

## APLICACIÓN DEL DISEÑO DISIPATIVO DE OBSERVADORES A SISTEMAS CON INCLUSIONES DIFERENCIALES

Marisol Osorio <sup>\*†</sup>, Hernán D. Toro <sup>\*\*</sup> y Jaime A. Moreno <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Grupo de Automática y Diseño (A+D), Escuela de Ingenierías, Universidad Pontificia Bolivariana, Cq. 1 #70-01, of. 11-259, Medellín, Colombia,

<sup>\*\*</sup>Grupo de Investigación en Matemáticas (GMat), Centro de Ciencia Básica, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia

<sup>\*\*\*</sup>Instituto de Ingeniería, Coordinación de Automatización, Universidad Nacional Autónoma de México. Cd. Universitaria, 04510 Coyoacán, México D.F., México.

Recibido 20 Abril 2007; aceptado 15 junio 2007  
Disponible en línea: 29 junio 2007

Resumen: En este artículo se extiende el método de diseño disipativo de observadores para sistemas no lineales a sistemas que posean no linealidades multivaluadas, discontinuas o no Lipschitz. Ya que todas estas clases de sistemas pueden ser descritos en forma unificada mediante inclusiones diferenciales, se considerará la extensión del método disipativo a esta clase de sistemas dinámicos. Esta propuesta elimina restricciones impuestas por los métodos convencionales, para los cuales, en particular, se exige la suavidad del sistema no lineal. *Copyright © 2007 UPB.*

Abstract: In this paper the Dissipative Method of nonlinear observer design is extended to the case of multivalued, discontinuous or non Lipschitz nonlinearities. Since all these classes of systems can be described in a unified manner using differential inclusions, the Dissipative Method will be extended to this class of systems. This proposal avoids restrictions imposed by the currently available methods, in particular the requirement of smoothness of the nonlinearities of the dynamic system.

Keywords: dissipativity, nonlinear observers, dissipative design.

### 1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Disipatividad es una generalización de la teoría de estabilidad de sistemas sin entradas de A. M. Lyapunov que permite el análisis del comportamiento de sistemas con entradas y salidas desde el punto de

vista de su comportamiento energético y ha encontrado múltiples e importantes aplicaciones en el análisis y el control de sistemas no lineales ([Willems, 1972a, 1972b](#); [Brogliato et al., 2007](#); [Moreno, 2004](#); [Khalil, 2002](#)). Los observadores son sistemas dinámicos que a partir de la información disponible de una planta (estructura

---

<sup>†</sup> Autor al que se le dirige la correspondencia:  
Tel. (+574) 4159020 ext 9586, fax (+574) 4118779.  
E-mail: [marisol.osorio@upb.edu.co](mailto:marisol.osorio@upb.edu.co) (Marisol Osorio).

del modelo conocida y variables de entrada y salida disponibles mediante mediciones), estiman variables (conocidas como “estados”) o parámetros que no son conocidos o directamente medibles ([Hermann, y Krener, 1977](#); [Henson y Seborg, 1997](#); [Meurer et al, 2005](#); [Loria et al, 2006](#)).

Existe una amplia gama de sistemas para los cuales no es posible diseñar observadores utilizando la teoría estándar, pues ésta exige la condición de Lipschitz para la existencia y unicidad de soluciones que implica que las funciones que definen el sistema sean continuas en todos los valores de los estados ([Bacciotti y Rosier, 2001](#)). Entre los sistemas que se definen mediante funciones discontinuas o multivaluadas, y por ende no cumplen la condición de Lipschitz, se incluyen algunos tan comunes como los mecánicos con fricción estática o histéresis, así como los híbridos, que se estudian ampliamente en la actualidad. Para estos sistemas el trabajo en diseño de observadores ha sido más bien escaso, debido en parte a la dificultad matemática inherente a la imposibilidad de utilizar la teoría tradicional.

En la literatura sobre observadores no lineales se encuentran diversos usos de no linealidades discontinuas en el diseño. Por ejemplo, en los observadores por modos deslizantes se introducen términos de inyección discontinuos con el objetivo de mejorar su desempeño ([Haskara et al., 1998](#); [Drakunov y Utkin, 1995](#); [Xiong y Saif, 2001](#); [Dávila et al, 2005, 2006](#)). También existen unas cuantas publicaciones sobre el diseño de observadores para sistemas que incluyen expresamente no linealidades discontinuas o multivaluadas ([Juloski, 2004](#); [Heemels et al, 2005](#)). El enfoque que se utiliza en esas publicaciones restringe fuertemente el tipo de sistemas con no linealidades discontinuas o multivaluadas, ya que exige la unicidad de soluciones, para lo cual, las no linealidades deben ser monótonas. Esta es una exigencia muy fuerte, ya que la unicidad de soluciones en sistemas descritos por inclusiones diferenciales es más bien la excepción que la regla.

La teoría de las inclusiones diferenciales, desarrollada en las últimas décadas, permite considerar de manera adecuada y unificada los sistemas que incluyen no linealidades discontinuas o multivaluadas. En una inclusión diferencial el mapa que define la dinámica del

sistema asigna a cada elemento del dominio no un elemento del codominio sino un subconjunto de éste, a lo que se denomina una función multivaluada. Las ecuaciones diferenciales tradicionales quedan incorporadas en esta formulación, considerando cada imagen como un singulete (conjunto con un solo elemento). Ya que la existencia (pero no la unicidad) de soluciones de inclusiones diferenciales exige que la imagen de cada elemento del dominio sea convexo y compacto ([Yakubovich et al., 2004](#); [Bacciotti y Rosier, 2001](#)) ( *c.f.* 2.1, *infra* ) las funciones discontinuas o multivaluadas, frecuentemente encontradas en la práctica, deben ser “convexificadas” para satisfacer tales condiciones y poder ser tratadas mediante la teoría de inclusiones diferenciales ([Filippov, 1988](#)).

En este artículo se aplicará la teoría de disipatividad al diseño de observadores para sistemas que incluyan no linealidades discontinuas o multivaluadas. El objetivo es lograr que el sistema dinámico que rige la evolución del error de observación sea disipativo, con lo que se garantiza la convergencia de los estados del observador a los estados de la planta observada, aunque las trayectorias de la planta o del observador no sean únicas. Este desarrollo está basado en la Teoría de Diseño Disipativo de [Moreno \(2004\)](#) consistente en asegurar la disipatividad del sistema del error asociado a un observador aplicado a una planta con no linealidades localmente Lipschitzianas ([Khalil, 2002](#)). El nuevo enfoque utilizado en el presente artículo elimina, entre otras, las exigencias de continuidad Lipschitziana ([Moreno, 2004](#)) y de monotonía ([Juloski, 2004](#)), sobre las no linealidades y permite considerar como casos especiales otros métodos ya conocidos de diseño de observadores.

En la sección 2 se explican brevemente los conceptos necesarios para realizar el diseño, tales como la estabilidad, la disipatividad y la interconexión de sistemas disipativos. La sección 3 describe la estructura de los observadores disipativos, la sección 4 describe el método de diseño propuesto en este trabajo, y en la sección 5 se ilustra este método mediante un sistema mecánico no lineal. Finalmente se presentan las conclusiones.

## 2. PRELIMINARES

Antes de introducir el método de diseño disipativo de observadores se requiere comprender algunos conceptos.

### 2.1. Inclusiones diferenciales

Un mapa  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , donde  $\mathfrak{R}$  es el conjunto de los reales, es una **función multivaluada** (Yakubovich et al., 2004) si para cada  $(x, t) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$ ,  $f(x, t)$  es un conjunto.

$x(t)$  es una solución de la **inclusión diferencial** (Yakubovich et al., 2004; Bacciotti y Rosier, 2001)

$$\dot{x} \in f(x, t), \quad (1)$$

que si está definida en algún intervalo  $I \subseteq [0, \infty)$ , es absolutamente continua en cada subintervalo compacto de  $I$  y satisface (1) para casi todo  $I$ . Nótese que la inclusión diferencial (1) es una generalización del concepto de ecuación diferencial. La existencia de soluciones de la inclusión diferencial (1) se puede asegurar bajo condiciones no muy restrictivas (ver Bacciotti y Rosier, 2001; Aubin y Cellina, 1984; Osorio y Moreno, 2006):

$f(x, t)$  debe ser

- (i) un conjunto no vacío, compacto y convexo para cada  $(x, t)$ ,
- (ii) semicontinua por arriba para cada  $t$ ,
- (iii) medible en el sentido de Lebesgue para cada  $x$ ,
- (iv) localmente acotada.

Se dice que  $f(x, t)$  es **semicontinua por arriba** en un punto  $(x_0, t_0)$  si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta(\varepsilon, x_0, t_0)$  tal que el conjunto  $f(x_1, t_1)$  está contenido en la  $\varepsilon$ -vecindad del conjunto  $f(x_0, t_0)$ , cuando  $(x_1, t_1)$  pertenece a la  $\delta$ -vecindad del punto  $(x_0, t_0)$ .

Una ecuación diferencial que contenga no linealidades discontinuas se puede convertir en una inclusión diferencial, que cumpla las

condiciones anteriores, mediante el proceso de “convexificación” (Filippov, 1988; Yakubovich et al., 2004). Para esto, en vez de asignarle un valor único a la función en los puntos de discontinuidad, se le asigna un conjunto de puntos compacto y convexo. Por ejemplo, en la Fig. 1 a) se puede observar una función escalar con una discontinuidad de salto en  $x = 0$  en donde  $f(0) = f(0^-) \neq f(0^+)$ . En la Fig. 1 b), a  $x = 0$  se le asigna como imagen el intervalo de valores  $[f(0^-), f(0^+)]$ . Nótese que la inclusión de los límites de la función por la izquierda y por la derecha (Yakubovich et al., 2004) en su imagen asegura que la función es semicontinua por arriba, tal como se muestra en la Fig. 1, al transformar la no linealidad a) en la b).

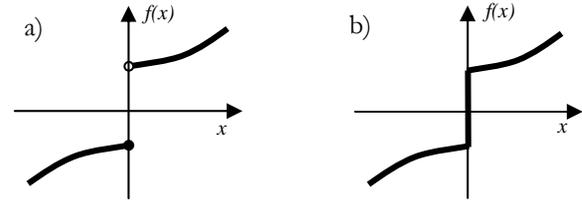


Figura 1. Funciones a) discontinua y b) multivaluada.

Es importante anotar que a diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales clásicas la unicidad de soluciones para inclusiones diferenciales es un fenómeno poco frecuente.

### 2.2. Estabilidad

Una propiedad importante de las soluciones de una ecuación diferencial es la estabilidad, que puede determinarse mediante los teoremas de Lyapunov (Khalil, 2002). Para las inclusiones diferenciales (1) los conceptos de estabilidad (fuerte) son análogos a los de ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta que las propiedades deben ser satisfechas para todas las trayectorias que se inician en una condición inicial y no solo para algunas de ellas (Bacciotti y Rosier, 2001).

Al igual que para las ecuaciones diferenciales es posible verificar la estabilidad de una solución de (1) utilizando una **función de Lyapunov**  $V(x, t)$ , que no es más que una generalización del

concepto de “función de energía” de la mecánica clásica: una función positiva cuya derivada, tomada a lo largo de cualquier solución de (1) siempre sea negativa, y cuyo mínimo,  $V = 0$ , se logre únicamente en  $x = 0$ . El segundo método de Lyapunov sigue siendo válido para las inclusiones diferenciales ([Yakubovich et al., 2004](#); [Bacciotti y Rosier, 2001](#)):

**Teorema 1:** SEGUNDO MÉTODO DE LYAPUNOV ([Bacciotti y Rosier, 2001](#)): Sea  $f : \mathfrak{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}^n$  una función multivaluada de  $x$  tal que se asegure la existencia de soluciones para el sistema definido por (1). Suponga que existe una función continuamente diferenciable  $V(x, t)$  tal que, para algunas funciones  $a, b \in K_\infty$ ,  $c \in K$  y todo  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in \mathfrak{R}^n$ , y  $v \in f(x, t)$ , se satisfacen:

$$a(\|x\|) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|),$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \langle \nabla_x V(x, t), v \rangle \leq -c(\|x\|).$$

Bajo estas condiciones,  $x = 0$  es una solución Uniforme, Global y Asintóticamente Estable (UGAE). ■

En el teorema  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar usual en  $\mathfrak{R}^n$  y  $\nabla_x V = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$ . Una función continua  $a : [0, d] \rightarrow [0, \infty]$  es de clase  $K$ , si es estrictamente creciente y  $a(0) = 0$ . Una función clase  $K$  también es clase  $K_\infty$ , si  $d \rightarrow \infty$  y  $a(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$  ([Khalil, 2002](#)).

### 2.3. Disipatividad

Considere ahora un sistema dinámico con entradas y salidas, de tiempo continuo, lineal e invariante en el tiempo,

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases}, \quad (2)$$

dónde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in \mathfrak{R}^q$  y  $y \in \mathfrak{R}^m$ , son, respectivamente, los vectores de estado, entrada y

salida. Para un sistema así, se pueden definir formas cuadráticas como “tasas de suministro” o de “alimentación”,

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix},$$

dónde  $Q \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathfrak{R}^{m \times q}$  y  $R \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ , y  $Q, R$  simétricos. La tasa de suministro  $\omega$  se puede considerar como una generalización del concepto de “potencia suministrada” al sistema. De manera análoga se puede definir una **función de disipación**, positiva definida en  $x$ ,

$$Z(x, u) = (K^T x + W^T u)^T (K^T x + W^T u) + \varepsilon x^T P x,$$

donde  $\varepsilon \geq 0$ . Si adicionalmente se define una función escalar de **almacenamiento de energía**  $V(x)$ , continuamente diferenciable y positiva definida, se puede establecer el balance de energía (ver [Fig. 2](#)).

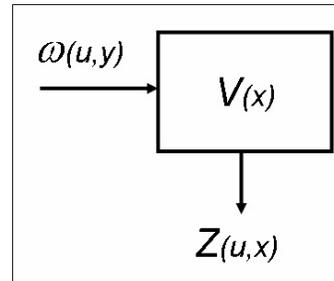


Figura 2. Balance “energético” de un sistema disipativo.

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \omega(y(t), u(t)) - Z(x(t), u(t)). \quad (3)$$

El miembro izquierdo de (3) es la tasa de crecimiento de la energía almacenada, mientras que el miembro derecho es la diferencia entre la potencia suministrada  $\omega$  y potencia disipada  $Z$ , lo que constituye un balance energético. Como consecuencia de esto, si en algún momento se suspende el suministro de energía ( $\omega = 0$ ), entonces el miembro derecho de (3) se hace negativo, lo que implica el decrecimiento de la función de almacenamiento, hasta que llegue al mínimo. Como  $Z \geq 0$  la energía almacenada es sólo una porción de la energía suministrada.

Se dice que el sistema  $\Sigma_L$  es estrictamente disipativo en los estados con respecto a la tasa de alimentación  $\omega(y,u)$  si (3) se satisface para toda trayectoria del sistema. Cuando  $\varepsilon > 0$  se dice que  $\Sigma_L$  es  $(Q,S,R)$ -Estrictamente Disipativo en los Estados, o de forma abreviada:  $(Q,S,R)$ -EDE.

Lo anterior ocurre (Hill y Moylan, 1980) si y sólo si existe una matriz  $P$  simétrica y positiva definida y un  $\varepsilon > 0$  tales que:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \varepsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

Aparte de la definición de disipatividad en los estados para un sistema dinámico, también se puede definir la disipatividad para un sistema multivaluado sin memoria, variante en el tiempo,

$$y \in \psi(t,u), \quad (5)$$

que cumpla que  $0 \in \psi(t,0)$ . Se dice que esta no linealidad es  $(Q,S,R)$ -Disipativa o  $(Q,S,R)$ -D, si para todo  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$  y  $y \in \psi(t,u)$  se satisface la desigualdad:

$$\omega(y,u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \geq 0. \quad (6)$$

#### 2.4. Interconexión de sistemas disipativos

Considere la interconexión del sistema (2) en realimentación con una no linealidad disipativa como la de (5):

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u \in -\psi(t,y) \end{cases}, \quad (7)$$

tal como se ilustra en la Fig. 3. El lazo consta de un sistema lineal invariante en el tiempo realimentado a través de una no linealidad sin memoria, y que puede ser multivaluada y variante en el tiempo.

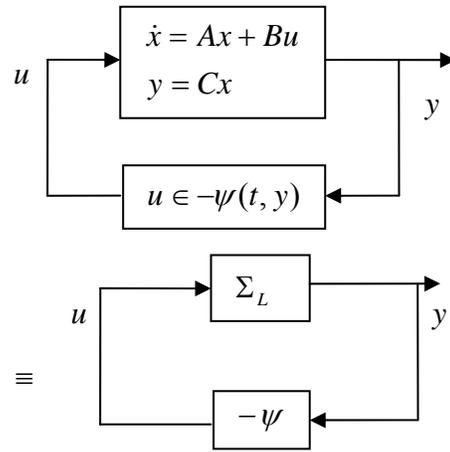


Figura 3. Lazo de realimentación de sistemas disipativos.

Supóngase que se dan las condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones (c.f. 2.1, *supra.*), aunque no necesariamente su unicidad. Uno de los resultados fundamentales para la aplicación de la disipatividad al diseño de observadores es el siguiente, cuya demostración se puede encontrar en Osorio y Moreno (2006).

**Teorema 2:** Si el subsistema lineal  $\Sigma_L$  es  $(-R_N, S_N, -Q_N)$ -EDE y si  $\psi$  es  $(Q_N, S_N, R_N)$ -D, entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema realimentado (7) es Uniforme, Global y Asintóticamente Estable.

#### 2.5. Observadores

Una de las metodologías de control moderno más frecuentes es el control por realimentación de estados. Un sistema invariante en el tiempo, con entradas de control  $u$  y salidas medidas  $y$  puede ser descrito por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ y = g(x) \end{cases}. \quad (8)$$

Un controlador invariante en el tiempo para este sistema tiene la forma siguiente:

$$\Omega : \begin{cases} \dot{w} = \mu(w, x, y_r) \\ u = \nu(w, x, y_r) \end{cases}. \quad (9)$$

Aquí,  $\mu$  y  $\nu$  son funciones en general no lineales,  $w$  son los estados internos del controlador,  $x$  es el vector de estados de la planta

a controlar y  $y_r$  es una señal de referencia que determina cuál debe ser su salida  $y$  (Marino y Tomei, 1995). Como en general los estados de la planta suelen ser inaccesibles para hacer una medida física de todos ellos, no es posible implantar el controlador (9). Ya que la salida del sistema sí puede ser medible, entonces se recurre a un **observador** que, tomando las entradas y salidas de la planta, obtiene un estimado  $\hat{x}$  de los estados reales  $x$  de la planta, que converge asintóticamente a ellos. Este observador es un sistema matemático que puede estar albergado en un computador o en un sistema dedicado para su implementación en tiempo real.

Una descripción usual del observador para la planta definida en (8) es:

$$\Xi = \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + h(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = g(\hat{x}) \end{cases} .$$

Nótese que  $\Xi$  incluye una copia del sistema dinámico que pretende emular y una inyección  $h$  (no necesariamente lineal) del error de estimación en la salida de la planta. Idealmente, cuando el observador converge, los estados y salidas estimadas deberían ser idénticos a los reales. Entonces  $h$  sería nula y el observador y la planta estarían funcionando igual. En la práctica, siempre es necesaria esta inyección porque las incertidumbres del modelo y las perturbaciones hacen necesario monitorear constantemente cómo se está desempeñando el observador. La relación entre Planta, Control, y Observador se ilustra en la Fig. 4.

En este trabajo, para el diseño de observadores, se utiliza la propuesta original de Jaime Moreno (2004), que aplica la teoría de Disipatividad (cf. 1.2, supra), y que ha sido denominado “Diseño Disipativo”, extendiéndola a sistemas no suaves, que están vedados a los métodos estándar de diseño de observadores.

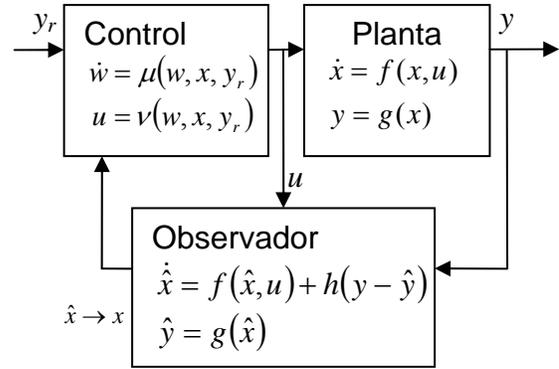


Figura 4. Sistema de control por realimentación de estados con observador.

### 3. OBSERVADORES DISIPATIVOS

A continuación se presentan los conceptos fundamentales para comprender los observadores disipativos.

#### 3.1. Sistemas en forma de Lur'e

El Diseño Disipativo de observadores está dirigido a sistemas en que el modelo de la planta descrito en (8) se pueda llevar mediante transformación de los estados y/o entradas a la forma de Lur'e (Vidyasagar, 2002):

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + G\psi(Hx) \\ y = Cx \end{cases} \quad (10)$$

Es bastante común que sistemas no lineales se modelen de esa forma o que puedan ser transformados a ella. En este caso, la planta (10) se puede entender como un sistema realimentado con elementos lineales en el lazo directo y no linealidades en el lazo de realimentación, justo como en (7). Este formalismo puede verse como una particularización de (8). Aquí,  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $C$ , y  $H$  son matrices que aportan la parte lineal del problema, mientras que  $\psi$  es una función disipativa que representa las no linealidades de este. Nótese que esta es la misma forma en que se presentó la interconexión de sistemas disipativos en 2.4. El diagrama en bloques se presenta en la Fig. 5.

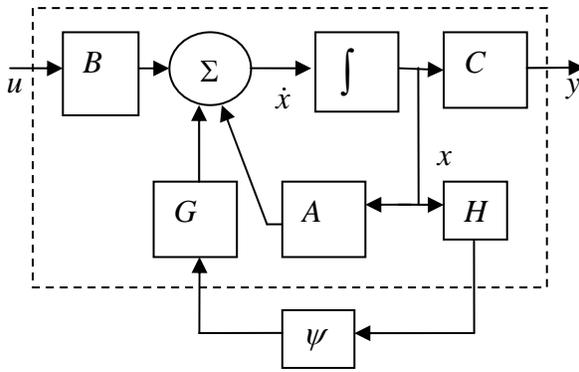


Figura 5: Sistema no lineal en la forma de Lur'e. Lo encerrado por la línea segmentada representa la parte lineal de la planta;  $\psi$  representa la parte no lineal.

### 3.2. Observadores para sistemas en la forma de Lur'e

Para un sistema como (10), se propone el observador

$$\Omega = \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) + G\psi[H\hat{x} + N(\hat{y} - y)] \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Es de notar que  $\Omega$  incluye una copia del subsistema lineal de (10), con las matrices conocidas  $A, B, C, H, G$ . Como los estados reales de la planta son inaccesibles al observador, sólo se puede utilizar como variable de corrección para el observador el error entre la salida del observador  $\hat{y}$  y la salida de la planta  $y$ . La comparación de estas cantidades se inyecta al observador, linealmente a través de  $L$  y por medio de  $\psi$ , a través de  $N$ . Estas inyecciones le permiten al observador corregir las variaciones en la salida observada con respecto a la salida real. El diseño del observador consiste en encontrar matrices  $L$  y  $N$  adecuadas para garantizar la convergencia.

### 3.3. Diseño disipativo de observadores

Al restar término a término el modelo de la planta y el del observador, se obtiene un nuevo sistema dinámico para el error de estimación de estados y de salida:

$$\begin{aligned} e &= \hat{x} - x \\ \tilde{e} &= \hat{y} - y \end{aligned} \quad (11)$$

La idea fundamental tras el Diseño Disipativo es elegir adecuadamente los parámetros  $L$  y  $N$  de tal forma que el sistema dinámico del error del observador se comporte de manera disipativa.

Cuando sistema original se puede representar en la forma de Lur'e, el sistema dinámico asociado al error del observador también tiene dicha forma (Osorio y Moreno, 2006). Así, se puede aplicar el Teorema 2 de la sección 2.4., a saber: si el subsistema asociado a la no linealidad es disipativo respecto a una función de alimentación dada, y la parte lineal también es disipativa respecto a otra función de alimentación relacionada correctamente con la primera, entonces el lazo cerrado es disipativo, lo que implica que sus estados tienden al origen en ausencia de estímulos externos. Además, es posible probar que la forma en que los estados tienden al origen se puede acotar con una función exponencial decreciente, independiente del estado inicial del sistema. En otras palabras, el sistema asociado al error es UGAE. El objetivo del Método de Diseño Disipativo es hacer que el sistema dinámico que representa el error en los estados del observador con respecto a los estados reales sea UGAE.

Aunque en la práctica, el diseño observadores disipativos para diversas plantas puede presentar algunas variaciones, el método es tan general que sólo se necesitan pequeños ajustes dependiendo de las particularidades del sistema a observar y de los algoritmos de observación a implementar. En la sección siguiente se explica el método de diseño para un ejemplo específico, con sus ajustes respectivos con respecto al modelo propuesto en esta sección.

## 4. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO DE DISEÑO

Para inclusiones diferenciales el diseño disipativo de observadores se puede presentar en las fases siguientes:

### 4.1. Estructura del sistema y del observador propuesto

Considere un sistema que sea llevado a la forma de Lur'e, y que contenga una no linealidad multivaluada, que puede ser descrito por la inclusión diferencial siguiente:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\xi + \varphi(t, y, u) \\ \xi \in \psi(\sigma) \\ y = Cx; \quad \sigma = Hx \end{cases} \quad (12)$$

Suponga que  $\varphi$  es una función no lineal univaluada, localmente Lipschitziana en  $y$ , continua en  $u$ , y continua a tramos en  $t$ , mientras que  $\psi$  es una función vectorial multivaluada  $q$ -dimensional que depende de  $\sigma$ .

Para el sistema (12), se propone un observador de la forma:

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G\zeta + \varphi(t, y, u) + L(\hat{y} - y) \\ \zeta \in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \hat{y} = C\hat{x}; \quad \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases} \quad (13)$$

Para el observador  $\Omega$  se requiere diseñar las matrices  $L$  y  $N$  para garantizar la convergencia asintótica.

Se asume que  $\Sigma$  y  $\Omega$  satisfacen las condiciones para que existan soluciones para cada condición inicial y cada entrada. Nótese que no se asume que tales soluciones sean únicas.

#### 4.2. Diseño del observador por disipativización del error de observación

El sistema dinámico asociado al error de estimación de los estados y las salidas, según (11) es la inclusión diferencial:

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = (A + LC)e - G(\vartheta - \zeta) \\ \vartheta \in \psi(\sigma), \quad \zeta \in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \tilde{y} = Ce; \quad \tilde{\sigma} = He \end{cases}$$

Para el sistema del error se supone que las condiciones iniciales son  $e(0) = e_0 = \hat{x}(0) - x(0) = \hat{x}_0 - x_0$ . Se puede notar que  $\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = \hat{\sigma} + N\tilde{y} = (H\hat{x}) + NCe = (Hx + He) + NCe = \sigma + (H + NC)e$ . Si se define  $z \doteq (H + NC)e = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$  como una función del error de estimación y si se propone una nueva no linealidad multivaluada,

$$\phi(z, \sigma) \doteq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z),$$

entonces, el sistema dinámico que rige el error se puede expresar mediante la inclusión diferencial:

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + G\eta \\ z = H_N e \\ \eta \in -\phi(z, \sigma) \end{cases} \quad (14)$$

Aquí,  $A_L \doteq A + LC$  y  $H_N \doteq H + NC$ . Como  $\forall \sigma, 0 \in \phi(0, \sigma)$ , entonces  $e = 0$  es un punto de equilibrio del sistema dinámico del error.

*Teorema 3:* Supóngase que las condiciones de existencia de soluciones se cumplen y que la no linealidad es disipativa según (6) para el sistema que representa la dinámica del error (14) del observador (13). Si hay matrices  $L$  y  $N$  tales que el subsistema lineal de  $\Xi$  es  $(-Q, S^T, -R)$ -Disipativo, entonces (13) es un observador uniforme, global y exponencialmente estable para (12). Esto significa que existen  $\kappa, \gamma > 0$  tales que  $\forall e(0)$ :

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t).$$

Para encontrar  $L$  y  $N$  se requiere resolver la siguiente desigualdad matricial (Osorio y Moreno, 2006), que se obtiene directamente de (4) para la  $(-R, S^T, -Q)$ -EDE:

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L P + \varepsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (15)$$

Para resolver la desigualdad (15) se requiere que  $Q \leq 0$ , lo que no siempre puede ser garantizado para toda no linealidad  $\phi$ . Si esto no es satisfecho es posible extender el método mediante una transformación de lazo, como se describe a continuación.

Se puede introducir una transformación de lazo adecuada en el sistema (14), definiendo una nueva salida  $\bar{z} = H_N e + D\eta = z + D\eta$ , de tal forma que la dinámica del error de estimación pueda reescribirse como:

$$\Lambda : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + G\eta \\ \bar{z} = H_N e + D\eta \\ \eta \in -\nu(\bar{z}, \sigma) \end{cases}$$

Aquí,  $\nu(\bar{z}, \sigma)$  es la función multivaluada resultante de resolver la inclusión  $\eta \in -\phi(\bar{z} - D\eta, \sigma)$ . Al escribirla en términos de  $\bar{z}$  y  $\eta \in \nu(\bar{z}, \sigma)$ , la desigualdad (6) queda:

$$\eta^T \hat{Q}\eta + 2\eta^T S(\bar{z} - D\eta) + (\bar{z} - D\eta)^T R(\bar{z} - D\eta) \geq 0.$$

Reorganizando términos se llega a

$$\eta^T \hat{Q}\eta + 2\eta^T \hat{S}\bar{z} + \bar{z}^T \hat{R}\bar{z} \geq 0,$$

dónde  $\hat{Q} = Q - SD - D^T S^T + D^T R D$ ,  $\hat{S} = S - D^T R$  y  $\hat{R} = R$ . Esto muestra que la nueva función no lineal  $\nu$  es  $(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{R})$ -D. El diseño del observador consiste en encontrar ahora matrices  $L$ ,  $N$  y  $D$  tales que el subsistema lineal de  $\Lambda$  satisfaga las condiciones del Teorema 2 de la sección 2.4. Esto lleva a resolver la siguiente desigualdad matricial (Osorio y Moreno, 2006):

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \varepsilon P + H_N^T \hat{R} H_N & PG + H_N^T \hat{R} D - H_N \hat{S}^T \\ G^T P + D^T \hat{R} H_N - \hat{S} H_N & \hat{Q} - \hat{S} D - D^T \hat{S}^T + D^T \hat{R} D \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

El diseño del observador consiste en hallar las matrices ya mencionadas de tal forma que la desigualdad matricial (16) se satisfaga. Este es un problema de factibilidad de una desigualdad matricial no lineal que bajo ciertas condiciones se puede convertir en una desigualdad matricial bilineal. Más aún, haciendo suposiciones razonables sobre ella se puede reducir aún más, hasta obtener un problema de desigualdad matricial lineal, soluble numéricamente en forma muy eficiente mediante el uso de métodos conocidos bajo el nombre de LMI (Linear Matrix Inequalities). Se pueden consultar detalles en Osorio y Moreno (2006). Entre las ventajas de este método está que permite tratar no linealidades no cuadradas (que no tienen el mismo número de entradas que de salidas), no requiere que las no linealidades sean monótonas y no requiere que se garantice la unicidad de soluciones para el observador; basta que existan. El siguiente ejemplo ilustra el desempeño del método propuesto.

### 5. EJEMPLO: SISTEMA MECÁNICO CON NO LINEALIDAD NO MONÓTONA

En los métodos tradicionales de diseño de observadores que admiten no linealidades discontinuas o multivaluadas en el sistema se requiere como una condición adicional para la ecuación de estados que la función del lado derecho sea monótona (Juloski, 2004; Heemels et al., 2005). Esta condición no se cumple si la no linealidad no es cuadrada (o sea si no tiene el mismo número de entradas y salidas). Ese es el caso del sistema mecánico de la Fig. 6:

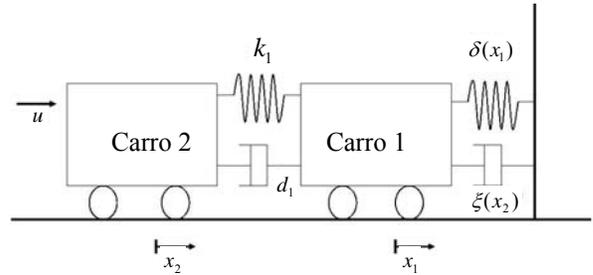


Figura 6: Carros acoplados con resorte y fricción no lineales

Se observa que los carros 1 y 2 están conectados por un resorte de constante  $k_1$  y un amortiguador de coeficiente  $d_1$ . El carro 1 se fija a la pared por medio de un resorte de endurecimiento no lineal y un amortiguador con fricción viscosa y de Coulomb. Las constantes usadas para el diseño y simulación del observador fueron:  $k_1=1$ ,  $d_1=1$ ,  $k_2=0.1$ ,  $a=1$ ,  $F_m=2$ ,  $b=0.5$ .

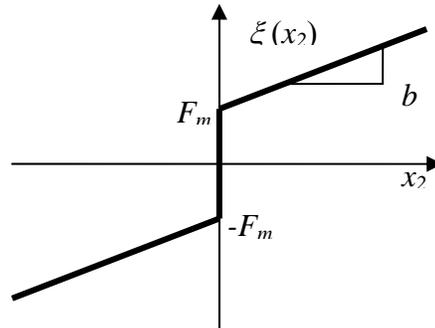


Figura 7. Fricción de Coulomb y viscosa

Las no linealidades incluidas en el sistema son  $\delta(x_1) = k_2(1 + a^2 x_1^2)x_1$  y  $\xi(x_2)$ , esta última mostrada en la Figura 7 y dada por

$$\xi(x_2) = \begin{cases} F \in [-F_M; F_M] & , x_2 = 0 \\ F_M + bx_2 & , x_2 > 0 \\ -F_M + bx_2 & , x_2 < 0 \end{cases}$$

Como puede observarse, la no linealidad dada por  $\psi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}_1) + \xi(\mathbf{x}_2)$  no es monótona puesto que tiene dos entradas ( $x_1$  y  $x_2$ ) y una sola salida.

Se aplica una fuerza  $u$  al carro 2. Se eligen  $x_1$  y  $x_2$  como la posición y velocidad del carro 1. Se eligen  $x_3$  y  $x_4$  como las respectivas del carro 2. El vector de estado se forma con estas cuatro variables. Las matrices que describen la parte lineal del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -d_1 & k_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & d_1 & -k_1 & -d_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad D = [0]$$

Así, se obtienen las siguientes ecuaciones en espacio de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + G\psi(\sigma) \\ y &= Cx, \quad \sigma = Hx \end{aligned}$$

con:

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi(\sigma) = \delta(\sigma_1) + \xi(\sigma_2).$$

El observador para este sistema tiene la forma (13) y el sistema dinámico asociado al error está dado por (14). La no linealidad  $\phi$  es  $(Q, S, R)$ -D, con

$$Q = [0.5], \quad S = [-1 \ 1], \\ R = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Nótese que en este caso,  $Q > 0$ , por lo que no se puede usar (15) para el diseño. Se necesita hacer una transformación de lazo para utilizar en cambio (16) (cf. 4.2., *supra*). Usando  $D = [0 \ 0.39]$ , se obtienen  $\hat{Q} = [-0.2]$ ,  $\hat{S} = [-1.77 \ 0.61]$  y  $\hat{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

Estos valores se reemplazan en (16); al proponer  $N = [1 \ 1]$  y al usar la Toolbox LMI de Matlab, se encuentran los siguientes valores para  $P$ ,  $\varepsilon$  y  $L$ :

$$P = \begin{bmatrix} 41.368 & -1.675 & -48.6274 & -26.2205 \\ -1.675 & 1.7339 & 0.775 & -2.4618 \\ -48.6274 & 0.775 & 188.8915 & 10.8907 \\ -26.2205 & -2.4618 & 10.8907 & 30.0731 \end{bmatrix}, \\ L = \begin{bmatrix} -47.4151 \\ -94.8785 \\ -8.9831 \\ -50.7275 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 1.3273$$

Al simular el modelo del observador en Simulink se encontró la siguiente curva de comparación (Fig. 8) entre estados reales y observados:

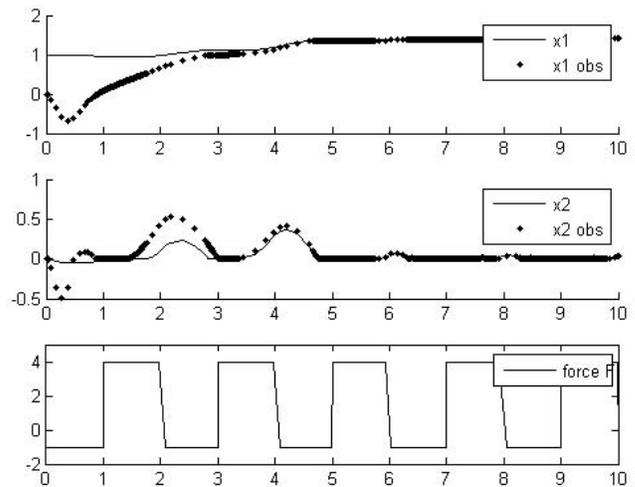


Figura 8: Estados reales y estados observados

## 6. CONCLUSIONES

La ventaja fundamental del método de Diseño Disipativo estriba en que se basa en las características energéticas de los sistemas y no en su estructura específica, la cual puede afectar las condiciones de existencia y unicidad de las

soluciones del sistema (Bacciotti y Rosier, 2001), obligando a tener en cuenta condiciones más restrictivas para el mismo, por ejemplo, que no contenga discontinuidades (muy comunes en los sistemas mecánicos con fricción), o que sea monótono (lo que excluiría no linealidades con un número diferente de entradas y de salidas). El Diseño Disipativo permite obviar esas restricciones permitiendo el diseño de observadores para una clase más amplia de sistemas que la que admiten los métodos tradicionales de diseño de observadores.

#### AGRADECIMIENTO

Trabajo patrocinado por UPB, CIDI 808-11/05-22 y DGAPA-UNAM, PAPIIT IN 111905-2. Coordinación de Automatización, Instituto de Ingeniería UNAM, Grupo A+D de la Escuela de Ingenierías de la UPB, Grupo GMat del Centro de Ciencia Básica de la UPB y Colciencias.

#### REFERENCIAS

- Aubin, J. P. y Cellina, A. (1984) *Differential Inclusions; Set-Valued Maps and Viability Theory.*, Springer-Verlag, Berlin,
- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2001) *Liapunov Functions and Stability in Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **267**, Springer-Verlag, London.
- Brogliato, B.; Lozano, R.; Maschke, B. y Egeland, O. (2007) *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications.* 2 ed. London, Springer Verlag,
- Dávila, J., Fridman, L. y Levant, A (2005). Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50(11), 1785–1789.
- Dávila, J., Fridman, L. y Pozniak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control* 79(10), 1251–1262.
- Drakunov, S. y Utkin, V. (1995). Sliding Modes Observers. Tutorial. *Proceedings of 34th Conference on Decision and Control.* 3376–3378.
- Filippov, A. F. (1988) *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- Haskara, I., Özgüner, U. y Utkin, V. A. (1998) On Sliding Modes Observers via Equivalent Control Approach, *International Journal of Control*, **71** No. 6, p.p. 1051-1067.
- Hermann, R. y Kremer, A. (1977) Nonlinear Controllability and Observability, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22** No. 5, Oct., p.p. 728-740.
- Heemels, W., Juloski, A. y Brogliato, B. (2005) Observer design for Lur'e systems with monotonic multivalued mappings., *IFAC (ed.), Proceedings of the 16th IFAC World Congress, IFAC*, Prague, Czech Republic.
- Henson, M. y Seborg, D. (1997) *Nonlinear Process Control*. Prentice Hall, New Jersey.
- Hill, D. y Moylan, P. (1980) Dissipative Dynamical Systems. Basic Input-Output and State Properties, *Journal of Franklin Institute*, **309** No. 5, May., p.p. 327-357.
- Juloski, A. (2004) *Observer Design and Identification Methods for Hybrid Systems: Theory and Experiments.*, PhD thesis, Eindhoven University of Technology.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems.* third ed..Prentice–Hall. Upsaddle River, New Jersey.
- Marino, R y Tomei, P. (1995) *Nonlinear Control Design, Geometric, Adaptive and Robust.* Prentice Hall, Londres.
- Loria, A., Lamnabhi-Lagarrigue, F y Panteley, E. (2006) Advanced Topics in Control System Theory. *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer, Londres.
- Meurer, T., Graichen, K. y Gilles, D. E. (Eds.). (2005). Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences.* Springer, Berlin.
- Moreno, J. A. (2004) Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach, *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*, IFAC, Oaxaca, Mexico, Dec. 8-10, 2004, pp. 735-740.
- Osorio, M. y Moreno, J. (2006) Dissipative Design of Observers for Multivalued Nonlinear Systems. *Proceedings of 45th IEEE Conference on Decision and Control* , San Diego, Dic.
- Vidyasagar, M. (2002) *Nonlinear Systems Analysis.* SIAM, Philadelphia.
- Willems, J.C. (1972a). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 321–351.
- Willems, J.C. (1972b). Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic

supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 352–393.

Xiong, Y. y Saif, M. (2001). Sliding Modes Observer for Nonlinear Uncertain Systems. *IEEE Transactions of Automatic Control* **46**, 2012–2017.

Yakubovich, V., Leonov, G. y Gelig, A. K. (2004) Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities, *Series on Stability, Vibration and Control of Systems*, **14** World Scientific, Singapore.

## SOBRE LOS AUTORES

### **Marisol Osorio Cárdenas**

Profesora de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica y Posgrados en Automática UPB. Investigadora Grupo de Investigación en Automática y Diseño A+D. Magíster en Ingeniería con énfasis en Automática UPB. Estudiante de doctorado en Ingeniería Eléctrica área Control Universidad Nacional Autónoma de México.

Cir.1 #70-01, B. 11., Medellín. e-mail: marisol.osorio@upb.edu.co

### **Hernán Darío Toro**

Profesor del Centro de Ciencia Básica UPB. Estudiante de maestría en ingeniería con énfasis en automática UPB. Especialista en didáctica de las ciencias UPB.

Cir.1 #70-01, B. 11., Medellín. e-mail: hernan.toro@upb.edu.co

### **Jaime Alberto Moreno Pérez**

Investigador Titular B de Tiempo Completo, Instituto de Ingeniería (II), UNAM, México. Doctor en Ingeniería Electrotécnica, especialidad en Control Automático. (1995): Universität der Bundeswehr Hamburg, Alemania.

Ciudad Universitaria, 04510 México, D.F., Mexico. JMorenoP@ii.unam.mx