Optimización de carteras a la luz de la teoría de decisión fuzzy

Portfolio Optimization in light of the theory of fuzzy decision

Jairo Alexander González Bueno[1] Sandra Milena Díaz Quintero[2] Jairo Núñez Rodriguez[3]

[1]Magister en Gerencia de Negocios, Docente Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga, jairoa.gonzalez@upb.edu.co
[2] Especialista en Finanzas, Docente Universidad Pontificia Bolivariana, sandra.diaz@upb.edu.co
[3]Magister en Ingeniería Avanzada de Producción, Logística y Cadena de Suministro, Docente Universidad Pontificia Bolivariana, jairo.nunez@upb.edu.co

Recibido: Septiembre 23 de 2016 - Aceptado: Octubre 4 de 2016
http://dx.doi.org/10.18566/puente.v10n2.a11

***Resumen*— Los conceptos de optimización y diversificación de la cartera han sido fundamentales para el desarrollo y la comprensión de los mercados financieros y la toma de decisiones financieras. Por esta razón, resulta oportuno realizar una revisión de los métodos de optimización de carteras a la luz de la teoría de decisión fuzzy. Es este propósito, en la primera parte de este documento se realiza una revisión de las medidas de riesgo utilizadas en la selección de carteras, presentando sus ventajas y desventajas. En la segunda parte, se efectúa el análisis de los modelos de selección de carteras basados en la programación matemática fuzzy, y aquellos en los cuales se modelizan la imprecisión y la incertidumbre del rendimiento futuro mediante distribuciones de posibilidad y de credibilidad.**

Palabras claves: Lógica Fuzzy, Optimización de Carteras, Selección de Carteras.

Abstract— The concepts of optimization and diversification of the portfolio have been fundamental for the development and understanding of the financial markets and the financial decison making. For this reason, it is appropriate to review the portfolio optimization methods in light of the theory of fuzzy decision. Therefore, in the first part of this paper, a review of risk measures used in the selection of portfolios is done highlighting both its advantages and disadvantages. In the second part, the analysis of the portfolio selection methods is done based on the fuzzy mathematical programming and those where the imprecision and uncertainty of future performance are modeled through possibility and credibility distributions.

Key words: Fuzzy logic, portfolio optimization, portfolio selection.

I. INTRODUCCIÓN

La selección de carteras es probablemente una de las áreas más dinámicas de la moderna teoría financiera. Tiene una amplia conexión con técnicas de preferencia en un ambiente de incertidumbre, con técnicas de predicción de series temporales estacionarias y no estacionarias, y con el comportamiento de los precios estocásticos. La optimización de la asignación de activos está diseñada como un conjunto de metodologías que ensamblan los componentes antes mencionados para obtener una política de ponderación, en lugar de sistemas integrados independientes [1]. En este propósito, la optimización de carteras se ocupa de encontrar las proporciones óptimas de capital que deben invertirse en cada uno de los activos, con el fin de lograr un equilibrio entre la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo. La base de la Teoría Moderna de Selección de Carteras fue establecida en el año 1952 por Harry Markowitz [2]. En este modelo tradicional se toma la esperanza matemática y la varianza del retorno de una cartera como las medidas de rendimiento y riesgo, y mediante una solución de programación cuadrática se determina la cartera óptima [3].

El trabajo seminal de Markowitz ha tenido un alto impacto tanto en la investigación académica como la industria financiera [4]. Al realizar algunas búsquedas en Internet a partir de la redacción de este documento se revelan que 35.300 artículos en Google Scholar citan el articulo original de Markowitz "Portfolio Selection''. Cuando se busca ''Modern Portfolio Theory'' se obtiene aproximadamente

1.200.000 aciertos en Google, 7.100 videos en YouTube, 170 libros en Amazon y miles de tweets en Twitter.

No obstante, al realizar una comparación entre los supuestos simplistas del modelo inicial de Markowitz y las condiciones existentes en el mundo real a las que se enfrentan los decisores, ha llevado a la necesidad de mejorarlo, y como consecuencia, se ha producido una creciente complejidad en los modelos que abordan el problema de selección de cartera [5]. En el orden de las ideas anteriores, el modelo de media-varianza (MV) [2], ha sido extendido mediante la introducción de nuevas medidas del riesgo de la inversión: semi-varianza [6], media-desviación absoluta [7], media-desviación semi-absoluta, [8], valor-en-riesgo [9], entre otros, y de factores que permiten modelizar los requisitos del inversionista y/o de los mercados financieros (costes de transacción, horizonte multi-periodo, cardinalidad restringida, etc.) [10].

Algunos de los estudios anteriormente mencionados se basan en un marco probabilístico, donde los modelos de optimización fueron desarrollados bajo el supuesto de que el comportamiento futuro de un activo puede ser captado correctamente con los datos históricos de éste. Es decir, que es posible caracterizar el rendimiento de activo utilizando una variable aleatoria con una distribución de probabilidad de los rendimientos [11]. Sin embargo, hay muchos factores que no son aleatorios, por ejemplo, la vaguedad y ambigüedad asociada de manera natural con varios tipos de expresiones lingüísticas como de "alto riesgo", "baja rentabilidad", y "baja liquidez" utilizados por los inversores y los expertos en inversiones [12], [13] y [14], para la información de los mercados financieros. Debido a la información vaga y ambigua, los investigadores han utilizado la teoría de conjuntos fuzzy [15] en el problema de selección de la cartera para captar las preferencias de carácter subjetivo de los inversionistas. Al darse cuenta de la importancia de la teoría de los conjuntos difusos, cada vez más los investigadores han estudiado el problema de la optimización de carteras en entorno difusos [11], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24] y [25].

Sobre la base de las consideraciones anteriores, la finalidad de este artículo es presentar un análisis de los métodos de optimización de carteras a la luz de la teoría fuzzy. Para llevar a cabo este estudio, este trabajo se organiza de la siguiente manera: el numeral 2 presenta una revisión de la literatura relacionada con las medidas de riesgo utilizadas en la selección de carteras; el numeral 3 se centrará en el análisis de la optimización de carteras aplicando metodologías fuzzy y finalmente el numeral 4 presenta las conclusiones.

I. MEDIDAS DE RIESGO UTILIZADAS EN LA SELECIÓN DE CARTERAS

A. Modelo de Media-Varianza:

Markowitz [2] y [26] proporcionó una respuesta a la pregunta fundamental: ¿Cómo debe un inversionista asignar el capital entre las posibles opciones de inversión? El autor señalo que la elección apropiada de los criterios depende de la naturaleza del inversionista. Cada tipo de inversionista debe seleccionar los detalles del análisis de la cartera de una forma adecuada. No obstante, los dos criterios que son comunes a todos los inversionistas son el retorno esperado (media) y varianza de retorno (riesgo). Markowitz asumió que las "creencias" o proyecciones sobre los activos siguen las mismas reglas de la teoría de probabilidad, las cuales obedecen a las variables aleatorias. A partir de este supuesto, se deduce que (i) el rendimiento esperado de la cartera es un promedio ponderado de los retornos esperados de los activos individuales, y (ii) la varianza del rendimiento de la cartera es una función particular de las varianzas y covarianzas entre los activos y sus pesos en la cartera. En este propósito, los inversionistas deben considerar conjuntamente el riesgo y el retorno, y de esta forma determinar la asignación de capital entre las diferentes alternativas de inversión, sobre la base del equilibrio entre ellas.

Por su parte, Markowitz sugirió que la selección de carteras debe basarse en las creencias razonables sobre el futuro, en lugar de las actuaciones anteriores per se. Las decisiones basadas en actuaciones pasadas por sí solas asumen, en efecto, que los rendimientos promedios del pasado son una buena estimación de la rentabilidad "probable" en el futuro; y la variabilidad de la rentabilidad en el pasado es una buena medida de la incertidumbre del retorno en el futuro [26].

A continuación, se presenta la formulación matemática del modelo de media-varianza propuesto por Markowitz [2]:

Definición 2.1.: Rendimiento del activo:

El rendimiento del activo se expresa como la tasa de rendimiento que se define durante un período dado como (Note que el período de retorno puede ser un día, una semana, un mes o un año) [26]:

$$\mathrm{rit} = \frac{(\mathrm{pit}) - (\mathrm{pit} - 1) + (\mathrm{dit})}{(\mathrm{pit} - 1)} \qquad (1)$$

Donde:
ri = Variable aleatoria que represente la tasa de retorno (por período) del i-ésimo activo (i = 1, 2, ..., n).
pit = Precio de cierre del periodo actual
$\mathrm{pit} - 1$ = Precio de cierre del periodo anterior
dit = Dividendo(s) para el periodo

Definición 2.2.: Portafolio:

Es una colección de dos o más activos representados por una n-tupla ordenada Θ = (x1, x2, ..., xn). El retorno (por periodo) de una cartera es dado por [26]:

$$E\,[Ri] = \sum_{i=1}^{n} ri\;xi \qquad 2)$$

Donde:
E [Ri] = Rentabilidad esperada de la cartera
ri = Variable aleatoria que represente la tasa de retorno (por período) del i-ésimo activo (i = 1, 2, ..., n).
xi = La proporción del total de los fondos invertidos en el i-ésimo activo.

Markowitz sugirió que la varianza, la cual mide dispersión del rendimiento esperado se puede utilizar para cuantificar el riesgo de la cartera. La varianza del i-ésimo activo denotada por $\sigma^2 i$ se expresa como [26]:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} . \sum_{j=1}^{n} xi\;xj\;\sigma ij$$

Donde:
σ^2 = Riesgo de la cartera
xi = La proporción del total de los fondos invertidos en el i-ésimo activo
xj = La proporción del total de los fondos invertidos en el j-ésimo activo
σij = Covarianzas entre los retornos de los activos ri y rj

Ahora se presentará dos formulaciones diferentes del modelo de Markovitz de media-varianza basado en los siguientes supuestos [26]:

(i) Los precios de todos los activos en cualquier momento son estrictamente positivos.
(ii) La tasa de rendimiento Ri (i = 1, 2, ..., n) es una variable aleatoria que toma valores finitos.
(iii) Divisibilidad: Un inversor puede poseer una fracción de un activo.
(iv) Liquidez: Un activo puede ser comprado o vendido en cualquier cantidad al precio de mercado.
(v) No hay costos de corretaje ni de transacción.
(vi) No se permite la venta en corto de un activo.

Caso 1:

Cartera de mínima varianza dado un nivel de rentabilidad deseado:

$$\text{Min}\quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} . \sum_{j=1}^{n} xi\;xj\;\sigma ij$$

5

Sujeto a:

$$E\,[Ri] = \sum_{i=1}^{n} ri\;xi$$

$$\sum_{i=1}^{n} xi = 1 \qquad (4)$$

$$xi\ \geq 0\ i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (5)$$

Caso 2:

Cartera de máxima rentabilidad dado un nivel de riesgo deseado:

$$\text{Max}\ \ E\,[Ri] = \sum_{i=1}^{n} ri\;xi$$

Sujeto a:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} . \sum_{j=1}^{n} xi\;xj\;\sigma ij$$

$$\sum_{i=1}^{n} xi = 1 \qquad (4)$$

$$xi\ \geq 0\ i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (5)$$

Definición 2.3.: Frontera Eficiente:

El conjunto factible (también conocido como conjunto de oportunidad) representa todas las carteras que se podrían formar de un grupo de N valores [27]. Los puntos, A, B, C, D, E, F, de la figura 1 son ejemplos de dichas carteras.

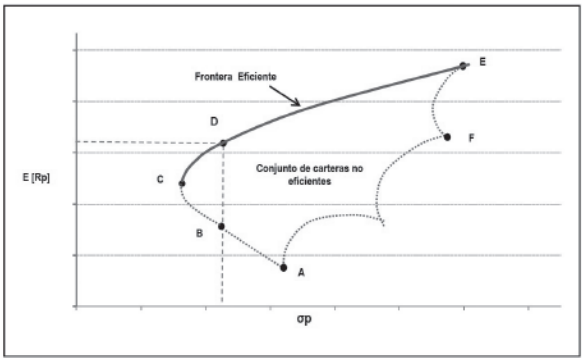

Figura 1. Conjunto Factible y Frontera Eficiente
Fuente: Elaboración Propia

A las carteras ubicados sobre la línea gruesa entre los puntos C y E se les denomina carteras eficientes, pues une todas las combinaciones de carteras de títulos eficientes, es decir aquellos que tienen el mayor rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado. El punto C representa la cartera de mínima varianza, es decir, la combinación de títulos en dicha cartera representan el menor riesgo posible. Así mismo, el punto B representa una cartera ineficiente, una persona no invertiría en una cartera B sencillamente porque la cartera D es mejor (Ofrece un mayor retorno esperado al mismo nivel de riesgo). Dentro de la frontera eficiente, el nivel de aversión al riesgo de un inversionista (preferencia en cuanto a riesgo y rentabilidad) influirá en la elección de la cartera de mínima varianza C o la cartera de máxima rentabilidad esperada E [2].

Después de haber presentado las principales consideraciones del modelo de media-varianza, se evidencia que la estrategia de "maximizar el retorno y minimizar el riesgo" generalmente no se cuestiona. No obstante, la cuestión referente al cálculo del riesgo como la varianza de los rendimientos de los títulos, ha generado varias críticas entre los investigadores y académicos, las cuales se relacionan a continuación [5] y [26]:

i) El supuesto de una distribución normal multivariable de la tasa de rendimiento de los activos no se mantiene en la práctica (las distribuciones son típicamente asimétricas);
ii) 2) Los enfoques comunes no tienen en cuenta las preferencias del inversor individual, quien a veces prefiere las carteras que se encuentran detrás de la frontera no dominada;
iii) El uso de la varianza penalización los rendimientos por encima y por debajo del rendimiento esperado;
iv) Los resultados de los problemas de programación cuadrática a gran escala son difíciles de resolver (complejidad computacional),
v) Para los mercados reales, el tamaño de la matriz de varianza-covarianza puede ser muy grande y, por lo tanto, difícil de estimar

Varios autores trataron de aliviar estas dificultades utilizando diversos esquemas de aproximación. El modelo de índice único de Sharpe [28] es un avance en esta dirección. Este autor señalo que, si el problema de la selección de la cartera pudiera formularse como un problema de programación lineal, las perspectivas de las aplicaciones prácticas serían mejoradas. En efecto, en las últimas décadas se han hecho varios intentos para linealizar el modelo de optimización de cartera, las cuales se analizan en los siguientes apartados.

B. *Modelo de Media-Semi-Varianza:*

De acuerdo con los razonamientos que se presentaron respecto a varianza en el apartado anterior, es necesario remplazarla por una medida de riesgo de corrección a la baja (downside risk), i.e., una medida que sólo considera las desviaciones negativas de un nivel de retorno de referencia.

La semi-variancia es una las medias downside risk más conocidas, y fue originalmente introducida por Markowitz [29] y utilizadas en modelos de selección de cartera de media semi-varianza [30], [31] y [32]. Su ventaja sobre la varianza es que la semi-variancia no considera valores más allá del valor crítico (i.e., ganancias) como riesgo; por lo tanto, es una de las medidas más apropiadas del riesgo cuando los inversores están preocupados por el bajo rendimiento de la cartera en lugar del exceso de rendimiento [26], [30] y [31].

La semi-variancia es el valor esperado de las desviaciones negativas al cuadrado de los posibles resultados del rendimiento esperado. El riesgo de cartera medido como semi-variancia se define como [26]:

$$\mathrm{SV} = \mathrm{E}\left[\left[\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi} - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi}\right]\right]^{-}\right]^{2}\right] \qquad (6)$$

En el modelo de selección de cartetas de media semi-varianza, no es necesario calcular la matriz de varianza-covarianza, no obstante, la distribución conjunta de los activos si es necesaria. Así mismo, es importante resaltar que esta medida de riesgo trata de minimizar la dispersión de la rentabilidad de la cartera con respecto a la rentabilidad esperada, pero sólo cuando la primera es inferior a la última. Note que, si todos los retornos de distribución son simétricos o tienen el mismo grado de asimetría, entonces la semi-variancia y la varianza producirán el mismo conjunto de carteras eficientes [26] y [31].

Utilizando la semi-variancia como medida de riesgo, el modelo de optimización de la cartera para minimizar la semi-variancia dado un nivel de rentabilidad deseado es [26]:

$$\mathrm{Min}\quad \mathrm{SV} = \mathrm{E}\left[\left[\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi} - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi}\right]\right]^{-}\right]^{2}\right]$$

Sujeto a:

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{Ri}] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ri\ xi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{xi} = 1$$

$$xi \ \geq 0 \; i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

C. *Modelo de Media-Desviación Absoluta:*

Konno y Yamazaki [33] propusieron un modelo de selección de la cartera utilizando la desviación absoluta como medida alternativa para cuantificar el riesgo. Una de las principales ventajas del modelo de media-desviación absoluta obedece a que puede ser tratado como un problema de programación lineal, permitiendo de esta forma aplicarlo en un gran número de activos [10].

Los autores [33] compararon los modelos de media-varianza y de media-desviación absoluta, en un ambiente en el cual la distribución conjunta de los rendimientos de los activos se asume como normal multivariante. Los resultados obtenidos en el modelo de media-desviación absoluta, provee resultados similares a los obtenidos en el modelo de media-varianza, aunque en la práctica se obtienen carteras óptimas dispares. Esto obedece al hecho de que cada uno de los modelos utiliza diferentes estadísticos para estimar los parámetros de entrada del problema de optimización [34]; no obstante, ni el modelo de media-varianza, ni el modelo de media-desviación absoluta es superior al otro desde el punto de vista de la estabilidad y rendimiento esperado de la inversión [10].

La desviación absoluta de una variable aleatoria es el valor absoluto esperado de la diferencia entre la variable aleatoria y su media. El riesgo de la cartera medido como desviación absoluta se expresa como [26]:

$$\mathrm{DA} = \mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi} - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi}\right]\right|\right] \qquad (7)$$

Utilizando la desviación absoluta como medida de riesgo, el modelo de optimización de la cartera para minimizar la desviación absoluta dado un nivel de rentabilidad deseado [26]:

$$\mathrm{Min\ DA} = \mathrm{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi} - \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rixi}\right]\right|\right]$$

Sujeto a:

$$\mathrm{E\,[Ri]} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ri\ xi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{xi} = 1$$

$$xi \ \geq 0 \ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Gupta et al [26] señalaron que el valor de r_{min} para el modelo de media-desviación absoluta es mayor que para el modelo de media-varianza y el modelo de semi-variancia media. Es otras palabras, el modelo de media-desviación absoluta proporciona un valor más alto de r_{min} que el modelo de media-varianza; y el modelo de media-varianza proporciona un valor más alto de r_{min} que el modelo medio semi-variancia.

D. Modelo de Media-Desviación Semi-Absoluta:

Speranza [35] demostró que al asumir la función de riesgo como una combinación lineal de las media-desviación semi-absoluta, i.e., las desviaciones medias por debajo y por encima del rendimiento de la cartera, se puede obtener un modelo equivalente al modelo de desviación media-absoluta [36], siempre y cuando la suma de los coeficientes de la combinación lineal sea positiva. En este propósito, este modelo es equivalente al modelo de Markowitz, si los rendimientos se distribuyen normalmente. Por otra parte, Speranza demostró que, mediante una selección adecuada de los coeficientes de la combinación, 1 y 0 para las desviaciones por debajo y por encima de la media, respectivamente, es posible reducir sustancialmente el número de restricciones a la mitad en comparación con el modelo de media-desviación absoluta [26].

La desviación semi-absoluta del rendimiento de la cartera por debajo del rendimiento esperado en el período pasado t, t = 1, 2,…, T puede expresarse como:

$$DSA = \sum_{t=1}^{T} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{rit} - \mathrm{ri})\ \mathrm{xi}\ \right| + \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{rit} - \mathrm{ri})\ \mathrm{xi}}{2\mathrm{T}} \qquad (8)$$

E. Otras medidas de riesgo utilizadas en la selección de carteras:

i) The lower partial moments (LPM):

Los autores Arnone, Loraschi y Tettamanzi [37] en el año de 1993, adoptaron el modelo de Markowitz, pero sin considerar la varianza de la distribución de los rendimientos de la cartera como su medida del riesgo, sino que, en su lugar, utilizaron el momento parcial de orden menor (Lower Partial Moment), el cual hace referencia a la parte descendente de la distribución de retornos. No obstante, el uso de esta medida downside risk hace que el problema sea más difícil, debido a que la forma de la superficie del objetivo es generalmente no convexa, y ocasionando que la programación cuadrática no se pueda utilizar para encontrar una solución exacta. Estos autores fueron los primeros en Algoritmos Evolutivos Multiobjetivos (MOEAs - Multi-objective Evolutionary Algorithms) para la optimización de carteras de inversión [5].

ii) valor en riesgo o VaR y el valor en riesgo condiciona-do o CVaR:

El VaR y el CVaR son medidas downside risk, las cuales permiten calcular los efectos negativos de aquellas carteras extremas con movimientos bajistas.

El planteamiento del VaR se enfoca en el estudio del extremo inferior de la cola de la distribución normal del rendimiento de la cartera, lo que permite establecer la máxima pérdida esperada asociada al riesgo de mercado para un determinado nivel de confianza y para un intervalo temporal [38], [39] y [40]. Normalmente se emplean intervalos de confianza al 90%, 95% y 99% (o nivel β [41]). Para un intervalo de confianza del 95%, el 5% de los rendimientos se situarán a 1,65 desviaciones típicas de la media. Ante una cartera valorada en X$, un intervalo de confianza del 5% y el dato del VaR de la misma se podría concluir que existe una probabilidad del 5% de perder más de ($VaR \times valor\ de\ la\ cartera$) $, o que con el 95% de probabilidad se puede asegurar que se pierde como mucho ese valor, o que 5 días al mes se pierde más de ese valor [40].

Rockafellar y Uryasev [41], Alexander [38], Fabozzi et al. [42], señalan que la coherencia de esta medida está condicionada a la forma de la distribución de los rendimientos. El VaR satisface las expectativas como equiva-lente a la medida de la varianza, sólo en los casos en los cuales las distribuciones sean normales y continuas. Para el resto de casos el VaR carece de subaditividad y convexidad, pro-vocado por colas largas o por los problemas de continuidad [40].

Adicionalmente el VaR no informa las pérdidas extremas más allá del valor establecido para la cola, es decir, que no tiene en cuenta la configuración de la distribución de la cola por debajo del nivel β establecido. Para salvar estas limitaciones, surge la medida del CVaR, que aporta información sobre la pérdida esperada, asumiendo que ésta es igual o mayor que la del VaR [38].

Rockafellar y Uryasev [41] y [43], propone el CVaR como una medida de riesgo alternativa que supera las limitaciones del VaR, y se podría definir como la pérdida por exceso media, o como el valor esperado de la pérdida, asumiendo que éste es superior o igual al VaR y una probabilidad β de pérdida [40]. En otras palabras, sería el valor esperado de la pérdida de la cartera condicionado a que suceda un acontecimiento negativo [38].

Entre ventajas de las propiedades del CVaR se encuentran la coherencia frente al riesgo, indistintamente de la forma de la distribución del rendimiento, su simplicidad en la implementación y la incorporación de la cola completa que excede del promedio del VaR. Por su parte, la información sobre cuál es el comportamiento real de la pérdida, más allá de cuál es su valor esperado para una probabilidad (VaR), el CVaR admite despejar las dudas sobre cuál es la mejor elección de la composición de la cartera a igualdad de VaR. Adicionalmente, se trata de una medida convexa, que incorpora la subaditividad, y que permite gestionar una gran cantidad de carteras, instrumentos y escenarios. Puede ser empleado para la estimación del riesgo cuando se esté ante distribuciones del rendimiento-pérdida no simétricas [40].

II. SELECCIÓN DE CARTERAS APLICANDO METODOLOGÍAS FUZZY

La mayoría de los estudios de selección de carteras han trabajado los retornos de los activos como variables aleatorias, las cuales se derivan del análisis estocástico sobre datos históricos precisos. Sin embargo, debido a la complejidad del mercado de valores, los retornos de los títulos en general están influenciados por múltiples factores, por ejemplo, el desempeño de la empresa, las fuerzas de mercado de la oferta y la demanda, las noticias positivas/negativas y las cuestiones políticas, simultáneamente forman los insumos de las previsiones de los retornos de los títulos [45]. Por un parte, los datos históricos contienen poca información con respecto a los insumos mencionados anteriormente. Adicionalmente, estos factores de influencia se evalúan a menudo con algún nivel de ambigüedad, ya que son típicamente no estadísticos, debido a dificultades prácticas de adquisición de los datos, la naturaleza de la imprecisión en la medición, y la vaguedad de la percepción humana, un hecho común en muchas aplicaciones del mundo real. Por lo tanto, los investigadores han argumentado que la aleatoriedad no es el único tipo de incertidumbre en la realidad [46], [47] y [48] y el conocimiento experto podría ser aplicado para mejorar la exactitud de pronóstico [49] y [45]. Recientemente, la teoría de conjuntos difusos [15] se ha aplicado como una herramienta ampliamente aceptable para hacer frente al conocimiento de expertos, así como la incertidumbre no estadística involucrada en las previsiones de los retornos de los activos [44].

Según Markowitz [2], el proceso de selección de una cartera puede dividirse en dos fases:

i) La primera etapa comienza con la observación y la experiencia, y finaliza con las creencias sobre el desempeño futuro de los títulos disponibles. Un elemento primordial en esta primera fase es la definición de riesgo y de rentabilidad de un activo o cartera de activos [10].

ii) La segunda etapa comienza con las creencias relevantes sobre los futuros desempeños y termina con la elección de la cartera. En esta etapa del proceso de selección de carteras se utilizan los diferentes procedimientos de programación matemática en función de cual haya sido el problema de optimización planteado [10].

En el orden de las ideas anteriores, González [10], señala que, en la primera fase del problema de selección de carteras, algunos autores han analizado el modelo de media-varianza y sus extensiones, mediante modelos de selección basados en la teoría de la decisión fuzzy. De igual manera, otros autores han propuesto modelos fuzzy de selección que modelizan la imprecisión y la incertidumbre del rendimiento futuro mediante distribuciones de posibilidad, de credibilidad y variables fuzzy-random. Para la segunda fase del problema de selección de carteras, las estrategias de optimización basadas en Soft Computing han sido ampliamente utilizadas. En este propósito, a continuación, se realiza un análisis de cada una de estas metodologías:

A. Selección basada en teoría de la decisión fuzzy:

Zadeh introdujo el concepto de conjuntos fuzzy en 1965 [15]. Además, basándose en este concepto, Bellman y Zadeh [50] presentaron la teoría de la decisión fuzzy, y definieron la toma de decisiones en un entorno fuzzy, con un conjunto de decisiones que unifica objetivos fuzzy y restricciones fuzzy. En la teoría de conjuntos fuzzy, a diferencia de la teoría de conjuntos clásica, no existe una frontera definida entre los elementos que pertenecen y no pertenecen al conjunto.

Definición 3.1. Conjunto fuzzy:

Sea X un universo cuyo elemento genérico se denota por x. Un conjunto fuzzy A en X es un conjunto de pares ordenados $A = \{(x, \mu A\ (x)): x \in X\}$, donde $\mu A\ (x)$ es la función de pertenencia o grado de pertenencia de $x \in X$ definida en el intervalo real [0,1].

El conjunto fuzzy A en X se caracteriza únicamente por su función de pertenencia $\mu A\ (x)$, que asocia con cada elemento de X, un número real no negativo cuyo valor es finito y se encuentra en el intervalo [0, 1]. El valor de $\mu A\ (x)$ en x representa el "grado de pertenencia" de x en A. Así, cuanto más cerca este $\mu A\ (x)$ al valor de 1, más alto será el grado de "pertenencia" de x en A [51].

Además, suponiendo que los conjuntos fuzzy se definen en un conjunto de alternativas X a un problema de decisión. Entonces un objetivo fuzzy G en X puede ser identificado con un conjunto fuzzy G dado en X. Similarmente, se puede definir una restricción fuzzy C en X. Dados los objetivos fuzzy y las limitaciones fuzzy, se puede definir la situación de toma de decisiones en un entorno fuzzy como la intersección de objetivos y restricciones. Cabe señalar que en un entorno fuzzy los objetivos y las restricciones se tratan de manera similar. Más específicamente, si se nos da un espacio de alternativas de decisiones X, entonces la decisión fuzzy D se define como un conjunto fuzzy en X dado por $D = G \cap C$ donde $\cap$ es un operador de conjunción, que tiene diferentes alternativas y significados en situaciones prácticas. En términos de las funciones de membresía, la decisión fuzzy puede ser formulada como [51]:

$$MD\ (x) = \min\ (\mu G\ (x), \mu C\ (x)), \forall\ x \in X,$$

Donde $\mu G\ (x)$ y $\mu C\ (x)$ son las funciones de pertenencia del objetivo fuzzy y la restricción fuzzy, respectivamente. Así mismo, si hay m fuzzy metas Gi (i = 1, ..., m) y n fuzzy restricciones Cj (j = 1, ..., n), entonces la decisión fuzzy se define por el siguiente conjunto fuzzy [51]:

$$D = \{G \wedge \{1\}\ G \wedge \{2\} \ldots \cap Gm\} \cap \{C1 \cap C2 \cap \ldots \cap Cn\}$$

Y su función de pertenencia se caracteriza por

$$MD\ (x) = \min\ (\mu G1\ (x), \mu G2\ (x), ..., \mu Gm\ (x), \mu C1\ (x), \mu C2\ (x), ..., \mu Cn\ (x)), \forall\ x \in X.$$

En Gupta et at. [51] se analiza un modelo de media-varianza bi-objetivo (maximizar el rendimiento-minimiza el riesgo). Modelaron una función de pertenencia lineal que representa los niveles de aspiración imprecisos para la rentabilidad esperada y la varianza del rendimiento de la cartera. Siguiendo el enfoque de maximización de Bellman-Zadeh [50], los autores proporcionaron los resultados computacionales replicados en el mundo real, y demostraron que el modelo es capaz de generar la cartera de compromiso preferida para un inversionista agresivo y conservador. Algunas de las referencias más relevantes para el modelo fuzzy de selección de cartera utilizando el modelo de media-varianza son [52], [53], [54], [55] y [56].

En referencia a la selección basada en teoría de la decisión fuzzy, González [10], señala que en estos modelos no se asignan diferencias entre las restricciones y los objetivos fuzzy, para lo cual, la incorporación de objetivos adicionales deja de ser una dificultad intrínseca del problema. La autora plantea, que es necesario conocer las condiciones que el inversor (o los expertos) estima como aceptables (tolerancias) tanto para los valores que deben alcanzarse en los objetivos fuzzy (metas), como para las restricciones fuzzy (flexibles). Así mismo, indica que las aportaciones más recientes al problema de selección basadas en la programación matemática fuzzy, son las que incorporan otras metodologías y estrategias que permiten resolver problemas que se presentan en el mundo real. En este orden de ideas, Gupta et al. [57], proponen un enfoque híbrido, en el cual la metodología propuesta se basa en la encuesta de los inversores para captar sus preferencias, el análisis de clusters para clasificar los activos financieros, el proceso de jerarquía analítica para obtener los pesos locales de los activos financieros correspondientes a los cuatro criterios clave de asignación de activos y un multi-modelo fuzzy de programación lineal para la selección de cartera.

Otra aportación fue desarrollada por Bilbao-Terol et al. [58], los cuales proponen un modelo de selección de carteras cuando se considera una dimensión ética en los productos financieros de los fondos de inversión que siguen un enfoque de Inversión Socialmente Responsable (ISR). Los autores plantean metodologías fuzzy para determinar el grado de 'atractividad' de diversos fondos de inversión, y plantean un modelo de programación por metas fuzzy para la resolución de un problema de optimización cuyos objetivos son el rendimiento esperado y el VaR condicional, con restricciones fuzzy sobre el total del capital invertido en fondos-ISR.

B. Selección basada en la distribución de posibilidad:

La teoría de la posibilidad fue propuesta originalmente por Zadeh [59] en relación con los conjuntos fuzzy. Se ha desarrollado como un fundamento teórico de los conjuntos fuzzy y como una teoría complementaria de la probabilidad [60].

Sea A y B dos subconjuntos crisp de un conjunto universal X y u una variable incierta que toma valor en X. Bajo la información 'u está en A', si $A \cap B \neq \emptyset$, decimos que es posible que 'u está en B', y si $A \subseteq B$, decimos que es necesario que 'u está en B'. Una medida de posibilidad Π y una medida de necesidad N se definen como sigue [61]:

$$\prod\nolimits_{A}(B) = \begin{cases} 1, & \text{sí } A \cap B \neq 0, \\ 0, & \text{en tros casos,} \end{cases} \qquad (10)$$

$$N_A(B) = \begin{cases} 1, & \text{sí } A \subseteq B \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases} \qquad (11)$$

Para tratar los casos en que A y B se generalizan en subconjuntos difusos de X, las medidas de necesidad y posibilidad de las ecuaciones 10 y 11 se extienden como sigue:

Definición 3.2.: Medidas de posibilidad y necesidad:

Sea u una variable incierta. Las medidas de posibilidad y necesidad de un evento 'u está en un subconjunto borroso B' bajo información 'u está en un subconjunto borroso A' se definen como

$$\prod\nolimits_{A}(B) = \underbrace{\sup}_{r \in X} \min\big(\mu A(r), \mu B(r)\big), \qquad (11)$$

$$N_A(B) = \underbrace{\sup}_{r \in X} \max\big(1 - \mu A(r), \mu B(r)\big), \qquad (12)$$

Para considerar las medidas de posibilidad y necesidad, usualmente asumimos la normalidad de A, es decir, $\exists\ r \in X$; $\mu A(r) = 1$

i) Selección de carteras usando coeficientes no interactivos:

En el modelo de Markowitz [29], la tasa de retorno esperada de un título se trata como una variable aleatoria. A partir de la programación estocástica se obtiene una solución en cual se minimiza la varianza de la tasa de retorno esperada, bajo la restricción de que la media de la tasa de retorno total sea igual a un valor predeterminado. Este modelo proporciona una solución de inversión diversificada, a menos de que las tasas de retorno esperadas tengan una relación altamente positiva. En la teoría de la cartera tradicional, una inversión diversificada se ha considerado a menudo como una buena política para reducir el riesgo [61].

La programación posibilista es un enfoque similar conocido de la programación estocástica, y puede concebirse para ser aplicado en el problema de selección de carteras. No obstante, en los enfoques de programación posibilista, las tasas de retorno esperadas no se tratan como variables aleatorias sino como variables cuyos rangos posibles se dan por números fuzzy. La aplicación de la programación posibilista a la selección de cartera presenta las siguientes ventajas [61], [62]:

a) El conocimiento del experto puede ser fácilmente utilizado para la estimación de las tasas de retorno esperadas.

b) El problema se reducido, y es más manejable que el del enfoque de programación estocástica

No obstante, los enfoques clásicos de programación posibilista se han desarrollado bajo el supuesto implícito de que todas las variables inciertas son no interactivas, lo cual conlleva a que sus aplicaciones a la selección de carteras no produzcan inversiones diversificadas [61].

Los principales enfoques clásicos de programación posibilista [62], [63] y [64] al problema de selección de cartera con números difusos son:

i) Fractile optimization approach
ii) Modality optimization approach
iii) Spread minimization approach

Los tres modelos anteriores se reducen a un problema de programación lineal. No obstante, i) y iii) proporcionan soluciones optimas de inversión concentradas y ii) proporciona soluciones optimas de inversión semi-concentradas. Estos enfoques i), ii) y iii) tiene una única solución, obteniéndose una solución de inversión no diversificada, y por lo tanto no proporcionan una solución compatible con la tradicional teoría de carteras [61].

iii) Regret-Based Possibilistic Programming Approach

Inuiguchi y Tanino [65] analizaron porqué una solución de inversión diversificada bajo el supuesto de una tasa de retorno independiente, es preferida por un decisor que tiene una actitud adversa al riesgo. Señalaron 2 razones [61]:

a) Propiedades de medida: Considere el hecho de que la tasa total de retorno no es menor que un cierto valor. Cuando una medida de un evento bajo una solución de inversión diversificada es mayor que la de un evento bajo una solución de inversión concentrada, se debe preferir la solución de inversión diversificada. En otras palabras, la incertidumbre se reduce por la distribución en varios activos.

b) El peor criterio de arrepentimiento: Suponga que el inversor ha invertido su dinero en un activo en función de una solución de inversión concentrada. Si la tasa de retorno de otro activo llega a ser mejor que la del activo invertido, como resultado, el inversor podrá sentirse arrepentido. En la etapa de la toma de decisiones, no podemos conocer la tasa de retorno determinada en el futuro. Por lo tanto, cualquier inversión concentrada puede traer arrepentimiento al decisor. En este sentido, si el decisor puede minimizar el arrepentimiento que puede ser emprendido, una solución de inversión diversificada debe ser preferida.

Sobre la base de las dos razones anteriores, es importante señalar que los modelos i), ii) y iii) presentados, no permiten la obtención de una solución de inversión diversificada, ya que las medidas de posibilidad y necesidad no tienen la propiedad a) mencionada por Inuiguchi y Tanino [61].

En este mismo orden y dirección, los enfoques tradicionales de programación posibilista fallan en proporcionar una solución de inversión diversificada si no introducen el concepto de arrepentimiento o la interacción de las variables inciertas [61].

Inuiguchi y Tanino [65] introdujeron el arrepentimiento en el problema de selección de carteras posibilistas. Los autores bajo la independencia posibilista entre las tasas de retorno, redujeron el problema a un problema de programación lineal, y demostraron que una solución de inversión diversificada puede obtenerse mediante el enfoque propuesto.

i) Selección de carteras usando coeficientes interactivos:

Otra forma de obtener una solución de inversión diversificada es introducir la interacción entre las tasas de retorno. La interacción representa una relación mutua entre las tasas de rendimientos de los activos.

En los modelos de selección de carteras usando coeficientes no interactivos, se asumía la no interacción entre las tasas de retorno, es decir, que el rango posible de la tasa de rendimiento de un activo no cambia con la realización de la tasa de rendimiento de cualquier otro activo. Por lo tanto, el inversionista no está motivado para distribuir sus fondos en varios activos. Sin embargo, si las tasas de rendimientos de dos activos tienen una relación negativa, el inversor estará motivado para distribuir sus fondos en estos activos con el fin de reducir el riesgo. La introducción de la interacción entre las tasas de rendimientos desempeña un papel clave en el problema de selección de carteras posibilistas. Note, que, por la introducción de la interacción, la medida de necesidad tiene una propiedad para motivar al inversor a distribuir el fondo en varios activos [61].

Con referencia a lo anterior, es importante mencionar que la introducción de la interacción entre las tasas de retorno genera una complejidad en el modelo. No obstante, Inuiguchi y Tanino [66] propusieron un enfoque de descomposición de escenarios para el tratamiento de números fuzzys interactivos. Los números fuzzy descompuestos en varios escenarios permiten tener diferentes estimaciones de posibles rangos de variables inciertas. Así mismo, señalan que los problemas pueden resolverse mediante una técnica de programación lineal. Algunas de las referencias en las cuales se abordan los modelos de selección de carteras usando coeficientes interactivos son [67] y [68].

C. Selección basada en la distribución de credibilidad:

Las medidas de la posibilidad ampliamente utilizadas en la literatura para tratar con variables difusas que representan las tasas de retorno de los activos en la teoría de la cartera no obedecen a la ley de conservación de la verdad. Además, es inconsistente con la ley del medio excluido y la ley de la contradicción. Por ejemplo, un evento fuzzy puede fallar aunque su valor de posibilidad sea 1 y se mantenga aunque su valor de necesidad sea 0. Esto se debe principalmente al hecho de que la medida de la posibilidad no satisface la propiedad de dualidad que es absolutamente necesaria en la teoría y en la práctica. Para elevar esta dificultad, Liu y Liu [70] presentaron una medida autodual, denominada la medida de credibilidad. Note que cuando el valor de credibilidad de un evento difuso alcanza 1, el evento fuzzy seguramente ocurrirá; Sin embargo, cuando el valor de posibilidad correspondiente logra 1, el evento fuzzy puede fallar. En otras palabras, el evento fuzzy debe mantenerse si su valor de credibilidad es 1 y fallar si su valor de credibilidad es 0. La teoría de la credibilidad, fundada por Liu [71] en 2004 y refinada por Liu [72] en 2007, es una rama de las matemáticas para estudiar el comportamiento de los fenómenos fuzzy [69]. Matemáticamente, se puede describir de la siguiente forma:

Sea Θ un conjunto no vacío (que represente el espacio muestral) y $P(\Theta)$ el conjunto de potencia de Θ (i.e., todos los subconjuntos posibles de Θ). Cada elemento en $P(\Theta)$ se denomina evento. Para presentar una definición axiomática de credibilidad, es necesario asignar a cada evento A, un número $Cr\{A\}$, que representa la credibilidad de que A ocurrirá. Además, para asegurar que el número $Cr\{A\}$ tiene ciertas propiedades matemáticas, los cuatro siguientes axiomas deben ser válidos [69]:

Axioma 1. (Normalidad) $Cr\{\Theta\} = 1$.
Axioma 2. (Monotonicidad) $Cr\{A\} \leq Cr\{B\}$ cuando $A \subset B$.
Axioma 3. (Auto - dualidad) $Cr\{A\} + Cr\{Ac\} = 1$ para cualquier evento $A \in P(\Theta)$.
Axioma 4. (Maximalidad) $Cr\{\cup_i A_i\} \wedge 0.5 = \sup_i Cr\{A_i\}$ para cualquier evento $\{A_i\}$ con $Cr\{A_i\} \leq 0.5$.

Los tres primeros axiomas son auto-explicativos. El axioma maximal se puede entender como sigue. No hay incertidumbre en el resultado de un evento si su medida de credibilidad es 1 (o 0) porque podemos creer que el evento ocurre (o no). Por otro lado, un evento es el más incierto si su medida de credibilidad es 0,5 ya que en tal caso tanto el evento como su complemento pueden ser considerados como 'igualmente probables'. Además, si no hay información sobre la medida de credibilidad de un evento, entonces deberíamos considerarlo como 0.5. Sobre la base de este argumento, Liu [73] propuso el principio de máxima incertidumbre que establece que "para cualquier evento, si hay varios valores razonables que una medida de credibilidad puede tomar, entonces se le asigna el valor lo más cercano a 0,5 como sea posible" [69].

Definición 3.3.: Medida de credibilidad:
La función de conjunto Cr se llama medida de credibilidad si satisface los axiomas de normalidad, monotonicidad, auto-dualidad y maximalidad [69].

En referencia a este modelo, Huang [74], presenta dos tipos de modelos de selección de cartera basados en la credibilidad. Un modelo se basa en el criterio de probabilidad, cuyo objetivo es maximizar el retorno del inversor para un nivel de confianza dado. El otro modelo se basa en un criterio de azar, cuyo objetivo es maximizar la credibilidad de lograr un nivel de retorno específico sujeto a las restricciones. Igualmente, roporciona un algoritmo genético para resolver el problema de selección de carteras y presenta dos ejemplos numéricos para demostrar la efectividad del algoritmo planteado.

Jalota et al. [75], señalan que, en los modelos desarrollados hasta el momento, los números fuzzy L-R necesarios para modelar los parámetros inciertos en un problema de selección de cartera multi-objetivo, se someten a la opinión del Decisor o al Experto en el Mercado. Esta toma de decisiones se vuelve muy subjetiva, y por lo tanto proponen un sistema para extraer a partir de datos históricos, la información requerida para ajustar los números fuzzy L-R y no necesitar la intervención humana. Desarrollaron 4 modelos, y diseñaron un algoritmo Entropy-Cross Entropy (ECE) y a través de varios ejemplos numéricos demostraron la validez de los modelos planteados.

Por su parte, Gupta et al. [69], presentan un modelo híbrido de programación matemática fuzzy basado en la credibilidad bi-objetivo para la selección de cartera en un entorno fuzzy. El modelo busca maximizar el rendimiento de la cartera y minimizar el riesgo de la cartera. La liquidez de la cartera se considera como una restricción. Para resolver el modelo se discute un enfoque de dos fases: i) Crisp Equivalent Bi-objective Model; ii) Fuzzy Interactive Approach.

III. CONCLUSIONES

La diversificación de la cartera y los conceptos de optimización han sido fundamentales para el desarrollo y la comprensión de los mercados financieros y la toma de decisiones financieras. En el aniversario 65 de la publicación del artículo de Harry Markowitz titulado "Portfolio Selection", se realizó una revisión de las principales medidas de riesgo utilizadas para resolver el problema de selección de carteras. No obstante, la mayoría de los autores se enfocan en los aspectos computaciones del problema y pasan por alto sus aspectos financieros. El amplio uso de la varianza como medida para cuantificar el riesgo, a sabiendas de los errores que en ella se presentan, i.e., la penalización de los retornos por encima y por debajo del rendimiento esperado.

Por otra parte, se efectuó un análisis de los métodos de optimización de carteras a la luz de la teoría de decisión fuzzy, y se presentaron sus características, limitaciones y particularidades. El problema de la selección de carteras, sin duda, seguirá siendo una de las áreas más importantes en el campo académico y práctico. Es evidente que presentar modelos más realistas, conducirá a problemas de optimización más complejos. La aplicación de la lógica fuzzy jugará un papel primordial para la resolución de los modelos de selección de cartera en los próximos años.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Equipo Editorial de la Revista Científica Puente y a los Revisores Anónimos por sus valiosos comentarios y sugerencias detalladas que mejoraron la presentación de este documento.

REFERENCIAS

[1] Cao, R. (2015). Alternative portfolio methods (Doctoral dissertation, University of Birmingham).
[2] Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, 77-91.
[3] Kim, W. C., Fabozzi, F. J., Cheridito, P., & Fox, C. (2014). Controlling portfolio skewness and kurtosis without directly optimizing third and fourth moments. Economics Letters, 122(2), 154-158.
[4] Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. European Journal of Operational Research, 234(2), 356-371.
[5] Ponsich, A., Jaimes, A. L., & Coello, C. A. C. (2013). A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 17(3), 321-344.
[6] Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection, Efficent Diversification of Investments. J. Wiley.
[7] Konno, H., & Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, 37(5), 519-531.
[8] Speranza M. G. (1993). Linear programming model for portfolio optimization, Finance, 14, 107-123.
[9] Jorion P. (1997). Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk, McGraw-Hill, New York (USA).
[10] González, E. V. (2015). Soft Computing approaches to portfolio selection. BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 31(1), 23-46.

[11] Mehlawat, M. K. (2016). Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels. Information Sciences, 345, 9-26
[12] P. Gupta, M.K. Mehlawat, A. Saxena. Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming, Inf. Sci. 178 (2008) 1734–1755
[13] M.K. Mehlawat, P. Gupta. Fuzzy chance-constrained multiobjective portfolio selection model, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 22 (2014a) 663–671
[14] M.K. Mehlawat, P. Gupta. Credibility-based fuzzy mathematical programming model for portfolio selection under uncertainty. Int. J. Inf. Technol. Decis. Mak., 13 (2014), pp. 101–135
[15] L.A. Zadeh. Fuzzy sets, Inf. Control, 8 (1965), pp. 338–353
[16] S. Barak, M. Abessi, M. Modarres. Fuzzy turnover rate chance constraints portfolio model, Eur. J. Oper. Res., 228 (2013), pp. 141–147
[17] R. Bhattacharyya, S. Kar, D.D. Majumder. Fuzzy mean-variance-skewness portfolio selection models by interval analysis, Comput. Math. Appl., 61 (2011), pp. 126–137
[18] W. Chen. Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem, Physica A, 429 (2015), pp. 125–139
[19] P. Gupta, M. Inuiguchi, M.K. Mehlawat, G. Mittal. Multiobjective credibilistic portfolio selection model with fuzzy chance-constraints, Inf. Sci., 229 (2013), pp. 1–17
[20] P. Gupta, M.K. Mehlawat, M. Inuiguchi, S. Chandra. Fuzzy portfolio optimization: Advances in hybrid multi-criteria methodologies, Studies in Fuzziness and Soft Computingvol. 316, Springer-Verlag, Heidelberg (2014)
[21] X. Huang. Minimax mean-variance models for fuzzy portfolio selection, Soft Comput., 15 (2011), pp. 251–260
[22] X. Huang. An entropy method for diversified fuzzy portfolio selection, Int. J. Fuzzy Syst., 14 (2012), pp. 160–165
[23] X. Li, B. Shou, Z. Qin. An expected regret minimization portfolio selection model, Eur. J. Oper. Res., 218 (2012), pp. 484–492
[24] Y.J. Liu, W.G. Zhang. Fuzzy portfolio optimization model under real constraints, Insur. Math. Econ., 53 (2013), pp. 704–711
[25] W.G. Zhang, X.L. Zhang, W.L. Xiao. Portfolio selection under possibilistic mean-variance utility and a SMO algorithm, Eur. J. Oper. Res., 197 (2009), pp. 693–700
[26] Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Portfolio Optimization: An Overview. In Fuzzy Portfolio Optimization (pp. 1-31). Springer Berlin Heidelberg.
[27] Gordon J.A., Sharpe, W.F., & Bailey J.V. (2003). Fundamentos de Inversiones. Teoría y Práctica. Tercera Edición. Prentice Hall.
[28] Sharpe, W.F.: A simplified model for portfolio analysis. Management Science 9, 277–293 (1963)
[29] Markowitz, H.: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, New York (1959)
[30] Grootveld, H., Hallerbach, W.: Variance vs downside risk: is there really much difference? European Journal of Operational Research 114, 304–319 (1999)
[31] Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., Yamane, Y.: Computation of mean- semivariance efficient sets by the critical line algorithm. Annals of Operations Research 45, 307–317 (1993)
[32] Rom, B.M., Ferguson, K.W.: Post-modern portfolio theory comes of age. The Journal of Investing 2, 27–33 (1994)
[33] Konno, H., Yamazaki, H.: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to the Tokyo stock market. Management Science 37, 519–531 (1991)
[34] Simaan Y. (1997). Estimation risk in portfolio selection: the mean variance model versus the mean absolute deviation model, Manage. Sci., 43, 1437-1446.
[35] Speranza, M.G.: Linear programming models for portfolio optimization. Finance 14, 107–123 (1993)
[36] Konno, H., Yamazaki, H.: Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to the Tokyo stock market. Management Science 37, 519–531 (1991)
[37] S. Arnone, A. Loraschi, and A. Tettamanzi, “A genetic approach to portfolio selection,” Neural Netw. World, vol. 3, no. 6, pp. 597–604, 1993.
[38] Alexander, G.J. (2009). From Markowitz to modern risk management. The European Journal of Finance 15 (5-6), 451-461.
[39] Elton, E., Gruber, M., Brown, S. y Goetzmann, W. (2011). Modern portfolio theory and investment analysis, eighth edition, International student version. New York, NY: John Wiley and sons, Inc.
[40] DeLlano-Paz, F. (2015). Un modelo para la selección de carteras eficientes de activos energéticos en el marco de la Unión Europea.
[41] Rockafellar, R.T. y Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. The Journal of Risk 2 (3), 21-41.
[42] Fabozzi, F., Huang, D. y Zhou, G. (2010). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. Annals of operations research 176 (1), 191-220.
[43] Rockafellar, R.T. y Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. The Journal of Banking and Finance 26 (7), 1443-1471.
[44] Wang, B., Li, Y., & Watada, J. (2017). Multi-period portfolio selection with dynamic risk/expected-return level under fuzzy random uncertainty. Information Sciences, 385, 1-18.
[45] B. Wang, S. Wang, J. Watada, Fuzzy portfolio selection models with value-at-risk, IEEE Trans. Fuzzy Syst., 19 (4) (2011), pp. 758–769
[46] P. Gupta, G. Mittal, M.K. Mehlawat, Expected value multiobjective portfolio rebalancing model with fuzzy parameters, Insurance, 52 (2) (2013), pp. 190–203
[47] X. Huang, Mean-risk model for uncertain portfolio selection, Fuzzy Optim. Decis. Making, 10 (1) (2011), pp. 71–89

[48] H.X. Li, L.B. Zhang, B. Huang, X.Z. Zhou, Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition, Knowl. Based Syst., 91 (2016), pp. 241–251
[49] X. Huang, L. Qiao, A risk index model for multi-period uncertain portfolio selection, Inf. Sci., 217 (2012), pp. 108–116
[50] Bellman, R., Zadeh, L.A.: Decision making in a fuzzy environment. Management Science 17, 141–164 (1970)
[51] Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Portfolio Optimization in Fuzzy Environment. In Fuzzy Portfolio Optimization (pp. 61-80). Springer Berlin Heidelberg.
[52] Bilbao-Terol, A., Perez-Gladish, B., Arenas-Parra, M., Urfa, M.R.: Fuzzy compromise programming for portfolio selection. Applied Mathematics and Computation 173, 251–264 (2006)
[53] Parra, M.A., Terol, A.B., Ur´ıa, M.V.R.: A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. European Journal of Operational Research 133, 287–297 (2001)
[54] Ramaswamy, S.: Portfolio selection using fuzzy decision theory. In: Bank for International Settlements Working Papers No. 59. Monetary and Economic Department, Basle (1998)
[55] Watada, J.: Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making. Tatra Mountains Mathematical Publications 13, 219–248 (1997)
[56] Zhang,W., Nie, Z.: On admissible efficient portfolio selection problem. Applied Mathematics and Computation 159, 357–371 (2004)
[57] Gupta, P., Inuiguchi, M., & Mehlawat, M. K. (2011). A hybrid approach for constructing suitable and optimal portfolios. Expert Systems with Applications, 38(5), 5620-5632.
[58] Bilbao-Terol, A., Pérez-Gladish, B., Arenas-Parra, M., & Rodríguez-Uría, M. V. (2006). Fuzzy compromise programming for portfolio selection. Applied Mathematics and computation, 173(1), 251-264.
[59] Zadeh, L.A.: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems 1, 3–28 (1978)
[60] Dubois, D., Prade, H.: Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. Plenum Press, New York (1988)
[61] Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Possibilistic Programming Approaches to Portfolio Optimization. In Fuzzy Portfolio Optimization (pp. 81-125). Springer Berlin Heidelberg.
[62] Inuiguchi, M., Ram´ık, J.: Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. Fuzzy Sets and Systems 111, 3–28 (2000)
[63] Inuiguchi, M., Ichihashi, H., Kume, Y.: Relationships between modality constrained programming problems and various fuzzy mathematical programming problems. Fuzzy Sets and Systems 49, 243–259 (1992)
[64] Inuiguchi, M., Ichihashi, H., Kume, Y.: Modality constrained programming problems: a unified approach to fuzzy mathematical programming problems in the setting of possibility theory. Information Sciences 67, 93–126 (1993)
[65] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Portfolio selection under independent possibilistic information. Fuzzy Sets and Systems 115, 83–92 (2000)
[66] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Possibilistic linear programming with fuzzy if-then rule coefficients. Fuzzy Optimization and Decision Making 1, 65–91 (2002)
[67] Inuiguchi, M., Ram´ık, J., Tanino, T.: Oblique fuzzy vectors and their use in possibilistic linear programming. Fuzzy Sets and Systems 137, 123–150 (2003)
[68] Inuiguchi, M., Tanino, T.: Fuzzy linear programming with interactive uncertain parameters. Reliable Computing 10, 357–367 (2004)
[69] Gupta, P., Mehlawat, M. K., Inuiguchi, M., & Chandra, S. (2014). Portfolio Optimization Using Credibility Theory. In Fuzzy Portfolio Optimization (pp. 127-160). Springer Berlin Heidelberg.
[70] Liu, B., Liu, Y.K.: Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10, 445–450 (2002)
[71] Liu, B.: Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations. STUDFUZZ, vol. 154. Springer, Heidelberg (2004)
[72] Liu, B.: Uncertainty Theory, 2nd edn. STUDFUZZ, vol. 154. Springer, Heidelberg (2007)
[73] Liu, B.: Theory and Practice of Uncertain Programming, 3rd edn. Physica-Verlag, Heidelberg (2002)
[74] Huang, X. (2006). Fuzzy chance-constrained portfolio selection. Applied mathematics and computation, 177(2), 500-507.
[75] Jalota, H., Thakur, M., & Mittal, G. (2017). Modelling and constructing membership function for uncertain portfolio parameters: A credibilistic framework. Expert Systems with Applications, 71, 40-56.

BIOGRAFÍA

Jairo Alexander González Bueno.
PhD (c) en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Politécnica, Magister en Gerencia de Negocios, Universidad Industrial de Santander. Master en Dirección Financiera, Instituto Superior de Educación, Administración y Desarrollo. Ingeniero Financiero y Contador Público, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Docente Investigador Grupo de Investigación en Administración (GIA) de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga. Experiencia laboral en el sector real y financiero.

Sandra Milena Díaz Quintero. Administradora de Empresas de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, Especialista en Finanzas, Universidad Autónoma de Bucaramanga y estudiante de Maestría en Gerencia de Negocios de la Universidad Industrial de Santander. Docente cátedra de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga desde el año 2012, vinculada a la Escuela de Economía, Administración y Negocios.

Jairo Núñez Rodríguez. PhD (c) en Ingeniería y Producción Industrial de la Universidad Politécnica de Valencia, Magister en Ingeniería Avanzada de Producción, Logística y Cadena de Suministro de la Universidad Politécnica de Valencia, Ingeniero Industrial de la Universidad Pontificia Bolivariana, Docente Investigador Grupo de Investigación en Empresa, Educación y Tecnologías de la Información (GeeTIC) de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga. Experiencia laboral en centros tecnológicos y Universidades.