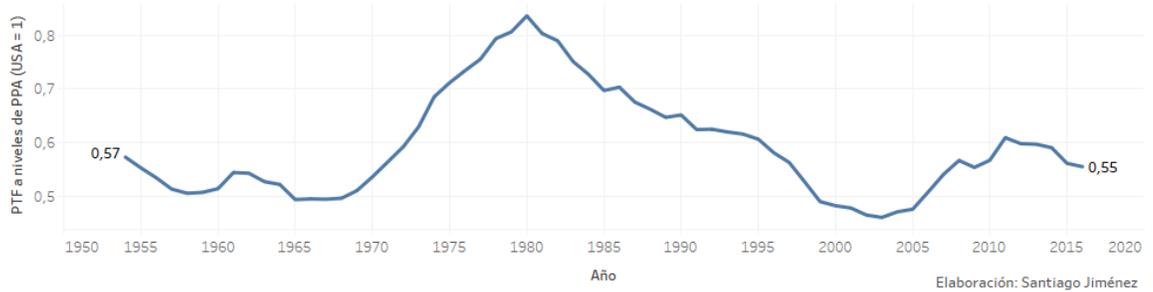
Productividad Total de los Factores (PTF) a niveles actuales de la paridad del poder adquisitivo (PPA)

Año: 2017



Evolución de PTF a niveles actuales de PPA, Colombia

1954 - 2017



Fuente: Penn World Table 9.1. Elaboración propia.

4. METODOLOGÍA

El alcance de este proyecto es exploratorio y correlacional, de tipo longitudinal y con un enfoque cuantitativo. El proceso de análisis llevado a cabo en este trabajo consiste en comparar los resultados de un modelo basado en las técnicas de regresión lineal multivariable, usada ampliamente en la investigación académica, frente a los resultados de los modelos de redes neuronales artificiales (RNA).

El uso de redes neuronales artificiales (RNA) y su comparación con técnicas multivariantes tradicionales como la regresión lineal permite entender y comprobar si los métodos de estimación menos explorados como las RNA cuentan con ventajas comparativas en cuanto a sus potencialidades y límites, especialmente en la modelización de fenómenos complejos en los que aparecen relaciones no lineales entre variables (Suarez, 2008), de cara a las técnicas de regresión multivariantes tradicionales que demandan unos requisitos básicos, dados los supuestos de multicolinealidad, endogeneidad, heterocedasticidad, autocorrelación, normalidad o especificación, sin los cuales no es posible realizar estimaciones fiables.

Según Chiok (2014): “El modelo del Perceptrón multicapa es equivalente a un modelo de regresión lineal, debido a la similitud de la variable de salida (variable respuesta Y) que se relaciona aplicando la función de activación (función identidad) sobre una combinación lineal de pesos (coeficientes) con las variables de entrada (variables predictoras)”.

Tabla 2. Diferencias entre modelos estadísticos y modelos de Redes Neuronales Artificiales

Modelos estadísticos	Modelos de redes neuronales
Observación	Patrón
Muestra	Datos de entrenamiento
Muestra de validación	Datos de validación y prueba
Variables explicativas	Variables de entrada
Variable dependiente	Variable de salida
Modelo	Arquitectura
Residual	Error
Error aleatorio	Ruido
Estimación	Entrenamiento o Aprendizaje
Interacción	Conexión funcional
Coefficientes	Pesos de conexión
Intercepto	Peso umbral o sesgo

Fuente: Chiok (2014).

4.1.1. Recolección de información

4.1.1.1. Muestra

Se creó una base de datos con 68 variables y 21 observaciones por variable. El periodo de tiempo a estudiar estaba comprendido entre 1995 y 2015 dada la disponibilidad de datos. La base se construyó con indicadores financieros de los fondos de pensión, variables demográficas, macroeconómicas, del mercado laboral y algunas variables proxy como indicadores asociados.

Tabla 3. Variables utilizadas

Variables	Nombre de la variable
v1	Número de afiliados_ces
v2	Número de afiliados_poblig
v3	Número de afiliados_pvolu
v4	Número de afiliados_rpm
v5	Tasa de afiliados_ces
v6	Tasa de afiliados_poblig
v7	Tasa de afiliados_pvolu
v8	Tasa de afiliados_rpm
v9	Tasa de afiliados_ces
v10	Tasa de afiliados_poblig
v11	Tasa de afiliados_pvolu
v12	Tasa de afiliados_rpm
v13	Tasa de afiliados (% con respecto a la población)
v14	Fondo_ces
v15	Fondo_poblig
v16	Fondo_pvolun
v17	Fondo_rpm
v18	TC_Fondo_ces
v19	TC_Fondo_poblig
v20	TC_Fondo_pvolun
v21	TC_Fondo_rpm
v22	Población
v23	Crecimiento Población

v24	Población rural
v25	Población activa
v26	PIB
v27	Tasa interés real
v28	Crecimiento del PIB (% anual)
v29	PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales actuales)
v30	PIB per cápita (UMN actual)
v31	Crecimiento del PIB per cápita (% anual)
v32	Inflación, precios al consumidor (% anual)
v33	Desempleo, total (% de la población activa total) (estimación modelado OIT)
v34	Servicio de la deuda multilateral (% del servicio de la deuda pública y con garantía pública)
v35	Ahorro bruto (% del PIB)
v36	Tasa de cambio promedio
v37	Índice de tasa de cambio real efectiva (2010 = 100)
v38	Inversión extranjera directa, entrada neta de capital (% del PIB)
v39	Services, value added (% of GDP)
v40	Servicios, valor agregado (UMN actuales)
v41	Empleo vulnerable, total (% del total de empleo)
v42	Independientes, total (% del empleo total)
v43	Empleadores, total (% del empleo total)
v44	Desempleo, total (% de la población activa total) (estimación modelado OIT)
v45	Deuda externa acumulada, total (DOD, US\$ a precios actuales)
v46	Inflación
v47	Población mayor de 65 años
v48	Población entre 15 y 65 años
v49	Índice de Dependencia
v50	Ocupados
v51	Población entre 15 y 65 años
v52	Tasa de empleo
v53	1/Tasa de empleo
v54	Número de pensionados RPM
v55	Población mayor de 65 años

v56	Elegibilidad (Institucional 1)
v57	Pensión media
v58	V/ pensión media
v59	TFP level at current PPPs (USA=1)
v60	V/ TPF
v61	Productividad media (PTF Laboral)
v62	V/ PTF Laboral
v63	Generosidad (Institucional 2)
v64	(Elegibilidad) (Generosidad)
v65	Elegibilidad (Institucional 3) P > 65 / PEA
v66	Gasto (miles de millones)
v67	PIB (miles de millones)
v68	Razón de gasto

Fuente: Elaboración propia.

4.1.1.2. Descripción de las principales variables

Los datos sobre el número de afiliados y valor de los fondos fueron extraídos de la Superintendencia Financiera y de la Asociación Colombiana de Administradoras de Fondos de Pensiones y de Cesantía (Asofondos). Mientras tanto, los datos demográficos relacionados con las series de tiempo poblacionales fueron extraídos del Censo Nacional de Población y Vivienda 2005 y 2018 y la base de datos del Banco Mundial.

El Sistema General de Pensiones es una institución que busca garantizar el acceso al sistema de protección contra las contingencias derivadas de la vejez, la invalidez y la muerte. En 1993 la ley 100 del mismo año creó un sistema dual de pensiones, diferenciado por un régimen público y un régimen privado. El régimen público de pensiones fue considerado como Régimen de Prima Media (RPM), dirigido por la Administradora Colombiana de Pensiones, Colpensiones. Mientras tanto, el régimen privado o Régimen de Ahorro Individual (RAIS) dio el paso a las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFPs), las cuales son instituciones privadas encargadas de administrar los ahorros pensionales de sus clientes. En este régimen dual los empleados formales o independientes se encuentran causados a cotizar al régimen que elijan. Además de los aportes causados, entendidos como una pensión obligatoria, también pueden, a través de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFPs), cotizar a un fondo de pensión voluntaria como un mecanismo para lograr una pensión más alta. Mientras tanto, a través de la ley 50

de 1990 se incorporó el Régimen Especial de Cesantías dispuesto por las Administradoras de Fondos de Cesantías con el propósito de funcionar como un fondo de auxilio que le permitiera a los individuos no quedar desprotegidos después de haber quedado desempleados.

La Superintendencia Financiera de Colombia (SIF) en función de cumplir su objetivo de supervisor tiene consolidadas las bases de datos con los registros sobre número de afiliados, valor del fondo, estados financieros y portafolio de inversión de los Fondos de Pensiones Obligatorias, Fondos de Pensiones Voluntarios y Fondos de Cesantías. De esta forma, es a través de la Superintendencia Financiera de Colombia se obtuvo el número de afiliados de los fondos de pensiones obligatorias, fondo de pensiones voluntarios, fondo de cesantías y régimen prima media. También, a través de la Asociación Colombiana de Administradoras de Fondos de Pensiones y de Cesantía (Asofondos) se obtuvieron datos relacionados con el número de pensionados en el Régimen de Prima Media (RPM) y Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad (RAIS). Se encontró la tasa de afiliación (v13) sumando el número de afiliados a los fondos de cesantías, pensiones obligatorias, pensiones voluntarias y el régimen de prima media en razón de la población total entre 1995 y 2018.

Mientras tanto el Departamento Nacional de Estadística (DANE) a través del Censo Nacional de Población y Vivienda de 2018 actualizó los datos demográficos usados en esta muestra. Se hizo un acercamiento a los datos demográficos según la clasificación del mercado laboral: población en edad de trabajar (PET), población económicamente activa (PEA), ocupados (O) y desocupados (D). En la clasificación demográfica del mercado laboral dentro la población total (PT) se encuentra la población en edad de trabajar (PET), compuesta por personas mayores de 12 años en zonas urbanas y de 10 zonas rurales. A su vez, dentro de la población en edad de trabajar (PEA) se encuentra la población económicamente activa (PEA), entendida como la fuerza laboral de la economía, la cual incluye a quienes trabajan o están buscando empleo en el periodo de referencia. Así mismo, la población económicamente activa (PEA) incluye el número de ocupados (O) y desocupados (D) (Lora & Sergio, 2016). De igual manera, los datos del PIB fueron extraídos a partir del banco de datos del Banco Mundial y que a su vez tiene como fuente el DANE.

Mientras tanto, a través de las estimaciones de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) se obtuvo la tasa de desempleo (D). También, se obtuvieron los datos de la población económicamente activa (PEA), la tasa de desempleo (D) y el desempleo vulnerable a través de las estadísticas asentadas en el banco de datos

del Banco Mundial en donde están depositados los indicadores del desarrollo por países. Este último, se refiere a los trabajadores familiares no remunerados y a los trabajadores autónomos como porcentaje del empleo total. El empleo vulnerable está caracterizado por tener un nivel inadecuado de ingresos, baja productividad y condiciones de trabajo difíciles. Este empleo vulnerable se encuentra estrechamente vinculado con el número de personas viviendo en pobreza.

A través de los datos del World Penn Table 9.1 de la Universidad de Groningen y el Banco Mundial se obtuvo el histórico de productividad laboral ajustada según la paridad del poder adquisitivo y la productividad media.

Las observaciones utilizadas en este estudio correspondientes a la serie histórica de la tasa de interés de tipo real (r) fueron obtenidas a partir del banco de datos del Banco Mundial. Para el caso de la tasa de interés de tipo real el Banco Mundial se respalda en base al Fondo Monetario Internacional y sus Estadísticas Financieras Internacionales y archivos de datos, a partir de datos del Banco Mundial sobre el deflactor del PIB.

Se tomaron, como es habitual, los datos del IPC como referencia para determinar la inflación. Estos se obtuvieron del banco de datos del Banco Mundial que a su vez tienen como fuente al DANE.

4.1.1.3. Variables construidas

Se construyó la tasa de afiliados total considerando los afiliados a fondos de cesantías, pensiones obligatorias, pensión voluntaria y régimen de prima media en razón de la población total para el periodo evaluado.

Ecuación 1. Tasa total de afiliados

$$TA = \sum_{t=1995}^{2018} \frac{aficesantias_t + afiobligatoria_t + afivoluntario_t + afirpm_t}{población_t}$$

El índice de dependencia constituye uno de los principales fundamentos del bono demográfico, también conocido como “ventana demográfica de oportunidades”, resulta importante para entender la composición de una etapa demográfica donde hay una tendencia creciente de la población activa del mercado laboral y, en consecuencia, un periodo que puede elevar las tasas de crecimiento económico per cápita y los niveles de bienestar de la población (CEPAL, 2008). En ese sentido, la

razón o índice de dependencia evalúa el promedio de personas dependientes por cada 100 personas en edad de trabajar.

Ecuación 2. Índice de Dependencia

$$\text{Índice de Dependencia} = \frac{\text{Población} > 65 \text{ años}}{\text{Población entre 15 y 65 años}}$$

La elegibilidad institucional según Pérez (2008) la Superintendencia Financiera de Colombia y Naciones Unidas expresa la relación entre el número de pensionados de ambos regímenes (Prima Media y Ahorro Individual) con la población adulta mayor.

Ecuación 3. Elegibilidad

$$\text{Elegibilidad} = \frac{\text{Número de pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}}$$

Mientras tanto se consideró la Generosidad es la relación entre la pensión y la productividad medias.

Ecuación 4. Generosidad

$$\text{Generosidad} = \frac{\text{Pensión media}}{\text{Productividad media (TPF Laboral)}}$$

Por último, se consideró la razón de gasto como la relación entre el gasto pensional y el producto interno bruto para un periodo específico, medido en miles de millones de pesos.

Ecuación 5. Razón de gasto

$$\text{Razón de gasto} = \frac{\text{Gasto pensional}}{\text{Producto Interno Bruto}}$$

4.1.1.4. Transformación de los datos

Se tipificó la variable según la distribución normal y de forma logarítmica. Para ello, se transformaron los datos de la base de datos de tal manera que siguieran una distribución Z, tal que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Por otro lado, las variables utilizadas también fueron transformadas a través de x_i para analizar los resultados en términos de sensibilidades. Después de tipificados los datos se reconstruyó la base de datos con los nuevos valores normalizados y de forma logarítmica.

4.1.2. Regresión lineal múltiple

4.1.2.1. Preselección de variables

A través de la matriz de correlaciones para la base de datos se hizo un rastreo preliminar de las asociaciones lineales de la matriz de datos. También se elaboró una serie de regresiones individuales, donde se intentaba encontrar la asociación lineal entre la razón de gasto pensional (v68) y las variables de la matriz de datos, se hizo un acercamiento a las variables independientes que podrían ayudar a modelar su comportamiento.

4.1.2.2. Análisis de regresión

Para el análisis de regresión formulado se aplicó un modelo con especificación logarítmica donde la variable dependiente es la razón de gasto pensional y las variables independientes son la inflación, como un factor de precios; el número de pensionados en el Régimen de Prima Media en razón de la población adulta, como un factor de elegibilidad del sistema y la productividad media (PTF laboral), como un factor de generosidad del sistema.

Ecuación 6. Análisis de regresión

$$\begin{aligned} \log \frac{\text{Gasto Pensional}}{\text{PIB}} \\ = \beta_0 + \beta_1 \log \text{Inflación} + \beta_2 \log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}} \\ + \beta_3 \log \text{Productividad Media} + \varepsilon_i \end{aligned}$$

El modelo se construyó en base Log-Log para eliminar problemas de volatilidad sobre los regresores y valores extremos. La variable independiente de inflación, $\beta_1 \log \log \text{Inflación}$, se incluye en el modelo considerando su indexación sobre el Ingreso Base de Liquidación (IBL) pensional desde 1993, que establece un precio mínimo para las pensiones del Régimen de Prima Media. La razón de pensiones de RPM entre la población mayor, $\beta_2 \log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}}$, constituye la Elegibilidad del sistema pensional público. Esta variable independiente es una adaptación de Alonso, J. y Conde, J. (2006), quienes consideran la razón total de pensionados sobre la población mayor, $\frac{\text{Número de pensionados}}{\text{Población} > 65 \text{ años}}$, como un Factor Institucional y un

indicador de Elegibilidad del sistema. Por último, la Productividad Media (PTF Laboral) es una variable usada regularmente para evaluar la generosidad y sostenibilidad del sistema pensional, principalmente al ser usada para evaluar el valor medio de la tasa de reposición pensional.

Tabla 4. Supuestos y test del modelo de regresión multivariable

Validación de supuestos	
Supuesto	Test
Raíz Unitaria	Dickey-Fuller Test
Multicolinealidad	VIF
Endogeneidad	Hausman Test
Heterocedasticidad	Breusch-Pagan Test ACF
Autocorrelación	PACF Breusch-Godfrey test
Normalidad	Shapiro-Wilk Normality Test Jarque Bera Test

Fuente: Elaboración propia.

Se consideró una regresión jerárquica para evaluar los cambios en los términos de bondad de ajuste, el termino de error, el error estándar de los residuos, los coeficientes y los la significancia del modelo y las variables independientes, de tal forma que se fueron agregando las variables *log Inflación*, $\log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}}$ y *log Productividad Media* consecutivamente.

4.1.3. Redes neuronales

Las redes neuronales artificiales son mecanismos de aprendizaje automático que simulan mecanismos de aprendizaje en organismos biológicos (Aggarwal, 2018). El uso de redes neuronales artificiales (RNA) y su comparación con técnicas multivariantes tradicionales como la regresión lineal permite entender y comprobar si los métodos de estimación menos explorados como las RNA cuentan con ventajas comparativas en cuanto a sus potencialidades y límites, especialmente en la modelización de fenómenos complejos en los que aparecen relaciones no lineales entre variables (Suarez, 2008), de cara a las técnicas de regresión multivariantes tradicionales que demandan unos requisitos básicos, dados los supuestos de multicolinealidad, endogeneidad, heterocedasticidad, autocorrelación, normalidad o

especificación, sin los cuales no es posible realizar estimaciones fiables. En la mayoría de los casos, las redes neuronales producen resultados comparables por lo que queda al criterio del investigador analizar, discriminar y elegir los resultados según los objetivos de su investigación.

Especialmente, durante el proceso de discriminación de resultados se pone en consideración diferencias como ausencia de contrastes en RNA para las medidas de ajuste global del modelo. Para ponderar este criterio, Suarez (2008) y Cortiñas y cols. (2006) realizan un rastreo bibliográfico verificando que los modelos de RNA cuentan con una mejor capacidad de predicción y clasificación (**ver tabla V**) frente a los métodos tradicionales.

Tabla 5. Comparación de Redes Neuronales Artificiales frente a modelos tradicionales

Modelo	Bibliografía
ARIMA	Fuente y cols., 1996; Fuente y cols., 1998; Levinsohn, 1998
Modelos censurados	Villagarcia y Muñoz, 1997
Modelos de regresión	White, 1989; Weiss y Kulikowski, 1991; Groot y Wurtz, 1991; Serrano y Martín, 1993; Hruschka, 1993; Mann, 1997
Análisis clúster	Hruschka y Natter, 1999; Mangiameli y cols., 1996
Análisis discriminante	Huang y Lippman, 1987; Subramian y cols., 1993; Tam y Kiang, 1993; Yoon y cols., 1993; Dasgupta y cols., 1994
Regresión logística	Dasgupta y cols. 1994; Zahavi y Levin, 1997; Cortiñas y cols., 2005, 2006

Fuente: Suarez (2008). Elaboración propia.

Para Chiok (2014) el rendimiento de los modelos de regresión y de las redes neuronales artificiales es ampliamente discutido, especialmente sobre problemas de predicción, clasificación y análisis descriptivo. De esta forma, afirma que:

“Mientras algunos trabajos no encuentran diferencias en los resultados entre los modelos estadísticos y los modelos de redes neuronales (Michie et al., 1994; Ripley, 1993; Thrun et al., 1991), otros resultados tienden a favorecer una ligera superioridad de las redes neuronales sobre las técnicas estadísticas (Garson, 1991; Huang y Lippman, 1987; Navarro, 1998; White, 1994).” (Chiok, 2014; pp. 2).

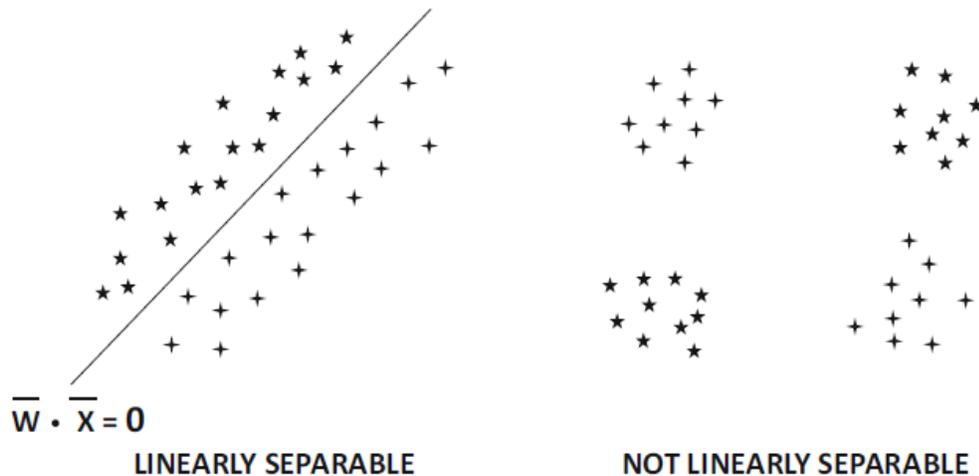
En últimas la recomendación que brinda Chiok (2014) continuar con los procesos de comparación entre los modelos clásicos de regresión lineal y las redes neuronales artificiales, especialmente en problemas de predicción y clasificación

binaria, donde la regresión múltiple, el análisis discriminante y la regresión logística son de especial utilidad.

Mientras en los modelos de RNA los datos son usualmente ajustados por mínimos cuadrados (entrenamiento), en los modelos lineales generalizados los datos son ajustados por máxima verosimilitud para estimar los parámetros. En ese sentido, Sarle (1994) considera que los modelos lineales generalizados pueden ser vistos como un perceptrón multicapa.

4.1.3.1. Arquitectura y configuración de la red

Gráfico 14. Ejemplos de datos linealmente separables e inseparables



Fuente: Aggarwal (2018). Neural Networks and Deep Learning.

No existe un método estándar aceptado para una configuración de red, pero sí consideraciones prácticas como el riesgo de sobre entrenamiento que se tuvieron en cuenta en la arquitectura de red diseñada. Al considerar los riesgos de sobre entrenamiento, a los cuales son sensibles las redes neuronales, el diseño y entrenamiento de la red buscó minimizar el número de capas ocultas (*hidden layers*) a 1, considerando que la matriz de datos, la cual contaba con 1428 observaciones, era comparativamente pequeña para un diseño de red mayor y una arquitectura de red con más capas ocultas podría causar problemas de sobre entrenamiento y se llegaría a un punto no óptimo, por lo que los pesos de las cargas no serían generalizables. Frente al riesgo de sobre entrenamiento Aggarwal (2018) afirma que:

In practical terms, what overfitting means is that a neural network will provide excellent prediction performance on the training data that it is built on, but will perform poorly on unseen test instances. This is caused by the fact that the learning process often remembers random artifacts of the training data that do not generalize well to the test data. (p. 169).

En ese sentido, una mala arquitectura de red puede conducir a problemas de generalización sobre los resultados o, en otros términos, cuando el número de parámetros libre es muy grande en comparación con el tamaño de los datos de entrenamiento la red no reconocerá los parámetros estadísticamente significativos al clasificar datos de prueba no vistos y contará con unos términos de conexión deficientes.

Al igual que la regresión jerárquica usada se elaboraron tres arquitecturas de red, en cada arquitectura se introdujo una capa de entrada (*input layer*) y se compararon los términos del modelo y los pesos de las cargas, comparativamente entre cada arquitectura de red y los coeficientes de la regresión jerárquica.

5. RESULTADOS

5.1.1. Resultados de la aplicación de regresión múltiple

El primer paso antes de aplicar la regresión múltiple consistió en aplicar un análisis de correlación lineal entre las variables independientes. En la **tabla VI** se pueden apreciar las asociaciones lineales encontradas. Se aplicó un análisis de correlaciones bivariadas siguiendo el coeficiente de Pearson (también se consideraron las correlaciones por Tau B de Kendall y Rho de Spearman únicamente como un ejercicio comparativo), estas correlaciones se evaluaron a partir de pruebas de significación bilateral buscando encontrar mejores asociaciones lineales. También se evaluaron las asociaciones lineales a través de un análisis de regresión que tomó como variable dependiente la razón de gasto el resto de las variables de la matriz como independientes. Los resultados, como era de esperarse, fueron coherentes con las correlaciones bivariadas.

Tabla 6. Asociaciones lineales

Asociaciones lineales									
Variable	Correlaciones bivariadas				N	Regresiones Individuales			
	Correlación de Pearson	Sig. (unilateral)	Tau_b de Kendall	Rho de Spearman		Variable Dependiente: Razón de gasto (v68)			
						Variable Independiente	Estimación (β)	Pr(> t)	Significancia
v1	,958**	0,000	,914**	,969**	21	v1	0,8584	0	***
v2	,975**	0,000	,914**	,974**	21	v2	0,6724	0	***
v3	,973**	0,000	,905**	,971**	21	v3	0,3139	0	***
v4	0,309	0,178	0,345	0,455	11	v4	0,5775	0,355	
v5	-0,007	0,489	-0,020	-0,063	18	v5	-0,0059	0,978	
v6	-,725**	0,000	-,642**	-,814**	20	v6	-0,539	0	***
v7	-,770**	0,000	-,602**	-,754**	19	v7	-0,2956	0	***
v8	0,474	0,141	0,048	0,143	7	v8	0,0526	0,283	
v9	,957**	0,000	,914**	,969**	21	v9	1,024	0	***
v10	,977**	0,000	,914**	,974**	21	v10	0,7692	0	***
v11	,972**	0,000	,905**	,971**	21	v11	0,332	0	***

v12	-0,521	0,050	-0,127	-0,227	1	v12	-1,0832	0,101	
					1				
v13	,985**	0,000	,924**	,975**	2	v13	0,6412	0	***
					1				
v14	,968**	0,000	,905**	,968**	2	v14	0,5115	0	***
					1				
v15	,969**	0,000	,905**	,968**	2	v15	0,2255	0	***
					1				
v16	,954**	0,000	,914**	,974**	2	v16	0,2329	0	***
					1				
v17	,564*	0,035	,564*	,727*	1	v17	0,1095	0,071	
					1				
v18	-,662**	0,001	-,556**	-,712**	1	v18	-0,2901	0,002	**
					9				
v19	-,880**	0,000	-,801**	-,912**	1	v19	-0,3808	0	***
					9				
v20	-,800**	0,000	-,684**	-,856**	2	v20	-0,2194	0	***
					0				
v21	-0,245	0,298	0,048	0,000	7	v21	0,332	0	***
v22	,957**	0,000	,914**	,974**	2	v22	5,2331	0	***
					1				
v23	-,959**	0,000	-,884**	-,965**	2	v23	-3,888	0	***
					0				
v24	-,756**	0,000	-,724**	-,882**	2	v24	-13,41	0	***
					1				
v25	,913**	0,000	,914**	,974**	2	v25	2,7974	0	***
					1				
v26	,972**	0,000	,914**	,974**	2	v26	0,5897	0	***
					1				
v27	-,823**	0,000	-,442**	-,608**	2	v27	-0,8055	0	***
					0				
v28	,384*	0,048	0,221	0,281	2	v28	0,257	0,095	
					0				
v29	,887**	0,000	,867**	,960**	2	v29	1,367	0	***
					1				
v30	,972**	0,000	,914**	,974**	2	v30	0,6685	0	***
					1				
v31	0,302	0,104	0,251	0,356	1	v31	0,0971	0,209	
					9				
v32	-,914**	0,000	-,781**	-,886**	2	v32	-0,5467	0	***
					1				
v33	-,475*	0,015	-,495**	-,600**	2	v33	-0,7892	0,029	*
					1				
v34	0,350	0,060	0,276	0,369	2	v34	0,7324	0,12	
					1				
v35	,685**	0,000	,476**	,583**	2	v35	2,0881	0,001	***
					1				
v36	,653**	0,001	0,267	0,384	2	v36	0,8924	0,001	**
					1				
v37	-0,020	0,466	0,057	0,070	2	v37	-0,0696	0,931	
					1				

v38	,582**	0,003	,333*	,505*	2 1	v38	0,5582	0,006	**
v39	-,713**	0,000	-,514**	-,653**	2 1	v39	-7,22	0	***
v40	,966**	0,000	,914**	,974**	2 1	v40	0,0971	0,209	
v41	0,181	0,216	0,067	0,232	2 1	v41	4,143	0,431	
v42	0,364	0,052	0,162	0,306	2 1	v42	7,879	0,104	
v43	,619**	0,001	,358*	,440*	2 1	v43	3,5454	0,003	**
v44	-,475*	0,015	-,495**	-,600**	2 1	v44	-0,7892	0,029	*
v45	,792**	0,000	,867**	,958**	2 1	v45	0,7506	0	***
v46	-,872**	0,000	-,705**	-,823**	2 1	v46	-0,5193	0	***
v47	,943**	0,000	,914**	,974**	2 1	v47	2,2164	0	***
v48	,955**	0,000	,914**	,974**	2 1	v48	3,6824	0	***
v49	,916**	0,000	,905**	,973**	2 1	v49	5,463	0	***
v50	,899**	0,000	,867**	,962**	2 1	v50	2,4755	0	***
v51	,955**	0,000	,914**	,974**	2 1	v51	3,6824	0	***
v52	,659**	0,001	,562**	,729**	2 1	v52	5,5147	0,001	**
v53	-,659**	0,001	-,562**	-,729**	2 1	v53	-5,5147	0,001	**
v54	,973**	0,000	,857**	,952**	2 1	v54	1,012	0	***
v55	,943**	0,000	,914**	,974**	2 1	v55	2,2164	0	***
v56	,905**	0,000	,695**	,809**	2 1	v56	1,5323	0	***
v57	,972**	0,000	,914**	,974**	2 1	v57	0,9357	0	***
v58	-,807**	0,000	-,737**	-,862**	2 0	v58	-0,4958	0	***
v59	0,181	0,216	0,162	0,274	2 1	v59	0,7792	0,433	
v60	0,435	0,165	0,619	,786*	7	v60	0,0682	0,329	
v61	,890**	0,000	,867**	,960**	2 1	v61	1,6602	0	***
v62	,545**	0,008	0,275	0,398	1 9	v62	0,3511	0,016	*
v63	,900**	0,000	,790**	,906**	2 1	v63	1,5173	0	***

v64	-0,008	0,487	0,067	0,130	2 1	v64	-0,0391	0,973	
v65	,963**	0,000	,867**	,947**	2 1	v65	8,9872	0	***
v66	,989**	0,000	,943**	,987**	2 1	v66	0,6621	0	***
v67	,906**	0,000	,886**	,966**	2 1	v67	1,7206	0	***

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de este punto se consideraron los lineamientos empíricos que brindó el análisis de correlaciones y las regresiones lineales para la selección de variables. El criterio de preselección contempló: i) evitar variables redundantes para evitar multicolinealidad en el modelo, ii) correlación bivariada superior a 0,6 y iii) beta significativa para la regresión individual y conjunta con otras variables explicativas que contaran con el punto i. De esta forma, se modeló una secuencia de variables explicativas buscando qué modelo respondía significativamente a la razón de gasto. Aquellas variables modeladas que no cumplieran con los puntos ii y iii, fueron seleccionadas según su importancia bibliográfica. Aunque uno de los criterios de selección era evitar variables redundantes es posible que existan problemas de multicolinealidad en relación con las variables preseleccionadas, sin embargo, como un filtro preliminar es aceptable, dado que, paso seguido, se podrán iterar diferentes modelos buscando verosimilitud del modelo seleccionado.

Tabla 7. Variables preseleccionadas

Descripción	Variables
Tasa de afiliados al Régimen de Prima Media	v12
Tasa de afiliados total (% con respecto a la población)	v13
Fondo Régimen de Prima Media	v17
Población Económicamente Activa (PEA)	v25
Tasa interés real	v27
Crecimiento del PIB (% anual)	v28
Desempleo, total (% de la población activa total, OIT)	v33
Inflación	v46
Índice de Dependencia	v49
Elegibilidad (Institucional 1)	v56
Pensión media	v57
Nivel de TFP en PPA (USA=1)	v59
Productividad media (PTF Laboral)	v61
Generosidad (Institucional 2)	v63

Fuente: Elaboración propia.

Una vez realizado el análisis de asociaciones lineales y preseleccionadas las variables se realizó un análisis factorial exploratorio (AFE) a través del método de componentes principales, que actúa bajo el supuesto de que es posible explicar la totalidad de la varianza observada para conocer la estructura factorial de la matriz de datos. Se excluyó en este análisis la variable dependiente para no alterar la estructura factorial del análisis. Después de realizado el análisis factorial exploratorio se determinó a partir de las comunalidades si los valores contaban con la orientación o coeficiente esperado según las regularidades empíricas. De esta forma, se consideró si alguna de las variables preseleccionadas podría quedar fuera del análisis.

Tabla 8. Comunalidades

Variables preseleccionadas	Inicial	Extracción
Tasa de afiliados a Régimen de Prima Media	1,000	0,843
Tasa de afiliados total (% con respecto a la población)	1,000	0,984
Fondo Régimen de Prima Media	1,000	0,951
Población Económicamente Activa (PEA)	1,000	0,931
Tasa interés real	1,000	0,599
Crecimiento del PIB (% anual)	1,000	0,249
Desempleo, total (% de la población activa total) (estimación modelado OIT)	1,000	0,868
Inflación	1,000	0,927
Índice de Dependencia	1,000	0,924
Elegibilidad (Institucional 1)	1,000	0,862
Pensión media	1,000	0,857
Nivel de TFP en PPA (USA=1)	1,000	0,960
Productividad media (PTF Laboral)	1,000	0,980
Generosidad (Institucional 2)	1,000	0,957
Gasto (miles de millones)	1,000	0,985

Método de extracción: análisis de componentes principales

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de comunalidades permitió ver que las variables macroeconómicas y microfinancieras consideradas fueron las que menor varianza explicada obtuvieron por el análisis factorial. Estos resultados son coherentes con la consideración económica que supone una amplia cantidad determinantes sobre estas variables, que puede ser superados por las variables utilizadas en la matriz de datos analizada. De esta forma, las variables Tasa de interés real y Crecimiento del PIB (% anual) fueron sustraídas de la matriz de datos. Esta sustracción de datos podría

tener un efecto sobre la bondad de ajuste de un modelo que considere todas las variables preseleccionadas como independientes, sin embargo, este criterio se puede sopesar con un mejor cumplimiento del supuesto de multicolinealidad.

Mientras tanto, el análisis factorial exploratorio demostró que los componentes principales de la matriz de datos explican el 85,5% de la varianza total observada. La medida Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) de adecuación del muestreo se ubicó en 0,687, por lo tanto, los resultados del análisis factorial pueden ser usados en cuanto existen correlaciones significativas entre las variables y el modelo factorial.

Tras depurar las variables independientes se exploraron diferentes modelos de regresión multivariada buscando encontrar coeficientes significativos y medidas de bondad de ajuste aceptables a través de los cuales se pudiera evaluar la razón de gasto pensional. Para ello y buscando el cumplimiento de los supuestos del modelo de regresión se trabajó bajo una especificación logarítmica, tanto para las variables independientes como para la variable dependiente, de tal manera que los resultados fueran analizados en función de las sensibilidades de los cambios porcentuales de la variable dependiente cuando hay variaciones porcentuales en las variables independientes. De esta forma, el modelo final a través del cual se obtenían coeficientes aceptables a partir de la matriz de datos para fue el siguiente:

Ecuación 7. Modelo de evaluación I

$$\log \frac{\text{Gasto Pensional}}{\text{PIB}} = \beta_0 + \beta_1 \log \log \text{Inflación} + \beta_2 \log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}} + \beta_3 \log \text{Productividad Media} + \varepsilon_i$$

En este modelo se evaluó la inflación, la cual se incluye en el modelo considerando su indexación sobre el Ingreso Base de Liquidación (IBL) pensional desde 1993, que establece un precio mínimo para las pensiones del Régimen de Prima Media. La razón de pensiones de RPM entre la población mayor, $\beta_2 \log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}}$ y la Productividad Media (PTF Laboral) es una variable usada regularmente para evaluar la generosidad y sostenibilidad del sistema pensional, principalmente al ser usada para evaluar el valor medio de la tasa de reposición pensional.

Tras tener claro el modelo por evaluar se realizó una regresión jerárquica por etapas en la cual se introdujo cada una de las variables independientes para considerar los cambios en los términos de bondad de ajuste, el termino de error, el error estándar de los residuos, los coeficientes y la significancia del modelo y las variables independientes.

Tabla 9. Regresión jerárquica por etapas

Variable	Etapa 1			Etapa 2			Etapa 3		
	Std. β	Std. Error	Pr(> t)	Std. β	Std. Error	Pr(> t)	Std. β	Std. Error	Pr(> t)
Intercepto (β_0)	0,0460	0,0025	1,51e-13 ***	0,0071	0,0166	0,6750	-0,0436	0,0133	0,004534 **
Inflación	-0,0017	0,0003	2,39e-06 ***	-0,0007	0,0005	0,1655	-0,0007	0,0003	0,027181 *
Elegibilidad				0,1062	0,0448	0,0293 *	0,1139	0,0270	0,000578 ***
PTF Laboral							0,0900	0,0157	2,49e-05 ***
RSE	0,0067			0,0060			0,0036		
Δ RSE				-0,0007			-0,0024		
R	0,8358			0,8776			0,9599		
R ²	0,6985			0,7701			0,9214		
Adj R ²	0,6826			0,7446			0,9076		
Δ R ²				0,0620			0,1630		

* $p < .05$. ** $p < .01$. *** $p < .001$.

Fuente: Elaboración propia

Durante la primera etapa se introdujo la variable Inflación (Std. $\beta = -0,0017$, $p < .001$) la cual resultó estadísticamente significativa. Se obtuvo durante esta etapa un R² ajustado de 0,682. En la siguiente etapa se introdujo la variable Elegibilidad (Std. $\beta = -0,1062$, $p < .05$), la cual resultó estadísticamente significativa, mientras tanto la variable Inflación no resultó significativa en esta etapa. Se obtuvo durante esta etapa un R² ajustado de 0,744. La introducción de la nueva variable produjo un cambio Δ R² ajustado de 0,062. Por último, en la tercera etapa se introdujo la variable PTF Laboral (Std. $\beta = 0,0900$, $p < .001$) la cual fue estadísticamente significativa, al igual que Elegibilidad (Std. $\beta = 0,1139$, $p < .001$) e Inflación (Std. $\beta = -0,0007$, $p < .05$). Se obtuvo durante esta etapa un R² ajustado de 0,907. La introducción de la nueva variable produjo un cambio Δ R² ajustado de 0,163. El error estándar de los residuos, RSE, fue de 0,0067, 0,006 y 0,0036, respectivamente para las etapas 1, 2 y 3. De esta forma, el modelo resultante fue el siguiente:

Ecuación 8. Modelo de evaluación II

$$\log \frac{\text{Gasto Pensional}}{\text{PIB}} = -0,0436 - 0,0007 \log \log \text{Inflación} + 0,1139 \log \frac{\text{Pensionados RPM}}{\text{Población} > 65 \text{ años}} + 0,0900 \log \text{Productividad Media} + \varepsilon_i$$

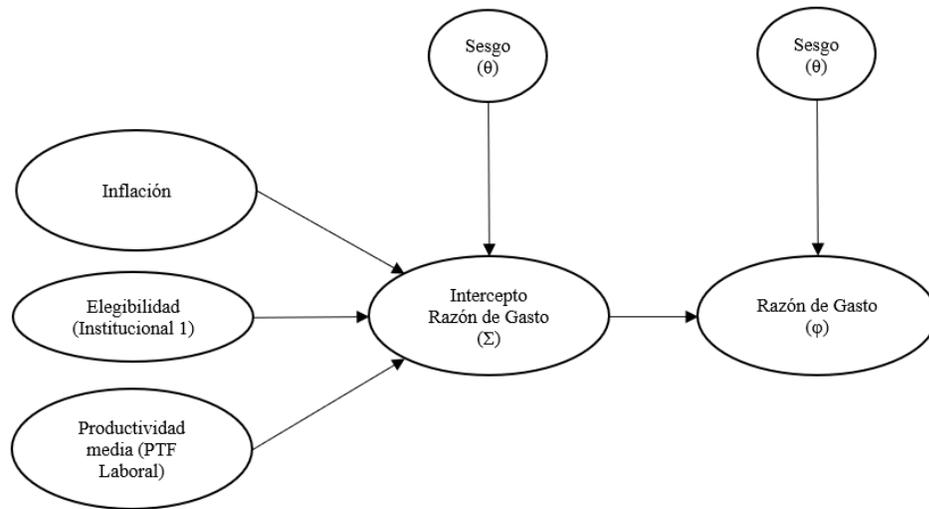
Adicionalmente, se realizaron diversas pruebas para observar el cumplimiento de los supuestos básicos⁴. Se encontró que el modelo superó los test de autocorrelación, homocedasticidad y normalidad. Sin embargo, se encontraron problemas de estacionariedad con las variables Inflación y Elegibilidad que se pueden solucionar aplicando diferencia logarítmica a las series. Esta violación puede sacrificar la bondad de ajuste del modelo. Por ello, se hace necesario corroborar los resultados con el uso de un método no paramétrico como las redes neuronales artificiales, que pueden mejorar los resultados tras estructurar una adecuada configuración y arquitectura de red.

5.1.2. Resultado de la aplicación de redes neuronales

Para realizar la estimación se tomó un conjunto de entrenamiento, con el sesenta por ciento de los datos y un conjunto de prueba, con el cuarenta por ciento de los datos. En ese sentido, se utilizaron los primeros 288 datos de la muestra de variables preseleccionadas para entrenar la red (submuestra de calibración) y los 119 datos restantes para como el conjunto de evaluación (submuestra de verificación). En busca de minimizar la suma de los errores al cuadrado del modelo, evaluado a través del mínimo error cuadrático medio (MMSE), el número de neuronas ocultas en cada capa fue 1. Además de la red neuronal de la figura X, también se realizaron dos redes neuronales de manera jerárquica en donde se introdujeron las variables Inflación y Elegibilidad para comprobar su aporte al MMSE del modelo. También se usaron las variables preseleccionadas antes y después del análisis factorial exploratorio.

Ilustración 1. Arquitectura de la red neuronal

⁴ Para verificar estos supuestos se ejecutaron las pruebas expuestas en la tabla X.



Fuente: Elaboración propia.

En la tabla X se presentan los resultados de la aplicación de las redes neuronales. Se evaluó, el mínimo error cuadrático medio (MMSE) como una medida de bondad de ajuste para verificar si el número de entradas utilizadas contribuía a la calidad del modelo. El umbral utilizado para las derivadas parciales de la función de error como criterio de detención fue de 0.01. Se utilizó para suavizar el resultado del producto cruzado de la covariable o las neuronas y los pesos, una función de activación logística. Mientras tanto la función de error se basó en la suma de las diferencias al cuadrado (Error Sum of Squares, SSE).

Se realizaron 200 iteraciones para las redes NN (1), NN (2) y NN (3) donde de manera jerárquica se agregaron las variables Inflación, Elegibilidad y PTF Laboral como en la regresión por etapas realizada. Mientras tanto, para las redes NN (4) y NN (5), en donde se utilizaron las variables preseleccionadas antes y después del análisis factorial, se realizaron 500 iteraciones. El cambio en el número de iteraciones correspondía a un factor de expansión, en razón del número de entradas, de dos tercios para las redes de la etapa jerárquica y un tercio para las redes de la etapa de preseleccionadas.

Tabla 10. Redes neuronales

Variables	Jerárquica			Preseleccionadas	
	Inflación	Elegibilidad	PTF Laboral	AFE	Completa
	NN (1)	NN (2)	NN (3)	NN (4)	NN (5)
Iteración	59	5	33	442	103
MMSE	0,0648	0,0254	0,0225	0,0026	0,0100

Δ MMSE		0,0000	0,0393	0,0030	0,0199	-0,0074
Umbral (threshold=0.01)	alcanzado	0,0083	0,0076	0,0043	0,0092	0,0086
Pasos		114	279	410	1161	1221
Intercepto a Capa oculta		-3,0205	-0,0059	0,9867	2,0243	0,3679
v12 a Capa oculta					0,7343	-0,2833
v13 a Capa oculta					-1,0264	0,1525
v17 a Capa oculta					0,1146	-0,0409
v25 a Capa oculta					-0,4955	-0,6875
v27 a Capa oculta						0,2014
v28 a Capa oculta						0,1492
v33 a Capa oculta					1,0642	1,0760
v46 a Capa oculta		2,8754	-0,6146	0,6517	0,1089	0,5224
v49 a Capa oculta			3,1029	-3,1689	-1,5713	-0,8630
v56 a Capa oculta					-0,8149	-6,2580
v57 a Capa oculta					0,9141	-2,0743
v61 a Capa oculta				-0,2671	0,0756	1,1142
v63 a Capa oculta					-0,1871	-0,2140
v66 a Capa oculta					-0,6796	0,1974
Intercepto a v68		-1,2090	-2,0142	-0,1896	-0,5579	-0,5420
Capa oculta a v68		-0,8999	4,5578	-1,8768	-1,7467	-1,3048

Fuente: Elaboración propia.

Para las redes neuronales NN (1), NN (2) y NN (3) se demostró que las entradas usadas mejoraron la calidad del modelo. El termino de error MMSE disminuyó entre cada etapa. Su variación al introducir Elegibilidad y PTF Laboral fue de respectivamente 0,0393 y 0,0030, disminuyendo el termino de error. De igual manera, el peso del intercepto a la capa oculta varió positivamente pasando de -3,02 a 0,98. Entre tanto, el intercepto a la razón de gasto se mantuvo negativo

Por otro lado, las redes neuronales NN (4) y NN (5), que contaban con las variables preseleccionadas antes y después del análisis factorial permitieron corroborar que las variables macroeconómicas y microfinancieras consideradas, que fueron las que menor varianza explicada obtuvieron en el análisis factorial, aumentaron el termino de error en la red. La red NN (4) evidenció el menor término de error entre los modelos construidos, en ella las entradas correspondían a las variables preseleccionadas después del análisis factorial. De esta forma, el MMSE en este caso fue de 0,0026. Mientras tanto, la red NN (5), en la cual las entradas correspondían a las variables preseleccionadas antes del análisis factorial, evidenció un aumento en el término de error MMSE de 0,0074 con respecto a la red NN (4) al introducir las variables Tasa de cambio real (v27) y Crecimiento del PIB (% anual) (v28). De esta forma, los resultados entre el análisis factorial y la red neuronal son coherentes en cuanto la varianza explicada de las variables para la

matriz de datos de las variables macroeconómicas no aporta a la significancia y términos de bondad de ajuste, tanto del modelo de regresión como las redes neuronales artificiales.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La evaluación de la sostenibilidad del sistema público de pensiones, a través de los métodos de regresión multivariable tradicionales y redes neuronales artificiales, arrojó resultados interesantes en cuanto los análisis realizados se aproximaron a los determinantes del gasto pensional en Colombia.

En primer lugar, tras la depuración de variables y el análisis de correlaciones el modelo de regresión lineal empleado mostró que la mayor sensibilidad del gasto pensional está acotada por el número de pensionados en el régimen de prima media frente a la población adulta (Elegibilidad). En este punto, aumentos de la razón de pensionados en el régimen de prima media, cercanos al 11%, representaron un aumento del 1% sobre la razón de gasto pensional. Este resultado sería un precedente para entender la influencia de los determinantes del gasto pensional y evaluar bajo una restricción el crecimiento y la sostenibilidad del sistema de prima media en función de la evolución de las variables demográficas. Parece, entonces, sostenerse una regularidad empírica entre la Elegibilidad frente al gasto pensional.

Esta aproximación empírica sobre los determinantes de gasto permitió analizar cómo la restricción de los supuestos básicos limita la capacidad de composición de los modelos y motivan transformaciones de las variables: diferencias logarítmicas, logaritmos, raíces cuadradas, distribuciones inversas, entre otras, que cambian la lectura e interpretaciones de los modelos. En ese sentido, este hecho evidenció las limitaciones de los modelos de regresión paramétricos tradicionales, como lo son los mínimos cuadrados ordinarios, y abren paso a los análisis a través de metodologías no paramétrica, como las redes neuronales artificiales que permiten la evaluación de problemas complejos no sujetos a linealidad.

En segundo lugar, tras emplear el modelo de redes neuronales artificiales las restricciones que suponen la violación de supuestos en los modelos de regresión paramétricos desaparecen, pero se presentan nuevos riesgos, como el sobre entrenamiento o el diseño y la arquitectura de la red. Para este caso, la especificación de la red evitó el sobre entrenamiento minimizando el número de capas ocultas. Se comparó la introducción de las variables de manera jerárquica a la red para analizar a través del término de error y se encontró que la introducción de las variables seleccionadas para el modelo aportó a la capacidad explicativa y contribuyeron de manera positiva sobre la bondad de ajuste. De manera paralela, se encontró que el análisis de componentes principales a partir del cual se buscó

entender la estructura factorial de la matriz de datos fue relevante para la preselección de datos.

A saber, hay que destacar cómo las redes neuronales artificiales fueron una alternativa viable para evaluar si los determinantes del gasto encontrados se ajustaban al modelo, en cuanto los métodos paramétricos dependen de un cumplimiento de supuestos básicos imprescindibles para realizar un modelo fiable. Por medio de los cambios en la estimación del error cuadrático medio (MMSE) se analizó, en términos de bondad de ajuste, como las variables de entrada incidían sobre el modelo. Se encontró que las variables independientes analizadas en el modelo de regresión también aportaron a la arquitectura del modelo de red. También se logró comprobar, a través de la introducción de las variables preseleccionadas, como los resultados del análisis factorial fueron coherentes con la selección de variables del modelo de regresión. La introducción de la variable NN (6) mostró aumentar el término de error y, la introducción de la variable NN (5), aumentó significativamente el número de pasos de la red, lo que implica un riesgo de sobre entrenamiento. Mientras tanto, la selección de las variables NN (1), NN (2) y NN (3) mostraron aportar al modelo en cuanto el error cuadrático medio de la estimación disminuyó en su introducción, sin aumentar significativamente el número de pasos de la red.

Los resultados de cara a los aportes de Elegibilidad demostraron que el factor demográfico fue el más significativo para entender la razón de gasto pensional. Bajo las consideraciones de la transición demográfica, puesta en evidencia con el análisis de la estructura poblacional y, bajo los riesgos institucionales en materia de cobertura, equidad y sostenibilidad, el alto peso de los aportes de la razón de pensionados en RPM sobre la razón de gasto es una señal de alarma y vulnerabilidad con posibilidad de agravarse según la evolución del sistema, apoyado en sus determinantes demográficos e institucionales. Además, la evolución de las transferencias pensionales en el Presupuesto General de la Nación, que desde 2005 se mantiene alrededor del 3,5% del PIB es necesario emprender acciones de reforma.

Dentro de las propuestas de reforma más discutidas se encuentran: Villar y Forero (2018), Asofondos y la Asociación Nacional de Instituciones Financieras (ANIF). Cada una de estas propuestas cuenta con elementos particulares. Sin embargo, las tres visiones tienen elementos comunes como la eliminación de los subsidios regresivos de RPM, el fortalecimiento de Colombia Mayor y la necesidad de combatir la informalidad laboral (Consejo Nacional de Competitividad, 2020). A la luz de los proyectos de reforma se hace necesario avanzar en una solución

concertada que abarque los problemas de prima media y brinde una garantía de sostenibilidad pensional.

La investigación académica derivada de la predicción a través de métodos paramétricos, como la regresión lineal por mínimos cuadrados, y no paramétricos, como las redes neuronales artificiales, continúa siendo un campo de investigación fértil que ha avanzado significativamente y es ampliamente aplicable a problemas de corte transversal, marcos temporales específicos u observaciones con dimensiones temporales y transversales como los datos de panel.

7. REFERENCIAS

- Agrawal, A., Gans, J., & Goldfarb, A. (2019). An economic perspective on Artificial Intelligence. NATO Defense College, 7-15.
- Alchian, A., & Klein, B. (1973). On A Correct Measure of Inflation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 5(1), 173-191.
- Aristizábal, M. (Julio - diciembre de 2006). Evaluación asimétrica de una red neuronal artificial: aplicación al caso de la inflación en Colombia. *Lecturas de Economía*, 65, 73-116.
- Bernanke, B., & Mihov, I. (1998). Monetary Policy. *The Quarterly Journal of Economics*, 113(3), 869-902.
- Bond, M. (1977). A Model of International Investment Income Flows. *Staff Papers (International Monetary Fund)*, 24(2), 344-379.
- Bosch, M., Berstein, S., Castellani, F., Oliveri, M. L., & Villa, J. M. (2015). Diagnóstico del sistema previsional colombiano y opciones de reforma. *Nota técnica*, (825).
- Cardona Arango, D., & Peláez, E. (2012). Envejecimiento poblacional en el siglo XXI: oportunidades, retos y preocupaciones. *Salud Uninorte*, 28(2), 335-348.
- Chiok, C. H. M. (2014). Modelos de regresión lineal con redes neuronales. In *Anales Científicos (Vol. 75, No. 2, pp. 253-260)*. Universidad Nacional Agraria La Molina.
- Christakis, N., Barbaris, V., & Spentzos, A. (2010). A New Approach in Financial Modelling with the Aid of Artificial Neural Networks. *Journal of Algorithms & Computational Technology*, 5(3), 513-529.
- Cogley, T. (2002). A Simple Adaptive Measure of Core Inflation. *Journal of Money, Credit and Banking*, 34(1), 94-113.
- Colpensiones (2020)
https://www.colpensiones.gov.co/pensiones/Publicaciones/afiliados_colpensiones/que_es_la_afiliacion
- Consejo Privado de Competitividad (2020). *Informe Nacional De Competitividad 2019-2020*.

- Corte Suprema de Justicia. (2016) Sentencia T-074/2016. [Mag. Luis Ernesto Vargas Silva]
- Coskuner, G., Jassim, M., Zontul, M., & Karateke, S. (2020). Application of artificial intelligence neural network modeling to predict the generation of domestic, commercial and construction wastes. *Waste Management & Research*, 1-9.
- Ebbinghaus, B., & Whiteside, N. (2012). Shifting responsibilities in Western European pension systems: What future for social models? *Global Social Policy*, 12(3), 266–282.
- Evandrou, M., & Falkingham, J. (2009). Pensions and income security in later life. En J. Hills, T. Sefton, & K. Stewart (Edits.), *Towards a more equal society? Poverty, inequality and policy since 1997* (págs. 157-177). Bristol University Press; Policy Press.
- Even, W., & Macpherson, D. (1994). The Journal of Human Resources. *The Journal of Human Resources*, 29(2), 555-587.
- Farné, S., & Nieto Ramos, A. (2017). ¿A quiénes y cuánto subsidia el régimen pensional de prima media en Colombia? Análisis paramétrico y lecciones de política. *Páginas de Seguridad Social*, 1(2), 39-62.
- Fedesarrollo. (25 de Noviembre de 2019). Elementos para una reforma pensional en Colombia. Obtenido de: https://www.fedesarrollo.org.co/sites/default/files/presentacion_luis_fernando_mejia
- Fernando, V., Cadavid, D., & Molina, J. (junio de 2008). Pronóstico del precio de la energía eléctrica usando redes neuronales artificiales. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*(44), 111 - 118.
- Geman, S., & Bienenstock, E. (1994). Neural Networks: A Review from Statistical Perspective. *Statistical Science*, 9(1), 36-38.
- Ginn, J. (2003). Choice and risk in pensions: gender and class inequalities. En *Gender, pensions and the lifecourse: how pensions need to adapt to changing family forms* (págs. 21-36). Bristol University Press; Policy Press.
- Ginn, J., & Arber, S. (1991). Gender, Class and Income Inequalities in Later Life. *The British Journal of Sociology*, 42(3), 369-396.
- Gleason, C., & Lee, C. (2003). Analyst Forecast Revisions and Market Price Discovery. *The Accounting Review*, 78(1), 193-225.

- Goodman, T., Neamtiu, M., Shroff, N., & White, H. (2014). Management Forecast Quality and Capital Investment Decisions. *The Accounting Review*, 89(1), 331-365.
- Gramlich, E. (1983). Models of Inflation Expectations Formation: A Comparison of Household and Economist Forecast. *Journal of Money, Credit and Banking*, 15(2), 155-173.
- Gurney, K. (1997). *An introduction to neuronal networks*. London: UCL Press.
- Hafeez, A., & Kar, S. (2018). Looking Beyond the Financial Numbers: The Relationship Between Macroeconomic Indicators and the Likelihood of Financial Distress. *Global Business Review*, 1-15.
- Hameed, A., Morck, R., Shen, J., & Yeung, B. (2015). Information, Analysts, and Stock Return Comovement. *The Review of Financial Studies*, 28(11), 3153-3187.
- Hill, M. (2007). Pension scheme adequacy. En *Pensions* (págs. 41-69). Bristol University Press, Policy Press.
- Holmgren, G., Andersson, P., Jakobsson, A., & Frigyesi, A. (2019). Artificial neural networks improve and simplify intensive care mortality pronostication: a national cohort study of 217,289 first-time intensive care unit admissions. *Journal of Intensive Care*, 7(44), 1-8.
- Höpken, W., Eberle, T., Fuchs, M., & Lexhagen, M. (2020). Improving Tourist Arrival Prediction: A Big Data and Artificial Neural Network Approach. *Journal of Travel Research*, 1-20.
- Jabbour, G., & Maldonado, J. (abril - julio de 2009). Predicción de índices bursátiles mediante un sistema híbrido basado en modelos ocultos de Markov y redes neuronales artificiales. *Ciencia e Ingeniería*, 30(2), 127-136.
- Jara, D., Gómez, C., & Pardo, A. (diciembre de 2005). Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales obligatorios en Colombia. *Revista ESPE*(49), 192-239.
- Kumar, M. (2010). Modelling Exchange Rate Returns Using Non-linear Models. *The Journal of Applied Economic Research*, 4(1), 101–125.
- Leitch, G., & Tanner, J. (1991). Economic Forecast Evaluation: Profits Versus the Conventional Error Measures. *The American Economic Review*, 81(3), 580-590.

- Lloyd-Sherlock, P. (2010). Older people, pensions and development. En *Population ageing and international development* (págs. 61-89). Bristol University Press; Policy Press.
- López Castaño, H., & Lasso Valderrama, F. (2012). El Mercado Laboral y El Problema Pensional Colombiano. *Borradores de Economía* (736), 1-71.
- López, M., & Sarmiento G., E. (2019). El Sistema Pensional en Colombia. *Borradores de Economía*(1078), 1 - 45.
- Lora, E., & Sergio, P. (2016). *Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia [en línea]. Quinta Edición*. Obtenido de <http://www.icesi.edu.co/medicion-economica-Colombia-Eduardo-Lora-Sergio-Prada>
- Mankiw, N. Gregory author. (2014). *Macroeconomics*, 8th edition. New York: Worth Publishers.
- Matzenbergera, J. (2013). Neuronal Network based modelling of demand and competing use of forestry commodities for material and energy use. *Energy Procedia*, 40, 156-164.
- Ministerio de Hacienda y Crédito Público. (2019). Marco Fiscal de Mediano Plazo 2019 – 2020. Obtenido de: https://www.minhacienda.gov.co/webcenter/ShowProperty?nodeId=%2FCo nexionContent%2FWCC_CLUSTER-111638%2F%2FidcPrimaryFile&revision=latestreleased
- Montenegro, S., Llano, J., Eslava, D., Karim, F., & Cáceres, J. M. (Octubre de 2018). Un modelo para evaluar el sistema pensional colombiano. *Documentos CEDE*(51), 1-28.
- Montoya, Á. A., Berstein, S., Bosch, M., Huitrón, M. G., & Oliveri, M. L. (2018). Presente y futuro de las pensiones en América Latina y el Caribe. Inter-American Development Bank.
- Morettini (2002). <http://nulan.mdp.edu.ar/1887/1/01486.pdf>
- Ortiz Arangoa, F. (abril - Junio de 2017). Pronóstico de precios de petróleo: una comparación entre modelos garch y redes neuronales diferenciales. *Investigación Económica*, LXXVI (300), 105-126.

- Panda, C., & Narasimhan, V. (2006). Predicting stock returns: an experiment of the Artificial Neuronal Network in indian stock market. *South Asia Economic Journal*, 7(2), 206-218.
- Panda, C., & Narasimhan, V. (2007). Forecasting exchange rate better with artificial neural network. *Journal of Policy Modeling*, 29, 227 - 236.
- Parada Rojas, A. C., & Ríos Bolívar, H. (Enero - abril de 2018). Globalización y desigualdad: un enfoque multidimensional a través de redes neuronales artificiales. *Análisis Económico*, XXXIII(82), 31 - 58.
- Parra, J.; Arias, F.; Bejarano, J.; López, M.; Ospina, J.; Romero, J.; Sarmiento, E. (2020). Sistema pensional colombiano: descripción, tendencias demográficas y análisis macroeconómico. Ensayos sobre Política Económica (ESPE), núm. 96, septiembre, DOI: 10.32468/espe.96
- Peterson, P. (1999). Gray Dawn: The Global Aging Crisis. *Foreign Affairs*, 78(1), 42-55.
- Ramyar, S., & Kianfa, F. (2017). Forecasting Crude Oil Prices: A Comparison Between Artificial Neural Networks and Vector Autoregressive Models. *Computational Economics*, 52(2), 743 - 761.
- Reveiz, A., León, C., Laserna, J. M., & Martínez, I. (2008). Recomendaciones para la modificación del régimen de pensiones obligatorias de Colombia. *Borradores de Economía*(507), 1-28.
- Rivas T, F., & Silva D, M. (2017). La experiencia en Latinoamérica en el ámbito de las pensiones y jubilaciones como parte del sistema de seguridad social. *Actualidad Contable Faces*, 20(34), 1-18.
- Rodríguez-Rueda, P. J., & Turias-Domínguez, I. J. (Marzo de 2017). Una comparativa entre redes neuronales artificiales y métodos clásicos para la predicción de la movilidad entre zonas de transporte. Aplicación práctica en el Campo de Gibraltar, España. *Dyna*, 84(200), 209-216.
- Rosano (2010).
http://www.economia.unam.mx/cladhe/registro/ponencias/569_abstract.pdf
- Ruelas Santoyo, E., & Laguna González, J. (Enero - Junio de 2014). Comparación de predicción basada en redes neuronales contra métodos estadísticos en el pronóstico de ventas. *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias*, IV(12), 91-105.

- Shachmurove, Y. (Enero de 2002). *Applying Artificial Neural Networks to Business, Economics and Finance*. Obtenido de Researchgate: https://www.researchgate.net/publication/4821288_Applying_Artificial_Neural_Networks_to_Business_Economics_and_Finance
- Srivastava, S. (2017). Tradeoff and Forecasting Approach for Social Responsible Investing: Artificial Neural Network. *Vision*, 21(2), 143–151.
- Stansell, S. R., & Eakins, S. G. (2004). Forecasting the direction of change in sector stock indexes: An application of neural networks. *Journal of Asset Management*, 5, 37-48.
- Stewart, J. (2020). Pensions and old age. En *Richard Titmuss: A Commitment to Welfare* (págs. 205-226). Bristol University Press, Policy Press.
- Stickel, S. (1991). Common Stock Returns Surrounding Earnings Forecast Revisions: More Puzzling. *The Accounting Review*, 66(2), 402-416.
- Suzuki, K. (Ed.). (2013). *Artificial Neuronal Networks - Architectures and Applications*. Rijeka: InTech.
- Toporowski, J. (2019). What should guide monetary policy? En S. Konzelmann, S. Himmelweit, J. Smith, & J. Weeks (Edits.), *Rethinking Britain* (págs. 34-37). Bristol University Press; Policy Press.
- Trigo, L., & Sabatino, C. (abril - junio de 2007). Redes Neuronales En La Predicción De Las Fluctuaciones De La Economía A Partir Del Movimiento De Los Mercados De Capitales. *El Trimestre Económico*, LXXIV (294), 415 - 440.
- Varian, H. (2010). *Microeconomía intermedia 9a. edición*.
- Velásques Henao, J. D., & Montoya Moreno, S. F. (Noviembre de 2005). Modelado del Índice de Precios al Consumidor Usando un Modelo Híbrido Basado en Redes Neuronales Artificiales. *Dyna*, 72(147), 85 - 93.
- Velásquez Henao, J. D., & Aldana Dumar, M. A. (2007). Modelado Del Precio Del Café Colombiano En La Bolsa De Nueva York Usando Redes Neuronales Artificiales. *Revista Facultad Nacional de Agronomía*, 60(2), 4129-4144.
- Velásquez Henao, J., & Franco Cardona, C. (Enero - abril de 2010). Predicción de los precios de contratos de electricidad usando una red neuronal con arquitectura dinámica. *INNOVAR. Revista de Ciencias Administrativas y Sociales*, 20(36), 7 - 14.

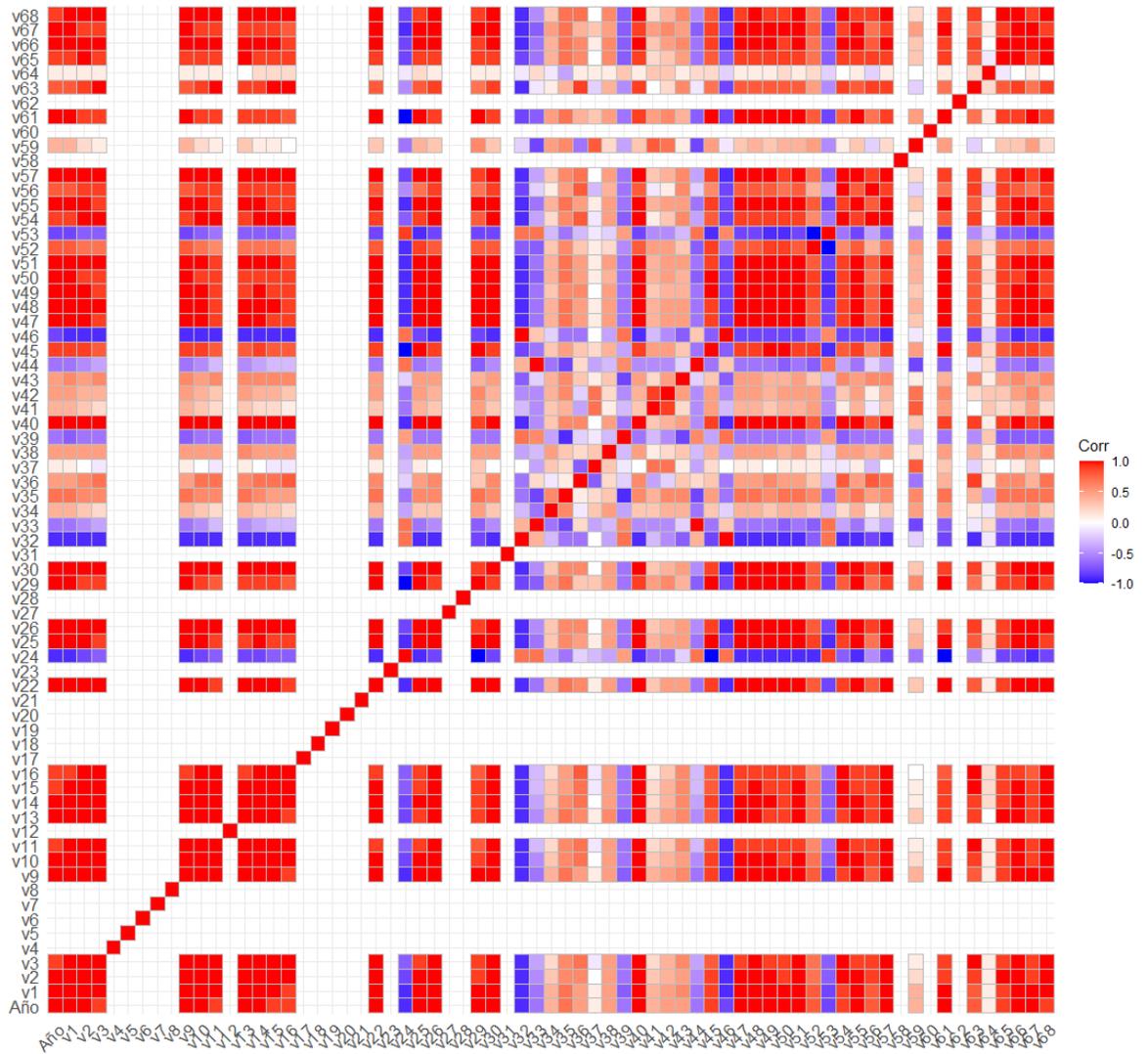
Weber, P., Weber, N., Goesele, M., & Rudiger Kabst. (2018). Prospect for Knowledge in Survey Data: An Artificial Neural Network Sensitivity Analysis. *Social Science Computer Review*, 36(5), 575-590.

Zapata Garrido, L. A., & Díaz Mojica, H. F. (Julio de 2008). Predicción del tipo de cambio peso-dólar utilizando Redes Neuronales Artificiales (RNA). *Pensamiento & Gestión* (24), 29-42.

Zhang, J., & Yi, K.-M. (September de 2016). *Real Interest Rates. Decline and convergence since the 1980s*. Obtenido de Federal Reserve Bank of Minneapolis:
<https://www.minneapolisfed.org/~media/files/pubs/eppapers/16-10/kei-mu-yi-epp.pdf>

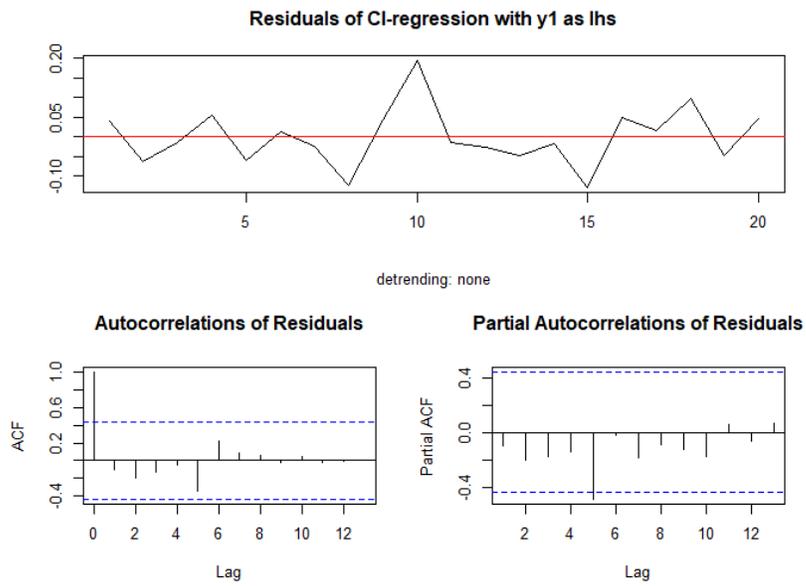
8. ANEXOS

Gráfico 15. Matriz de correlaciones



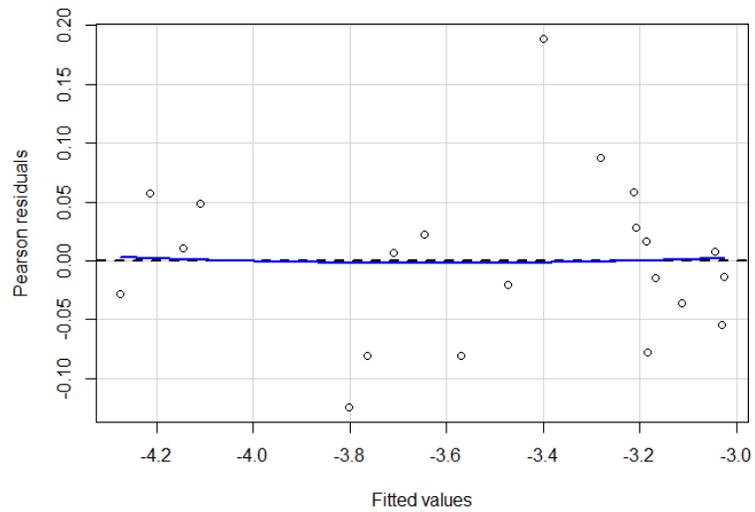
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 16. Prueba de autocorrelaciones



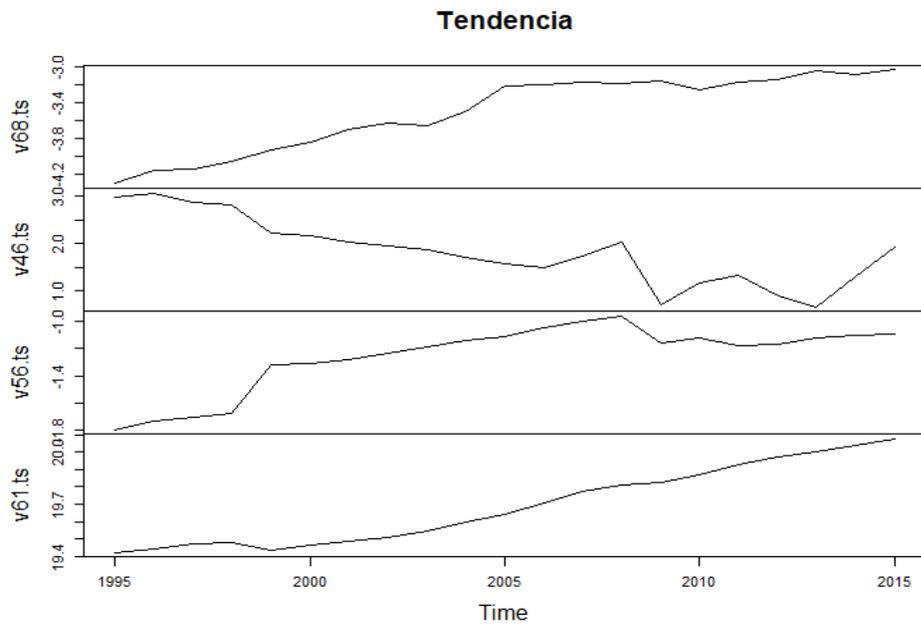
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 17. Prueba de independencia



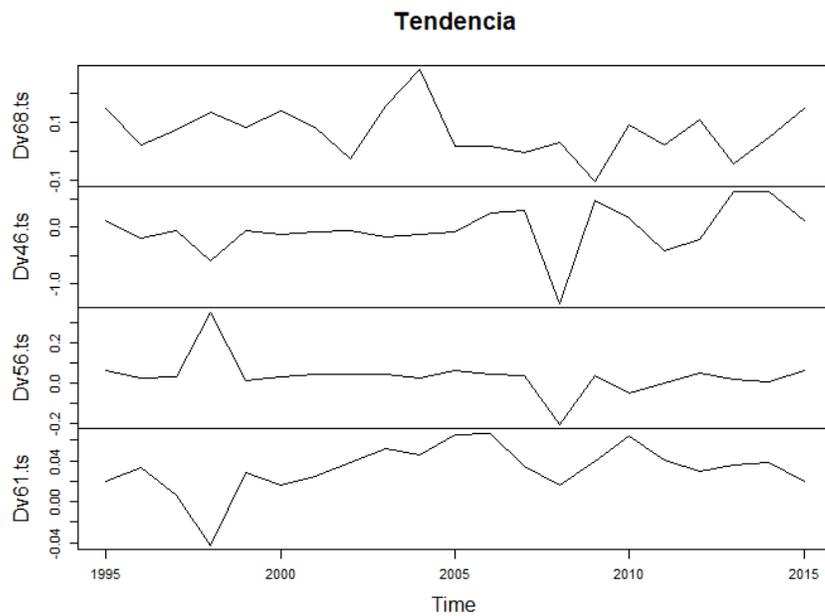
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 18. Estacionariedad



Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 19. Primera diferencia logarítmica



Fuente: Elaboración propia.

Variables utilizadas

Tasa de afiliados

El Sistema General de Pensiones es una institución que busca garantizar el acceso al sistema de protección contra las contingencias derivadas de la vejez, la invalidez y la muerte. En 1993 la ley 100 del mismo año creó un sistema dual de pensiones, diferenciado por un régimen público y un régimen privado. El régimen público de pensiones fue considerado como Régimen de Prima Media (RPM), dirigido por la Administradora Colombiana de Pensiones, Colpensiones. Mientras tanto, el régimen privado o Régimen de Ahorro Individual (RAIS) dio el paso a las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFPs), las cuales son instituciones privadas encargadas de administrar los ahorros pensionales de sus clientes. En este régimen dual los empleados formales o independientes se encuentran causados a cotizar al régimen que elijan. Además de los aportes causados, entendidos como una pensión obligatoria, también pueden, a través de las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFPs), cotizar a un fondo de pensión voluntaria como un mecanismo para lograr una pensión más alta. Mientras tanto, a través de la ley 50 de 1990 se incorporó el Régimen Especial de Cesantías dispuesto por las Administradoras de Fondos de Cesantías con el propósito de funcionar como un fondo de auxilio que le permitiera a los individuos no quedar desprotegidos después de haber quedado desempleados.

La Superintendencia Financiera de Colombia (SIF) en función de cumplir su objetivo de supervisor tiene consolidadas las bases de datos con los registros sobre número de afiliados, valor del fondo, estados financieros y portafolio de inversión de los Fondos de Pensiones Obligatorias, Fondos de Pensiones Voluntarios y Fondos de Cesantías. Mientras tanto el Departamento Nacional de Estadística (DANE) a través de los censos poblacionales y el Censo de Población y Vivienda de 2018 informa el número de habitantes dentro del territorio nacional. De esta forma, se obtuvieron los datos de expedidos por la Superintendencia Financiera de Colombia para obtener el número de afiliados de los fondos de pensiones obligatorias, fondo de pensiones voluntarios, fondo de cesantías y régimen prima media. Mientras tanto a través del DANE se obtuvieron los datos poblacionales. La serie de tiempo con la cual se trabajo estaba comprendida entre 1995 y 2018.

Se encontró la *tasa de afiliación* (TA) sumando el número de afiliados a los fondos de cesantías, pensiones obligatorias, pensiones voluntarias y el régimen de prima media en razón de la población total para un periodo de tiempo t comprendido entre 1995 y 2018. De tal manera que:

Ecuación 9. Tasa de afiliación (TA)

$$TA = \sum_{t=1995}^{2018} \frac{aficesantias_t + afiobligatoria_t + afivoluntario_t + afirpm_t}{población_t}$$

Población económicamente activa, tasa de desempleo y empleo vulnerable

La clasificación laboral de la población en la economía se da la *población total* (PT) es hallada a partir de los censos poblacionales realizados, en el caso colombiano, por el Departamento Nacional de Estadística (DANE). Dentro de la *población total* (PT) se encuentra la *población en edad de trabajar* (PET), la cual está compuesta, según la metodología del DANE, por personas mayores de 12 años en zonas urbanas y de 10 zonas rurales. A su vez, dentro de la *población en edad de trabajar* (PEA) se encuentra la *población económicamente activa* (PEA), entendida como la fuerza laboral de la economía, la cual incluye a quienes trabajan o están buscando empleo en el periodo de referencia. De esta forma, la *población económicamente activa* (PEA) incluye el número de *ocupados* (O) y *desocupados* (D) (Lora & Sergio, 2016). Mientras tanto, la Organización Internacional del Trabajo (OIT) a partir de sus estimaciones modeladas aprecian la *tasa de desempleo* (D). A través de esta tasa se relaciona el número de desempleados en razón de la *población económicamente activa* (PEA) de tal manera que:

Ecuación 10. Tasa de desempleo (D)

$$D = \frac{Desempleados}{PEA} * 100$$

Se obtuvieron los datos de la *población económicamente activa* (PEA) y la *tasa de desempleo* (D) a través de las estadísticas asentadas en el banco de datos del Banco Mundial en donde están depositados los indicadores del desarrollo por países.

Por otro lado, el empleo vulnerable se refiere a los trabajadores familiares no remunerados y a los trabajadores autónomos como porcentaje del empleo total. El empleo vulnerable está caracterizado por tener un nivel inadecuado de ingresos, baja productividad y condiciones de trabajo difíciles. Este empleo vulnerable se encuentra estrechamente vinculado con el número de personas viviendo en pobreza. De esta forma la *tasa de empleo vulnerable* (EV) está definida de la siguiente forma:

Ecuación 11. Tasa de empleo vulnerable (EV)

$$EV = \frac{\text{Trab. por cuenta propia} + \text{Trab. familiares auxiliares}}{PEA} * 100$$

Tasa de interés real

La tasa de interés de tipo real (r) puede ser entendida como el consumo adicional que podemos obtener en el futuro (Varian, 2010). En una economía la tasa de interés real puede ser entendida como el precio del dinero en el mercado financiero que puede ser determinado por un número indeterminado de fuerzas, algunas transitorias (Zhang & Yi, 2016) que pueden afectar la inflación como movimientos en los precios del petróleo, cambios en la política fiscal y ajustes salariales y otras que afectan la tasa de interés nominal como la política monetaria. Sin embargo, los determinantes de la tasa de interés real se pueden reducir a la inflación y el tipo de cambio nominal, de tal forma que:

Ecuación 12. Tasa de interés real (r)

$$r = \frac{(i - \pi)}{(1 + \pi)}$$

Las observaciones utilizadas en este estudio correspondientes a la serie histórica de la tasa de interés de tipo real (r) fueron obtenidas a partir del banco de datos del Banco Mundial. Para el caso de la tasa de interés de tipo real el Banco Mundial se respalda en base al Fondo Monetario Internacional y sus Estadísticas Financieras Internacionales y archivos de datos, a partir de datos del Banco Mundial sobre el deflactor del PIB.

PIB y PIB per cápita (% del crecimiento anual)

El Producto Interno Bruto (PIB) es una medida utilizada para medir el desempeño económico de una nación. Agrega los bienes y servicios producidos en un espacio geográfico, generalmente un país, en un periodo de tiempo específico. Esta medida solo toma la producción nueva.

Mientras tanto, el PIB per cápita determina la producción del producto interno en razón de la población total, de tal manera que permite evaluar qué proporción del producto se le puede asignar estadísticamente a cada habitante. Debido a la heterogeneidad del ingreso y teniendo en cuenta que esta medida puede ser entendida como un promedio se debe tener en cuenta que no es totalmente fidedigna, así que, si bien puede tenerse en cuenta como una medida de referencia sobre la producción, no refleja de manera exacta el comportamiento individual de los agentes. De esta manera, el PIB per cápita (PIB pc) puede ser entendido de la siguiente manera:

Ecuación 13. PIB per capita

$$PIB\ pc_t = \frac{PIB_t}{Población_t}$$

Mientras tanto, el crecimiento del PIB y del PIB per cápita es evaluado como una tasa de crecimiento de tal forma que la tasa de crecimiento del PIB (Δ PIB %) y el PIB per cápita (Δ PIB per cápita) puede ser entendida de la siguiente manera:

Ecuación 14. Tasa de crecimiento PIB

$$\Delta PIB_t = \left(\frac{PIB_t}{PIB_{t-1}} \right)^{\frac{1}{10}} - 1$$

Para Colombia el PIB es medido periódicamente y expuesto generalmente de manera trimestral y anual por el DANE. Para este estudio, los datos fueron extraídos a partir del banco de datos del Banco Mundial y que a su vez tiene como fuente el DANE.

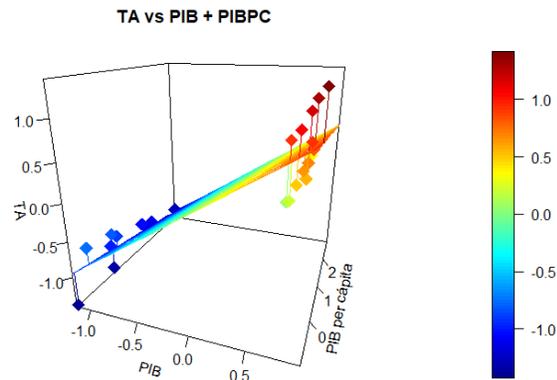
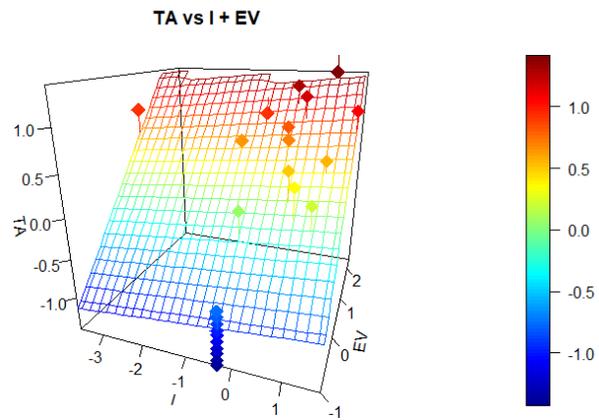
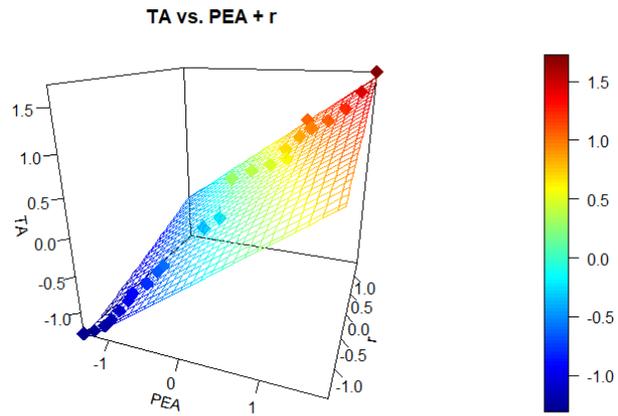
Índice de Precios al Consumidor Inflación (% anual) e Inflación

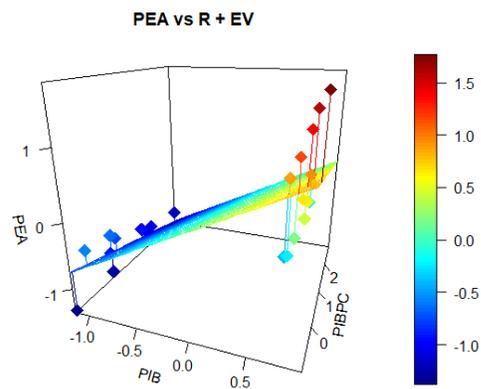
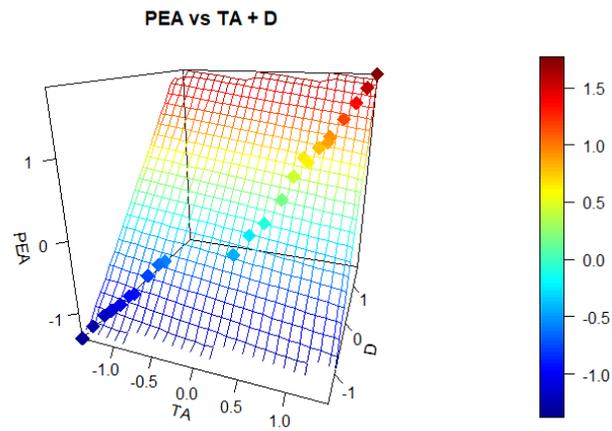
El Índice de Precios al Consumidor (IPC) evalúa la variación promedio de los precios de bienes y servicios con respecto a un año base. Este indicador es un índice de canasta fija, es decir, se evalúa a partir de una cesta de bienes y servicios predeterminada. Este es un índice de precios de tipo Laspeyres, por lo que se evalúan los precios ponderados por las cantidades frente al periodo base.

En Colombia la canasta fija se determina a partir de una encuesta de ingresos y gastos familiares. Además, se establece un sistema de ponderación para promediar las variaciones individuales de cada artículo de la canasta y posteriormente realizar un seguimiento a este. El número de artículos con los cuales cuenta la canasta familiar delimitada en Colombia es cercano a 405.

Un incremento generalizado y continuo de los precios de en una economía se le denomina inflación. En este caso, el incremento de los precios en la canasta familiar es una buena aproximación a la variación de los artículos más transados regularmente por los hogares. Sin embargo, existen otras formas de realizar las mediciones sobre la inflación, entre ellos el deflactor implícito de cuenta nacionales y el Índice de Precios al Productor (IPP). En este caso se utilizaron los datos del IPC como referencia para determinar la inflación, tal como es habitual. Los datos se obtuvieron del banco de datos del Banco Mundial que a su vez tienen como fuente al DANE.

Gráfico 20. Correlaciones 3D





Código

```
library(gmm)
```

```
library(MASS)
```

```
library(car)
```

```
library(ggplot2)
```

```
library(lmtest)
```

```
library(nlme)
```

```
library(tseries)
```

```
library(stargazer)
```

```
ldata <- log(data)
```

```
RI <- lm(v68 ~ v46 + v56 + v59)
summary(RI)
adf.test(v68)
adf.test(v46)
adf.test(v56)
adf.test(v59)
adf.test(diff(log(v68)))
adf.test(diff(log(v46)))
adf.test(diff(log(v56)))
adf.test(log(v59))
DLv46 <- diff(log(v46))
DLv56 <- diff(log(v56))
RIDL <- lm(v68 ~ DLv46 + DLv56 + v59)
dwtest(RI)
bptest(RI)
shapiro.test(v68)
shapiro.test(v46)
shapiro.test(v56)
shapiro.test(v59)
hist(v68)
hist(v46)
hist(v56)
hist(v59)
vif(RI)
Modelo <- as.data.frame(Complete)
Trainset <- as.data.frame(Trainset)
```

```

Testset <- as.data.frame(Testset)
attach(c(Modelo, Trainset, Testset))
library(neuralnet)
nn_pre1 <- neuralnet(v68 ~ v12 + v13 + v17 + v25 + v33 + v46 + v49 + v56 + v57 +
v61 + + v63 +v66,
                    data=Modelo, hidden=1, linear.output=TRUE, threshold=0.01,
rep=500)
plot(nn_pre1)
nn_pre1$result.matrix
nn_pre2 <- neuralnet(v68 ~ v12 + v13 + v17 + v25 + v27 + v28 + v33 + v46 + v49 +
v56 + v57 + v61 + + v63 +v66,
                    data=Modelo, hidden=1, linear.output=TRUE, threshold=0.01,
rep=500)
plot(nn_pre2)
nn_pre2$result.matrix
nn_jerarquica1 <- neuralnet(v68 ~ v46,
                           data=Modelo, hidden=1, linear.output=TRUE, threshold=0.01,
rep=200)
nn_jerarquica2 <- neuralnet(v68 ~ v46 + v56,
                           data=Modelo, hidden=1, linear.output=TRUE, threshold=0.01,
rep=200)
nn_jerarquica3 <- neuralnet(v68 ~ v46 + v56 + v61,
                           data=Modelo, hidden=1, linear.output=TRUE, threshold=0.01,
rep=200)
plot(c(nn_jerarquica1, nn_jerarquica2, nn_jerarquica3))
nn_jerarquica1$result.matrix
nn_jerarquica2$result.matrix
nn_jerarquica3$result.matrix

```

```
nn_train <- neuralnet(v68 ~ v46 + v56 + v61,  
                      data=Trainset, hidden=c(1,1), linear.output=TRUE, threshold=0.01,  
                      rep=20)  
nn_train$result.matrix  
nn_test <- neuralnet(v68 ~ v46 + v56 + v61,  
                    data=Testset, hidden=c(1,1), linear.output=TRUE, threshold=0.01,  
                    rep=2)  
nn_train$result.matrix  
plot(nn_train)  
nn_test$result.matrix  
plot(nn_test)
```