Revista Investigaciones Aplicadas | ISSN 2011-0413 | Medellín - Colombia
Vol. 9, No.1 (2015) Enero – Junio | PP. 25-29
http://dx.doi.org/10.18566/ria.v09n01.a05

# RELACIÓN ENTRE LA DISTANCIA TALBOT Y EL ORDEN DE LA TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER EN MEDIO GRIN

**E.S. Arrieta**[†], **C.O. Torres**

*Grupo de Óptica e Informática (LOI), Universidad Popular del Cesar (UPC), Valledupar- Colombia.*

Recibido 26 Noviembre 2013; aceptado 27 Enero 2015
Disponible en línea: 27 Octubre 2015

Resumen: H. Fox Talbot en 1836 fue el primero en observar la periodicidad longitudinal del campo electromagnético difractado por una red de difracción denominado efecto Talbot. En este artículo utilizando la transformada fraccional de Fourier, se obtiene una relación matemática entre la distancia Talbot y el orden fraccional de esta transformada bajo un medio GRIN con índice cuadrático de perfil transversal. Para nuestro propósito, se asume como objeto periódico una peinilla de Dirac, la cual es iluminada por una onda plana de coherencia uniforme.

Palabras claves: Distancia Talbot, Transformada fraccional de Fourier fraccional, medio GRIN.

# RELATION BETWEEN TALBOT DISTANCE AND THE ORDER OF FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM IN GRIN MEDIUM

Abstract: H. Fox Talbot was the first to observe the longitudinal periodicity of the diffracted electromagnetic field by a diffraction grating in 1836, which is denominated as Talbot effect. In this paper, a mathematical relation between the Talbot distance and the fractional order is obtained using the fractional Fourier transform under a GRIN medium with quadratic cross section index. For our purpose, a Dirac comb is assumed as a periodical object that is lit by a plane wave of uniform coherence.

*Keywords:* Talbot distance, Fractional Fourier transform, GRIN medium.

[†] Autor al que se le dirige la correspondencia:
Tel: (+575) 5842671
E-mail: earrietajimenez@yahoo.es (Emiro Arrieta).

## 1. INTRODUCCIÓN

H. Fox Talbot en 1836 fue el primero en observar la periodicidad longitudinal del campo electromagnético difractado por una red de difracción en la dirección de propagación, es decir, obtuvo réplicas de esta red (Forte Gustavo et al., 2011). Esta señal genera además otros patrones denominados imágenes Talbot fraccional, en las que la distribución de amplitud es una versión del objeto periódico de partida con la misma celda unidad aunque con un periodo menor (Goodman, 1996). Este último fenómeno es conocido como efecto Talbot fraccional. Por otro lado Rayleigh demostró que la periodicidad longitudinal del campo difractado por una red de Ronchi a $z = m\frac{d^2}{\lambda}$ (donde d es el periodo espacial de la red y m un entero par), producen patrones que reproducen la entrada (Forte Gustavo *et al.*, 2011). Este fenómeno, es un efecto bien conocido en óptica y ha recibido amplia atención. Las propiedades fundamentales así como diversas aplicaciones de este se han analizado en medios homogéneos. También se ha estudiado en el contexto de la óptica de átomos (óptica cuántica) debido a las similitudes que existen entre la ecuación paraxial de ondas y la ecuación de Schrödinger.

Asimismo, el fenómeno de autoimagen, en general, se puede tratar como una superposición de un conjunto de modos tanto en el espacio libre como en medios inhomogéneos (Flores *et al.*,2001). El primer reporte experimental de este fenómeno de autoimagenes en medios inhomogéneos se presenta en el artículo titulado: “Fractional Talbot effect in a Selfoc gradient-index lens”, el primero de Diciembre de 2002 (Flores *et al.*, 2002). Por lo anterior, es claro que el estudio de este fenómeno en medios inhomogéneos se ha tratado de manera convencional, más no con el uso de la transformada fraccional de Fourier, por tal razón es que nosotros hemos planteado este trabajo, usando esta transformada que tiene una relación directa con el régimen paraxial de la Óptica difractiva, y además ofrece grandes ventajas a la hora de realizar simulaciones con Matlab®.

El estudio de la relación de la distancia Talbot con el orden de la transformada fraccional de Fourier (TFF) en un medio GRIN (gradiente de índice de refracción), lo abordaremos usando una onda plana de amplitud unitaria monocromática y coherente de longitud de onda $\lambda$ y un objeto periódico representado matemáticamente como una peinilla de Dirac de periodo d , dada por:

$$T(\xi) = \frac{1}{d}\ Comb\left(\frac{\xi}{d}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - nd) \qquad (1)$$
$$= \frac{1}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(2\pi in\frac{\xi}{d}\right)$$

(con $n$: número entero, $i$: imaginario puro, δ: la delta de Dirac, y $\xi$: variable espacial), y un medio con una distribución de índice de refracción,

$$n^2(x) = n_0^2\left[1-\left(x/\chi_x\right)^2\right], \qquad (2)$$

donde $\chi_x$ y $n_0$ son los parámetros del medio GRIN, es decir, constante de gradiente e índice de refracción respectivo, y la transformada fraccional de Fourier derivada de medio GRIN.

## 2. MEDIO DE GRADIENTE DE ÍNDICE CUADRÁTICO

Un medio de gradiente de índice cuadrático es un medio caracterizado por una distribución de índice de refracción de la forma,

$$n^2(x,y) = n_0^2\left[1-\left(x/\chi_x\right)^2-\left(y/\chi_y\right)^2\right], \qquad (3)$$

donde $\chi_x, \chi_y$ y $n_0$ son los parámetros del medio. Generalmente estos parámetros pueden ser función de $z$, pero aquí no trataremos este caso. Restringimos esto al caso especial $\chi_x = \chi_y = \chi$. La versión unidimensional de esta distribución de índice se indica en la ecuación (2). Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación de Helmholtz para una onda monocromática de frecuencia $f_{oc}$ dada por:

$$\nabla^2 \hat{f} + \frac{4\pi^2 n^2 f_{oc}^2}{c^2}\hat{f} = 0, \qquad (4)$$

Se tiene

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial z^2} + 4\pi\sigma^2[1-(x^2+y^2)/\chi^2]\hat{f} = 0 \qquad (5)$$

donde $\sigma = n_0 f_{oc} / c$ y $\hat{f}$ que describe la distribución de amplitud escalar de la luz (donde $\wedge$ representa el símbolo de una función escalar) .Buscamos una solución viajando en la dirección de z positiva de la forma $\hat{f}(x,y,z) = \hat{A}(x,y)\exp(i2\pi\sigma_z z)$ . Es posible mostrar que si la función $\hat{A}_x(x)$ satisface:

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_x}{\partial x^2} + \frac{4\pi\sigma^2}{\chi^2}\left(\frac{\sigma_x^2\chi^2}{\sigma^2} - x^2\right)\hat{A}_x = 0, \qquad (6)$$

y si la función $\hat{A}_y(y)$ satisface una idéntica ecuación en y, entonces $\hat{A}(x,y) = \hat{A}_x(x)\hat{A}_y(y)$ es una solución de la ecuación (5), tal que:

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

Introduciendo las variables dimensionales $u = x/s$ donde $s > 0$ es un parámetro de escala, aquí tomándolo igual a $s^2 = \chi/\sigma$ , la ecuación (6) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + 4\pi\left(\sigma_x^2 s^2 - u^2\right)A_x = 0, \qquad (7)$$

Donde $s^{-1/2}A(x/s) = \hat{A}_x(x)$ . La ecuación (7) tiene precisamente la misma forma de la ecuación diferencial del oscilador armónico mecano cuántico, cuyas soluciones son las funciones de Hermite-Gauss, que son funciones propias del operador de Fourier (Ozaktas et al., 2001), por consiguiente, asumiendo que una distribución arbitraria de luz $\hat{f}(x,y)$ incide sobre tal medio en z=0. Esta distribución puede ser expresada en términos de las funciones Hermite-Gauss como:

$$\hat{f}(x,y,0) \equiv \hat{f}(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{s}C_{lm}\psi_l(x/s)\psi_m(y/s), \qquad (8)$$

$$C_{lm} = \iint \frac{1}{s}C_{lm}\psi_l(x/s)\psi_m(y/s)\hat{f}(x,y)\,dxdy$$

y la distribución de amplitud para cualquier z puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\hat{f}_{out}(x,y,z) &\equiv \hat{g}(x,y) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{s}C_{lm}e^{i2\pi\sigma z}e^{-i(l+m+1)z/\chi}\psi_l(x/s)\psi_m(y/s)\end{aligned} \qquad (9)$$

donde $\psi_m(y/s)$ son funciones Hermite- Gauss, cuando $z = (\pi/2)\chi$ es posible mostrar usando la siguiente relación:

$$e^{-i2\pi\mu u} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\frac{\pi}{2}}\psi_n(\mu)\psi_n(u) \qquad (10)$$

que corresponde a la expansión espectral del Kernel de la trasformada de Fourier, y sustituyendo $C_{lm}$ en la ecuación (10) se obtiene:

$$\hat{g}(x,y) = e^{i2\pi\sigma z}\frac{e^{-i\pi/2}}{s^2}\iint \hat{f}(x',y')e^{-i2\pi(xx'+yy')/s^2}dx'dy' \qquad (11)$$

la cual esencialmente reconocemos como relación de transformada de Fourier. Así, la propagación a esa distancia en tal medio resulta en una transformación de Fourier. Ahora, introduciendo el parámetro $a, |a| \le 2$ denominado el orden fraccional, también es posible usando la ecuación:

$$K_a(u,u') = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-ia\,l\frac{\pi}{2}}\psi_l(u)\psi_l(u') \qquad (12)$$

y la propiedad de las funciones Hermite-Gauss,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha}\psi_n(u)\psi_n(u') \\ &= \sqrt{1 - i\cot\alpha}\; e^{i\pi\left(u^2\cot\alpha - 2uu'\csc\alpha + u'^2\cot\alpha\right)}\end{aligned} \qquad (13)$$

y sustituyendo para $C_{lm}$ , cuando $z = a(\pi/2)\chi$ que:

$$\hat{g}(x,y) = e^{i2\pi\sigma z}\frac{e^{-ia\pi/2}}{s^2}\iint K_a(x/s, x'/s)K_a(y/s, y'/s)\hat{f}(x',y')dx'dy' \qquad (14)$$

donde $K_a(u,u')$ es el Kernel de la transformada fraccional de Fourier. Así, vemos que para valores arbitrarios de z, el efecto de propagación en medio de gradiente de índice cuadrático puede ser interpretado como una transformada fraccional de Fourier (Ozaktas *et al*., 2001). En el caso unidimensional, la correspondiente relación entre la entrada y la salida es

$$\hat{g}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l e^{i2\pi\sigma z}e^{-i(l+1/2)z/\chi}\frac{1}{\sqrt{s}}\psi_l(x/s) \tag{15}$$

Cuando $z=(\pi/2)\chi$,

$$\hat{g}(x)=e^{i2\pi\sigma z}\frac{e^{-i\pi/4}}{s}\int\hat{f}(x')e^{-i2\pi xx'/s^2}dx' \tag{16}$$

y para la variable arbitraria $z=a(\pi/2)\chi$,

$$\hat{g}(x)=e^{i2\pi\sigma z}\frac{e^{-ia\pi/4}}{s}\int K_a(x/s,x'/s)\hat{f}(x')dx' \tag{17}$$

## 3. RELACIÓN ENTRE LA DISTANCIA TALBOT Y EL ORDEN DE LA TRANSFORMADA FRACCIONAL DE FOURIER EN MEDIO GRIN

El proceso de propagación bajo una sección de un medio de gradiente de índice cuadrático con parámetro $\chi$ y longitud $L$, corresponde matemáticamente a la transformada fraccional de Fourier. El Kernel asociado viene dado por:

$$h(x,x')=\begin{cases}\dfrac{e^{-iL/2\chi}}{\sqrt{\lambda\chi}}A_\alpha e^{\frac{i\pi}{\lambda\chi}\left(x^2\cot\alpha-2xx'\csc\alpha+x'^2\cot\alpha\right)}, & L\neq n\pi\chi\\ e^{-iL/2\chi}\delta(x-x'), & L=2n\pi\chi\\ e^{-iL/2\chi}\delta(x+x'), & L=(2n+1)\pi\chi\end{cases} \tag{18}$$

donde $n$ es un entero, $\alpha=L/\chi$, y $A_\alpha=\sqrt{1-i\cot\alpha}$

Pero $A_\alpha$ también se puede escribir así: $A_\alpha=\dfrac{e^{-i[\pi\,\mathrm{sgn}(\alpha)/4-\alpha/2]}}{\sqrt{|sen\alpha|}}$, en este caso $\alpha=a\dfrac{\pi}{2}$ (en espacio libre) (Ozaktas et al., 2001).

Recordando el índice del medio dado por la ecuación (3) y que unidimensionalmente para el caso especial $\chi_x=\chi_y=\chi$ se convierte en la ecuación (2), y usando como objeto periódico una peinilla de Dirac dada por la ecuación (1), entonces aplicando la TFF en medio GRIN se tiene:

$$f_\alpha(x)= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-id/2\chi}}{\sqrt{\lambda\chi}}A_\alpha e^{\frac{i\pi}{\lambda\chi}\left(x^2\cot\alpha-2xx'\csc\alpha+x'^2\cot\alpha\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-x')dx' \quad ,x'=np \tag{19}$$

Luego, aplicando el principio de linealidad en la ec (19), y asumiendo que $x\to\frac{u}{z}$ (plano de Fourier) se tiene,

$$f_\alpha(u,z)=\frac{e^{-id/2\chi}}{\sqrt{\lambda\chi}}A_\alpha e^{\frac{i\pi}{\lambda\chi}\left(\frac{u^2}{z^2}\cot\alpha\right)}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{i\pi}{\lambda\chi}\left((np)^2\cot\alpha\right)}e^{-\frac{i2\pi}{\lambda\chi}\left(\frac{u}{z}np\csc\alpha\right)} \tag{20}$$

Ahora si consideramos que $\frac{p^2\cot\alpha}{\lambda\chi}=2m$ y $\frac{p\csc\alpha}{z\lambda\chi}=\frac{1}{p}$ es decir, $\cot\alpha=2m\lambda\chi/p^2$ y $z=\frac{p^2\csc\alpha}{\lambda\chi}$ y remplazando estas últimas relaciones en la ec (20), tenemos autoimagen del objeto original a distancias caracterizada por la última de las dos relación anterior, la cual se encuentra relacionada con el orden de la transformada fraccional de Fourier y el parámetro de gradiente, así:

$$z=\frac{p^2\csc\alpha}{\lambda\chi} \tag{21}$$

Observe que cuando $\chi\approx1$, se obtiene las distancias Talbot en espacio libre.

## 4. CONCLUSIONES

De acuerdo con el resultado de la ec (21), vemos que la ubicación axial de las autoimágenes se pueden generar en el régimen de Fresnel (o zona de Fresnel), puesto que depende del orden fraccional de la TFF, y además se observa que también están relacionadas con el periodo de la red, la longitud de la onda que incide sobre el objeto y el parámetro del gradiente de índice (medio GRIN).

Este trabajo puede usarse como referente para caracterizar (de manera experimental o a través de simulación) diferentes tipos de medios GRIN que presenten gradientes de índices como el de la ec (3). También, tiene gran aplicación en aquellos dispositivos que en su interior tienen componentes constituidos de medios GRIN, como p.ej: las fotocopiadoras, lentes de gradientes de índice (usadas para corregir aberraciones), las fibras ópticas de índice de refracción radialmente variables de forma cuadrática (Corti M. A. *et al.*, 2011), entre otros.

## REFERENCIAS


Forte Gustavo, L. A., Tebaldi, M. y Bolognini, N. (2011). Self-imaging by a volume grating. *Optics Communications*, **284**: 2494-2499.

Goodman, J.W. (1996). *Introduction to Fourier Optics*. 2ª. Ed. Capitulo 4. New York: McGraw-Hill.

Flores-Arias. M.T., Pérez .M.V y Gómez-Reino. C (2001). Efecto Talbot entero y fraccionario en medios GRIN. *J. Opt. Pur. Apl.*, **34**: 13-29.

Flores-Arias, M. T., Bao .C., Pérez. M. V. and Fernández-Pousa, C. R. (2002). Fractional Talbot effect in a Selfoc gradient-index lens. *Optics Letters*, **27** (23): 2064-2066.

Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z., Alper Kutay, M. (2001). *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing.* Chichester: Wiley.

Corti, M. A., Zerbino, Lía M. and Garavaglia M. (2011). Caracterización de la transferencia de imágenes a través de medios GRIN mediante la MTF. Anales AFA, **23** (1): 49-53


## SOBRE LOS AUTORES


**Emiro Arrieta Jiménez**

Estudiante de Doctorado en Ciencias Físicas del Sue Caribe: Grupo LOI, Universidad Popular del Cesar (UPC), Valledupar- Colombia.

**César Orlando Torres**

Docente de tiempo completo de la Universidad Popular del Cesar (UPC). Grupo de Óptica e Informática (LOI), Universidad Popular del Cesar, Valledupar- Colombia