TUTORIAL DE LA ASIGNATURA SISTEMAS Y SEÑALES CON MATLAB
SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5

JORGE EFRAIN CAMARGO VANEGAS

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRÓNICA
Bucaramanga

2008

TUTORIAL DE LA ASIGNATURA SISTEMAS Y SEÑALES CON MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5

PROYECTO DE GRADO

JORGE EFRAIN CAMARGO VANEGAS

DIRECTOR DE PROYECTO
JESUS ANTONIO VEGA URIBE
INGENIERO ELECTRICISTA

ESCUELA DE INGENIERÌA Y ADMINISTRACIÓN
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRÓNICA

2008

Nota de aceptación:

Firma del Presidente del Jurado.

Firma del Jurado.

Firma del Jurado.

Dedicado a:

A Dios Nuestro señor, a mis padres Efraín Camargo y Cecilia Vanegas quienes con sus esfuerzos, consejos y correcciones han permitido mi desarrollo como persona y como Ingeniero, a mi hermana que es una razón para ser mejor ser humano y profesional.

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo a Dios Nuestro Señor, quien con su luz me ilumina para obtener fortaleza, inteligencia y constancia. Un apoyo que siento en todos mis momentos de dificultades y triunfos.

A mis espectaculares padres Efraín Camargo y Cecilia Vanegas, por apoyarme desde el principio en la decisión de estudiar esta carrera, gracias por todas las facilidades que tuve durante todos estos años para dedicarme exclusivamente en alcanzar este logro en mi carrera profesional. Gracias a papá por el transporte, a mamá por su preocupación en las trasnochadas y en las madrugadas, y por ese contagio de ánimo que siempre sentí de su parte.

A todos los excelentes maestros que tuve durante la carrera, gracias por sus historias de vida, por los conocimientos que compartieron, por la exigencia que tuvieron hacia nosotros, lo cual nos hace excelentes profesionales.

A todos mis compañeros de clase, especialmente Leonardo, Johan, Carlos Díaz compañeros de casi todos los laboratorios, con quienes siempre estuvimos reunidos en época de parciales, en momentos de paseos, risas, disgustos, estudio, colaborándonos para de una u otra forma ser mejores amigos y profesionales

Al Ingeniero Jesús Vega por la oportunidad de realizar el proyecto, por todo su acompañamiento y tutoría durante estos meses.

CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

TITULO: TUTORIAL DE LA ASIGNATURA SISTEMAS Y SEÑALES CON MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5

AUTOR: JORGE EFRAÍN CAMARGO VANEGAS

FACULTAD: FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DIRECTOR: ING. JESÚS ANTONIO VEGA URIBE

RESUMEN

Este proyecto es un soporte o complemento al curso Sistemas y Señales que no pretende que la teoría vista en el curso se reemplazada por este y que surgió de la necesidad de poder presentar una herramienta didáctica de fácil manejo para mejorar el entendimiento del curso por medio de una interfaz grafica de usuario desarrollada en Matlab con módulos en los que se presentan los diferentes temas del curso Sistemas y Señales, y puesta a disposición de los alumnos en una página Web sobre la plataforma Lotus Learning Space 5 como un curso e-Learning. En la actualidad existen herramientas, de alto costo, que muestran resultados de operaciones realizadas en señales, pero no dan un enfoque académico para la comprensión de las técnicas manejadas en el curso de Sistemas y Señales, por otra parte en la asignatura es difícil visualizar resultados de técnicas aplicando señales reales que den resultados de operaciones, como también en muchas ocasiones no es muy claro el desarrollo de los temas manejados en el curso de Sistemas y Señales, porque no hay las herramientas necesarias para visualizar y comprender mejor el curso.
Conclusiones.
Es una buena forma de entender, aplicar y desarrollar prácticas.
Fomentar proyectos futuros para lograr un laboratorio de la materia.
Se puede utilizar la herramienta tanto en el pregrado como en las especializaciones en Telecomunicaciones y Control.
Trabajos futuros: incluir en los módulos los temas (filtros, ecuaciones en diferencias de 2° orden, transformada Z) y también complementar con hardware específico (DSP u otro dispositivo) para prácticas reales de soporte.
Se recomienda aplicar la herramienta a grupos de estudiantes con el fin de estudiar y analizar las ventajas y desventajas que presenta.

PALABRAS CLAVES: Sistemas, Señales, herramienta, Matlab, e-Learning, GUI.

TITLE: TUTORIAL DE LA ASIGNATURA SISTEMAS Y SEÑALES CON MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5

AUTHOR: JORGE EFRAÍN CAMARGO VANEGAS

FACULTY: FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DIRECTOR: ING. JESÚS ANTONIO VEGA URIBE

ABSTRACT

This project is to support or complement to Systems and Signals not meant to the theory view at the workshop will be replaced by this and that arose from the need to present a teaching tool easy to handle in order to improve the understanding of the course through a graphical user interface developed in Matlab modules with those presented different topics of Systems and Signals, and made available to students on a Web page on the platform Lotus Learning Space 5 as an e-learning course. There are now tools, high cost, which show results of operations performed in signals, but do not give an academic approach to understanding the techniques handled in the course of Signals and Systems, elsewhere in the subject is difficult to visualize results techniques applied real signals that give results of operations, but also in many cases is not very clear about the development of the themes handled in the course of systems and signals, because there aren’t necessary tools to visualize and better understand the course.

Conclusions:

It is a good way to understand, implement and develop practices.

Encouraging future projects to achieve a laboratory in the area.

You can use the tool both at the undergraduate and specializations in telecommunications and Control.

Future work: Include modules this items (filters, difference equations of second order, z-transform), and also complemented by specific hardware (DSP or other device) for real practical support.

It is recommended to apply the tool to groups of students to study and analyze the advantages and disadvantages it.

KEY WORDS: Systems, Signals, tool, Matlab, e-Learning, GUI.

INTRODUCCCIÓN

El hombre siempre a sentido la necesidad de comunicarse o intercambiar información, desde un principio con señales visuales, pero su expansión sobre la tierra lo llevó a perfeccionar sus métodos de comunicación.

En nuestros días el método más rápido, eficiente y de mayor cobertura es la transmisión y recepción de mensajes en forma eléctrica, que en los últimos años ha tenido una gran evolución.

La base de estos sistemas de comunicación son las señales eléctricas que, aunque generalmente dependen del tiempo, puede ocurrir que la variable independiente sea otra. Originalmente la mayoría de las señales que se deseaban transmitir de un lugar a otro eran de tiempo continuo; las aplicaciones de señales de tiempo discreto tuvieron sus orígenes en el análisis numérico, la estadística y el análisis de series temporales. Sin embargo el advenimiento de las computadoras que ofrecieron mayores velocidades de procesamiento, y el desarrollo de dispositivos de almacenamiento de alta densidad, impulsaron la discretización y digitalización de las señales. Pero no solo es en los sistemas de comunicaciones eléctricas modernos donde se utilizan señales discretas en el tiempo. A partir de 1950 se comenzaron a aplicar técnicas sencillas de procesamiento digital sobre señales de muy baja frecuencia en áreas diversas tales como: control de procesos, biomedicina, audio, sísmica, procesamiento de imágenes, etc. Las principales ventajas del procesamiento digital de señales radican en que al limitarse el número de símbolos a manejar, el procesamiento se realiza más rápido y fácilmente, fortaleciendo el proceso frente al ruido.

De esta manera se tratara de dar un buen manejo a este tema desde un punto de vista comprensible para estudiantes de Ingeniería Electrónica, con la creación en Matlab de una interfaz grafica que permita observar los diferentes comportamientos de las señales, como soporte o complemento de los temas tratados en el curso de sistemas y señales.

OBJETIVOS

GENERAL

- Implementar el curso de Sistemas y Señales de quinto semestre de Ingeniería Electrónica en la plataforma Lotus Learning Space 5 con ejecutables en Matlab como herramienta de apoyo a la docencia y aprendizaje en la Facultad de Ingeniería Electrónica.

ESPECIFICOS

- Diseñar la presentación y navegación del curso en una interfaz gráfica de usuario y de fácil uso para ser descargada desde un ambiente de Internet.

- Ubicar el contenido del curso de Sistemas y Señales sobre la plataforma Lotus Learning Space 5 con ejecutables en Matlab.

- Diseñar módulos ejecutables en Matlab para la interacción del estudiante en: operaciones matemáticas, convolución, sistemas y análisis en frecuencia.

- Familiarizar al alumno con las técnicas adecuadas para poder analizar y sintetizar sistemas que operan con señales por medio de ejecutables en Matlab.

1. DISEÑO PÁGINA WEB

1.1 INFORMACION GENERAL

El diseño Web es una actividad que consiste en la planificación de sitios Web y paginas Web. No es simplemente una aplicación del diseño convencional sobre Internet ya que requiere tener en cuenta cuestiones tales como navegabilidad, interactividad, usabilidad, arquitectura de la información y la interacción del medio como audio, texto, imagen y video.

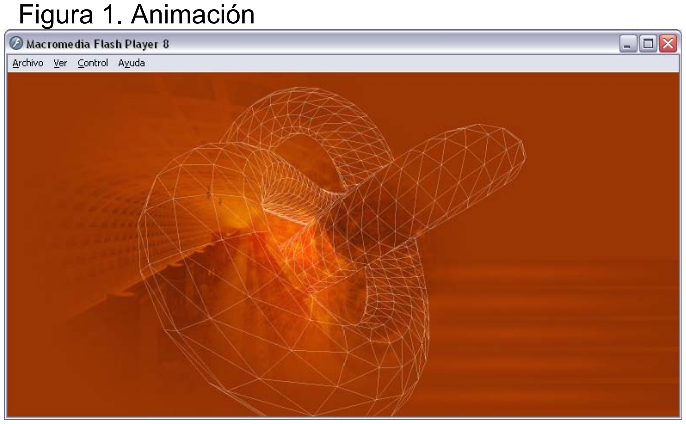
El diseño de páginas Web es una amplia área de aplicación del diseño gráfico en la cual se integran conocimientos propios del diseño como son la composición, el uso de color y la tipografía. Trata básicamente de realizar un documento con información enlazada que sea para el usuario útil de acuerdo con el tema tratado en esta.

También se requiere un conocimiento de las herramientas para el diseño y edición de páginas Web y animaciones, los cuales son Macromedia Dreamweaver y Macromedia Flash respectivamente, en este caso.

1.2 PÁGINA WEB

Para este caso se utilizó una animación la cual se adapta y muestra lo que significa el curso (Sistemas y Señales), y con esto se pasó a la edición y al diseño de las demás animaciones que hagan mejor relación con la materia en esta página Web.

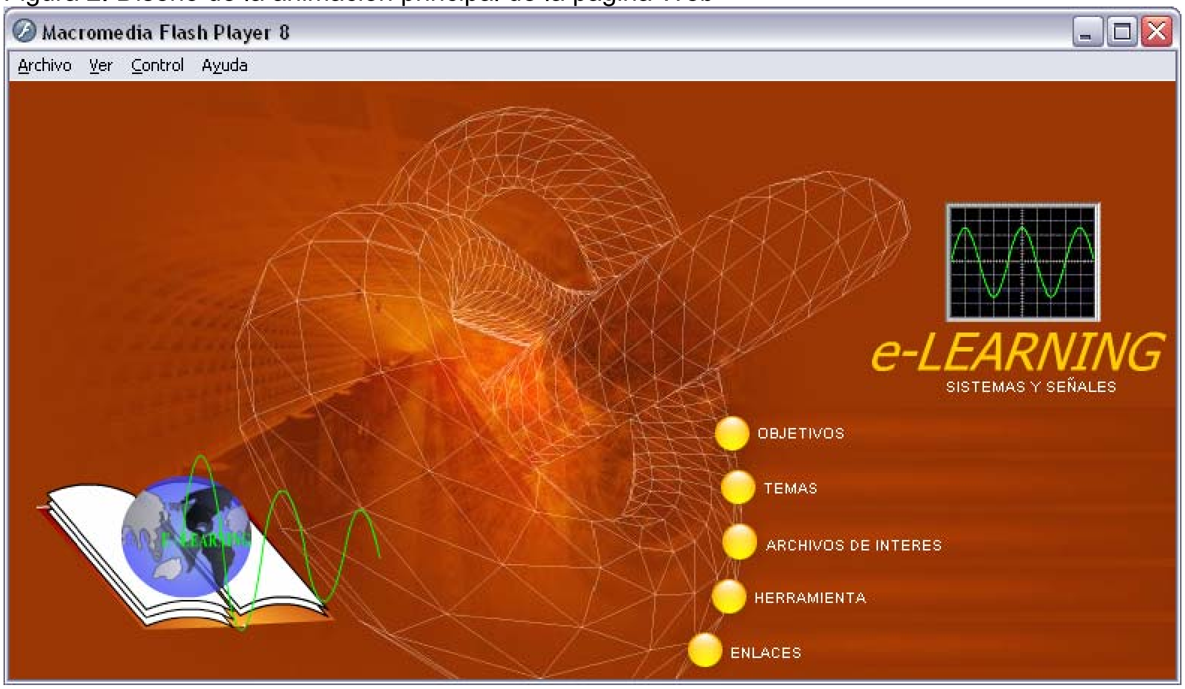
Figura 1. Animación



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Teniendo en cuenta la relación que deben tener estas animaciones y el resto de elementos que conforman la página Web con la materia se pasó a buscar y a diseñar imágenes que dieran la apariencia requerida a las animaciones. Se pensó en imágenes como lo son señales de osciloscopio y también imágenes que muestren lo que significa e-Learning, para esto se utilizaron las herramientas antes mencionadas con las cuales se crearon animaciones que lograron la apariencia que necesitaba la página Web del curso Sistemas y Señales.

Figura 2. Diseño de la animación principal de la página Web



Fuente: Camargo Jorge Efraín

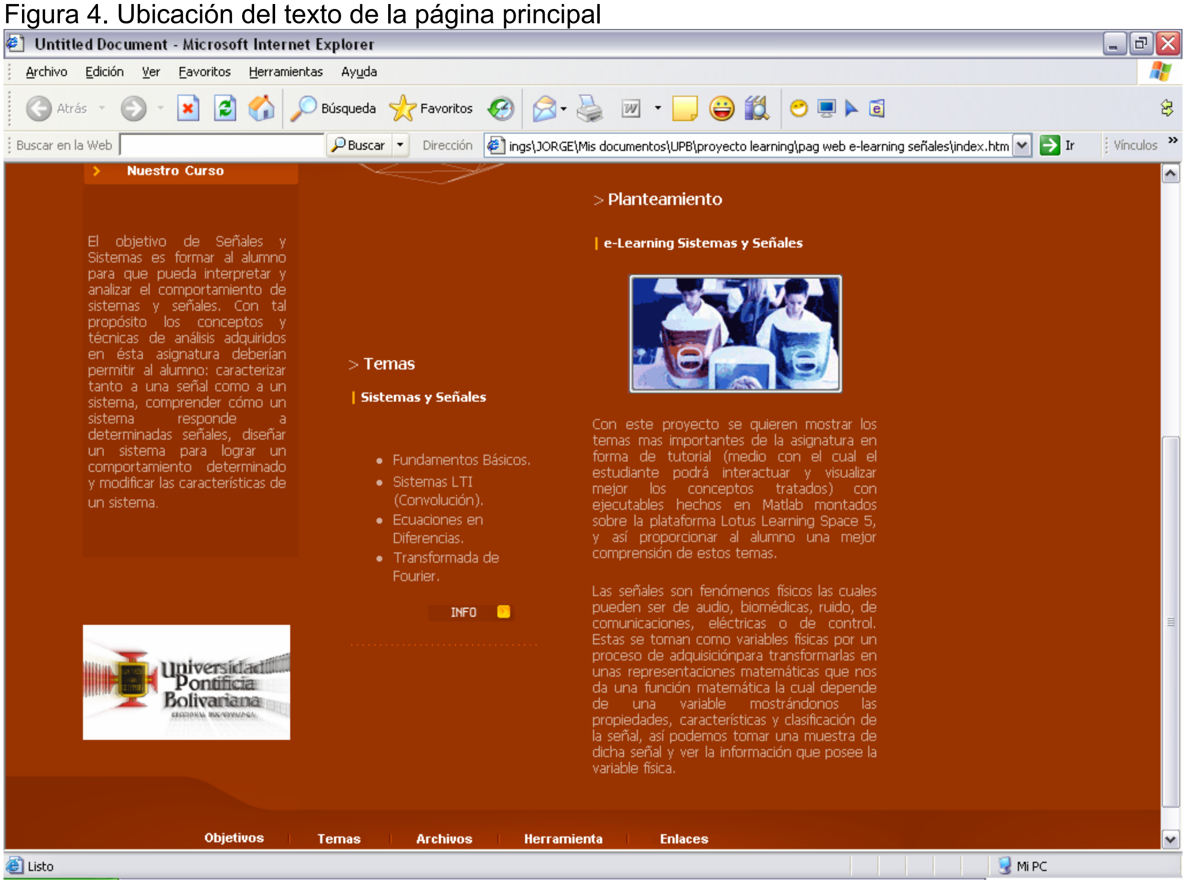
En esta animación se logró darle movimiento al menú con las opciones requeridas para esta página Web, como también una imagen que aparece en forma de pantalla de osciloscopio con una señal sinusoidal con el nombre del curso, la plataforma en la cual será montada esta página Web y una animación agregada en forma de libro abierto en el cual pasan las paginas mientras el mundo gira mostrando la palabra e-Learning y una señal amortiguada que sale de este. Todo esto mediante el programa Flash y sus herramientas para animación.

Figura 3. Prediseño de la animación del libro abierto

Fuente: Camargo Jorge Efraín

La animación del libro abierto fue propuesta de esta forma por el director del proyecto y en común acuerdo con su diseñador se logro una imagen jpeg con la que se llegó a crear la animación que se adaptaba mejor según el criterio de estos.
Como siguiente paso en el diseño de la página Web se pasó a la ubicación del texto de la página principal, la cual se hizo debajo de la animación principal teniendo en cuenta el objetivo del curso Sistemas y Señales, los temas propuestos para el curso en esta página Web, el planteamiento del curso sobre la plataforma e-Learning, una animación con referencia a la Universidad Pontificia Bolivariana y como ultima medida las opciones del menú en la parte inferior de la página Web.

Figura 4. Ubicación del texto de la página principal

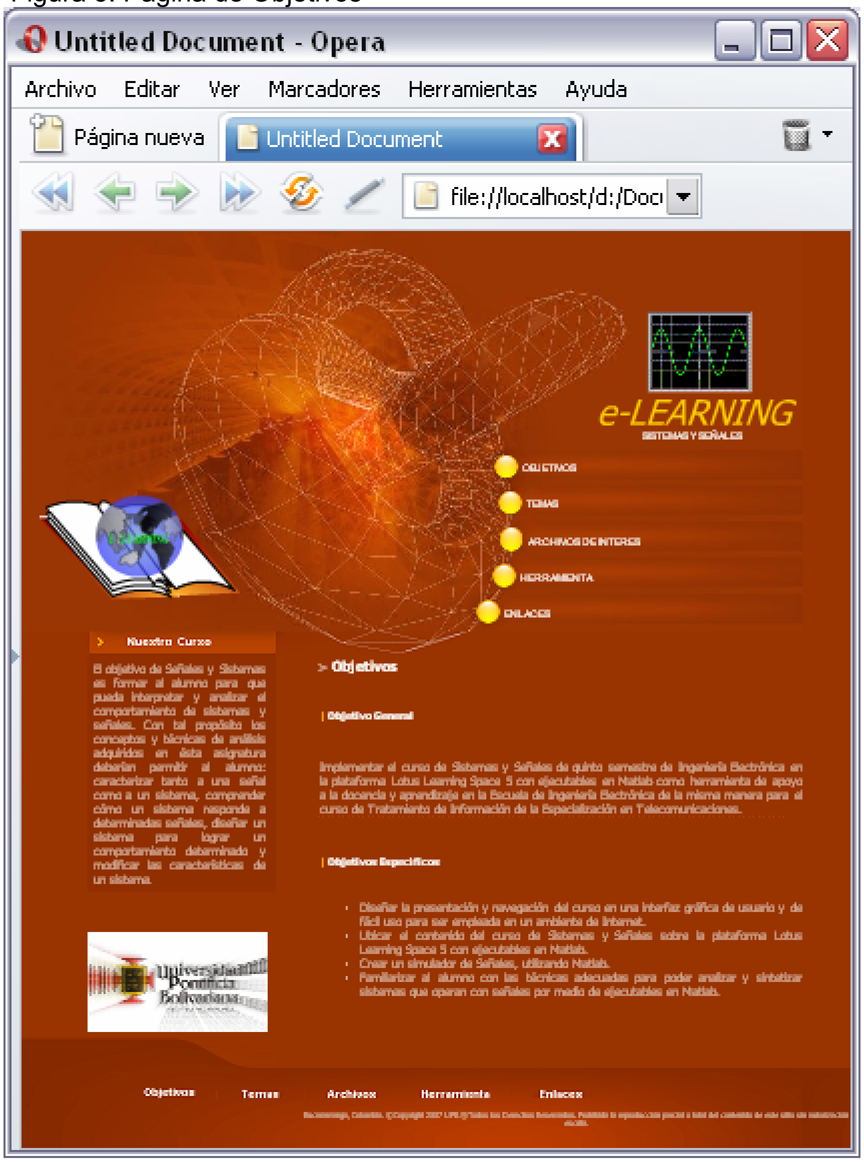


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Cada uno de los elementos del menú abre su página correspondiente para mostrar su contenido.

Para la página de objetivos se creó de la misma forma que la página principal solo que en este caso el texto era referente a dicho tema.

Figura 5. Página de Objetivos



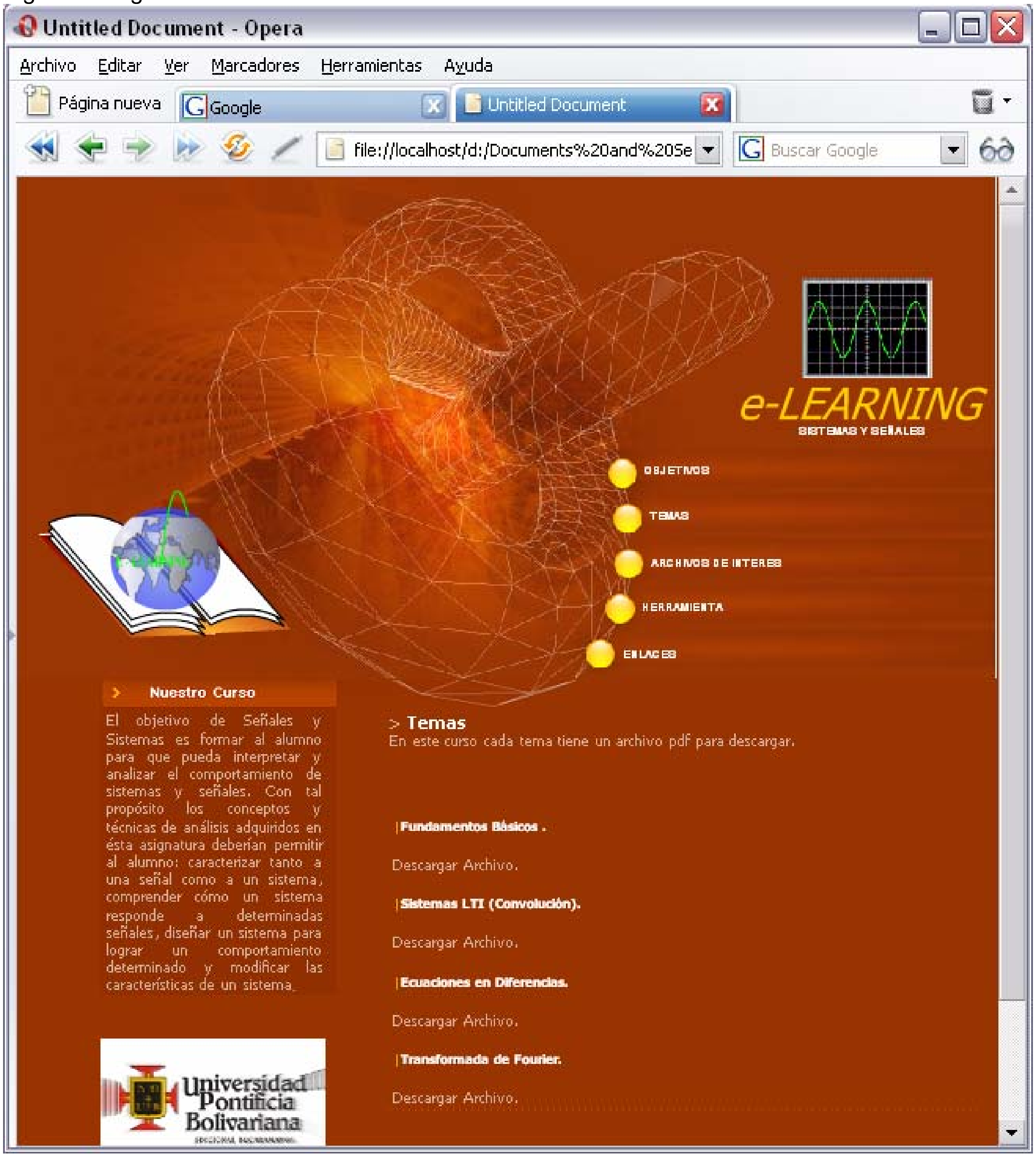
Fuente: Camargo Jorge Efraín

Así se crearon las otras páginas para los demás opciones del menú con sus diferentes temas a tratar.

En la página de Temas se ubicó la teoría de cada uno de los temas del curso por separado para ser descargados en formato *.pdf, teniendo así un complemento teórico.

Estos documentos teóricos del curso fueron escritos en su totalidad por el Ing. Jesús Antonio Vega Uribe, basado en sus conocimientos sobre la materia y apoyado en textos de Sistemas y Señales (Kamen, Cooper y Oppenheim). Por lo tanto son documentos adaptados al curso.

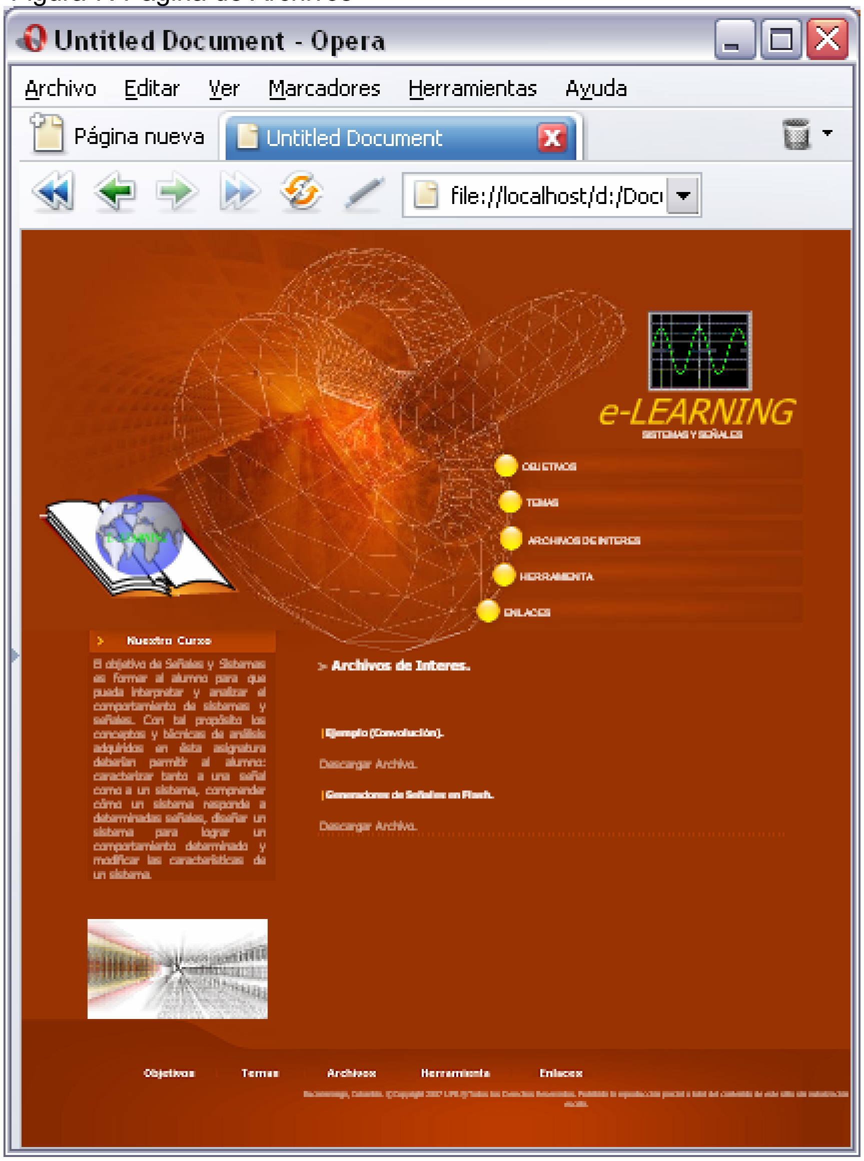
Figura 6. Página de Temas



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la página de archivos de interés se pueden descargar unas herramientas o aplicaciones básicas para esta materia, así los usuarios pueden comparar lo que se quiso hacer con la herramienta para este proyecto y pueden tener unas herramientas interactivas extras.

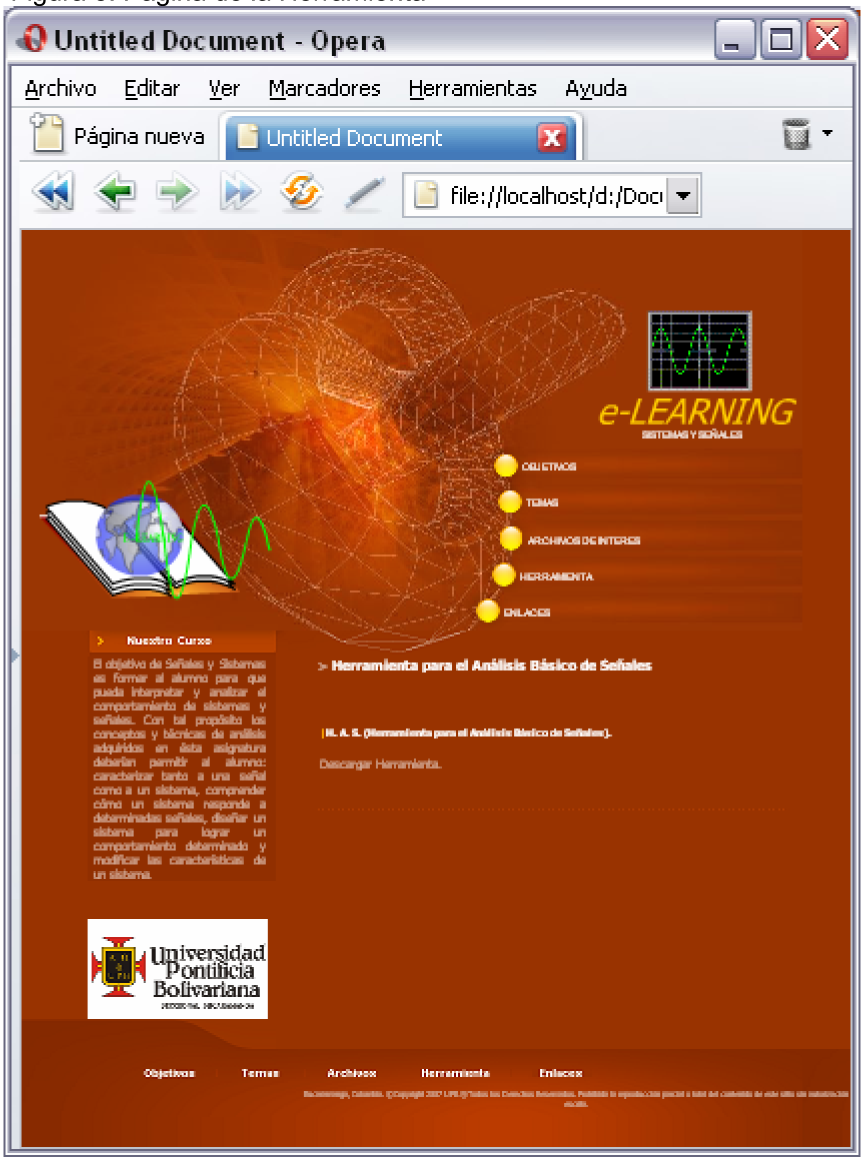
Figura 7. Página de Archivos



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la siguiente página se encuentra el vínculo para descargar la herramienta diseñada en Matlab para este proyecto la cual permite el desarrollo de los temas de la materia Sistemas y Señales en tiempo discreto, la cual será explicada en su totalidad mas adelante.

Figura 8. Página de la Herramienta



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la última página se pueden encontrar enlaces a sitios Web de Internet como lo son el grupo de Bioingeniería-Tratamiento de Señales y Microelectrónica (Bisemic) de la Universidad Pontificia Bolivariana seccional Bucaramanga y también de la página Web Mathworks, página oficial de la herramienta Matlab.

2. METODOLOGIA

Ante una problemática existente en este curso se desarrolló una herramienta que quiere complementar y mejorar la forma de ver los diferentes temas del curso Sistemas y Señales, para esto se buscaron herramientas hechas en otras partes y proyectos relacionado con el tema, de los cuales se encontró algunos para saber como se debería desarrollar este proyecto de la manera mas adecuada.

El grupo COMSOL saco al mercado una herramienta para el desarrollo de laboratorios de Sistemas y Señales llamada (Signals and Systems Lab) una herramienta para el procesamiento de señales. Toda la información al respecto se puede encontrar en la página Web (www.comsol.com/products/signal) [comsol].

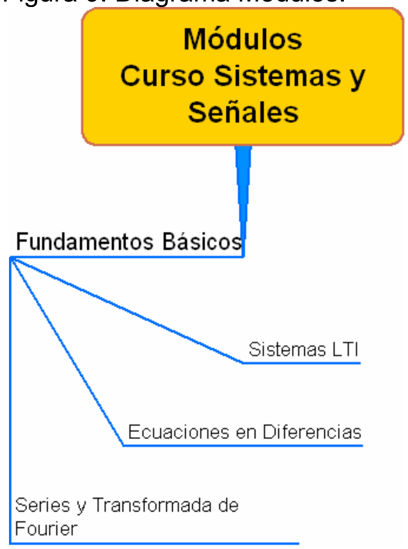
También se han venido desarrollando laboratorios de Sistemas y Señales en Universidades como la de Zaragoza (España) en el Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragon, la cual cuenta con equipos computacionales y dispositivos como generadores de señales, osciloscopios y tarjetas DSP [aragon].

En cuanto a lo que se lleva a cabo en nuestro país, en la Universidad Industrial de Santander se han desarrollado cursos E-Learning para las asignaturas de Tratamiento de Señales y Mediciones Eléctricas para complementar lo que se quiere dar a conocer en los cursos.

Esta Herramienta (H.A.S. – Herramienta para le Análisis Básico de Señales Discretas) se diseño con el objetivo de proporcionar una ayuda para el mejor desempeño y entendimiento del curso Sistemas y Señales a manera de un tutorial totalmente diseñado con Matlab que muestre los diferentes temas de una forma didáctica y fácil de manejar para poder realizar ejercicios prácticos con señales discretas.

Analizando la forma en que esta materia ha sido tratada en el aula de clase se llego a la conclusión que la mayoría de los alumnos no podían abstraer claramente la explicación de los diferentes temas de la materia, ya que en un tablero de clase esta explicación queda limitada y no puede dársele el ambiente adecuado para dicho desarrollo, por esto se quiso diseñar una herramienta que mostrara de una forma mas clara como se llevan a cabo operaciones y demás tratamientos de las señales en los temas de este curso con un ambiente didáctico a la interfaz grafica que pueda darle el apoyo necesario a los profesores utilizando la herramienta en talleres y practicas para desarrollar en clase y en la casa, obteniendo así una mejor visión y entendimiento del curso.

Figura 9. Diagrama Módulos.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Este proyecto se trabajó por módulos para llevar al usuario los temas de la misma forma en que son llevados durante el curso, dándole así un orden y un apropiado desarrollo de la herramienta, teniendo en cuenta que el módulo de fundamentos básicos es importante y necesario para e desarrollo de los demás módulos.

Después de realizada la herramienta se depuró para ser compilada en un archivo ejecutable (*.exe), y así poder brindarle a los usuarios mayor facilidad a la hora de utilizar la herramienta sin tener que abrir el programa Matlab para correrla y hasta sin necesidad de tener instalado Matlab en el equipo. Esto también facilita subir la herramienta a la Internet en la página Web diseñada para este curso sobre la plataforma Lotus Learning Space 5 que maneja la Universidad Pontificia Bolivariana de Bucaramanga dejándola como un archivo descargable en la página referente a la herramienta como se mencionó anteriormente en el numeral 1.2 para cualquiera que necesite tomar este curso e-Learning, pudiéndose utilizar la herramienta en cualquier parte, donde la necesite, instalando el MCRinstaller proporcionado con la herramienta.

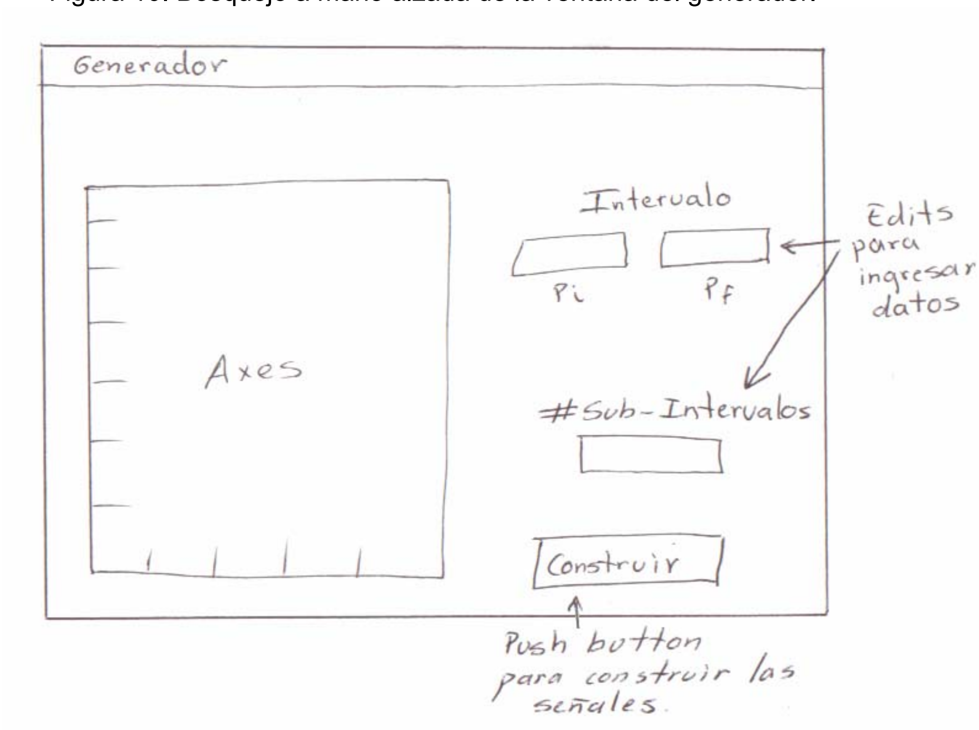
El curso de Sistemas y Señales sobre la plataforma Lotus Learning Space 5 tiene en la página material teórico de los diferentes temas en formato pdf para descargar como complemento para la herramienta y el curso presencial del pensum de Ingeniería Electrónica, como también de las especializaciones en Telecomunicaciones y Control de la Universidad Pontificia Bolivariana de Bucaramanga. Al ser esta una herramienta pensada para alumnos del curso Sistemas y Señales es un aporte para el entendimiento de este, ya que aunque se pueden encontrar herramientas en la Internet, ésta se desarrollo teniendo en cuenta la problemática que se presenta durante el curso para mejorar el entendimiento.

3. DISEÑO DE LA INTERFAZ GRAFICA EN MATLAB

3.1 DISEÑO A MANO ALZADA

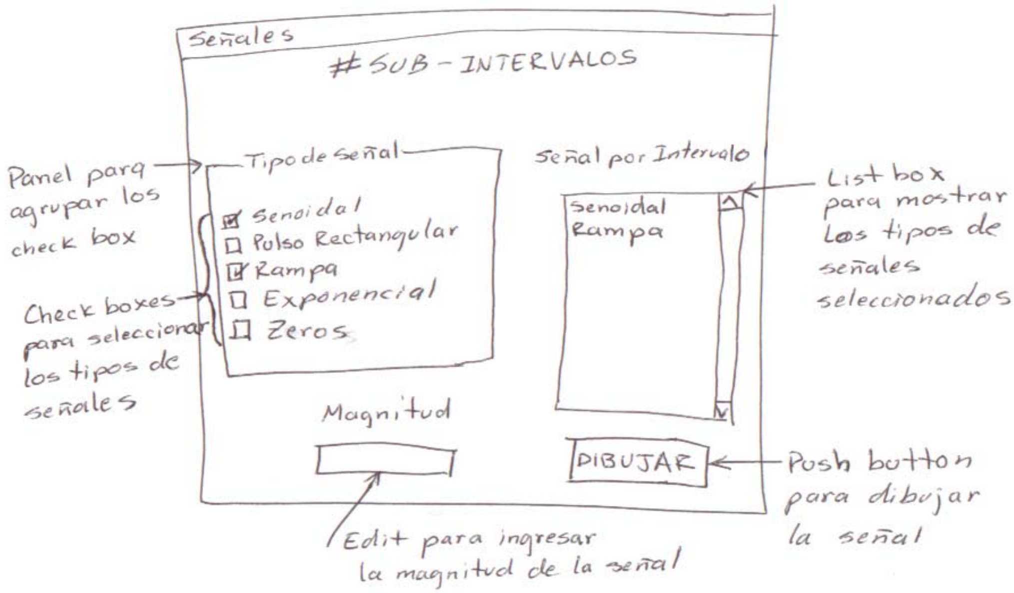
Para empezar con el prediseño fue muy importante revisar el libro de Mathworks referente al diseño de GUI's para seguir los pasos correctos en el diseño de la herramienta, con lo visto en este libro se paso a realizar un bosquejo a mano alzada de lo que se quería hacer para poder realizarlo de manera clara. [math], [master].

Figura 10. Bosquejo a mano alzada de la ventana del generador.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Figura 11. Bosquejo a mano alzada de la ventana de señales.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

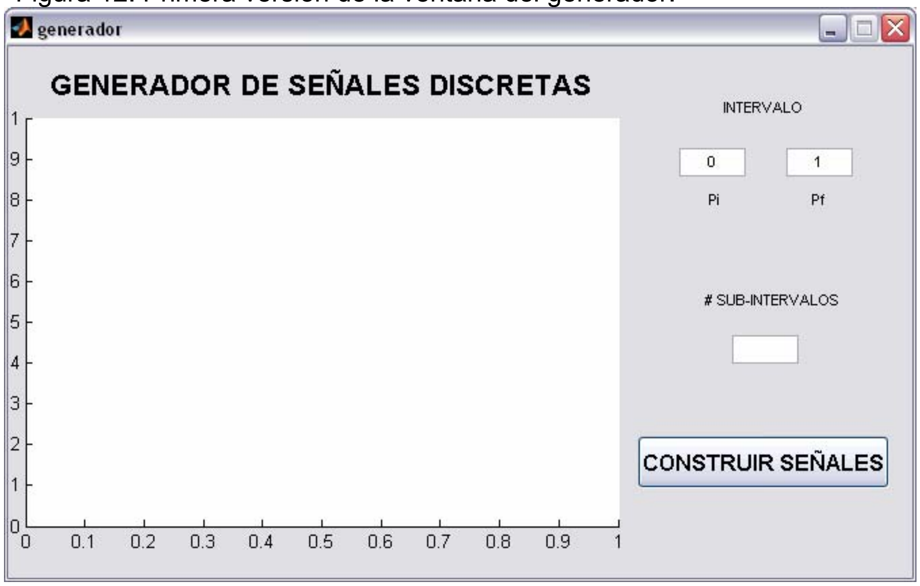
En el diseño de la herramienta como primera medida se propuso que las interfaces graficas de usuario GUI se deberían ser generadas utilizando código de programación y no con la herramienta GUIDE de Matlab, ya que para este proyecto se requiere compilar la herramienta para ubicarla en la página Web como un archivo ejecutable *.exe descargable, puesto que al hacerlo con el GUIDE de Matlab al compilar la herramienta se pueden presentar problemas, además programando las interfaces se reduce el tamaño de los archivos, y se pueden personalizar mejor.

Luego se paso a tratar los temas en la herramienta, los cuales se manejaron con señales de tiempo discreto, ya que necesitan menos complejidad en el desarrollo de los programas y los procedimientos se ven con más claridad. Para comenzar se dio paso a crear un generador de señales el cual sirve para obtener señales discretas de diversas características definidas por el usuario y utilizarlas en el desarrollo de ejercicios en todos los módulos de la herramienta.

3.2 DISEÑO DE LA HERRAMIENTA

Al tener claras todas las características que se deseaban para la herramienta se empezó con la creación del generador de señales con una interfaz aparte para seleccionar los tipos de señales, la cual es llamada con el botón construir, estas interfaces se crearon con el guide de Matlab para tener una referencia en cuanto a tamaños (de las ventanas y de sus objetos) y así poder hacerlas programadas.

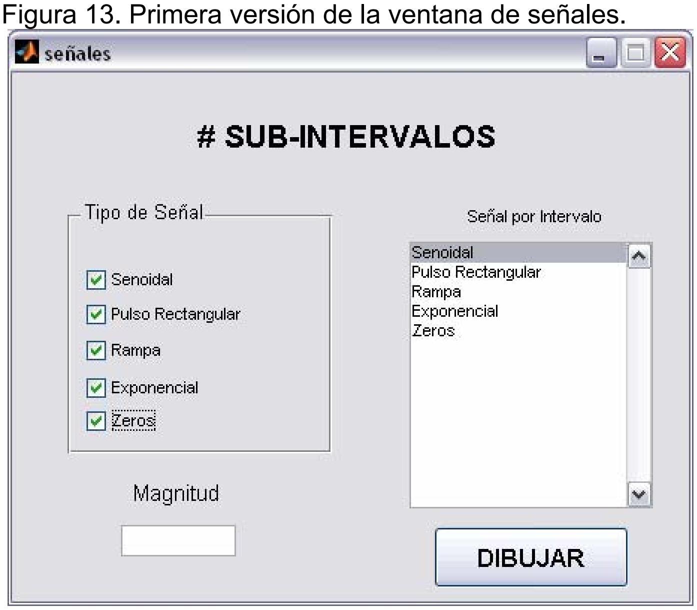
Figura 12. Primera versión de la ventana del generador.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la anterior ventana se pueden cambiar los puntos inicial y final del eje n y se llamaba a la siguiente ventana para poder seleccionar el tipo de señal por medio del botón *construir señales*.

Figura 13. Primera versión de la ventana de señales.

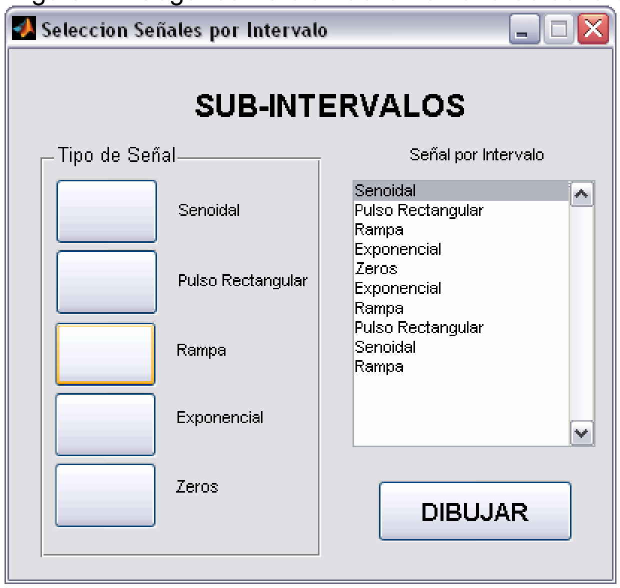


Fuente: Camargo Jorge Efraín

En esta ventana se podían seleccionar el tipo de señales que se querían generar en forma secuencial y en el orden en que eran señaladas en los radiobuttons, mientras las señales señaladas eran mostradas en un listbox en este mismo orden.

Luego de ver como se veían estas ventanas se cambió la apariencia de la ventana de señales al cambiar los radiobuttons por pushbuttons.

Figura 14. Segunda versión de la ventana de señales.

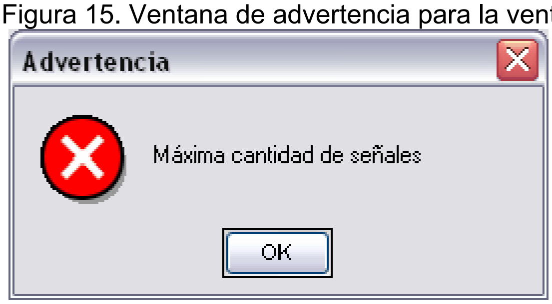


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Además de tener un tope de diez señales para seleccionar, con una advertencia se muestra que ya están las diez señales seleccionadas.

Las desventajas que presentaron estas ventanas eran las pocas opciones para llevar a cabo una buena generación de señales, por lo cual se pensó en generar mas ventanas para darle las opciones necesarias para cada tipo de señal y así poder obtener una herramienta optima.

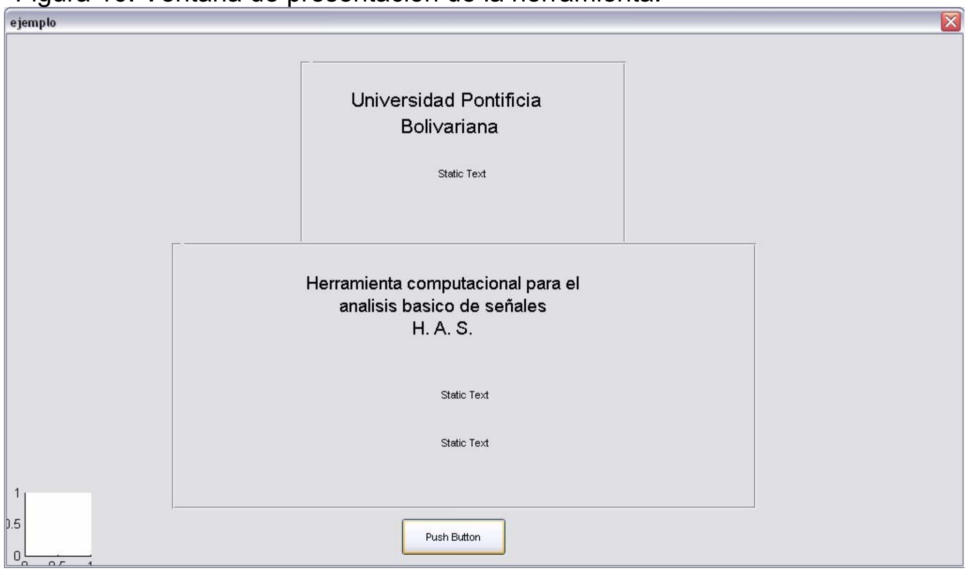
Figura 15. Ventana de advertencia para la ventana de señales.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Después de pensar en como debería verse el generador de señales se paso a diseñar una ventana de presentación para la herramienta que mostrara el nombre de la universidad, de la herramienta, del grupo de investigación, del diseñador y del director del proyecto.

Figura 16. Ventana de presentación de la herramienta.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

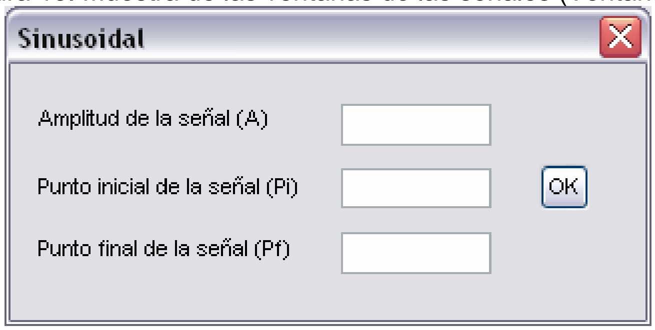
Para seguir con el desarrollo de la herramienta se paso a crear ventanas para cada una de las señales propuestas en la ventana de señales y así poder darle a cada tipo de señal, características determinadas por el usuario como lo son amplitud, punto inicial y punto final, para poder de esta manera crear casi cualquier tipo de señal con la que se puedan realizar las operaciones propuestas para este proyecto.

Figura 17. Visualización de las primeras versiones de la herramienta.

Fuente: Camargo Jorge Efraín

Cada una de los botones de tipo de señal abre una ventana pequeña para poder editar cada una de ellas como se ve en la siguiente figura la cual muestra la ventana para la señal sinusoidal así como también para los demás tipos de señales.

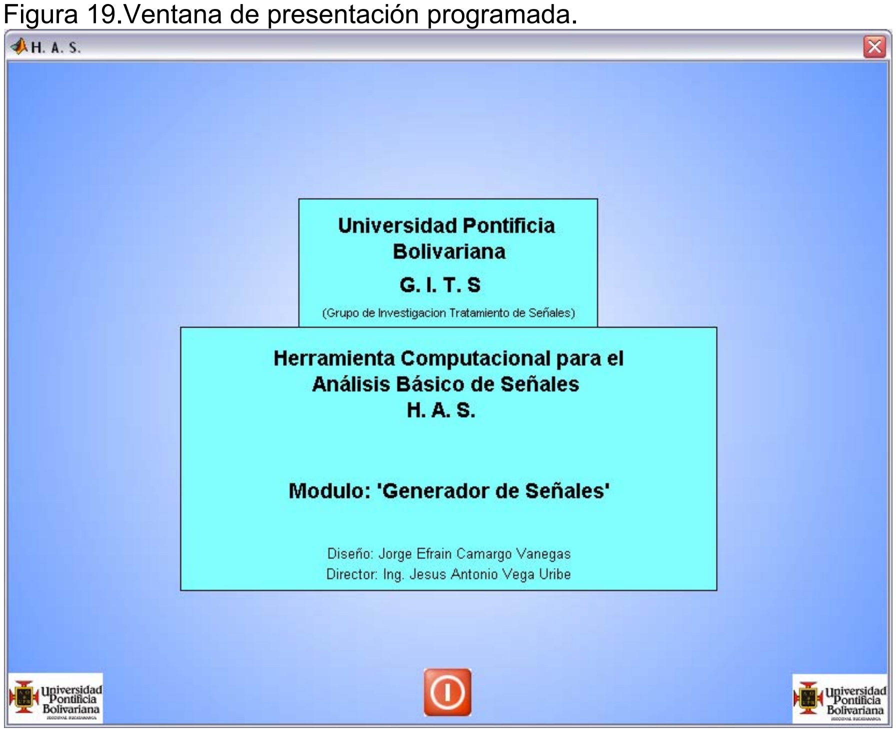
Figura 18. Muestra de las ventanas de las señales (Ventana señal sinusoidal).



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Teniendo todo esto distribuido de cierta manera o planteada la idea de lo que se quería para empezar con la programación de toda la herramienta, se pasó así a la creación de las ventanas de forma programada, iniciando con la ventana principal para poder ver como quedaría ésta y la diferencia que presentaría en comparación con las creadas con el GUIDE de Matlab, puesto que estas se pueden personalizar con mayor versatilidad.

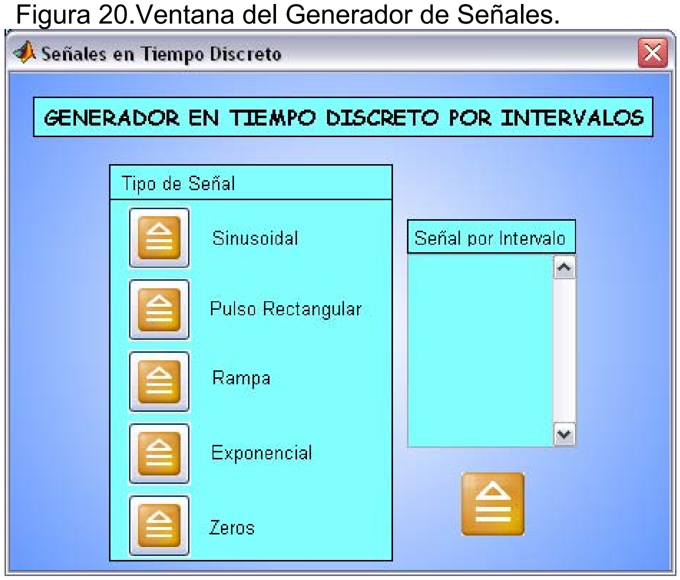
Figura 19.Ventana de presentación programada.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Se creó un fondo para darle un ambiente agradable, la presentación de la herramienta e imágenes que mostraran el logo de la Universidad Pontificia Bolivariana y del grupo de investigación que en ese momento era GITS, en esta ocasión se pretendía generar una ventana principal para cada modulo, empezando con el modulo de "Generador de Señales" que es la parte mas importante de la herramienta porque allí se generan las señales con las que se va a trabajar los diferentes temas del curso en esta misma.
Esta ventana llevaba al generador de señales como lo muestra la siguiente figura.

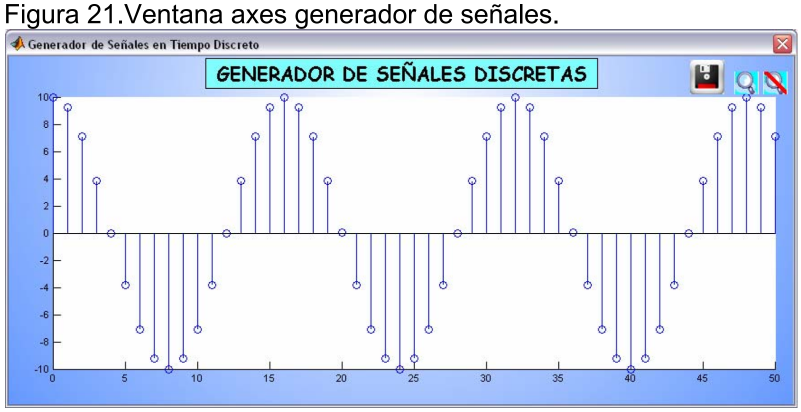
Figura 20.Ventana del Generador de Señales.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Esta ventana permitía escoger el tipo de señal o la combinación de señales que se quería generar en donde cada tipo de señal tenia una ventada para dar las características de cada señal de la misma manera en que se pensó con las ventanas hechas con el guide de Matlab con unas variaciones para dar una mejor presentación.

Figura 21.Ventana axes generador de señales.

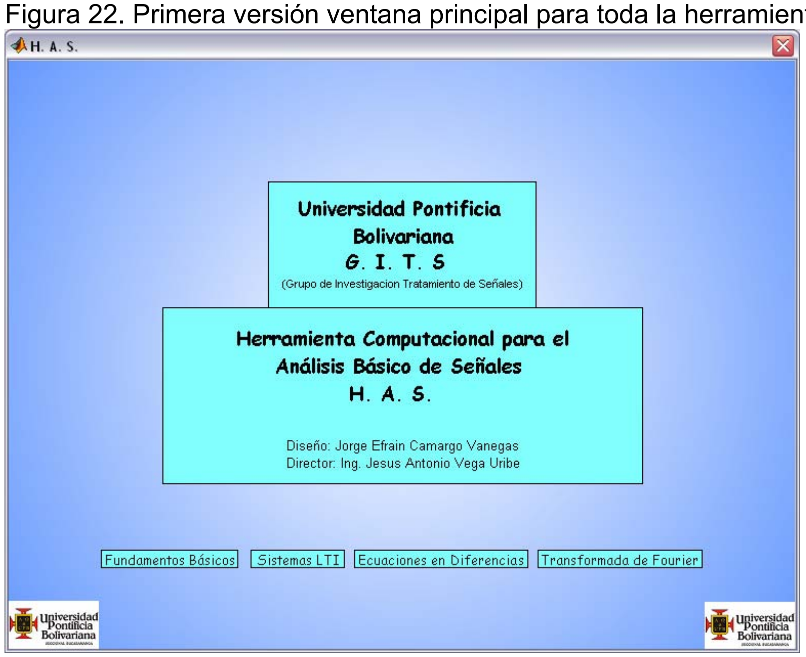


Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la ventana axes generador además de visualizar la señal generada se podía encontrar la opción de guardar la señal para ser utilizada en los diferentes módulos de la herramienta, y también la opción de zoom para ver mejor las señales en las que el usuario lo requiera.

Esta forma de diseñar la herramienta llevo a tener que generar una ventana principal para cada modulo como se hizo en el del generador, pero esto hacía que la herramienta tuviera muchas ventanas y no fuera tan agradable al usuario por lo que se paso a generar una ventana principal en la que se presentaran botones para cada uno de los módulos.

Figura 22. Primera versión ventana principal para toda la herramienta.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Así se logro organizar toda la herramienta en donde se podía acceder a cada uno de los módulos desde una misma ventana.

Para esto se pensó lo siguiente, el modulo de fundamentos básicos lleva a una ventana para seleccionar los temas (generador, operaciones básicas y energía-potencia), el modulo de sistemas LTI (convolución), el modulo de ecuaciones en diferencias (ecuación en diferencias, discretización y periodo de señales) y por ultimo el modulo de transformada de Fourier (exponencial compleja, exponenciales complejas relacionadas armónicamente, suma de exponenciales complejas y coeficientes de la serie de Fourier de una señal).

Luego de tratar de organizar todo esto se llego a tener otra idea en la presentación de la herramienta propuesta por el director del proyecto el Ing. Jesús Vega, la cual permitió mostrar y personalizar mejor la herramienta, siendo así la forma final en que esta quedaría.

Figura 23. Ventana principal para toda la herramienta.

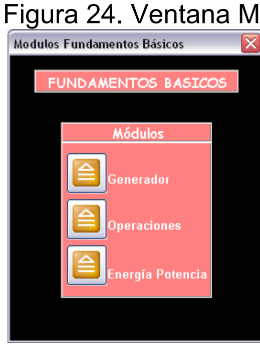
Fuente: Camargo Jorge Efraín

De esta forma la herramienta tomo la forma final para el proyecto, mostrando en la ventana principal con la misma idea anterior los temas de cada modulo, pero dándole un aspecto de carpetas en 3D con unos colores mas llamativos y agradables con el nombre de la herramienta del diseñador, el director del proyecto y el grupo de investigación BISEMIC (Grupo de Bioingeniería-Tratamiento de Señales y Microelectrónica) antes llamado GITS (Grupo de Investigación Tratamiento de Señales).

3.2.1 MÓDULO FUNDAMENTOS BÁSICOS.

Como se había mencionado antes el modulo de fundamentos básicos lleva a una ventana para seleccionar los temas (generador, operaciones básicas y energía-potencia).

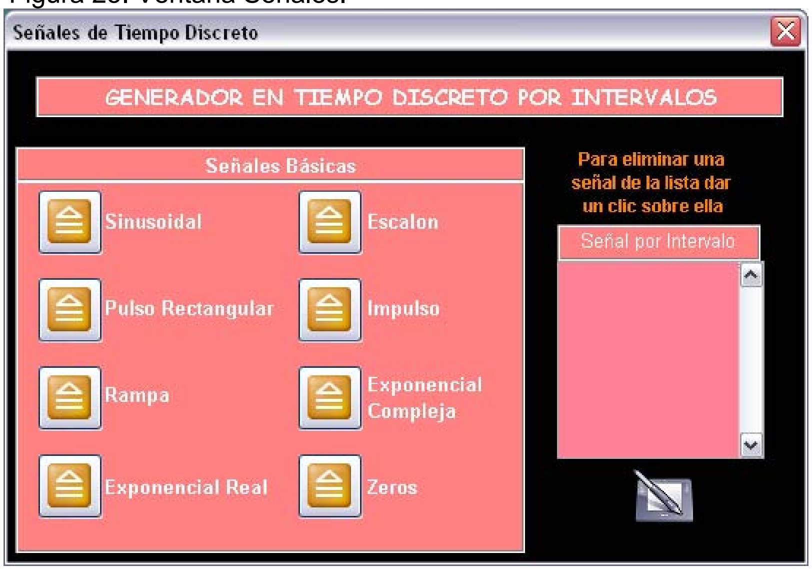
Figura 24. Ventana Módulo Fundamentos Básicos.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En este módulo, la ventana señales permite escoger diferentes señales básicas como lo son (sinusoidal, pulso rectangular, rampa, exponencial, escalón, impulso, exponencial compleja) y también se pueden poner ceros donde se requiera, para realizar diferentes ejercicios en los diferentes temas incluidos en este tutorial para el curso de sistemas y señales, en esta ventana se generan señales solo en tiempo discreto, ya que este proyecto solo maneja señales discretas en todos sus temas.

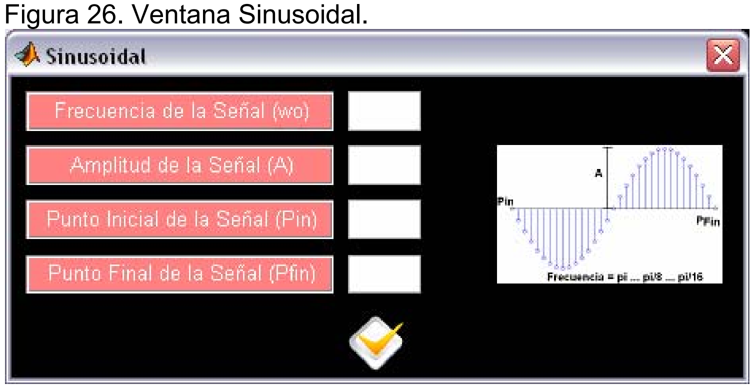
Figura 25. Ventana Señales.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Al seleccionar un tipo de señal se abre otra ventana en donde se debe ingresar las características y el intervalo en donde se quiere ubicar para de cada tipo de señal, en el caso de la señal sinusoidal se debe ingresar (frecuencia, amplitud, punto inicial de la señal y punto final), luego de ingresar los datos que se quieran se da clic en el botón "OK" ubicado en la parte inferior de la siguiente figura.

Figura 26. Ventana Sinusoidal.

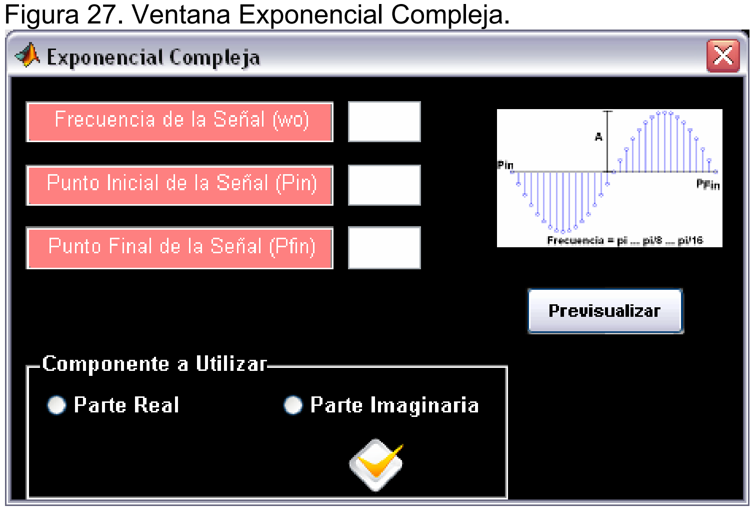


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Después de hacer clic en "OK" se agrega a la lista de la derecha en la ventana señales (figura 25), el nombre de la señal y el intervalo para que el usuario no tenga que recordar en que intervalo ubico la señal, así se pueden agregar diferentes tipos de señal en la misma ventana si se quiere generar una señal mas compleja.

Los otros tipos de señales poseen una ventana similar a la que tiene la señal sinusoidal para ingresar los datos.
En el caso de pulso rectangular se debe ingresar (amplitud, punto inicial de la señal y punto final), en la función rampa (pendiente, punto inicial de la señal y punto final), en la función exponencial (el valor de α que debe ser -1< α <1, punto inicial de la señal y punto final), la función escalón (amplitud, punto inicial de la señal y punto final como también el punto de discontinuidad para poner ceros antes de poner el escalón, este punto debe estar dentro del intervalo ingresado), la función impulso (amplitud, punto inicial de la señal y punto final, y punto de ubicación del impulso, este es muy similar al de la anterior señal para ubicar el impulso dentro de intervalo ingresado), la función exponencial compleja es un poco diferente ya que esta posee una parte real y una imaginaria, en este se debe ingresar (frecuencia, punto inicial de la señal y punto final) y tiene un botón para previsualizar las dos partes de la función por separado (real e imaginaria) y así el usuario pueda escoger cual de las dos quiere utilizar, luego en la parte inferior de la ventana de exponencial compleja (figura 27) se puede seleccionar cual de las dos quiere con dos radiobuttons para poder dar clic en el botón “OK”.

Figura 27. Ventana Exponencial Compleja.

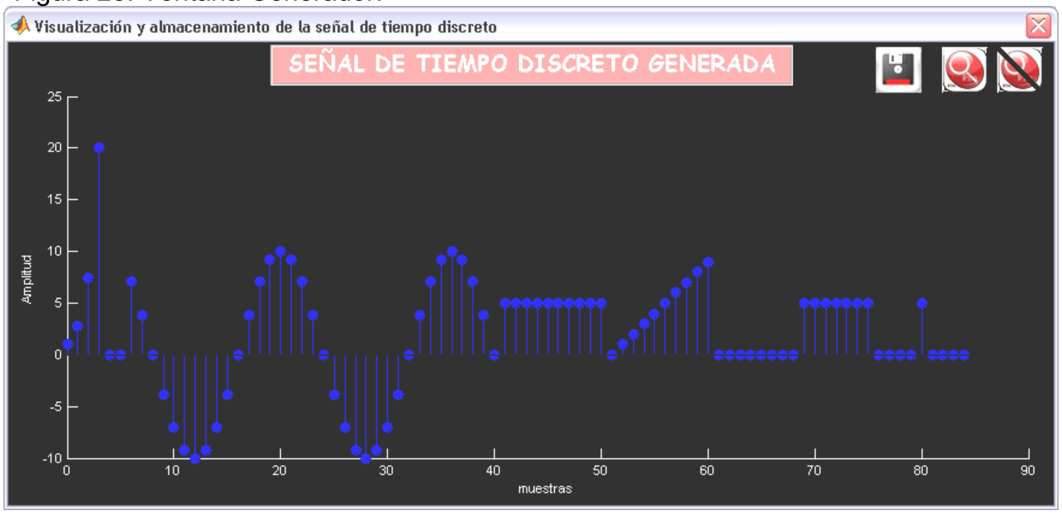


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Ya por último se encuentra en la ventana señales (figura 25) la opción de ceros en donde se debe ingresar (punto inicial de la señal y punto final) en donde se requiera de estos para la debida generación de señales.

Al tener la señal o las señales requeridas para generar en la lista de la ventana señales (figura 25) se procede a darle clic en el botón ubicado en la parte inferior derecha de esta misma ventana para ver en la ventana generador (figura 28) la señal generada al gusto del usuario.

Figura 28. Ventana Generador.

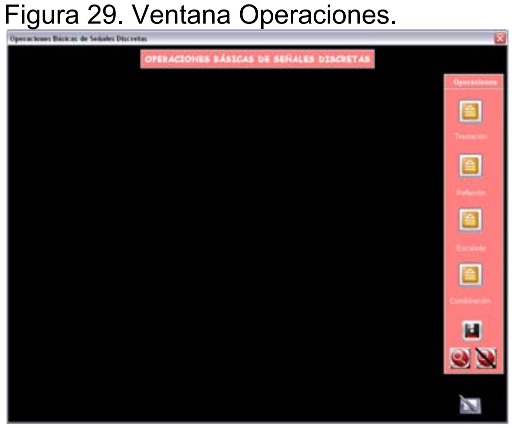


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Como ejemplo se genero una señal con la combinación de casi todos los tipos de señales en la ventana señales (figura 25), en la ventana anterior se puede observar la opción de zoom para ver mejor algunos detalles de la señales y la más importante, la opción de guardar la señal para poder utilizarla en los demás módulos del tutorial y ver los cambios que se dan en los diferentes temas tratados en cada uno de los módulos.

Pasando al tema de operaciones en el módulo de fundamentos básicos se puede ver la ventana operaciones en donde están lo diferentes tipos de operaciones básicas (traslación, reflexión, escalado y combinación), esta ultima es la combinación de las anteriores operaciones, también se puede encontrar la opción de zoom y la opción de guardar si el usuario las requiere, por ultimo se encuentra un botón en la parte inferior derecha para abrir la señal que desee del archivo previamente guardada por el generador, tomadas del osciloscopio fluke en formato .txt o señales de audio .wav, estas ultimas se pueden tomar con el micrófono del computador por medio de la grabadora de sonidos de Windows.

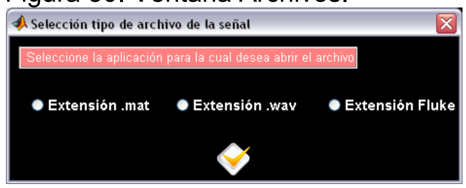
Figura 29. Ventana Operaciones.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Con el botón de archivos se abre la siguiente ventana (figura 30) en donde se puede seleccionar el tipo de archivo de los mencionados anteriormente.

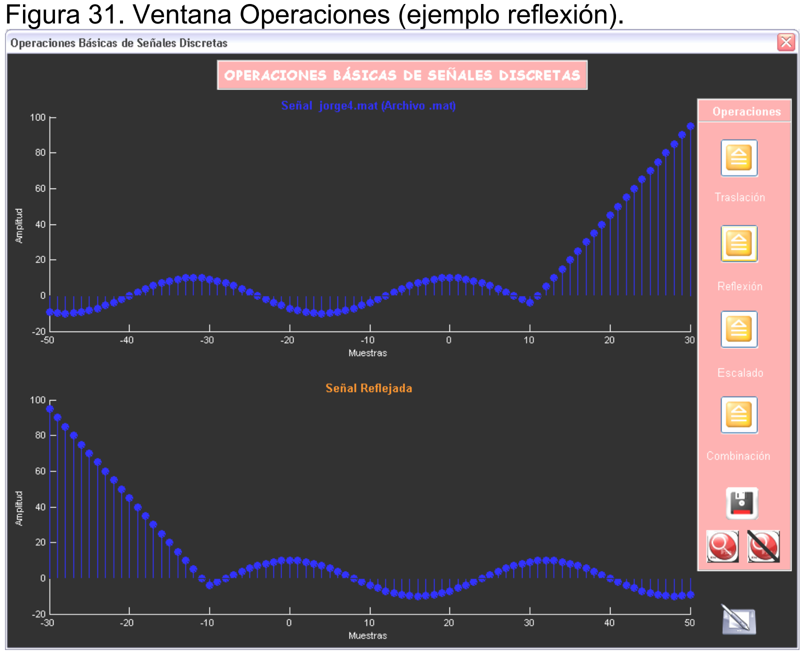
Figura 30. Ventana Archivos.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Ya teniendo una señal previamente creada en el generador y abierta en la ventana operaciones (figura 31) se puede hacer el tratamiento que desee el usuario de los que posee esta ventana, en este caso se hizo la operación reflexión, para la cual no es necesario ingresar ningún dato, la reflexión se hace automáticamente solo con dar clic en el botón reflexión.

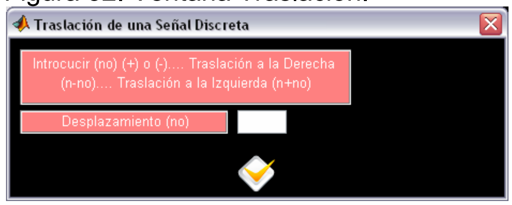
Figura 31. Ventana Operaciones (ejemplo reflexión).



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Para hacer la traslación a una señal se hace clic en el botón correspondiente a esta operación, abriéndose así una ventana (figura 32) para ingresar el dato con el cual hacer la traslación que se requiera. La traslación es de la forma $x[n \pm 2]$ de una señal original $x[n]$, en el caso (-) la traslación se hace hacia la derecha (retardo), si el signo del numero fuese (+) la traslación es hacia la izquierda (adelanto), por tanto como esta herramienta se manejo como un apoyo a la teoría de forma didáctica, si se quiere hacer esta traslación en dos posiciones hacia la derecha, en la ventana se debe ingresar el dato (-2), lo contrario seria para hacerla hacia la izquierda (+2).

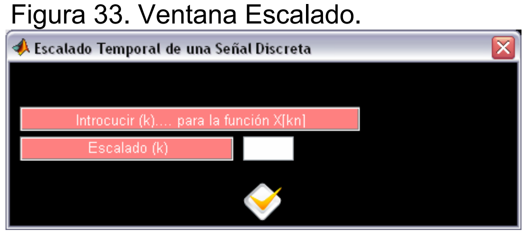
Figura 32. Ventana Traslación.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En el caso de hacer un escalado, se da clic en el botón respectivo y la ventana que se abre a continuación (figura 33) pide al usuario el dato (k) con el cual hacer el escalado, recordando que para una función $x[n]$ el escalado se toma como $x[k \cdot n]$, sabiendo también que para 0<k<1 la señal se aumenta y para k>1 la señal se reduce en el eje n. Entonces el usuario introduce el dato que necesite para ver el escalado de la señal.

Figura 33. Ventana Escalado.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Por ultimo en esta ventana de operaciones se encuentra la opción de combinación de operaciones (figura 34) con la cual se pueden realizar 6 diferentes tipos de combinación de operaciones 3 de 2 combinaciones y 3 de 3 combinaciones:
Traslación-Reflexión, Reflexión-Traslación, Escalado-Reflexión, Reflexión-Escaldo-Traslación, Traslación-Escalado-Reflexión, Escalado-Traslación-Reflexión.

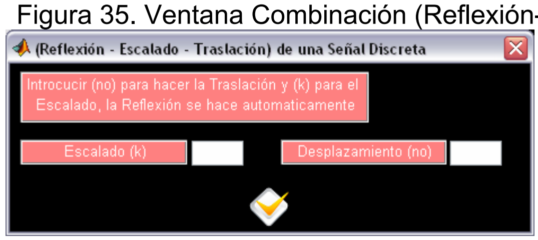
Figura 34. Ventana Combinación.

Fuente: Camargo Jorge Efraín

Sabiendo de antemano que teóricamente solo esta bien hecha una combinación solo si la traslación o desplazamiento se realiza de ultimo, pero posee varias opciones para que el usuario pueda ver que diferencias hay al realizar una combinación en diferente orden, además para tomar este tema está el hecho de verlo desde el punto de vista matemático antes de llevarlo al ejercicio en este tutorial. Por ejemplo teniendo la función $x[-3n+2]$, se tiene que

$x[-3n+2] = x[-3(n-2)]$ sabiendo que el signo negativo que acompaña a (3) da la reflexión, el (3) da el escalado y el número (2) da la traslación o desplazamiento, en este caso el desplazamiento debe ser a la derecha ya que el número (2) es negativo, en este orden de ideas y viendo la función desde el punto de vista matemático el usuario puede proceder a llevarlo a la herramienta en donde puede encontrar las 6 opciones antes mencionadas y para este caso utilizar una de las 3 opciones que hay para una combinación de 3 operaciones y que como antes se mencionó, solo en donde la traslación esta de ultimo es la correcta forma de hacer la operación, entonces se procede a ingresar los datos de escalado y traslación, siendo en este caso (3) para el escalado y (-2) para la traslación o desplazamiento sobre el eje de muestras (n) ya que la herramienta hace la reflexión automáticamente en el orden que se escogió.

Figura 35. Ventana Combinación (Reflexión-Escalado-Traslación).



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Para las otras opciones se debe hacer lo mismo, ver la ecuación desde el punto de vista matemático y al seleccionar una de estas opciones se abre una ventana como la anterior (figura 35) para ingresar los datos de la función y realizar la combinación de operaciones.

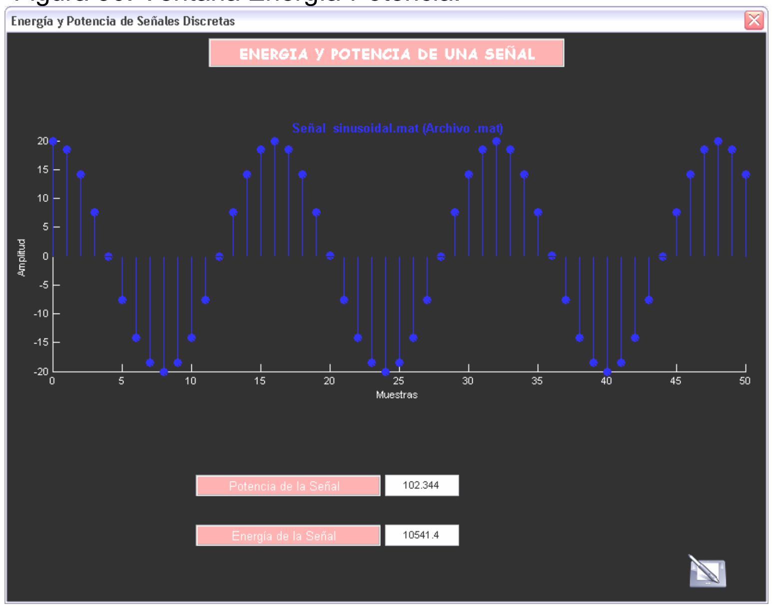
Ya por ultimo en el módulo de operaciones básicas se encuentra la opción de Energía-Potencia de una señal discreta en donde se puede ver la potencia y la energía de una señal discreta.

Todo esto basado en la teoría utilizada para la realización de este proyecto.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

Figura 36. Ventana Energía-Potencia.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Como todo en este tutorial la señal discreta puede ser creada por el generador, tomada del osciloscopio fluke o del micrófono del computador como una señal de audio .wav, previamente almacenadas en el computador que se este utilizando, al hacerle clic en el botón inferior derecho para abrir la señal que se requiera.

3.2.2 MÓDULO SISTEMAS LTI.

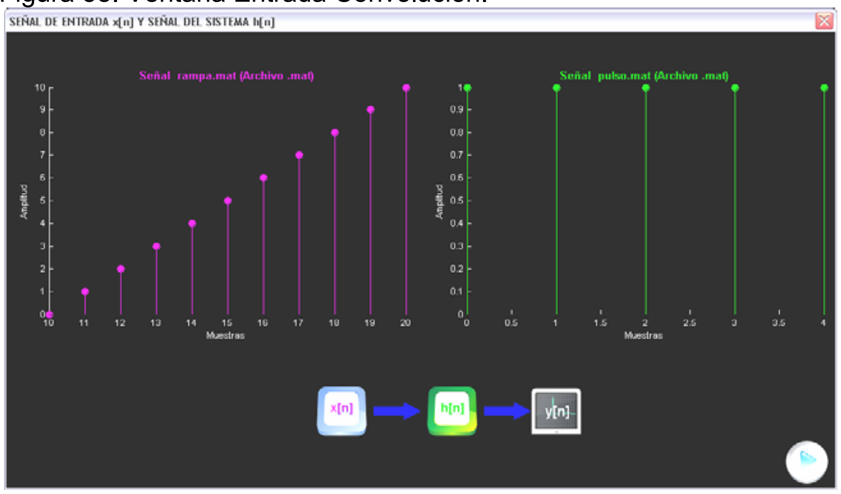
Este módulo lleva al usuario a una ventana para trabajar las señales generadas o tomadas previamente y almacenadas en el computador en el tema de Convolución.

Figura 37. Ventana Módulo Sistemas LTI.

Fuente: Camargo Jorge Efraín

Al dar clic en el botón de convolución se abre una ventana donde se deben abrir las dos señales (x[n] de entrada y h[n] del sistema) a utilizar de las que tenga previamente almacenadas, cada una de estas tiene un botón diferente con el nombre de cada una (x[n] y h[n]) para buscar la señal almacenada que se quiera, donde aparecerá la ventana para elegir el tipo de señal que se quiere abrir *.mat para las generadas en esta misma herramienta, *.wav para las grabadas en audio y *.txt para las obtenidas del osciloscopio fluye.

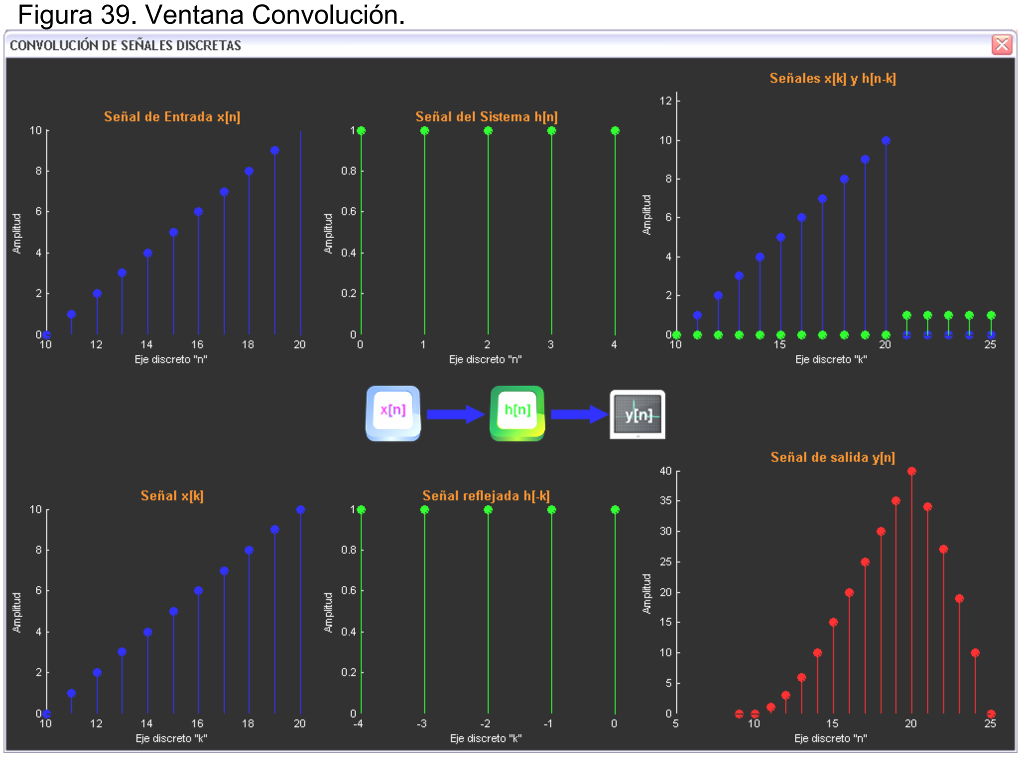
Figura 38. Ventana Entrada Convolución.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En la anterior imagen (figura 38) se abrió como x[n] una señal rampa generada en la herramienta y como h[n] o señal del sistema un pulso rectangular también generado en la herramienta, ambas como archivo *.mat, teniendo las dos señales visualizadas se da clic en el botón de play en la parte inferior derecha de la ventana (figura 38).

Figura 39. Ventana Convolución.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

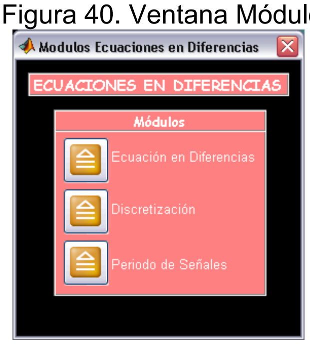
Así se abre otra ventana en la cual se puede ver en la parte superior la señal de entrada x[n], la señal del sistema h[n] y el recorrido que tiene h[n] como h[n-k] reflejada y trasladada a la izquierda, sobre x[n] como x[k]. En la parte inferior se puede ver la señal x[n] como x[k], la señal h[n] reflejada como h[-k] y la convolución de estas que se va graficando paso a paso a medida que se va moviendo h[n-k] sobre x[k] para poder ver como se forma la convolución de las señales.

En este módulo de la herramienta se puede ver de una manera practica y didáctica la forma en que actúa un sistema sobre una señal por medio de la convolución vista paso a paso donde el usuario puede asimilar la forma en que se va generando la convolución de dos señales.

3.2.3 MÓDULO ECUACIONES EN DIFERENCIAS.

Este módulo presenta los temas de (Ecuación en diferencias, Discretización y periodo de señales). Ubicados en la siguiente ventana (figura 40).

Figura 40. Ventana Módulo Ecuaciones en Diferencias.

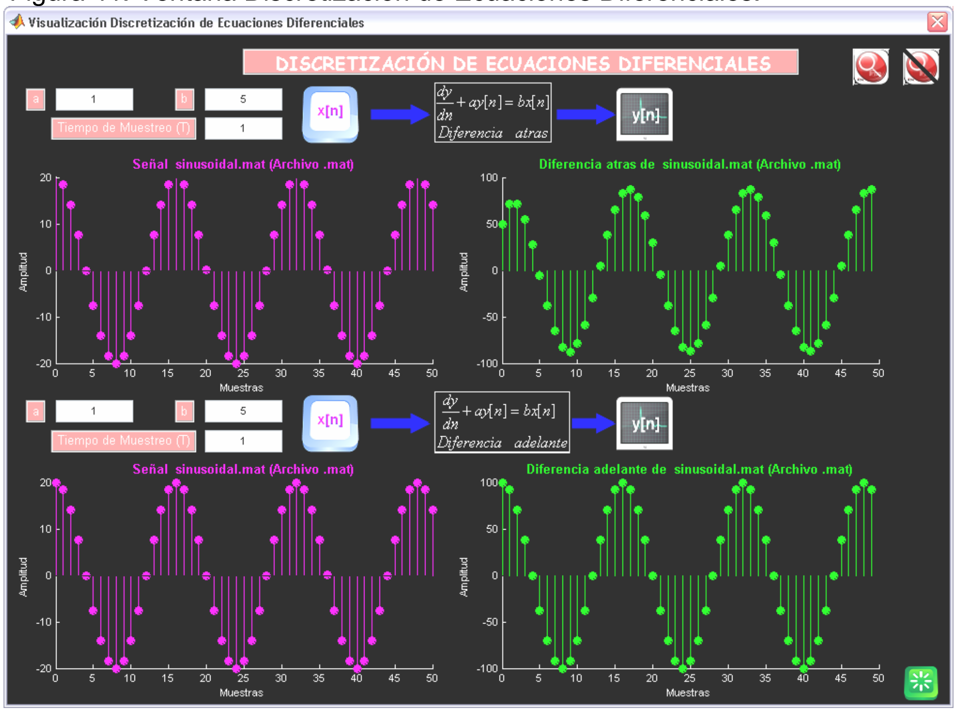


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Este módulo permite también abrir señales antes generadas por la herramienta, y como los demás módulos abrir señales de audio (.wav) y señales tomadas por el osciloscopio fluke como archivos (.txt), para poder pasarlas por sistemas de ecuaciones en diferencias adelante y atrás.

En la ventana de Ecuaciones Diferenciales (figura 41) se solucionan de manera recursiva la discretización de ecuaciones diferenciales (adelante o atrás) de primer orden, donde a y b son constantes y T el tiempo de muestreo para cada ecuación, estos datos deben ser ingresados primero, luego se pasa a abrir la señal que se quiera (color magenta) pulsando el botón de x[n] para cada caso, empezando con el de diferencia atrás (parte superior) y así muestra la señal de salida del sistema (color verde) pasando luego a la diferencia adelante (parte inferior) de la misma forma anteriormente mencionada.

Figura 41. Ventana Discretización de Ecuaciones Diferenciales.

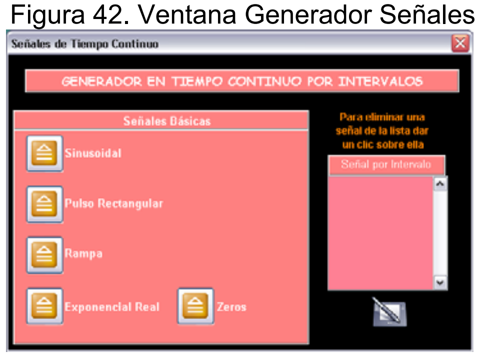


Fuente: Camargo Jorge Efraín

Esta ventana también posee un botón en la parte inferior derecha para reiniciar la pantalla y hacer el mismo procedimiento con otra señal u otro tipo de señal.

Pasando ahora el tema de discretización se puede abrir una ventana que lleva a un generador de señales continuas (sinusoidal, pulso rectangular, rampa, exponencial real y ceros) muy similar al generador del módulo de fundamentos básicos (figura 42).

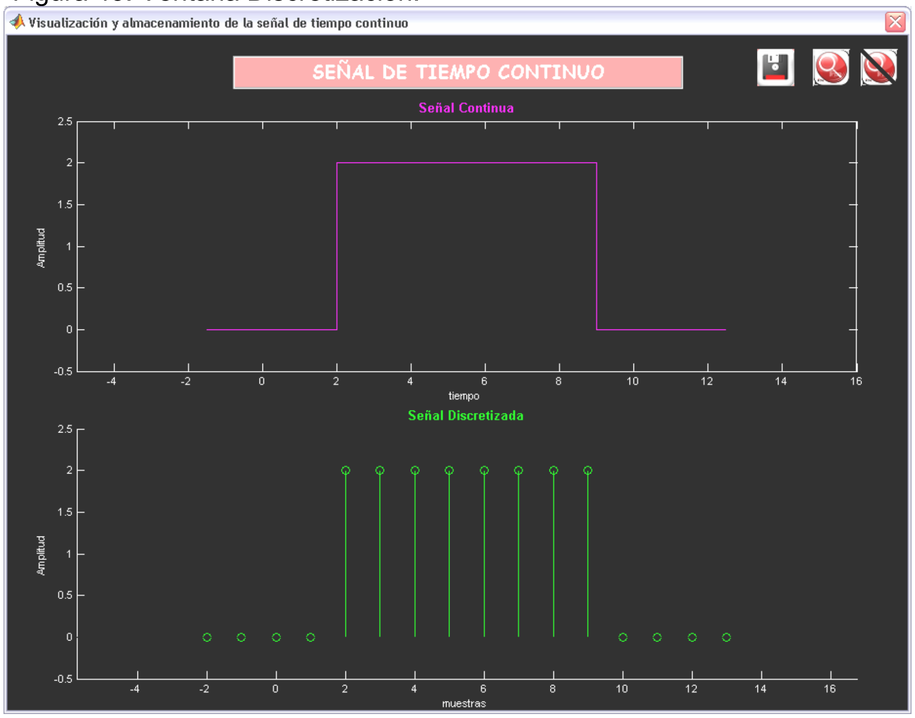
Figura 42. Ventana Generador Señales Continuas.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

A continuación después de introducir las características de la señal que se desea generar de la misma forma como se hace en el generador de señales discretas del primer módulo, se abre una ventana en donde se podrá ver la señal continua generada y la señal discretizada de esta (figura 43).

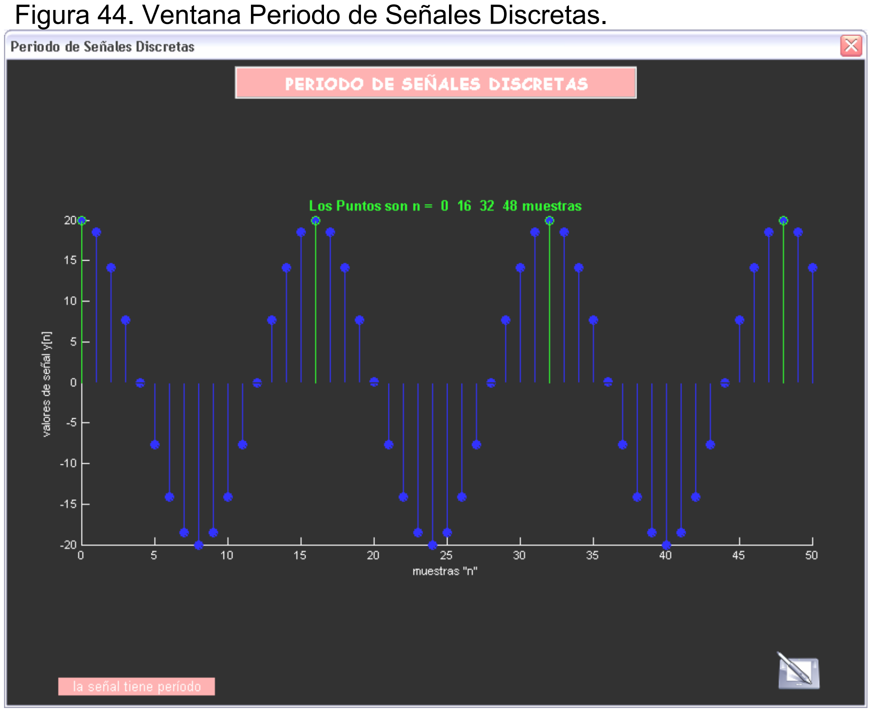
Figura 43. Ventana Discretización.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Este ventana permite generar señales continuas y ver su forma discreta, como también el cambio que puede sufrir una señal al variarle el tiempo de muestreo hasta que la señal cambie de apariencia.

Figura 44. Ventana Periodo de Señales Discretas.



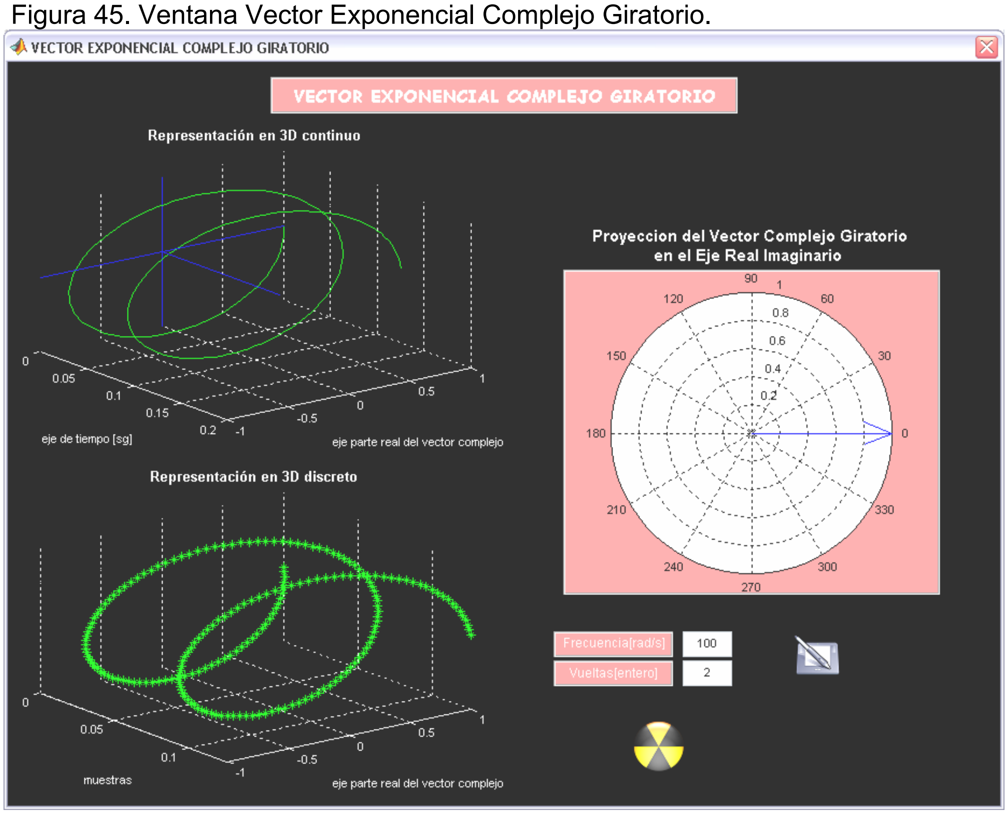
Fuente: Camargo Jorge Efraín

En el tema de periodo de señales (figura 44) se pueden abrir señales de la misma forma que en toda la herramienta en sus diferentes tipos de señales generadas u obtenidas de dispositivos externos como el osciloscopio fluke o señales de audio (.wav), el botón para abrir o seleccionar la señal a tratar se encuentra en la parte inferior derecha de la misma manera que se viene manejando en toda la herramienta con una ventana de archivos como la mostrada en la figura 30, luego en la ventana de periodo de señales discretas (figura 44), se muestra la señal seleccionada con un pequeño mensaje en la parte inferior que dice si esta tiene o no periodo, además en la parte superior de la señal se muestra, si la señal tiene periodo los puntos donde hay periodicidad y marcando también en la señal con verde estos puntos.

3.2.4 MÓDULO TRANSFORMADA DE FOURIER.

Este módulo ofrece los temas (Exponencial compleja, exponenciales complejas relacionadas armónicamente, suma de exponenciales complejas y coeficientes serie de Fourier de una señal). En el tema de Exponencial Compleja se puede ver una ventana (figura 45), en la cual se tienen que ingresar dos datos los cuales son frecuencia (rad/seg) y numero de vueltas que queremos, todo esto con el fin de ver la representación en 3D continua y discreta de un vector complejo giratorio en el eje imaginario.

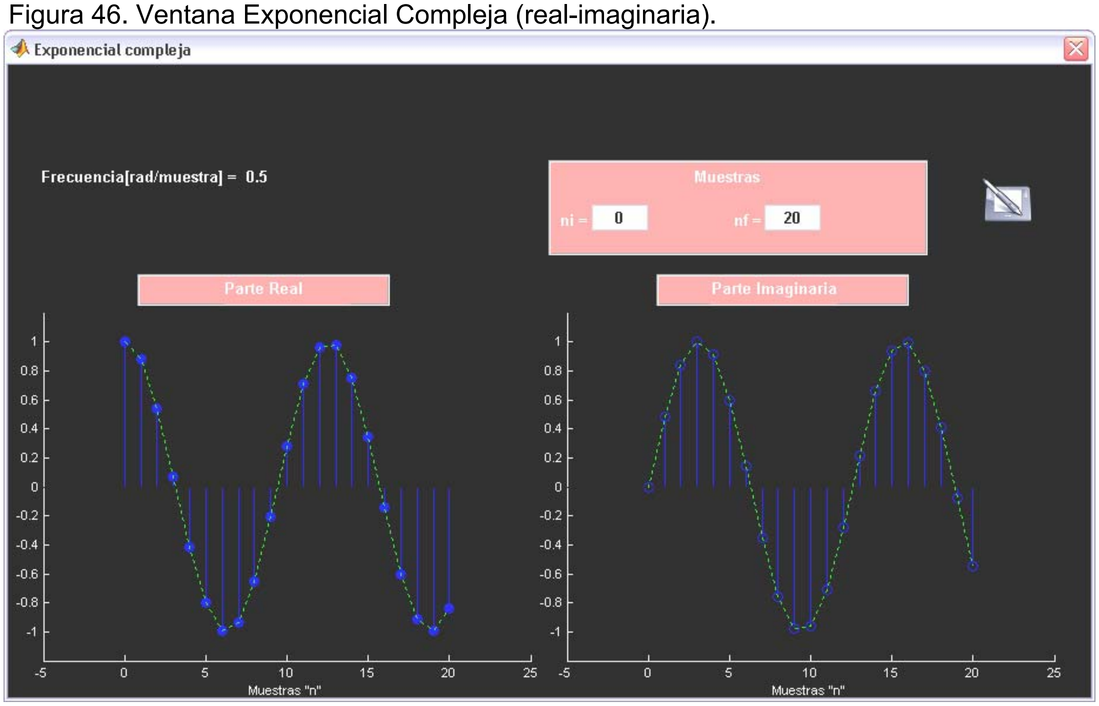
Figura 45. Ventana Vector Exponencial Complejo Giratorio.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Los datos se ingresan en las casillas correspondientes y se pulsa el botón que se encuentra a la derecha de estas casillas para ver el movimiento del vector y la generación de su vista 3D continua y discreta. También en esta ventana (figura 45) se encuentra un botón redondo extra (símbolo radioactivo) que abre la ventana de la representación de la exponencial compleja en dos partes, real e imaginaria, de la misma manera que en el generador de señales discretas (figura 28), solo que esta vez para observar paso a paso las variaciones de las dos mientras se varia de forma automática la frecuencia dada en (rad/muestra) entre 0 y 2π.

Figura 46. Ventana Exponencial Compleja (real-imaginaria).



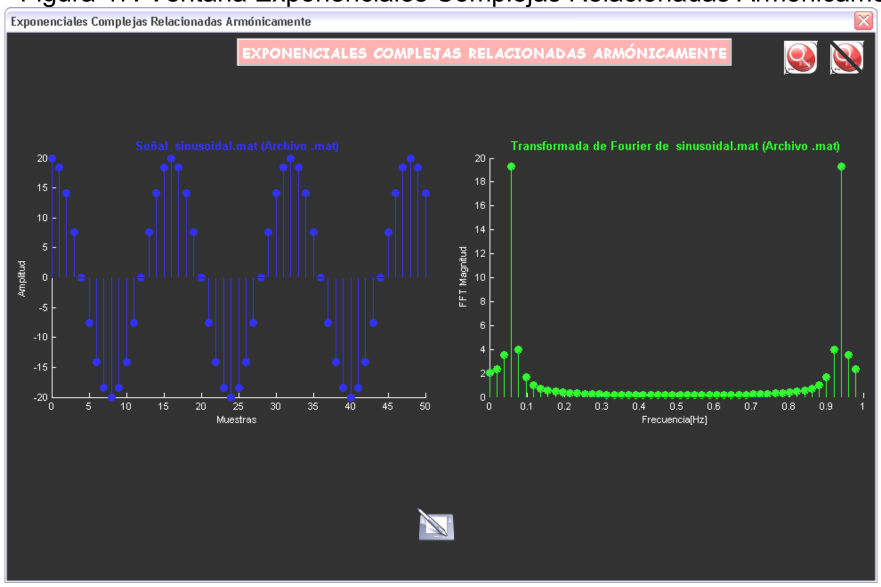
Fuente: Camargo Jorge Efraín

También se puede cambiar el intervalo en que estas se generan y con el botón que se encuentra a la derecha se comienza la visualización de este procedimiento paso a paso, como una ventana extra para ver las diferencias entre las dos.

En el tema de Exponenciales relacionadas armónicamente se puede ver la forma o las componentes de una señal tras sacarle la transformada de Fourier, todo esto de la misma forma que se ha estado tratando en la herramienta a la hora de obtener señales para utilizarlas en los diferentes módulos que para este caso se debe pulsar el botón ubicado en la parte inferior, además de contar con botones para activar y desactivar el zoom (figura 47).

Esto se obtiene sacando en matlab la fft a la función de entrada que se quiera.

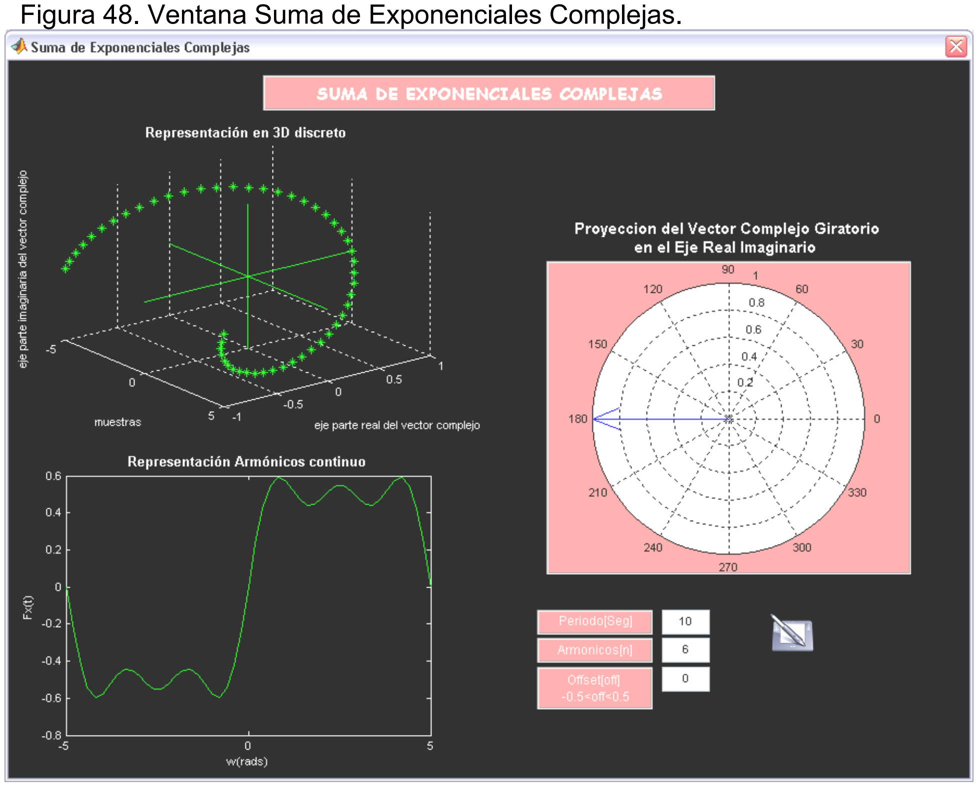
Figura 47. Ventana Exponenciales Complejas Relacionadas Armónicamente.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Entrando en el tema de suma de exponenciales complejas se puede ver una ventana similar a la de exponencial compleja (figura 48) en la que se deben ingresar los datos de periodo, el numero de armónicos y el offset.

Figura 48. Ventana Suma de Exponenciales Complejas.

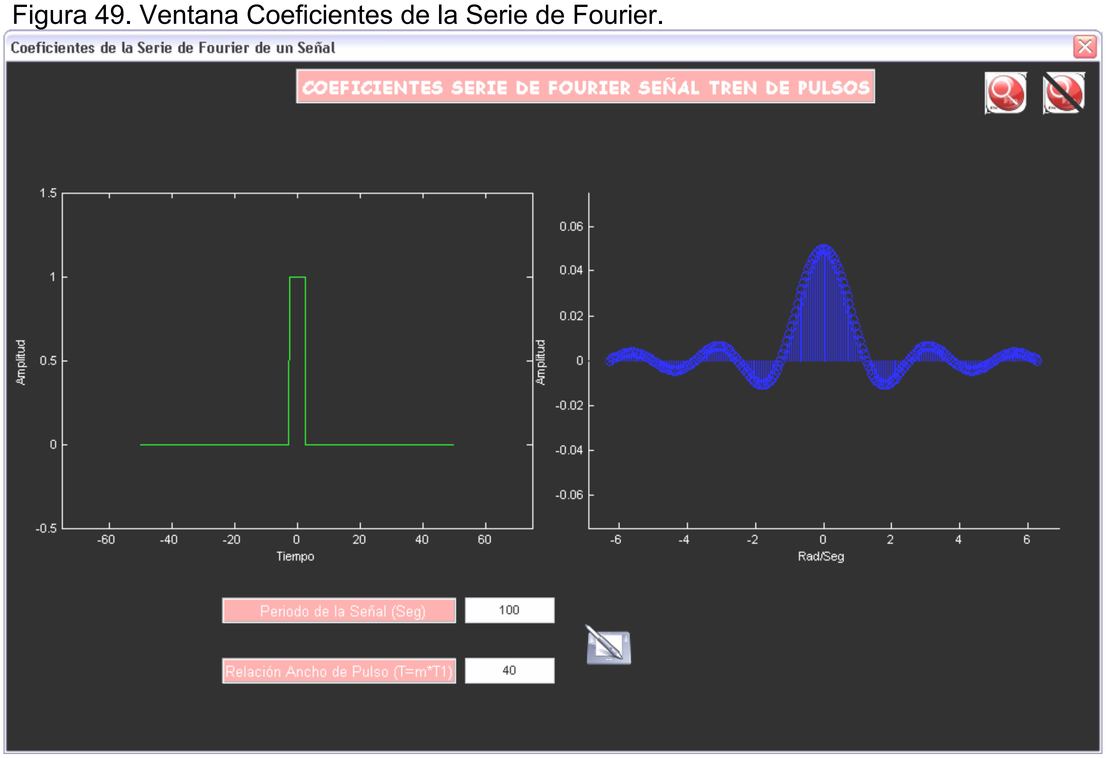


Fuente: Camargo Jorge Efraín

De esta forma se obtienen los armónicos que se quieran en la grafica inferior izquierda y de acuerdo al periodo se dan las vueltas en la representación grafica como también en el vector giratorio.

Por ultimo en el tema de Coeficientes Serie de Fourier de una Señales sale una ventana en la cual se deben ingresar el periodo de un pulso y su relación del ancho del pulso dado por $T1 = \frac{T}{m}$, siendo T el periodo y m la relación de ancho pulso.

Figura 49. Ventana Coeficientes de la Serie de Fourier.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

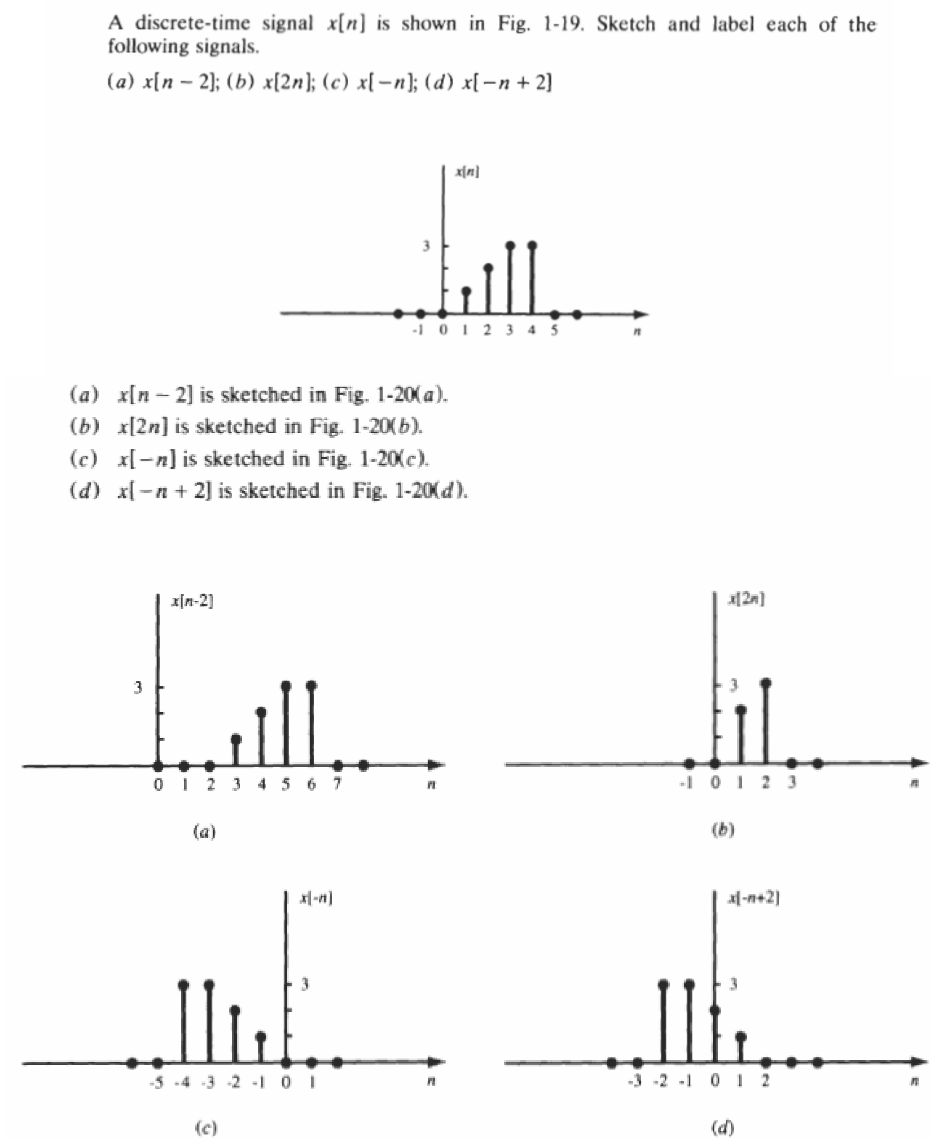
En la gráfica de la izquierda se genera el pulso y en la derecha se generan los coeficientes de la serie de Fourier paso a paso hasta formar la grafica total que varían en la cantidad de muestras de acuerdo con la relación de ancho de pulso m.

4. PRUEBAS

4.1 MÓDULO FUNDAMENTOS BÁSICOS

4.1.1 OPERACIONES CON SEÑALES

Figura 50. Ejercicio libro Signals and Systems de Schaum (Pág.20). [Hwei].



A discrete-time signal $x[n]$ is shown in Fig. 1-19. Sketch and label each of the following signals.

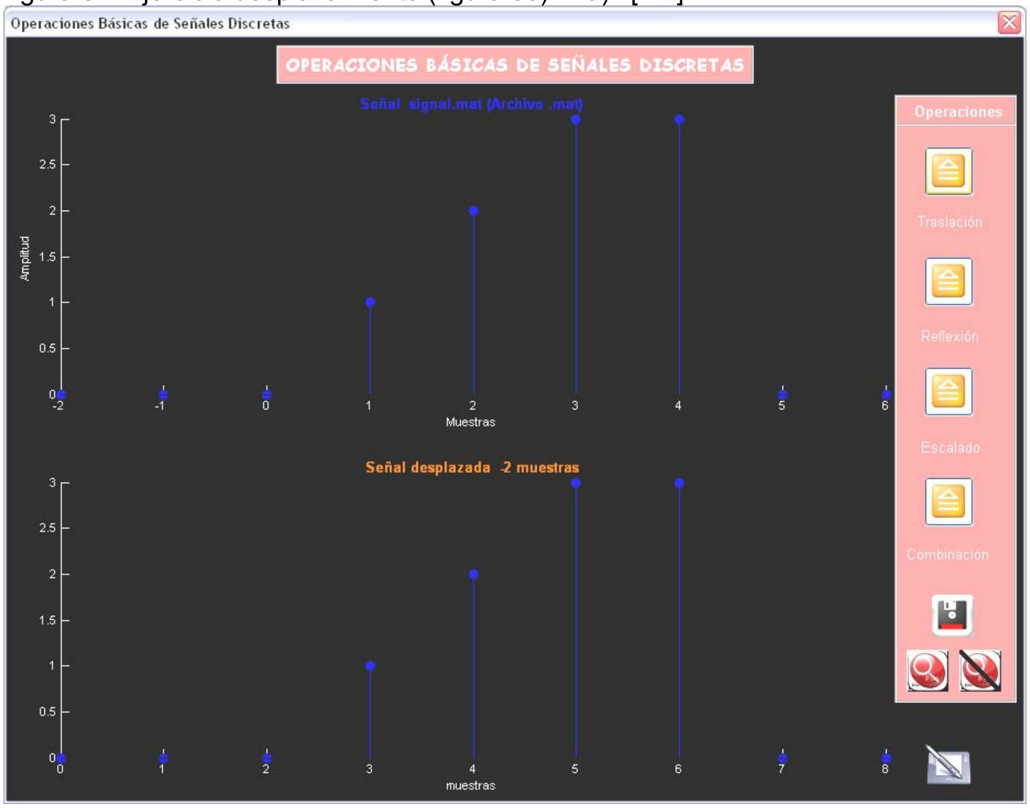
(a) $x[n-2]$; (b) $x[2n]$; (c) $x[-n]$; (d) $x[-n+2]$

(a) $x[n-2]$ is sketched in Fig. 1-20(a).
(b) $x[2n]$ is sketched in Fig. 1-20(b).
(c) $x[-n]$ is sketched in Fig. 1-20(c).
(d) $x[-n+2]$ is sketched in Fig. 1-20(d).

Fuente: libro Signals and Systems de Schaum. [Hwei].

Para proceder a realizar cada uno de las partes del ejercicio referido en el libro se paso a generar la misma señal indicada en el ejercicio y abrir la señal en la ventana de operaciones básicas de la herramienta.

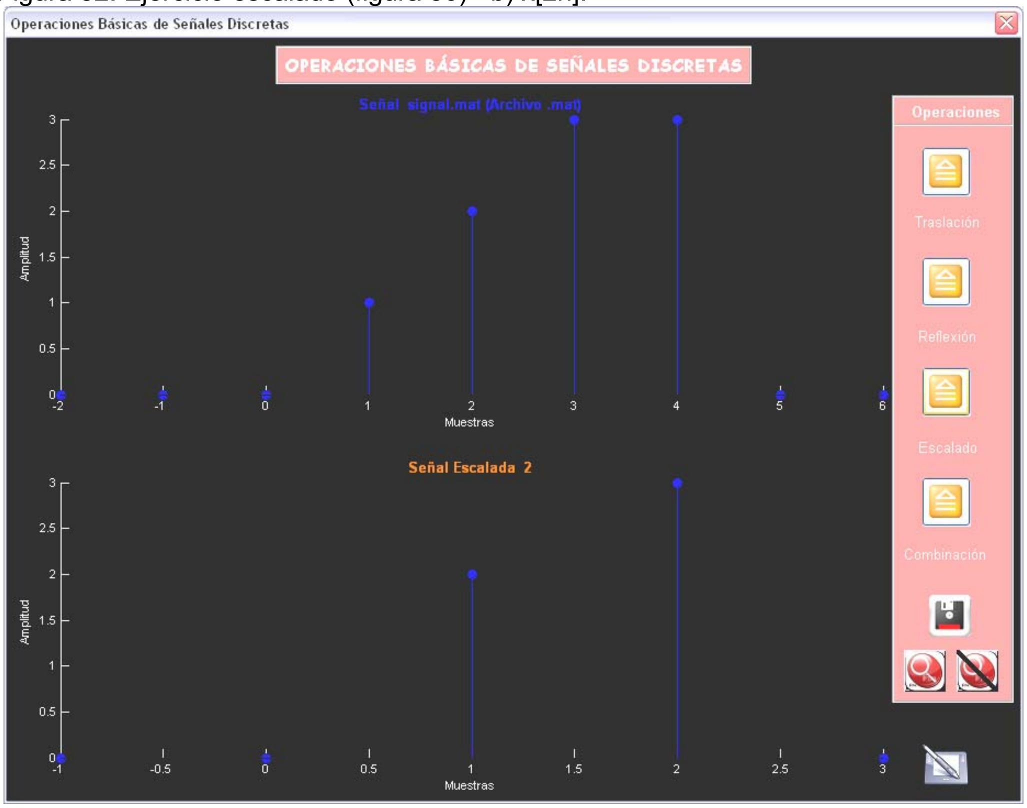
Figura 51. Ejercicio desplazamiento (figura 50)   a) x[n-2].



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Para abrir la señal se procede a dar clic en el botón inferior derecho, al tener la señal requerida abierta en la ventana de operaciones se debe pulsar el botón de traslación en donde en este caso se debe introducir como dato de traslación el número (-2) y como se ve en la figura 51 se obtiene el resultado en la parte inferior de la ventana.

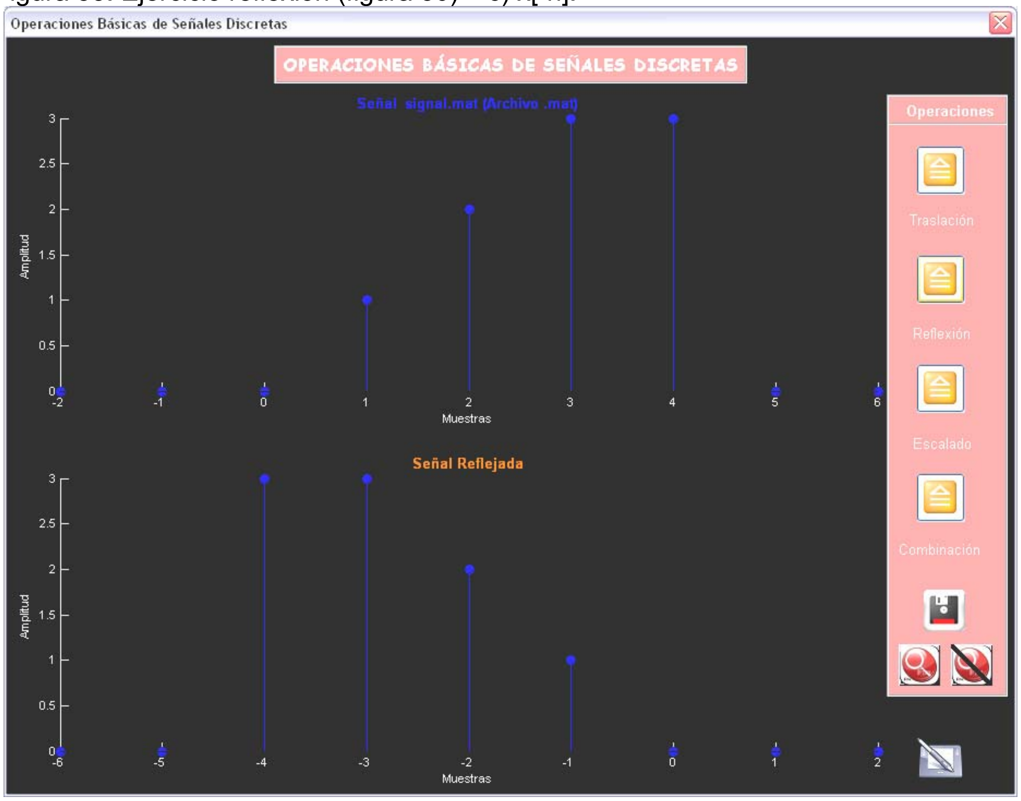
Figura 52. Ejercicio escalado (figura 50)   b) x[2n].



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En esta parte del ejercicio después de tener la señal abierta en la ventana se pasa a pulsar el botón de escalado e introducir como dato de escalado el número (2) y como se ve en la figura 52 el resultado se muestra en la parte inferior de la ventana en donde se puede ver la similitud con el ejercicio del libro. [Hwei]

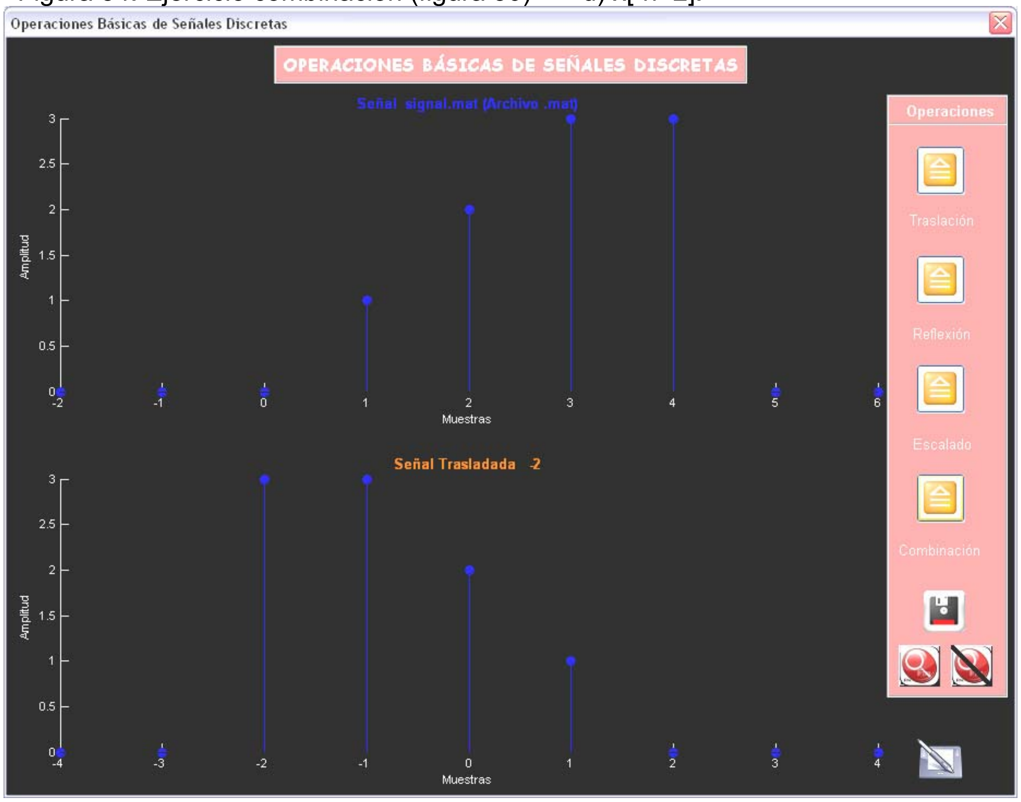
Figura 53. Ejercicio reflexión (figura 50)   c) x[-n].



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En este caso después de abrir la señal generada para este ejemplo se debe dar clic en el botón de reflexión y automáticamente aparecerá el resultado en la parte inferior de la ventana de la misma forma en que se puede apreciar en el ejemplo del libro. [Hwei]

Figura 54. Ejercicio combinación (figura 50) d) x[-n+2].



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Como este caso es un poco más complejo o requiere de dos operaciones los cuales son una reflexión y una traslación, de la siguiente forma $x[-n+2]=x[-(n-2)]$, se debe dar clic en el botón de combinación para poder llevar a cabo este ejercicio, apareciendo la siguiente ventana.

Figura 55. Ventana Combinación de Operaciones.

Fuente: Camargo Jorge Efraín

Se debe seleccionar la opción Reflexión-Traslación en donde solo se requiere ingresar el dato de la traslación que en este caso es (-2) y de esta manera aparecerá el resultado en la parte inferior de la ventana de la figura 54 correspondiente al correcto resultado de acuerdo con lo visto en el ejercicio (figura 50).

4.1.2 ENERGIA POTENCIA

Figura 56. Ejercicio libro Signals and Systems de Schaum (Pág.33). [Hwei].

Determine whether the following signals are energy signals, power signals, or neither.

(e) $x[n] = u[n]$

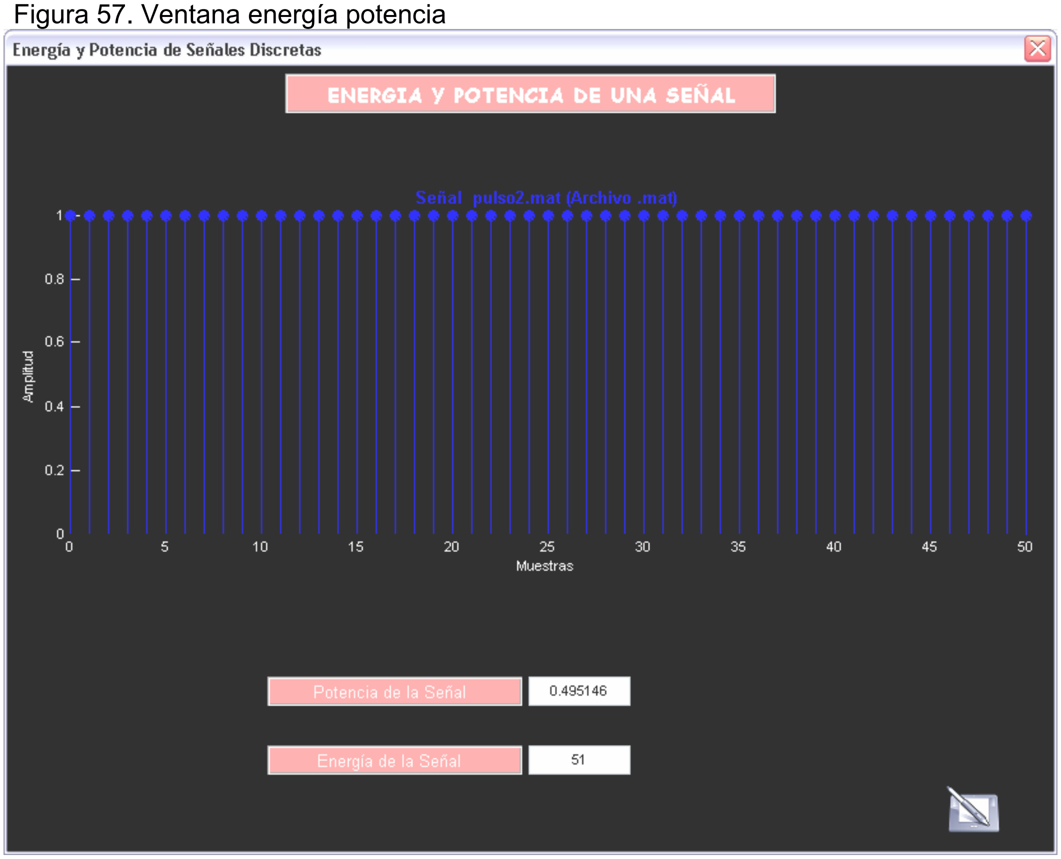
(e) By definition (*1.17*)

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

Fuente: libro Signals and Systems de Schaum. [Hwei].

Figura 57. Ventana energía potencia



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Al obtener la potencia y la energía de la señal escalón unitario se puede ver que la energía posee un valor finito y la potencia se acerca ½, solo porque en el caso tratado en el libro y teóricamente la señal tiende a infinito por eso la energía es infinita, y en el caso de la herramienta tenemos una señal finita de cero (0) a cincuenta (50) entonces la energía no da infinita y mientras mas puntos tenga la señal o mas tienda a infinito los valores serán los mismos.

4.2 MÓDULO SISTEMAS LTI

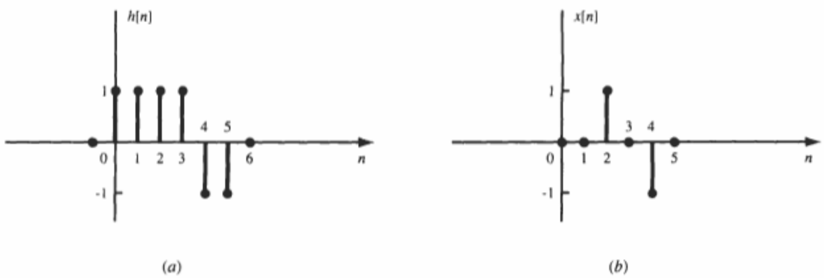
4.2.1 CONVOLUCIÓN

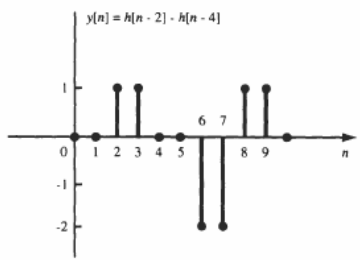
Figura 58. Ejercicio libro Signals and Systems de Schaum (Pág.97). [Hwei].

The impulse response $h[n]$ of a discrete-time LTI system is shown in Fig. (a). Determine and sketch the output $y[n]$ of this system to the input $x[n]$ shown in Fig. (b) without using the convolution technique.

From Fig. (b) we can express $x[n]$ as

$$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$$

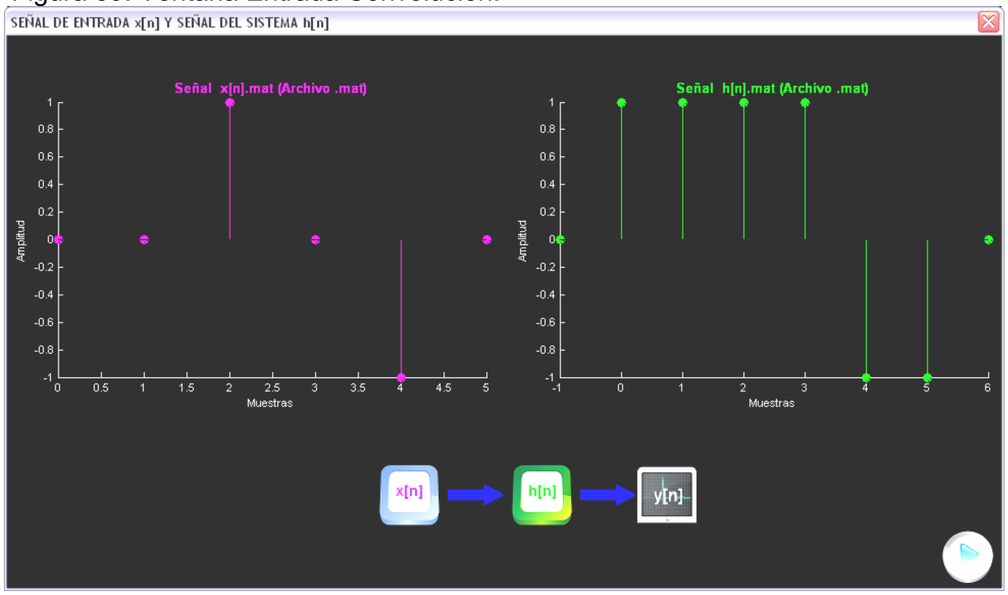




Fuente: libro Signals and Systems de Schaum. [Hwei].

En este caso se generan las dos señales propuestas en el ejercicio y se pasa a abrirlas en la ventana de entrada de convolución.

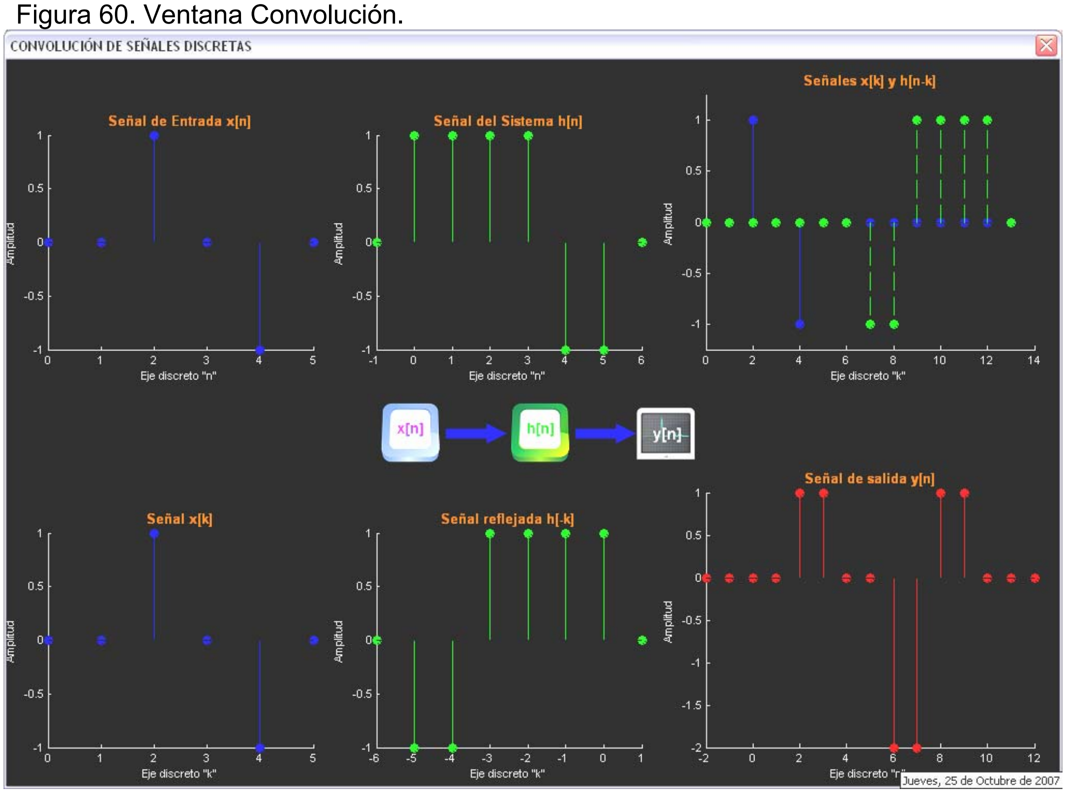
Figura 59. Ventana Entrada Convolución.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

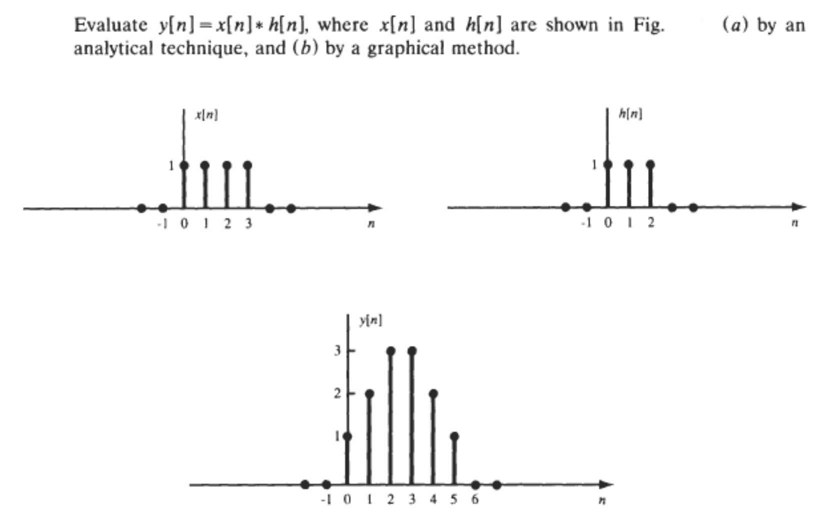
Dando clic en el botón x[n] se abre la señal correspondiente señal de entrada y en el botón h[n] la señal correspondiente al sistema, después de esto se da clic en el botón de play en la parte inferior derecha de la ventana (figura 59) para ver la convolución paso a paso en la siguiente ventana.

Figura 60. Ventana Convolución.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

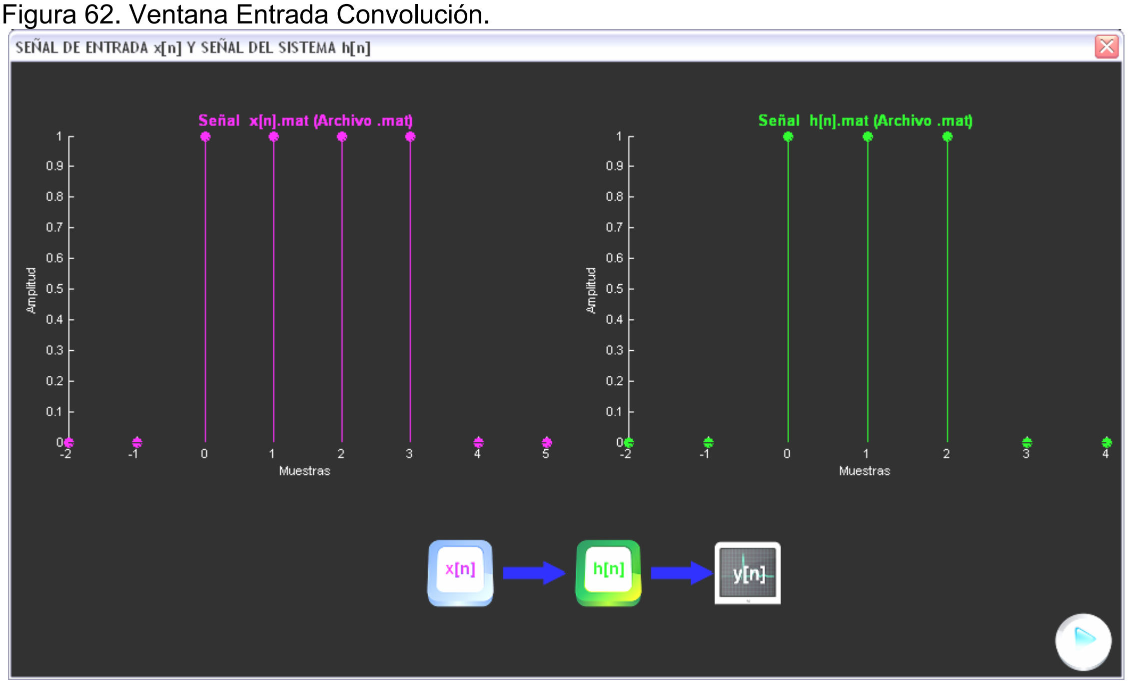
Figura 61. Ejercicio libro Signals and Systems de Schaum (Pág.94). [Hwei].



Fuente: libro Signals and Systems de Schaum. [Hwei].

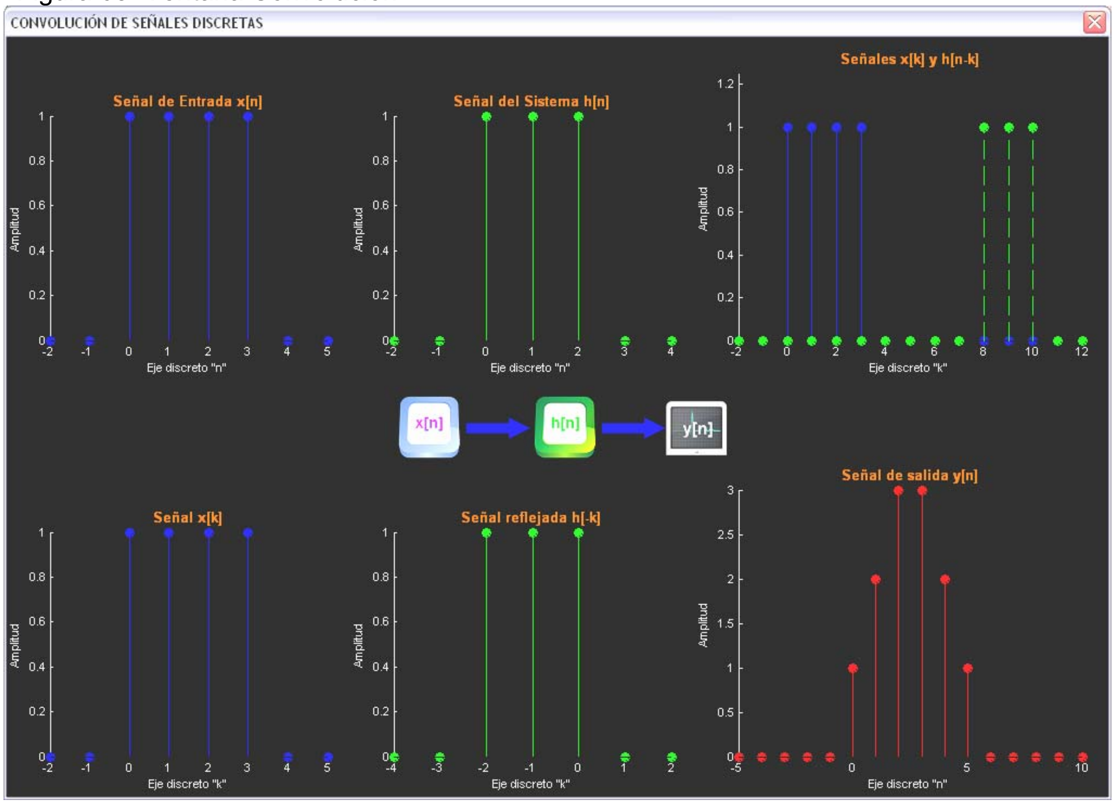
En este caso se generan las dos señales propuestas en el ejercicio y se pasa a abrirlas en la ventana de entrada de convolución.

Figura 62. Ventana Entrada Convolución.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Figura 63. Ventana Convolución.



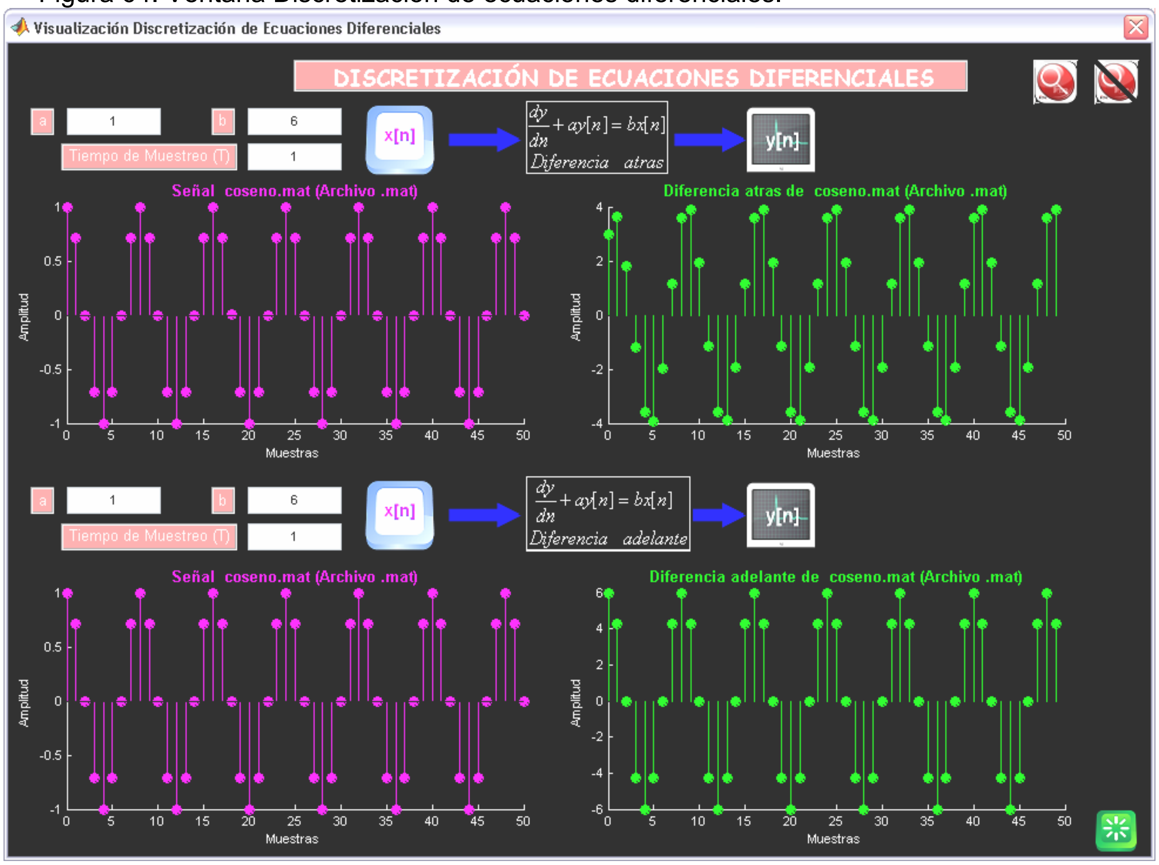
Fuente: Camargo Jorge Efraín

Se puede ver que el resultado de la convolución en la gráfica de la parte inferior derecha concuerda con la señal que aparece en el ejemplo del libro de Schaum.

4.3 MÓDULO ECUACIONES EN DIFERENCIAS

4.3.1 ECUACIÓN EN DIFERENCIAS

Figura 64. Ventana Discretización de ecuaciones diferenciales.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Esta ventana permite mostrar la discretización de ecuaciones diferenciales por medio de una señal de entrada que en este caso es $\cos(\pi/4)$.

De acuerdo con la señal $\cos(\pi/4)$ los valores de la señal son x[0]=1, x[1]=0.7071, x[2]=0, x[3]=-0.7071, x[4]=-1, x[5]=-0.7071 x[6]=0, x[7]=0.7071, x[8]=1, x[9]=0.7071, x[10]=0,….., datos vistos con el zoom de la herramienta sobre la señal.

Diferencia atrás: $y[n] = \dfrac{1}{1+aT} y[n-1] + \dfrac{Tb}{1+aT} x[n]$

a=1 b=6 y T=1 constantes.

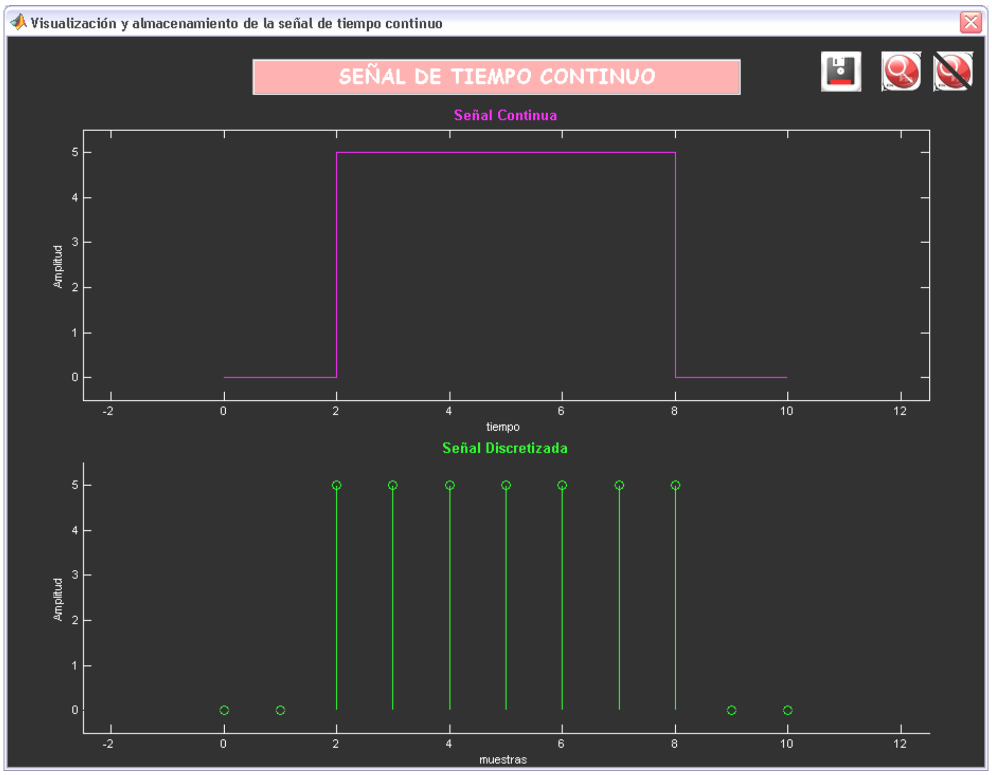
Reemplazando tenemos,

$$y[0] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{6}{2} \cdot 1 \qquad\qquad y[0] = 3$$

De esta forma al reemplazar el nuevo valor de $y[0]$ en la siguiente ecuación y así sucesivamente tenemos, $y[1]=3.6213$, $y[2]=1.81065$, $y[3]=-1.215975$, así se puede ver que la grafica de $y[n]$ mostrada en la ventana anterior (figura 64) da el resultado similar, pero si se hace zoom sobre cada punto se puede ver que son exactamente el mismo resultado.

4.3.2 DISCRETIZACIÓN

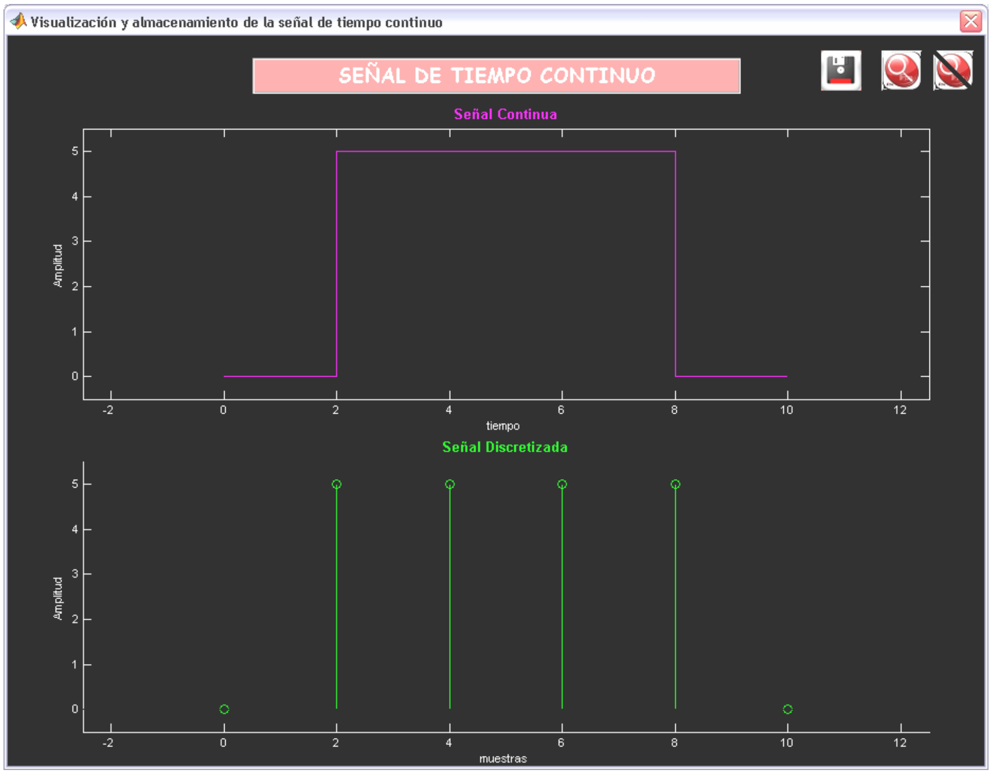
Figura 65. Ventana Discretización.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En esta ventana se ve la discretización de una señal pulso con un tiempo de muestreo 1, dando como resultado una señal discreta muy similar a la continua. Sabiendo que la señal pulso utilizada y previamente generada en la herramienta se encuentra en el intervalo [0 10] teniendo en cuenta los valores de cero en [0 2], y [8 10].

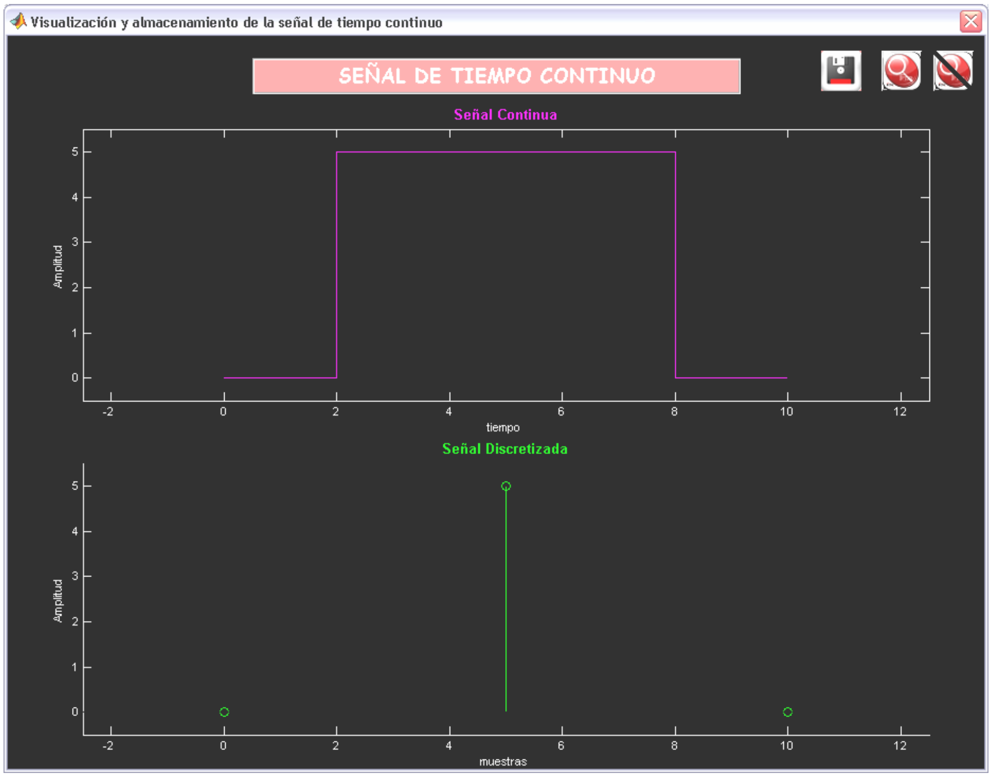
Figura 66. Ventana Discretización.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Para este caso se presenta una discretización con tiempo de muestreo 2, lo que hace que la señal discreta tenga menos muestras pero que todavía presente la misma forma que tiene la señal continua.

Figura 67. Ventana Discretización.



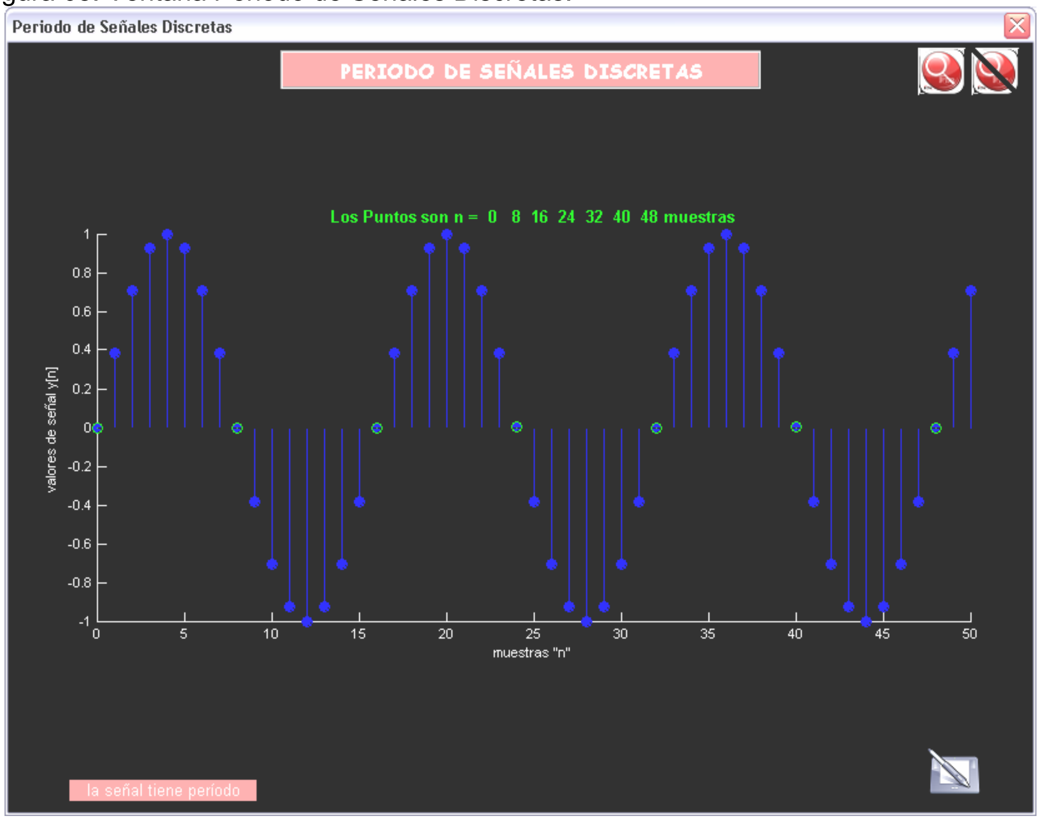
Fuente: Camargo Jorge Efraín

Ya con una discretización de la misma señal pulso pero esta vez con tiempo de muestreo igual a 5, la señal discreta que se muestra en la ventana se ha deformado y ahora ya no es un pulso sino un impulso.

Este tipo de procedimientos son los que se quieren mostrar en esta ventana para que el usuario pueda ver las variaciones en la señales al cambiárseles el tiempo de muestreo al discretizarce.

4.3.3 PERIODO DE SEÑALES

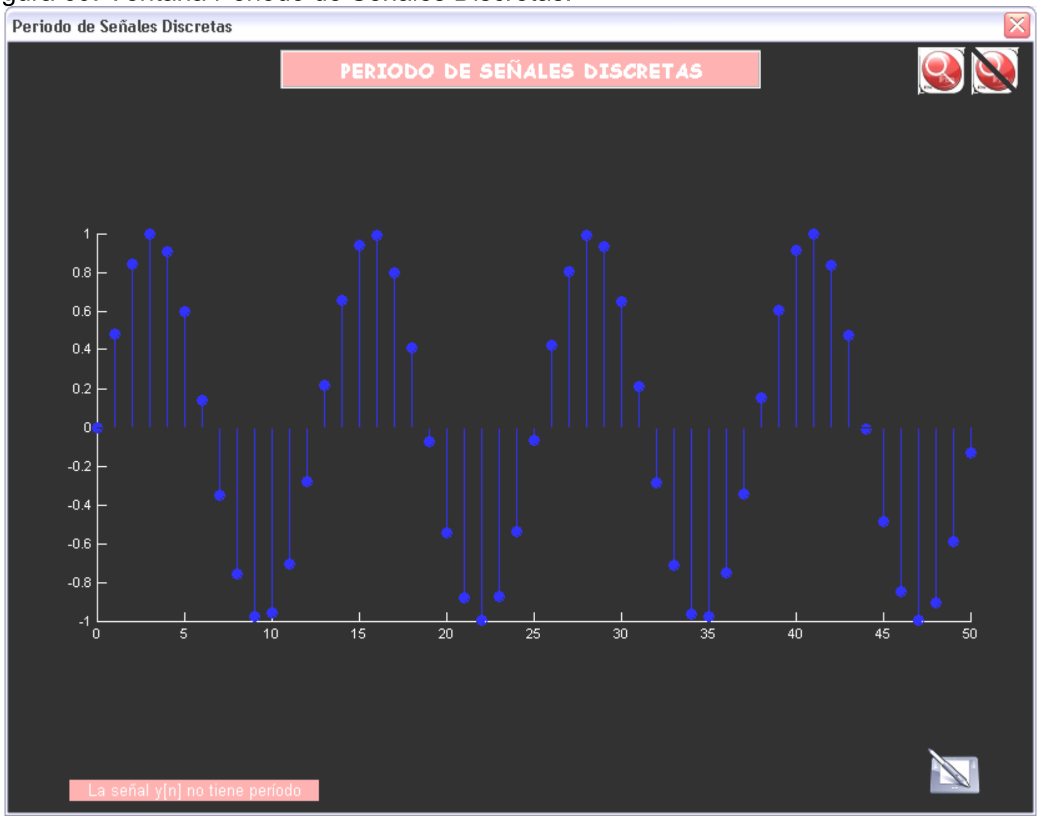
Figura 68. Ventana Periodo de Señales Discretas.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

En esta oportunidad se abrió la señal $sen(\pi / 8)$ con el botón que se encuentra en la parte inferior derecha previamente generada con la herramienta y en esta ventana se puede ver el periodo de la señal y los puntos donde hay periodicidad marcados en la grafica y nombrados en la parte superior.

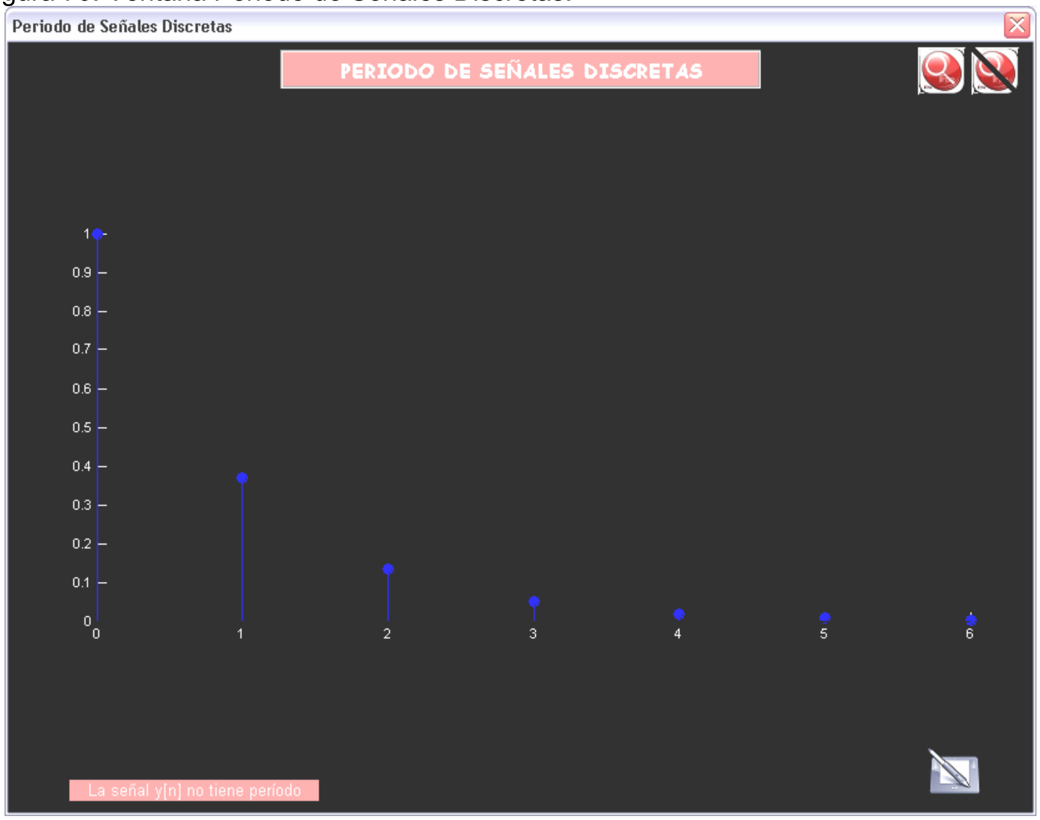
Figura 69. Ventana Periodo de Señales Discretas.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

Al abrir la señal $sen(1/2)$ generada en la herramienta la ventana muestra en un mensaje en la parte inferior que esta no tiene periodo por lo tanto no hay puntos de periodicidad que mostrar, esto mismo se puede ver en un tipo de señal que tiene esta condición mas obvia y a continuación se puede ver con la función exponencial.

Figura 70. Ventana Periodo de Señales Discretas.



Fuente: Camargo Jorge Efraín

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Este proyecto puede traer al desarrollo del curso Sistemas y Señales una buena forma de entender, aplicar, desarrollar prácticas que aumenten el entendimiento del curso por parte de los estudiantes, y fomenten proyectos futuros para lograr obtener un laboratorio que refuerce lo captado en la teoría. Esta herramienta así como puede ser utilizada en dicho curso del pregrado de Ingeniería Electrónica, también puede ser utilizada en cursos del la especialización en telecomunicaciones y control que ofrece la Universidad Pontificia Bolivariana.

Como trabajos futuros se pueden agregar a los módulos los temas de filtros, ecuaciones en diferencias de 2° orden, transformada Z que harán que la herramienta sea mas completa para el desarrollo del curso de Sistemas y Señales aumentando de este modo la comprensión de los temas.

La herramienta desarrollada en este proyecto se puede o se debería complementar con un hardware específico con DSP u otro tipo de dispositivos, como soporte en prácticas reales a lo realizado con esta herramienta, para implementar un laboratorio muy completo para el curso de Sistemas y Señales.

Esta herramienta también debe ser aplicada a grupos de estudiantes para poder realizar un estudio de las ventajas y desventajas que pueda tener la herramienta y así en trabajos futuros se pueda corregir lo que fuese necesario para mejorar y optimizar esta herramienta de acuerdo a los requerimientos de los alumnos o usuarios del curso.

BIBLIOGRAFIA

HWEI P. Hsu, Ph.D. Schaum's outlines of Theory and problems of Signals and Systems. McGraw-Hill. 1995. [Hwei].

The COMSOL Group. *www.comsol.com/products/signal*. Fecha de consulta abril de 2007. [comsol].

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN INGECIERÍA DE ARAGON. Universidad de Zaragoza, España. *http://i3a.unizar.es/ficha_labos.php?ver=12*. Fecha de consulta abril de 2007. [aragon].

MATLAB. The language of Technical Computing. Creating Graphical User Interfaces version 7. The Mathworks. 2000 – 2004. [math].

OPPENHEIM. Alan V, Señales y Sistemas segunda edición. Pearson, Prentice Hall. 1998. [oppe].

KAMEN. Edwuard, Fundamentals of Signals and Systems using Matlab. Prentice Hall. 1997. [kamen].

C.D. Mc Gillem, H.R. Cooper. Continuos and Discrete Signals and Systems Analysis. [cooper].

HANSELMAN. Duane, LITTLEFIELD. Bruce. Mastering Matlab 7. Pearson, Prentice Hall. 2005. [master].

A N E X O

TEORIA CURSO SISTEMAS Y SEÑALES PARA TUTORIAL CON MATLAB

JORGE EFRAÍN CAMARGO VANEGAS

INGENIERO JESUS ANTONIO VEGA URIBE

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRÓNICA
Bucaramanga
2008

CAPITULO 1.

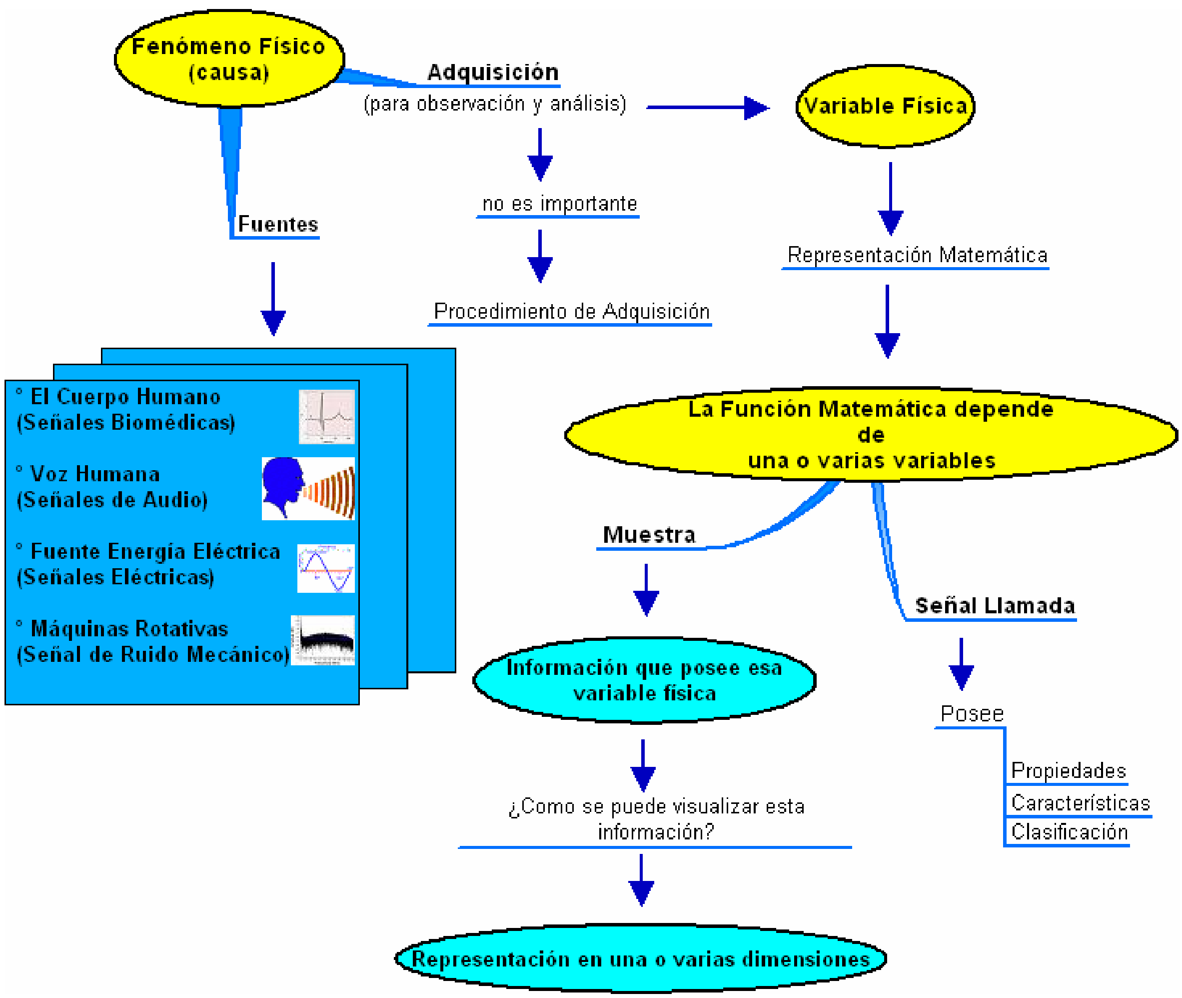
Conceptos básicos.

¿Que es una señal? [kamen], [oppe]

Las señales representan fenómenos físicos, y se pueden clasificar en:

- *Señales de tiempo continuo.*
- *Señales de tiempo discreto.*
- *Señales de valor continuo.*
- *Señales de valor discreto.*

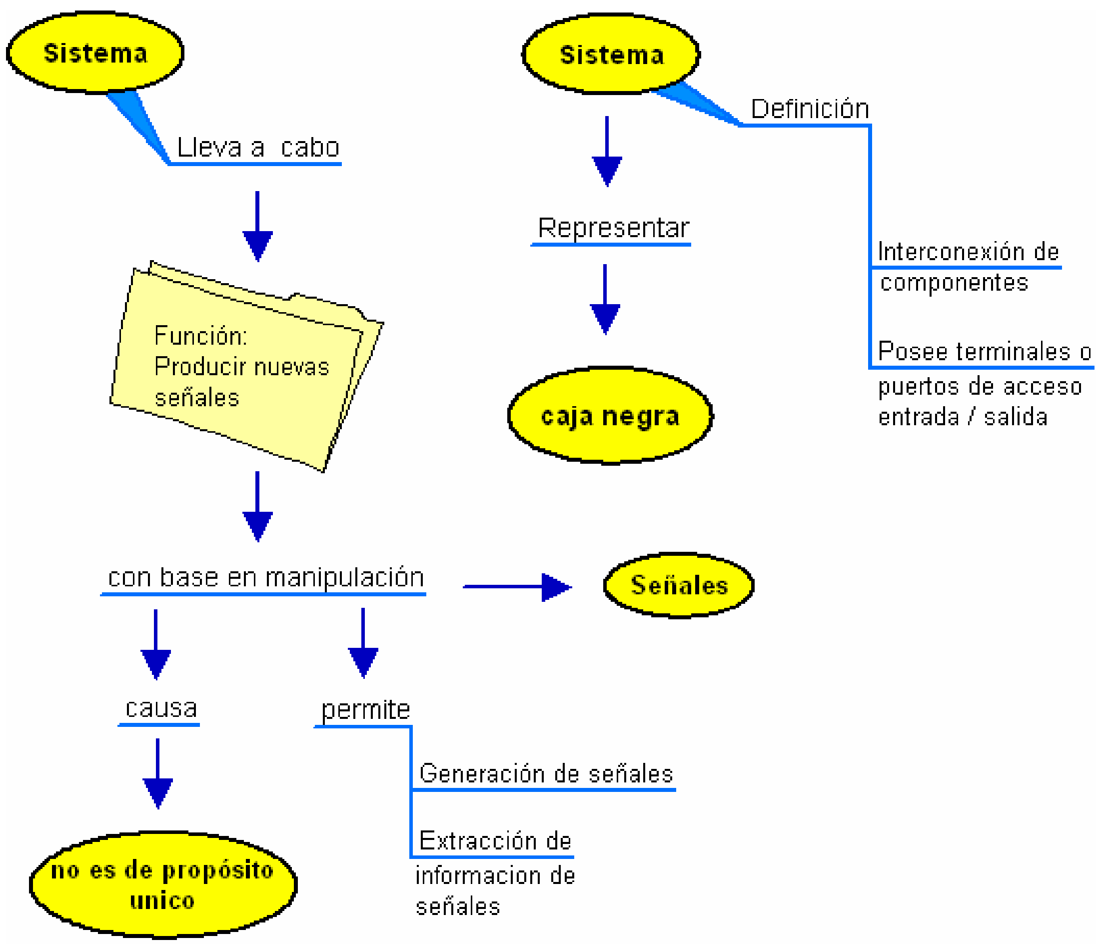
Como una señal proviene, en general, de un fenómeno físico, podemos decir:

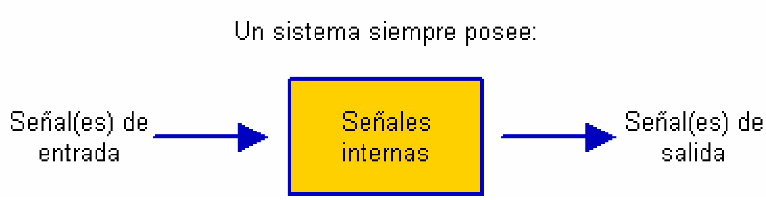


En este capitulo se busca:

a. Comprender el concepto de señal, concepto de sistema y relacionar esos conceptos con la Ingeniería Electrónica y con la vivencia diaria.
b. Determinar cuando una señal es de potencia y cuando es de energía.
c. Clasificar una señal.
d. Aplicar las transformaciones ala variable independiente.
e. Comprender las propiedades básicas de los sistemas continuos y discretos.

¿Qué es un sistema? [kamen]

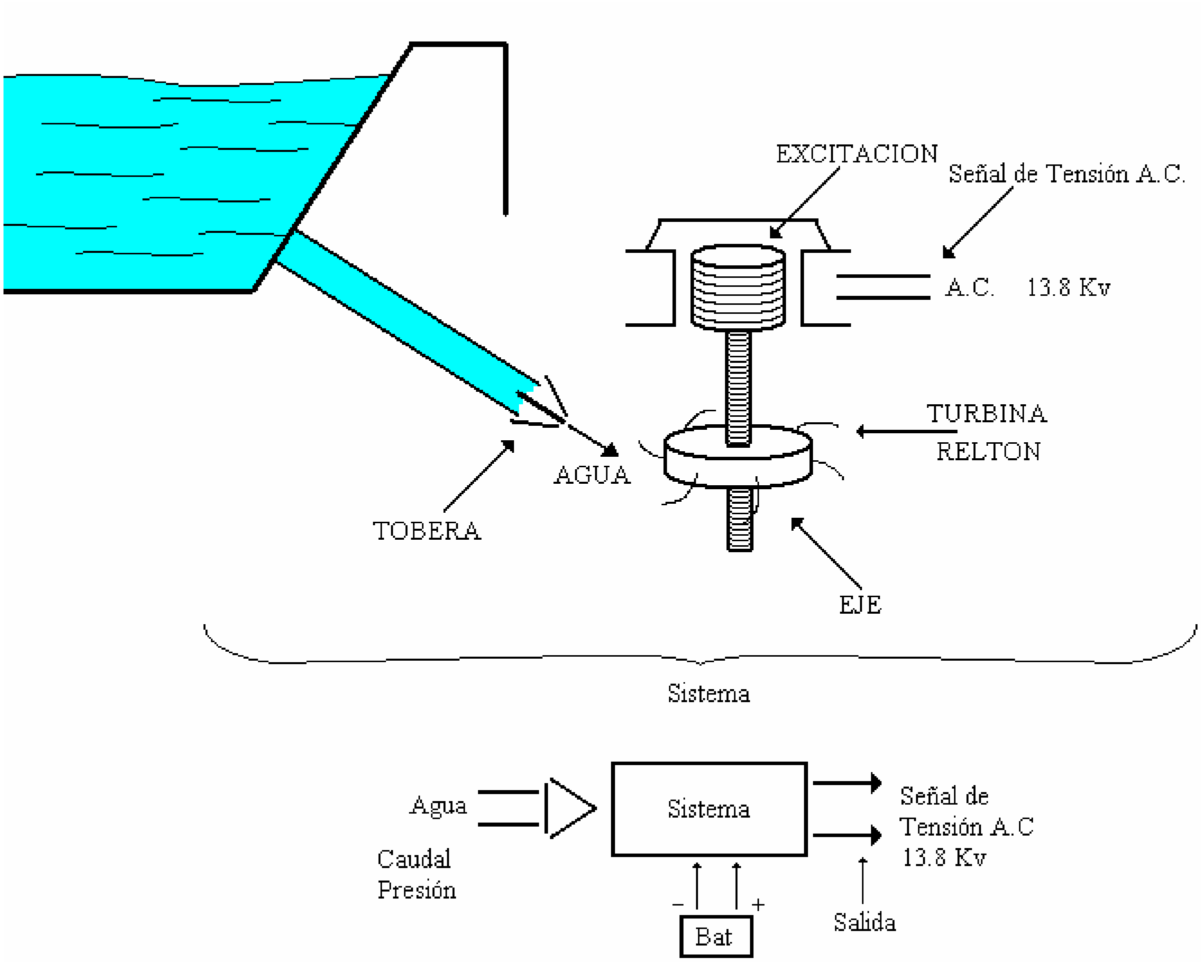




En general, con cada señal existe una asociación el cual la genera, esto hace que cada señal esté asociada a un sistema.

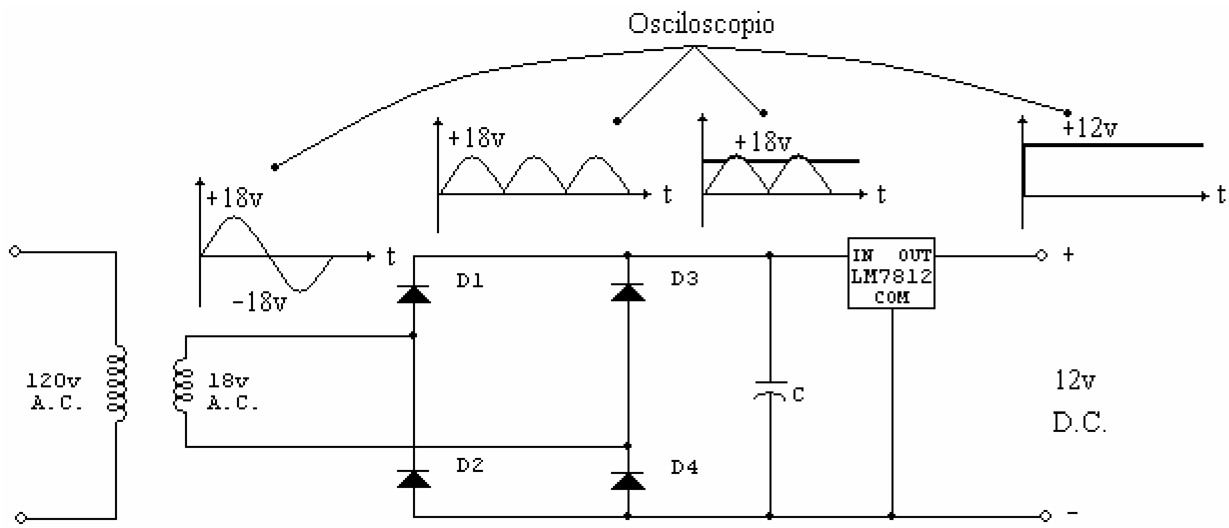
Ejemplo 1:

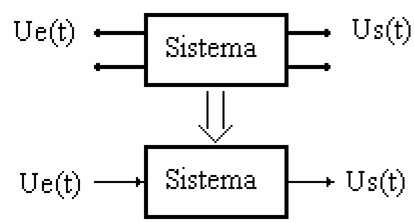
Sistema de Generación de Energía Eléctrica (Hidroeléctrica).



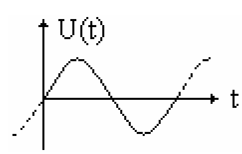
Ejemplo 2:

Fuente de Voltaje Regulada.

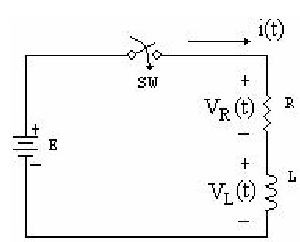




En el desarrollo de este curso se va a trabajar con señales unidimensionales, lo cual indica que se tiene una variable independiente, como por ejemplo: U(t) → "voltaje dependiente del tiempo".

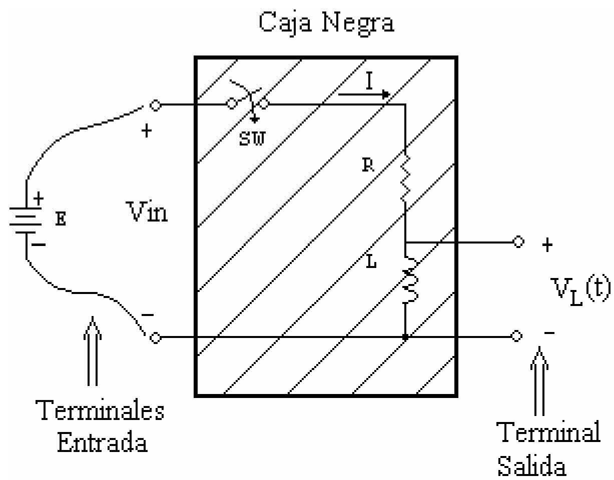


Ejemplo: suponga que se tiene,



¿**Este es un sistema**?

1. Es una interconexión de componentes (Fuente DC(E), Resistencia (R), Inductancia(L))
2. ¿Posee terminales entrada/salida?



La ecuación diferencial que representa el circuito es,

$$-E + Ri(t) + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad (1)$$

Las condiciones iniciales son *i(o)=0 [A]*

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

$$i_h(t) = Lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}$$

$$i_p(t) = Ae^{kt}$$

Con base en lo anterior,

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{kt}$$

Se toma la condición inicial, *i(o)=0 [A]*,

$$0 = \frac{E}{R} + Ae^{0} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

Nos queda,

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{kt} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

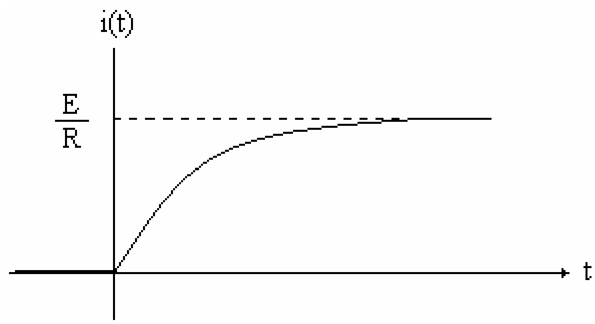
$$-E + R\frac{E}{R}\left(1 - e^{kt}\right) - L\frac{E}{R}ke^{kt} = 0$$

$$-E + E - Ee^{kt} - L\frac{E}{R}ke^{kt} = 0$$

$$e^{kt}\left(L\frac{E}{R}k + E\right) = 0 \Rightarrow k = -\frac{R}{L}$$

Finalmente,

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-R}{L}t}\right)$$ Corriente en función del tiempo – señal de corriente



Para cualquier valor de tiempo (donde t Є R), el valor de la señal es un número real.

De forma general,
X (t) → señal valorada real (real - valued)
→ para cualquier valor de “t”, la señal es un número real.

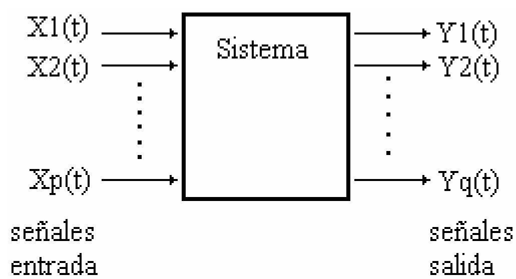
$$t \in \mathbf{R} \longrightarrow f(t) \in R$$

Algunos ejemplos de señales:
- Señales de audio y voz.
- Señales bioeléctricas (ECG y EEG).
- Fuerzas o torques.
- Flujo de líquidos o gases (procesos químicos).

Ejemplo-matlab: tomar una señal de audio,
Palabra1:señal.wav
Palabra2:signal.wav
Palabra3:curso.wav

```
[y,FS,B]=wavread ('señal')
[y2,FS2]=wavread ('signal')          wavplay.m
[y3,FS3]=wavread ('curso')           soundsc.m
```

De manera general,



Se pueden tener las siguientes características,

1. Que $p < q$
2. Que $p > q$
3. Que $p = q$
4. si $p = q = 1$, se tiene un sistema SISO.

En la representación de un sistema, las terminales de entrada y salida <u>no poseen</u> las conexiones a tierra.

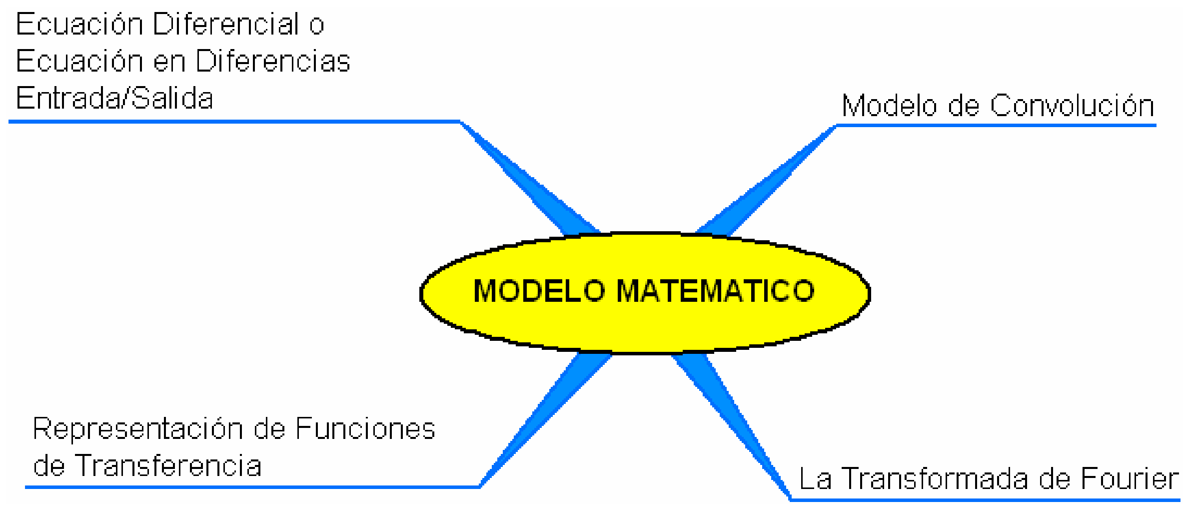
Los sistemas pueden tener los siguientes tipos de entrada:

- Entradas de control.
- Entradas de referencia.
- Entradas de perturbación.

No necesariamente las entradas son medibles.

En cuanto a las salidas de un sistema se tienen las señales que usualmente son medibles usando sensores.

Para estudiar un sistema tenemos como base un Modelo Matemático (conjunto de ecuaciones que muestran la relación entre las señales de entrada y salida o representación idealizada del sistema), y los tipos de representaciones entrada/salida que representan a un modelo matemático son:

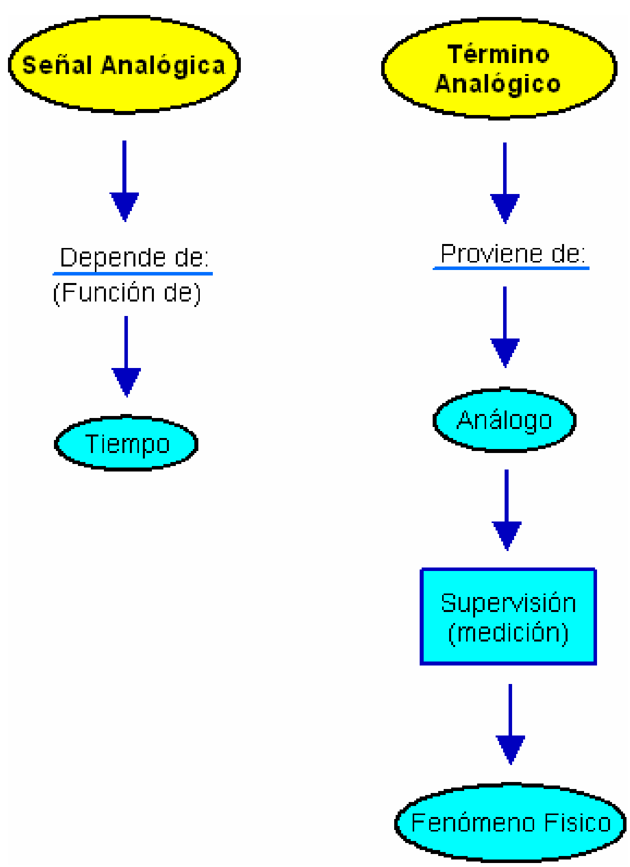


De acuerdo con la clasificación de las señales, se tiene,

1. **Señales de tiempo continuo.** [cooper]

La variable independiente es continua (definida real o existan infinitos puntos), por tanto, la variable dependiente es continua. También se le conoce como *Señal Analógica*.

"La señal analógica varía con el tiempo"



2. **Señal de tiempo discreto.** [cooper]

La variable está definida solo para un conjunto discreto de valores, por tanto, la variable dependiente se concentra definida en el conjunto discreto.

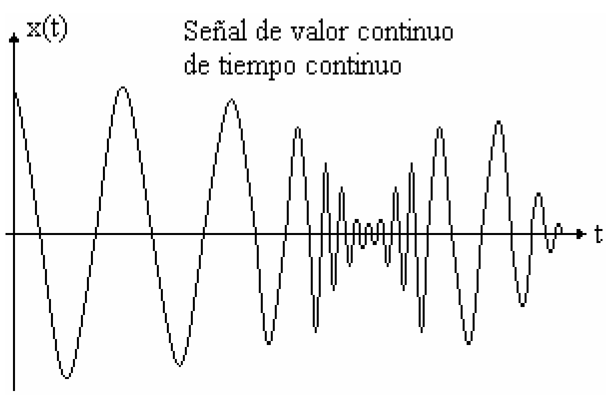
	Señal de tiempo continuo	**Señal de tiempo discreto**
Variable independiente	$t \in R$	$n \in Z$
Variable dependiente	$x(t) \in R$	$x[n] \in R$

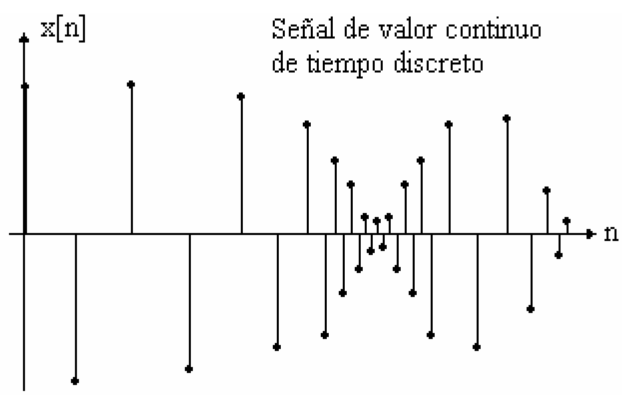
Una señal de tiempo discreto puede ser obtenida por:

- Un proceso de muestreo de la señal analógica: se toman valores de la señal analógica en puntos discretos en el tiempo y tomar esas muestras para representar la señal analógica.
- Usando en sistema inherentemente discreto: produce valores de la señal solo en tiempos discretos.

3. **Señal de valor continuo.** [cooper]

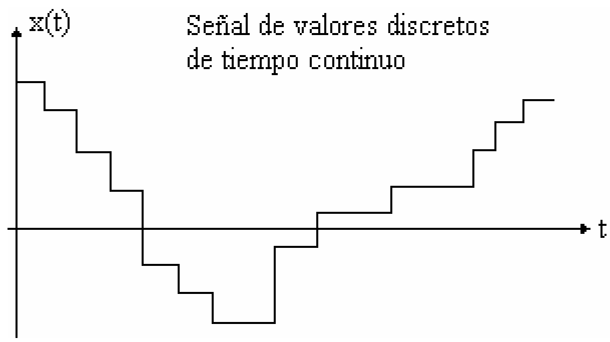
Señal que puede tener un valor que se halla dentro de un conjunto de valores sin "espacio" entre los valores permitidos.





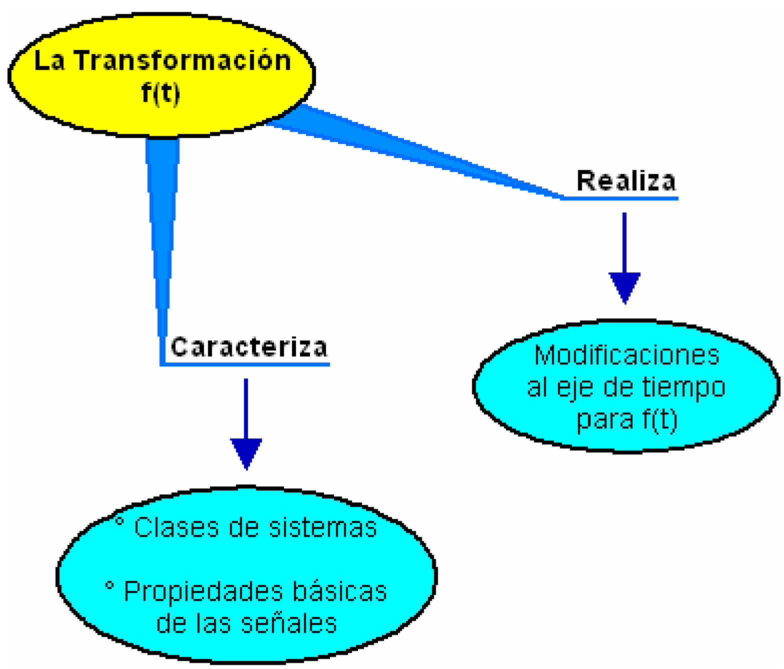
4. **Señal de valor discreto.** [cooper]

Solo puede tener valores tomados de un *conjunto discreto* de valores.

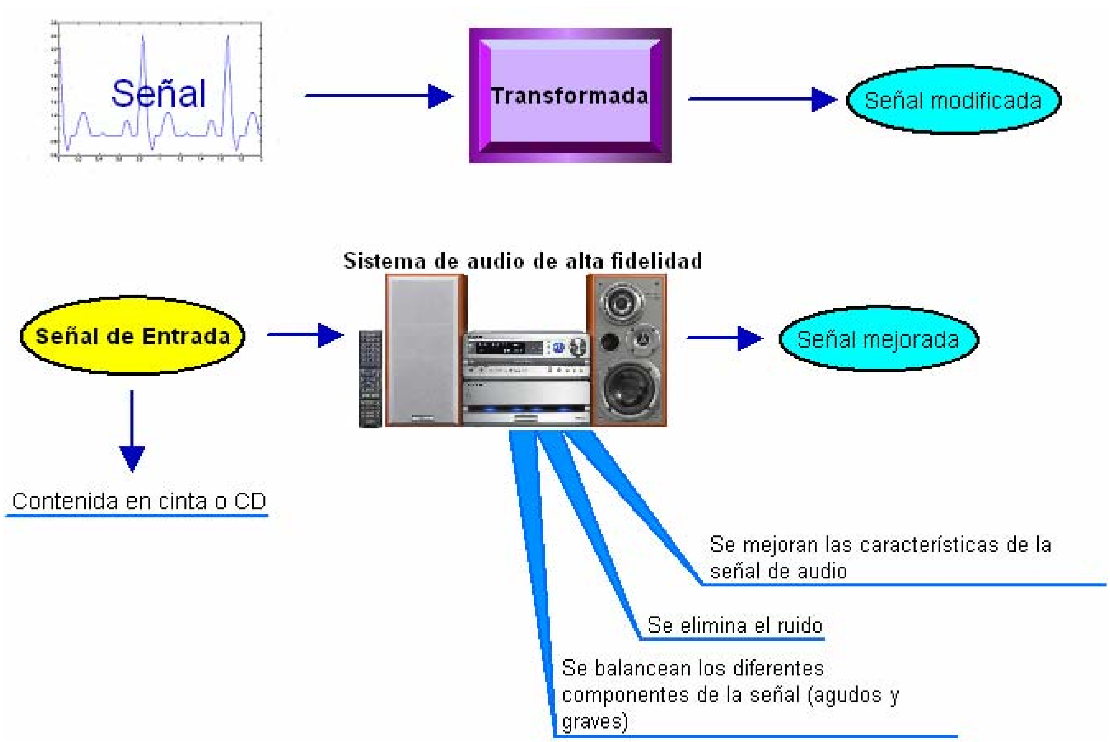


Conjunto discreto: existe un espacio finito entre los valores permitidos.

Transformaciones a la variable independiente. [oppe]



Ejemplo: lo que siempre se busca es transformar la señal.



1. *Corrimiento de tiempo.*
2. *Inversión en el tiempo.*
3. *Escalamiento de tiempo.*
4. *Señales Par e Impar.*

1. Corrimiento de tiempo.

Esta transformación se representa por,

$x(t) \xrightarrow{\tau} x(t')$ Existen dos casos para t' $\left\{\begin{matrix} *t' = t + to \\ *t' = t + to \end{matrix}\right\}$ donde *to* ≥ *0* y *to* Є *R*

Cuando se realiza transformaciones, se recomienda seguir los siguientes pasos:

a. construya una tabla, ubicando es las columnas t, t' y f(t')

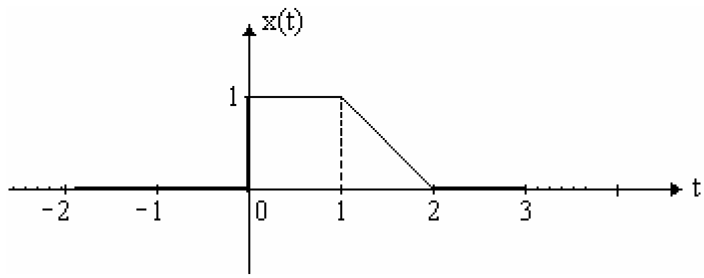
t	**t'**	**f(t')**
. .		
-5		
-4		
. .		
0		
. .		
4		

b. Ubique nuevos ejes coordenados. En el eje de variable dependiente ubique f(t') y en el eje de variable independiente ubique "t", y debajo de este ubique otro eje (paralelo al eje "t") llamado "t'"
c. Ubique los puntos de la tabla.

Ejemplo: tomamos una señal de tiempo continuo definida de la siguiente forma,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & para \quad t < 0 \\ 1 & 0 \le t \le 1 \\ -t+2 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$$

Dibujamos x(t),

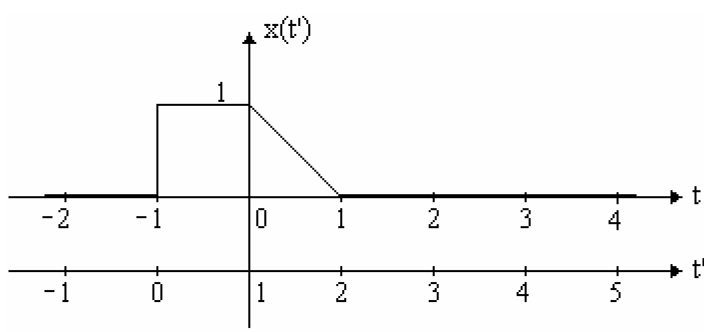


Se quiere realizar la transformación,

$$x(t) \xrightarrow{T} x(t') = x(t+1) = x(t+to) \quad \text{donde } to = 1$$

Se construye la tabla.

x(t)	t	t'=t+1	f(t')=f(t+1)=x(t+1)
0	-1	0	1
1	0	1	1
1	1	2	0
0	2	3	0
0	3	4	0



De manera analítica,

Se tiene $$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\le 1\\ -t+2 & 1\le t\le 2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$$

Se desea, $x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}x(t')$

$$x(t')=\begin{cases}0 & t'<0\\ 1 & 0\le t'\le 1\\ -t'+2 & 1\le t'\le 2\\ 0 & t'\ge 2\end{cases}$$

Si *t'=t+1*

$$x(t+1)=\begin{cases}0 & t+1<0\\ & \underline{t<-1}\\ 1 & 0\le t+1\le 1\\ & \underline{-1\le t\le 0}\\ -t+1 & 1\le t+1\le 2\\ & \underline{0\le t\le 1}\\ 0 & t+1\ge 2\\ & \underline{t\ge 1}\end{cases}$$

El efecto es, "se mueve la grafica".

$x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}$

x(t') = x(t+to)
to > 0
to Є R

La grafica se mueve a la Izquierda.

Adelantada

x(t') = x(t+to)
to < 0
to Є R

La grafica se mueve a la Derecha.

Atrasada

Ejercicio propuesto: realizar las siguientes transformaciones sobre

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<-0.5\\ 1 & -0.5\le t\le 0.5\\ 0 & 0.5<t<3\end{cases}$$ Señal periódica con periodo T = 3.5 [seg.].

$1.x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}x(t+T/2)$

$2.x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}x(t-T/2)$

2. Inversión en el tiempo (Reflexión).

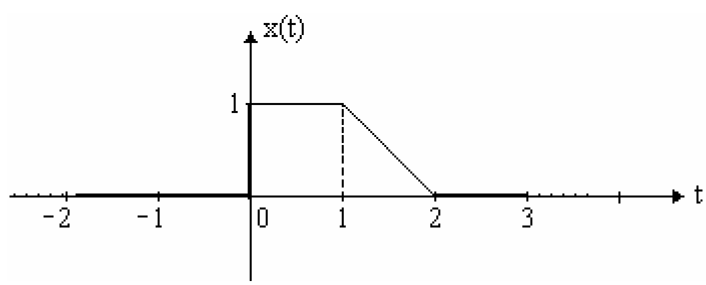
Su representación es,

$x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}x(t')=x(-t)$ Reflexión respecto al eje de la variable dependiente *x(t)*

Se tiene,

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\le 1\\ -t+2 & 1\le t\le 2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$$

Se dibuja la señal,

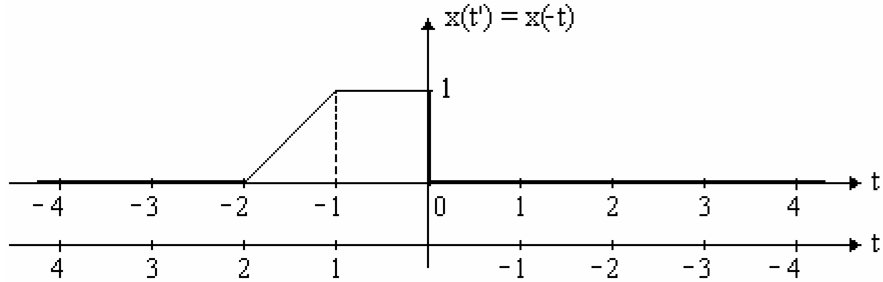


Se requiere $x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}x(t')=x(-t)$

Se construye la tabla

t	x(t)	t’	x(t’)
-4	0	4	0
-3	0	3	0
-2	0	2	0
-1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	-1	0
2	0	-2	0

Se dibujan los dos ejes de tiempo *t* y *t'*



$$x(t') = x(-t) = \begin{cases} 0 & -t < 0 \\ & \underline{t > 0} \\ 1 & 0 \le -t \le 1 \\ & \underline{0 \ge t \ge -1} \\ t+2 & 1 \le -t \le 2 \\ & \underline{-1 \ge t \ge -2} \\ 0 & -t \ge 2 \\ & \underline{t \le -2} \end{cases}$$

3. Escalamiento de tiempo.

Su representación es

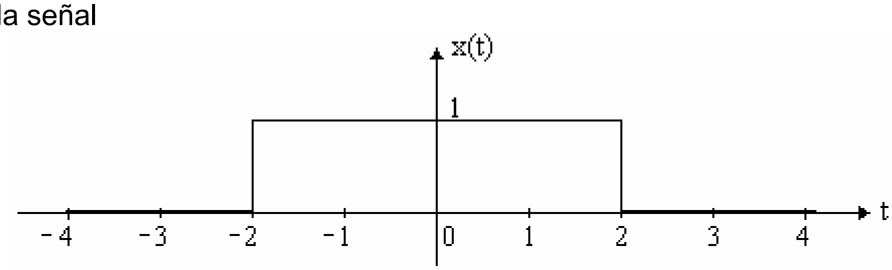
$x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} x(t') = x(\alpha t)$ "α" representa un cambio lineal en la escala de tiempo.

Si α > 1, α Є R se realiza es una compresión en el eje de tiempo.
Si 0 < α < 1, α Є R expansión, ampliación, "estiramiento" del eje de tiempo.

Tenemos la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ 1 & -2 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

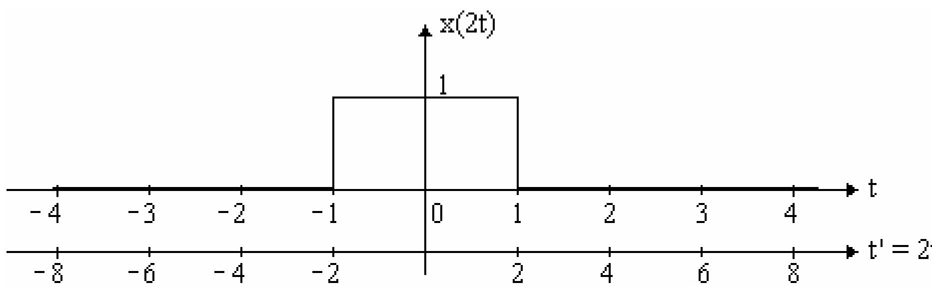
Se dibuja la señal



Se quiere $x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} x(2t)$, α = 2

Se construye la tabla,

t	x(t)	t'=2t	x(2t)
-4	0	-8	0
-3	0	-6	0
-2	1	-4	0
-1	1	-2	1
0	1	0	1
1	1	2	1
2	1	4	0
3	0	6	0
4	0	8	0



Se pueden tener combinaciones.

De manera analítica, el ejemplo anterior, nos da,

$$x(2t) = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} 2t < -2 \\ \underline{t < -1} \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} -2 \le 2t \le 2 \\ \underline{-1 \le t \le 1} \end{array} \\ 0 & \begin{array}{l} 2t > 2 \\ \underline{t > 1} \end{array} \end{cases}$$

Se pueden tener combinaciones, por ejemplo,

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} x(t') = x(-t+3)$$

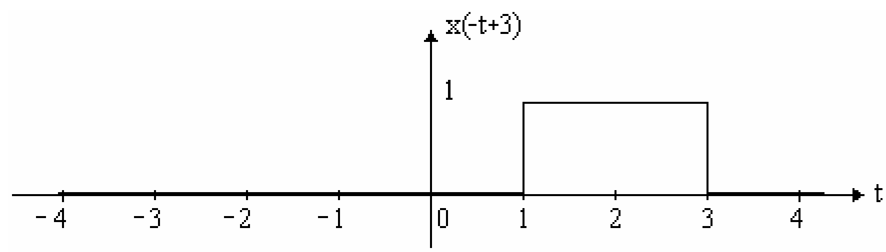
Tomamos la señal,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Esto hace que,

$$x(t') = x(-t+3) = \begin{cases} 0 & -t+3<0 \\ & -t<-3 \\ & \underline{t>3} \\ 1 & 0 \le -t+3 \le 2 \\ & -3 \le -t \le -1 \\ & \underline{3 \ge t \ge 1} \\ 0 & -t+3>2 \\ & -t>-1 \\ & \underline{t<1} \end{cases}$$

Se dibuja



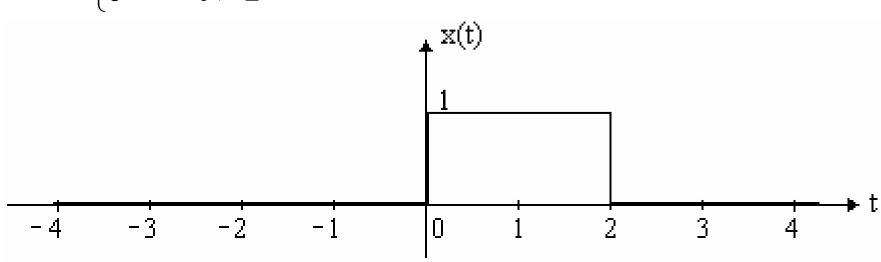
4. **Escalamiento de Amplitud.**

Es la transformación más sencilla (multiplicar por una constante),

g(t) → *Ag(t)* se multiplica a *g(t)* en cada valor de "*t*" por *A*.

Si la constante A es negativa, se tiene,

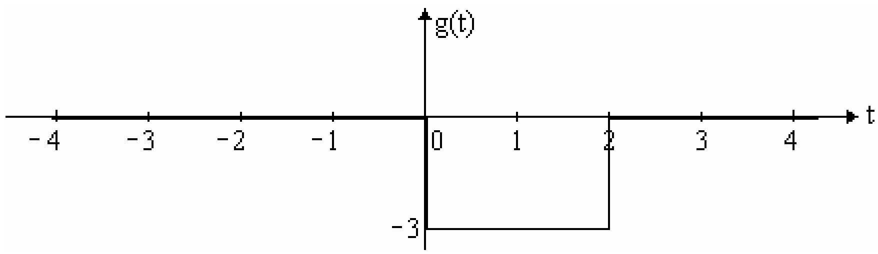
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$



Se requiere,

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} -3x(t) = g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -3 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

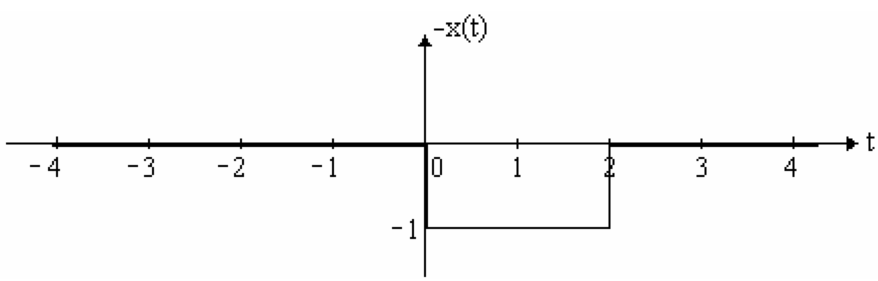
Dibujando se obtiene,



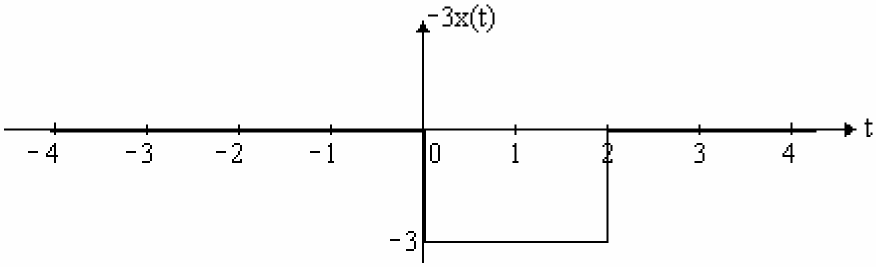
Si la transformación $x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} g(t)$ se considera como dos transformaciones sucesivas, se tiene,

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} g(t) = -3x(t)$$
$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} -x(t) \xrightarrow{\mathrm{T}} |3|(x(t))$$

Se dibujan las dos transformaciones,



$$\mathrm{x} - x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$



$$-3x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ -3 & 0\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}$$

Ejemplo: se pueden aplicar simultáneamente las transformaciones:

- Escalamiento en Amplitud.
- Escalamiento en Tiempo.
- Desplazamiento en Tiempo.

A la señal *x(t)* de la siguiente forma,

$$x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}Ax\left(\frac{t-to}{a}\right)$$

Lo anterior se puede descomponer en transformaciones sucesivas.

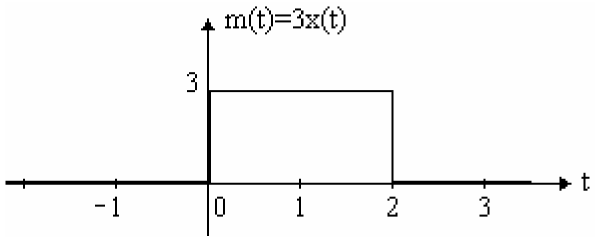
$$x(t)\xrightarrow{\mathrm{T1}}Ax(t)\xrightarrow{\mathrm{T2}}Ax(t')=Ax\left(\frac{t}{a}\right)\xrightarrow{\mathrm{T3}}Ag(t'')=Ag(t-to)=Ax\left(\frac{t-to}{a}\right)$$

Escalamiento en amplitud	Escalamiento en tiempo	Ag(t)	Desplazamiento en tiempo

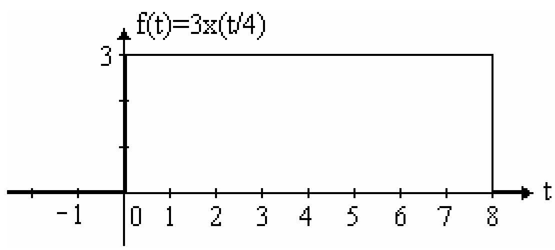
Realizamos las transformaciones para,

$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0\le t\le 2\\ 0 & t>2\end{cases}\qquad\rightarrow\qquad x(t)\xrightarrow{\mathrm{T}}3x\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{T1}} 3x(t) = m(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$



$$m(t) = 3x(t) \xrightarrow{\text{T2}} f(t) = m(t') = m\left(\frac{t}{4}\right) = 3x\left(\frac{t}{4}\right) = f(t) = \begin{cases} 0 & t/4 < 0 \to t < 0 \\ 3 & 0 \le t/4 \le 2 \to 0 \le t \le 8 \\ 0 & t/4 > 2 \to t > 8 \end{cases}$$



$$f(t) \xrightarrow{\text{T3}} g(t) = f(t') = f(t-2) = 3x\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3 & 0 \le t \le 8 \\ 0 & t > 8 \end{cases} \xrightarrow{\text{T3}} g(t) = \begin{cases} 0 & t-2 < 0 \to t < 2 \\ 3 & 0 \le t-2 \le 8 \to 2 \le t \le 10 \\ 0 & t-2 > 8 \to t > 10 \end{cases}$$

$$g(t) = 3x\left(\frac{t-2}{4}\right)$$

Si se cambia el orden de las transformaciones el resultado no es el mismo, es erróneo.

$$x(t) \xrightarrow{\text{T1'}} q(t) = Ax(t)$$
$$q(t) \xrightarrow{\text{T2'}} p(t) = q(t') = q(t-to) = Ax(t-to)$$
$$p(t) \xrightarrow{\text{T3'}} h(t) = p(t') = p\left(\frac{t}{a}\right) = Ax\left(\frac{t}{a} - to\right)$$

Son $g(t) = h(t)$ $\rightarrow$ **NO.**

Si la secuencia de comandos es: T1', T2' y T3'

Se hace a $x(t) \xrightarrow{\text{T}} Ax\left(\frac{t-to}{a}\right) = Ax\left(\frac{t}{a}-\frac{to}{a}\right)$

T1' → escalamiento de amplitud, T2' → desplazamiento en tiempo, T3' → escalamiento en tiempo.

$$x(t) \xrightarrow{\text{T1''}} k(t) = Ax(t)$$

$$k(t) \xrightarrow{\text{T2''}} d(t) = k(t') = k(t-\frac{to}{a}) = Ax(t-\frac{to}{a})$$

$$d(t) \xrightarrow{\text{T3''}} c(t) = d(t'') = d\left(\frac{t}{a}\right) = Ax\left(\frac{t}{a}-\frac{to}{a}\right)$$

Si son iguales: $c(t) = g(t)$

$$Ax\left(\frac{t}{a}-\frac{to}{a}\right) = Ax\left(\frac{t-to}{a}\right)$$

Señal Par e Impar (para tiempo continuo y tiempo discreto). [oppe]

- Una señal *x(t) ó x[n]* es Par si:

$$x(t) = x(-t)$$
$$x[n] = x[-n]$$

Hablando desde la perspectiva de transformación,

$x(t) \xrightarrow{\text{T}} g(t) = x(t') = x(t=-t) = x(-t)$

Si $x(t) = x(-t) \Rightarrow x(t)$ es Par

$x[n] \xrightarrow{\text{T}} m[n] = x[n'] = x[n=-n] = x[-n]$

Si $x[n] = x[-n] \Rightarrow x[n]$ es Par

Una señal *x(t) ó x[n]* es Impar si:

$$x(-t) = -x(t)$$
$$x[-n] = -x[n]$$

De manera general, una señal *x(t)* se puede representar como la suma de su parte Par y de su parte Impar.

$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

$x_p(t)$ → parte Par de *x(t)*

$x_i(t)$ → parte Impar de *x(t)*

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]$$
$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]$$

Supongamos que se tienen dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las cuales son señales Par.

$$x_1(t) = x_1(-t)$$
$$x_2(t) = x_2(-t)$$

Supongamos que se tiene una señal como la suma de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Entonces, haciendo $t' = -t$

$$x(t') = x_1(t') + x_2(t')$$
$$x(-t) = x_1(-t) + x_2(-t)$$
$$x(-t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Pero $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Lo que hace que $x(-t) = x(t)$ $\rightarrow$ la suma de dos señales Par da como resultado una señal Par.

Supongamos que se construye una señal $g(t)$ como la multiplicación de dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

$$g(t) = x_1(t) \times x_2(t)$$

Entonces, haciendo $t'' = -t$

$$g(t'') = x_1(t'') \times x_2(t'')$$
$$g(-t) = x_1(-t) \times x_2(-t)$$
$$g(-t) = x_1(t) \times x_2(t)$$

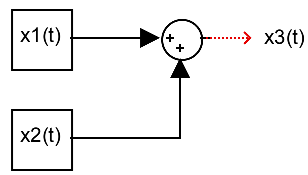
Pero $g(t) = x_1(t) \times x_2(t)$

Lo que hace que

$g(-t) = g(t)$ $\rightarrow$ el producto de dos señales Par es también una señal Par.

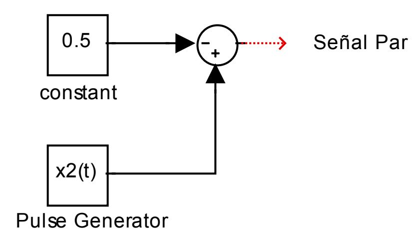
Se pueden generar dos funciones (señales), Par e Impar y observar lo siguiente, con base en simulink:

I) Se generan dos señales Par y se suman.

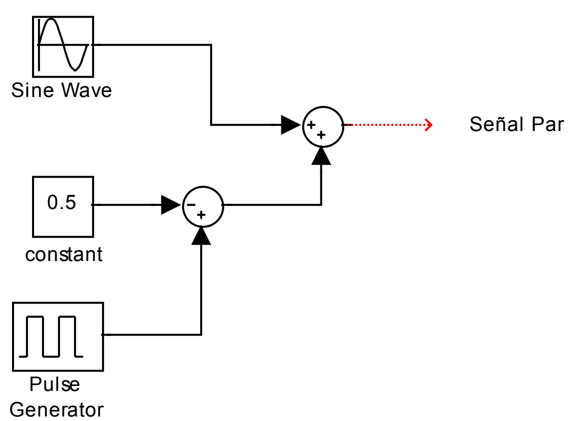


$x_1(t)$ → señal coseno.
$x_2(t)$ → señal pulso rectangular.

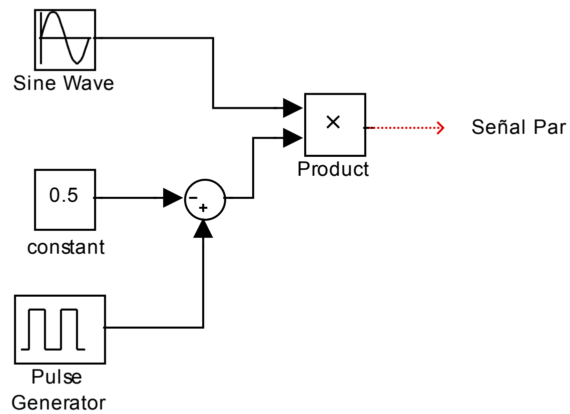
Características de $x_1(t)$.
Bloque “SINE WAVE”.
Amplitude = 1
Frecuency = pi [rad/seg]
Phase = pi/2
Simple time = 0



Características de $x_2(t)$.
Bloque “pulse generator”
Amplitud = 1
Periodo = 2[seg]
Pulse width (%period) = 50%
Phase delay = 0.5[seg]



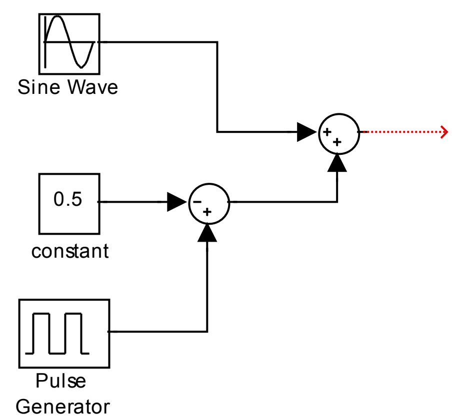
II) Se generan dos señales Pares y se multiplican.



III) Se generan dos señales Impares y se suman.

Características de $x_1(t)$.
Bloque "SINE WAVE".
Amplitude = 1
Frecuency = pi [rad/seg]
Phase = Φ [rad]

Características de $x_2(t)$.
Bloque "pulse generator"
Amplitud = 1
Periodo = 2[seg]
Pulse width (%period) = 50%
Phase delay = 0[seg]



Ejercicio propuesto

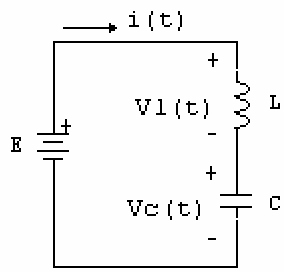
IV) Se generan dos señales Impares y se multiplican. (Hacer y verificar analíticamente).
V) Se genera una señal Par y otra Impar y se suman. (Hacer y verificar analíticamente).
VI) Se genera una señal Par y otra Impar y se multiplican. (Hacer y verificar analíticamente).

Periodicidad

Sea una señal *x(t)*, de tiempo continuo, lo cual se dice que posee una característica periódica si existe un valor T ε R, tal que

$$x(t) = x(t+T)$$

Supongamos que tenemos,



No existen elementos resistivos.

La ecuación diferencial que define al sistema es,

$$-V + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt + \underbrace{Vc(t=0)}_{\text{Condición inicial}} = 0 \qquad (1)$$

Las condiciones inicial es que definen el circuito son

$$i(0) = 0 \text{ y } Vc(t=0) = 0$$

Aplicando la T.L. a (1) se tiene,

$$-\frac{V}{s} + LsI(s) - Li(0) + \frac{I(s)}{sC} = 0$$

$$I(s)\left[Ls + \frac{1}{sC}\right] = \frac{V}{s}$$

$$I(s) = \frac{V}{s\left(Ls + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{V}{s\left(\frac{LCs^2+1}{sC}\right)} = \frac{VC}{LC\left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)}$$

$$I(s) = \frac{\frac{V}{L}}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

Las dos raíces del denominador son,

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = j\frac{1}{\sqrt{LC}} \\ s_2 = -j\frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

Se manejan fracciones parciales,

$$I(s) = \frac{\frac{V}{L}}{s^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{A}{s - j\sqrt{\frac{1}{LC}}} + \frac{B}{s + j\sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad (2)$$

$$\frac{V}{L} = A\left(s + j\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) + B\left(s - j\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$$

Si $s = j\sqrt{\frac{1}{LC}}$: $\qquad \frac{V}{L} = -B2j\sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow B = \frac{jV}{2L\sqrt{\frac{1}{LC}}}$

$$B = j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (3)$$

Si $s = j\sqrt{\frac{1}{LC}}$: $\qquad A = -j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (4)$

Reemplazando (3) y (4) en (2),

$$I(s) = -j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{1}{s - j\sqrt{\frac{1}{LC}}}\right) + j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\frac{1}{s + j\sqrt{\frac{1}{LC}}}\right)$$

Se hace la inversa,

$$i(t) = -j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}e^{j\sqrt{\frac{1}{LC}}t} + j\frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-j\sqrt{\frac{1}{LC}}t}$$

$$i(t) = \frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\left\{-j\left[\cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t + jsen\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right] + j\left[\cos\sqrt{\frac{1}{LC}}t - jsen\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right]\right\}$$

$$i(t) = \frac{V}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\left\{2sen\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right\}$$

$$i(t) = V\sqrt{\frac{C}{L}}sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

Ahora pasamos a ver si la señal de corriente es periódica,

$$sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+T\right)=sen\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$
$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)sen(\beta)$$

Esto implica que,

a) $$\left.\begin{matrix}\cos(\beta)=1\\ \cos(T)=1\end{matrix}\right\} siT=2\pi \Rightarrow \cos(2\pi)=1$$

b) $$\left.\begin{matrix}sen(\beta)=0\\ sen(T)=0\end{matrix}\right\} siT=2\pi \Rightarrow sen(\beta)=1$$

El periodo es:

T = 2π → se observa que es periódica sin importar los valores de L y C.

De manera general, se puede establecer,

Si tengo *x(t)* y además es periódica, $x(t)=x(t+mT)$ donde m=1,2,3,…

Entonces, se define To = T (cuando m=1) como PERIODO FUNDAMENTAL.

Señales más comunes en tiempo continuo. [kamen]

Función Escalón Unitario. [kamen], [oppe]

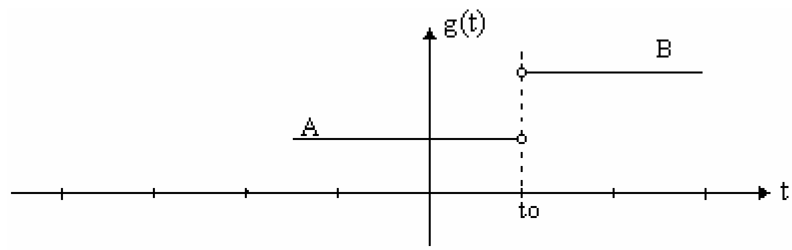
Son señales que poseen discontinuidades o derivadas discontinuas.

- **Función Escalón Unitario.**

Consideremos la función:

$$g(t)=\begin{cases}A & t<to\\ A & t>to\end{cases} A\neq B$$

Se puede asignar un valor a *g(t)* en t = to pero *g(t)* sigue siendo Discontinuidad en t = to



En t = to el valor de la Función está indefinida.

Con base en esto redefinimos

$$g(t)=\begin{cases} A & t<to \\ \dfrac{A+B}{2} & t=to \qquad A\neq B \\ B & t>to \end{cases}$$

Se define otra función $h(t)=\begin{cases} A & t\leq to \\ B & t>to \end{cases} A\neq B$

$g(t)\leftrightarrow h(t) \quad \rightarrow$ son desigualdades en t = to.

La integral definida de estas dos funciones para cualquier intervalo son iguales.

$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$ para cualquier α y β incluso $\alpha<to<\beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt=\int_{\alpha}^{to-\varepsilon} g(t)dt+\int_{to-\varepsilon}^{to+\varepsilon} g(t)dt+\int_{to+\varepsilon}^{\beta} g(t)dt$$

La función escalón unitario de tiempo continuo es,

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 1/2 & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

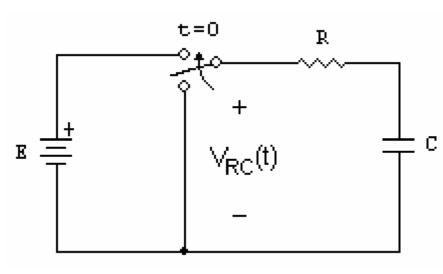
Dos funciones (cualesquiera) que tiene valores finitos en todas partes y difieren en valor solo en un número finito de puntos aislados producen la misma respuesta.

Se puede definir la función escalón de la siguiente forma:

I) $u(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ II) $u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$

III) $u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

Ejemplo:



$V_{RC}(t)$=Eu(t) voltaje aplicado

- **Función Signo.**

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \qquad = 2u(t) - 1$$

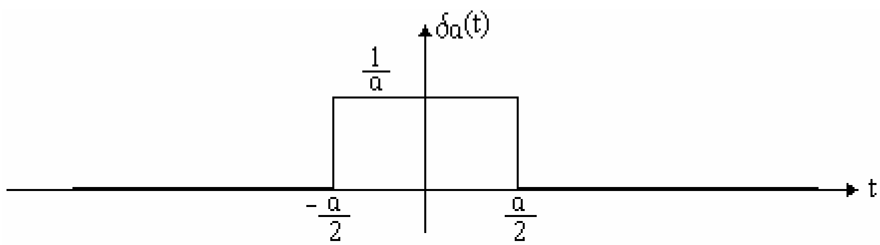
- **Función Rampa Unitaria.** [kamen]

$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \qquad = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)d\lambda = tu(t)$$

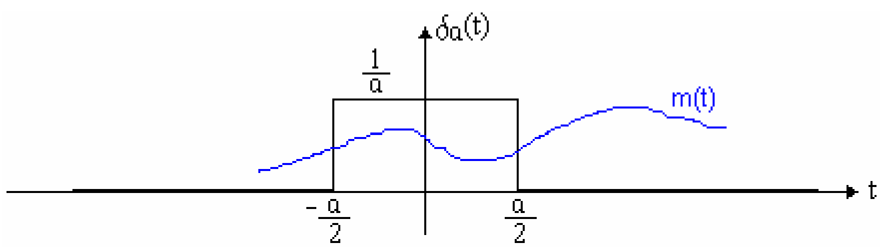
- **Función Impulso Unitario.** [kamen], [oppe]

Se considera un pulso de área unitaria rectangular definido por la función,

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 1/a & |t| < a/2 \Rightarrow -a/2 < t < a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \Rightarrow a/2 < t < -a/2 \end{cases}$$



Se multiplica $\delta_a(t)$ por una función *m(t)*, finita y continua en t=0.



Se define A como área del producto.

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)m(t)dt$$

Con base en la definición de $\delta_a(t)$

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} m(t)dt$$

Si se toma el límite de la integral cuando “a” tiende a cero tenemos,

$$\lim_{a\to 0} A = m(0)\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}dt = m(0)\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}[t]_{-a/2}^{a/2} = m(0)\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = m(0)$$

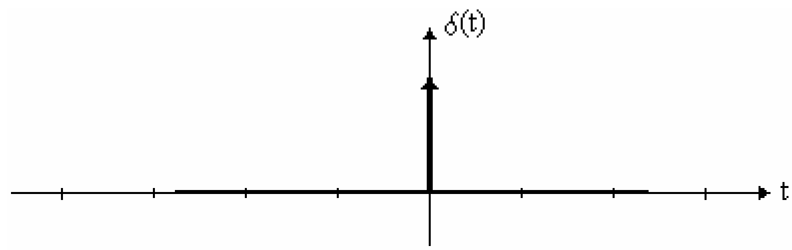
Cuando $a \to 0$, la función $\delta_a(t)$ tiene la propiedad de extraer al valor de *m(t)* en t=0 cuando se integra el producto de $\delta_a(t)$ y *m(t)* entre dos limites cualesquiera que incluya a t=0.

Símbolo → $\delta_a(t)$ → señal impulso unitario “Distribución Dirac”, y se define por,

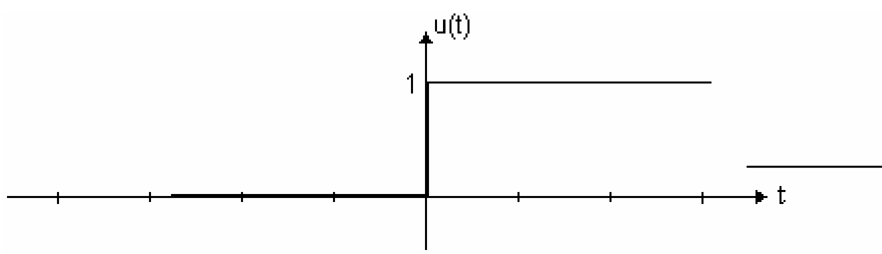
$$\int_{t1}^{t2} x(t)\delta(t)dt = x(0) \text{ donde } t1 < t = 0 < t2$$ (*t1,t2*) incluye el origen.

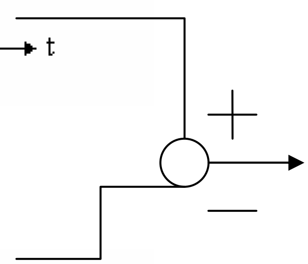
La señal impulso posee las siguientes propiedades,

1. $\delta(0) \to +\infty$
2. $\delta(0) = 0$ para t ≠ 0
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$
4. $\delta(t) = \delta(-t)$ señal Par.



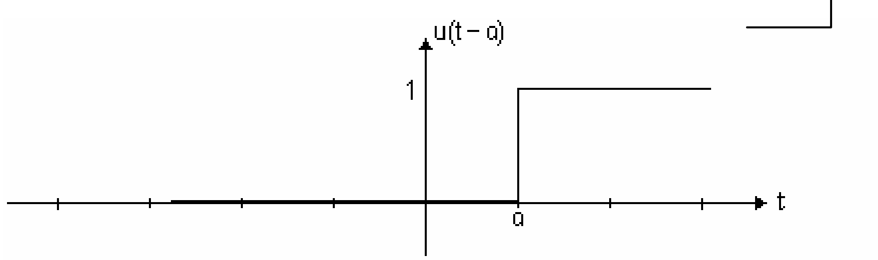
La tercera propiedad, establece que el área bajo la curva es 1.
Se define la función escalón.



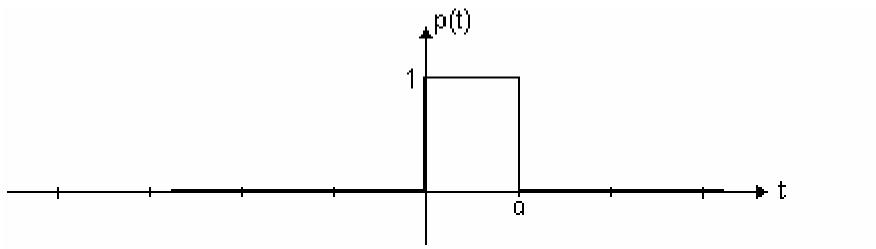


Se define la señal escalón unitario desplazada,

$u(t) - u(t-a)$



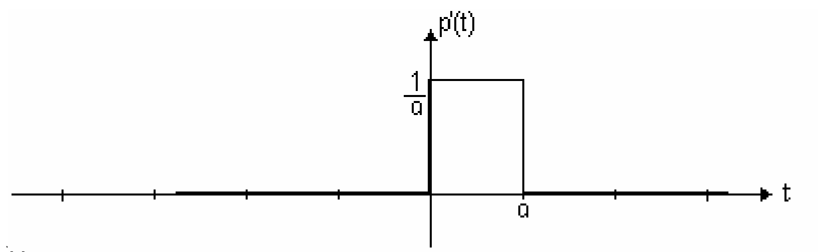
La señal resultante es la señal pulso rectangular, *p(t)* .



$$p(t) = u(t) - u(t-a)$$

Se necesita que *p(t)* tenga una altura que aumenta, a medida que $a \to 0$

$$p'(t) = \begin{cases} 1/a & 0 < t < a \\ 0 & resto \end{cases}$$



$$p'(t) = \frac{1}{a}[u(t) - u(t-a)]$$

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}[u(t) - u(t-a)]$$

La señal escalón unitario se puede definir con base en la señal impulso unitario

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau$$

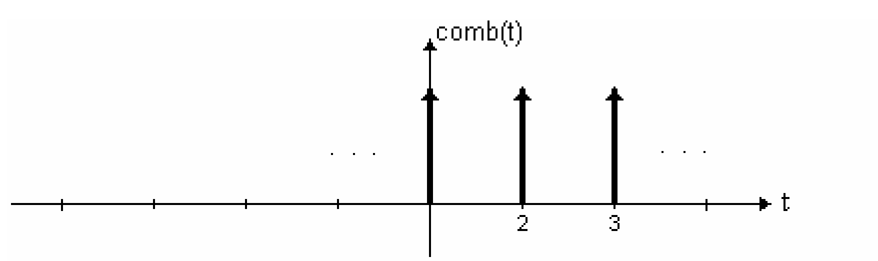
para todo “t” pero t ≠ 0

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

- **Función Comb Unitaria.**

Secuencia de impulsos unitarios uniformemente espaciados.

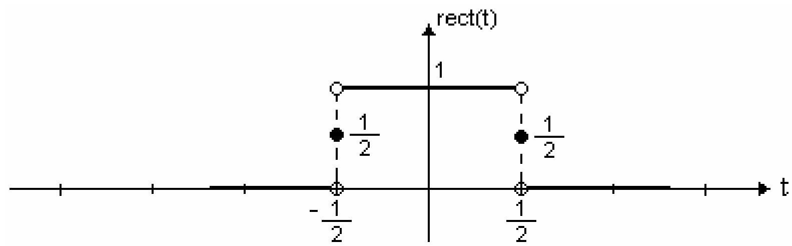
$$comb(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) \Rightarrow n \in Z$$



- **Función Rectangular Unitario.**

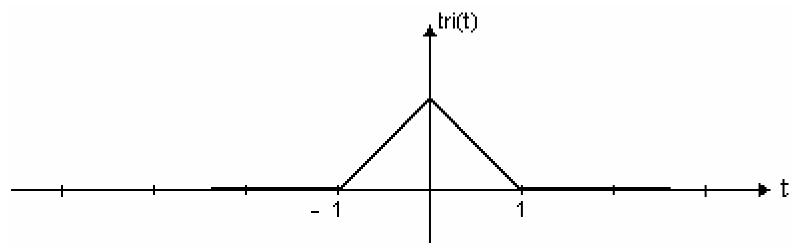
La señal *x(t)* se activa en algún tiempo y desactiva en un instante posterior.

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$



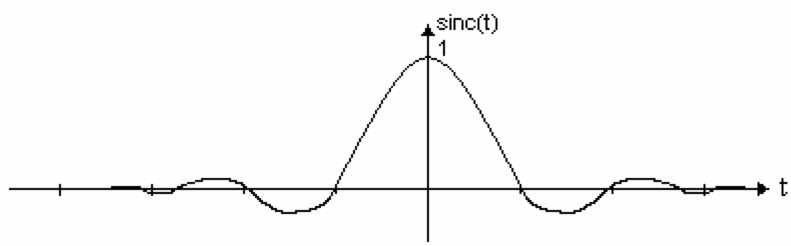
- **Función Triángulo Unitario.**

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$



- **Función Sinc Unitaria.**

$$\sin c(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t} \qquad \text{ó} \qquad \sin c(t) = \frac{sen(t)}{t}$$



- **Función Dirichlet**

$drcl(t,N) = \dfrac{sen(\pi Nt)}{Nsen(\pi t)}$ → casos → NImpar: se asemeja a la función *sinc*.

→ NPar: los extremos se alternan entre -1 y 1.

Señal Exponencial compleja y Sinusoidal de tiempo continuo [oppe]

- **Señal Exponencial.**

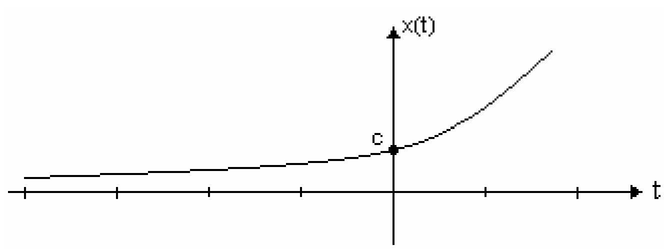
La señal exponencial generalizada es,

$$x(t) = ce^{\alpha t} \rightarrow donde \rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha \\ c \end{Bmatrix} \begin{matrix} Números \;\; complejos \\ Números \;\;\; reales \end{matrix}$$

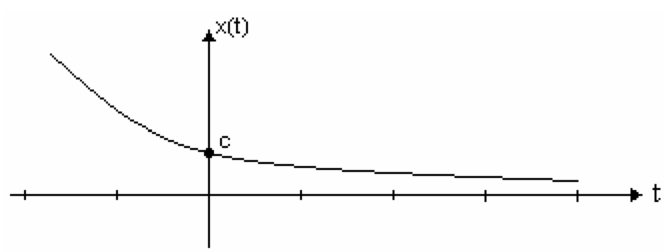
Si “α” y “c” son reales a la señal *x(t)* se le denomina Exponencial real.

$$x(t) = ce^{\alpha t}$$

Si $\alpha > 0$



Si $\alpha < 0$



Si “c” es real y “α” es imaginario la señal queda de la forma,

$$x(t) = e^{j\omega o t} \rightarrow con \rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = j\omega o \\ c = 1 \end{Bmatrix} \text{ donde } \omega o \equiv [rad/seg]$$

ωo → Frecuencia angular, la cual puede ser positiva ó negativa.

¿Es $x(t) = e^{j\omega o t}$ periódica?
Del concepto de periodicidad tenemos,

$x(t) = x(t+mT)$ tomando m=1, entonces, $e^{j\omega ot} = e^{j\omega o(t+T)} = e^{j\omega ot}e^{j\omega oT}$
Se busca que $e^{j\omega oT}$ =1

$e^{j\omega oT}$ =1 casos:

a) si $\omega o = 0 \rightarrow e^{j\omega oT}$ =1 y es periódica para cualquier T.
b) si $\omega o \neq 0 \rightarrow e^{j\omega oT} = \cos(\omega oT) + jsen(\omega oT) = 1$
se necesita que $\cos(\omega oT)$ =1, esto ocurre cuando $\omega oT = 2\pi, 4\pi, 6\pi, ...$
$\omega oT = mT$ es decir $m = 0,2,4,6,...$
$\omega oT = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega o}$

Para el caso b), ωo puede ser positiva ó negativa,
$T = \dfrac{2\pi}{|\omega o|}$ esto indica que → $\left\{ \begin{matrix} y_1(t) = e^{j\omega ot} \\ y_2(t) = e^{-j\omega ot} \end{matrix} \right\}$ son periódicas.

- **Señal Sinusoidal.**

La señal sinusoidal está relacionada con la exponencial compleja de la siguiente forma, se toma una exponencial compleja $x(t) = e^{j\omega ot}$.
Utilizando EULER,

$$x(t) = e^{j\omega ot} = \cos(\omega ot) + jsen(\omega ot) \quad (1)$$

La señal sinusoidal se puede definir como

$$y(t) = A\cos(\omega ot + \varphi) \qquad (2)$$

De (1) se toma

$$x_2(t) = e^{-j\omega ot} = \cos(\omega ot) - jsen(\omega ot) \quad (3)$$

Sumando (1) y (3)

$$x(t) + x_2(t) = 2\cos(\omega ot) = e^{j\omega ot} + e^{-j\omega ot} \Rightarrow \cos(\omega ot) = \frac{e^{j\omega ot} + e^{-j\omega ot}}{2}$$

Con relación a la ecuación (2),

$$y(t) = A\cos(\omega ot + \varphi) = A\left\{ \frac{e^{j(\omega ot+\varphi)} + e^{-j(\omega ot+\varphi)}}{2} \right\}$$

$$y(t) = \frac{A}{2}e^{j\omega ot}e^{j\varphi} + \frac{A}{2}e^{-j\omega ot}e^{-j\varphi}$$

$$y(t) = \frac{A}{2}e^{j\varphi}e^{j\omega ot} + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}e^{-j\omega ot}$$

$$y(t) = A\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega ot+\varphi)}\right\}$$

Si la frecuencia fundamental es $\omega o \ \Rightarrow To\,\alpha\,\frac{1}{|\omega o|}$

Se toma la señal

$$x(t) = \cos(\omega ot)$$

Donde vale 1 esta señal:

$$\omega ot = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \\ 4\pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ 2\pi/\omega o \\ 4\pi/\omega o \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Donde vale 0 esta señal:

$$\omega ot = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \\ 5\pi/2 \\ 7\pi/2 \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \pi/2\omega 0 \\ 3\pi/2\omega 0 \\ 5\pi/2\omega 0 \\ 7\pi/2\omega 0 \end{cases}$$

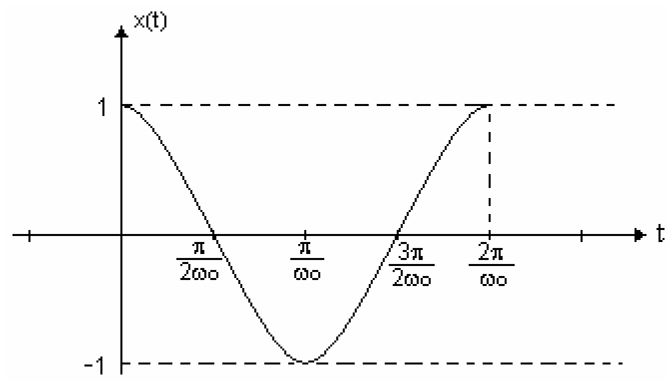
$$\vdots \qquad \vdots$$

Donde vale -1 esta señal:

$$\omega ot = \begin{cases} \pi \\ 3\pi \\ 6\pi \\ 9\pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \pi/\omega 0 \\ 3\pi/\omega 0 \\ 6\pi/\omega 0 \\ 9\pi/\omega 0 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Se dibuja *x(t)*,



¿Qué sucede si se toma $\omega o'$?

$$x_2(t) = \cos(\omega o' t)$$

$$x_2(t) = \cos(\frac{\omega o}{2} t) \qquad \text{donde } \omega o' = \frac{\omega o}{2}$$

Donde vale 1 esta señal:

$$\omega o' t = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \\ 4\pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} 0 & 0 \\ 2\pi / \omega o' = & 4\pi / \omega o \\ 4\pi / \omega o' & 8\pi / \omega o \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Donde vale 0 esta señal:

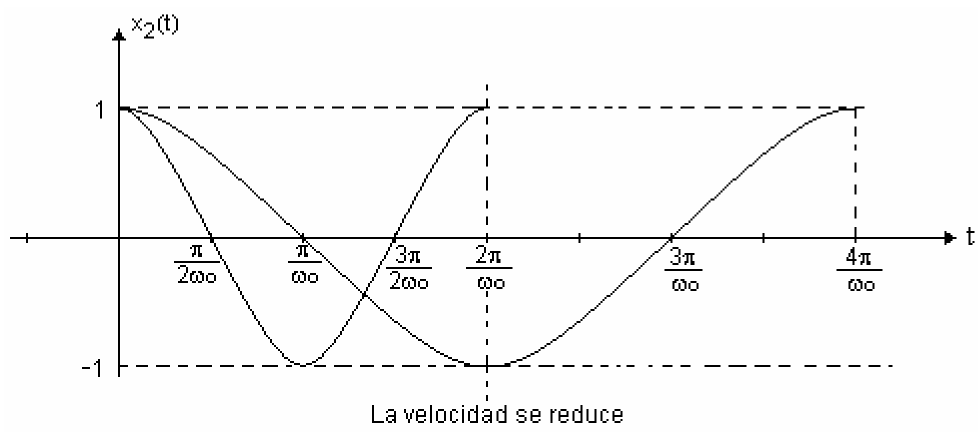
$$\omega o' t = \begin{cases} \pi / 2 \\ 3\pi / 2 \\ 5\pi / 2 \\ 7\pi / 2 \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \pi / 2\omega o' \\ 3\pi / 2\omega o' \\ 5\pi / 2\omega o' \\ 7\pi / 2\omega o' \end{cases} = \begin{matrix} 2\pi / 2\omega o = \pi / \omega o \\ 3\pi / \omega o \\ 5\pi / \omega o \\ 7\pi / \omega o \end{matrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Donde vale -1 esta señal:

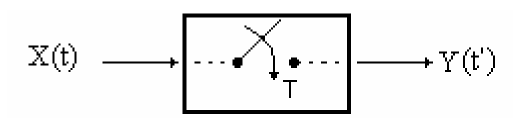
$$\omega o' t = \begin{cases} \pi \\ 3\pi \\ 6\pi \\ 9\pi \end{cases} \Rightarrow t = \begin{cases} \pi / \omega o' \\ 3\pi / \omega o' \\ 6\pi / \omega o' \\ 9\pi / \omega o' \end{cases} = \begin{matrix} 2\pi / \omega o \\ 6\pi / \omega o \\ 12\pi / \omega o \\ 18\pi / \omega o \end{matrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$



Señales en Tiempo Discreto [kamen]

¿Que es el muestreo? [kamen], [oppe]
En general, la gran mayoría de señales de tiempo discreto se obtienen utilizando el concepto de MUESTREO de señales de tiempo continuo (Ej: señal de audio obtenida usando la tarjeta de audio del PC).
Supongamos que tenemos un interruptor que se cierra cada "T" segundos.



Se considera como el "switch" electrónico que se cierra cada "T" segundos.
↓
¿Qué sucede si el tiempo real que se mantiene cerrado el switch es menor que "T"?
↓
Esto hace que la salida del switch se vea *(g(t'))* como una señal de tiempo discreto, la cual es una función de puntos de tiempo discreto.

$$t' = tn = nT \text{ donde } n \in Z$$
$$n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$$

La salida de interruptores,

$\xrightarrow{x(t)} y(t') = y(tn)$ versión muestreada de la señal de tiempo continuo *x(t)*.

Tomamos un punto y el siguiente,

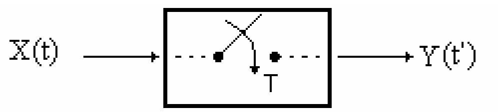
$$tn = nT \text{ y } t_{n+1} = (n+1)T$$

Y se realiza la diferencia,

$$t_{n+1} - t_n = (n+1)T - nT$$

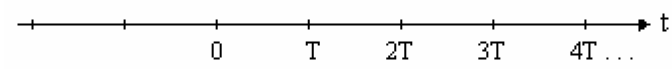
$t_{n+1} - t_n = T$ Esto implica que el muestreo es uniforme.

Se toma el dispositivo muestreador,



$$y(t') = x(nT) = x(t_n)$$

El eje de tiempo a la salida del muestreador es,



El valor de "T" debe garantizar que la señal $x(t_n)$ sea un fiel reflejo de $x(t)$.
Si se tiene una señal periódica, en periodo To, el tiempo del muestreador debe ser,

$$T_S < \frac{To}{2} \rightarrow \text{como } f = \frac{1}{T} \Rightarrow f_S = \frac{1}{T_S}$$
$$\frac{1}{f_S} < \frac{1/fo}{2} = \frac{1}{2fo}$$
$$fo < \frac{f_S}{2} \Rightarrow f_S > 2fo$$

Supongamos que se tiene,

$$y(t) = 100sen(377t) \text{ donde } \omega o = 377 = 2\pi fo[rad/seg] \Rightarrow fo = \frac{377}{2\pi} \approx 60[Hz]$$

Según lo anterior,

¿Qué sucede si muestreamos *y(t)* a una *fs=2fo*?

Si *fo=60[Hz]* → *fs=2fo=120[Hz]*
↓
Condición

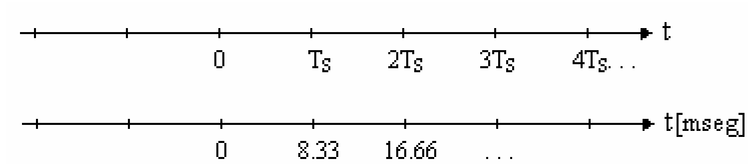
Se tiene

$$T_S = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{120} = 8.33 \times 10^{-3}[seg]$$

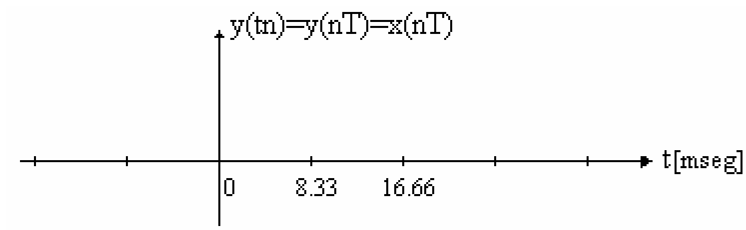
El periodo de la señal es,

$$To = \frac{1}{fo} = \frac{1}{60} = 16.66 \times 10^{-3}[seg]$$

El eje de tiempo quedara distribuido de la siguiente forma,



En $t = 2T_S = 16.66 \times 10^{-3}[seg]$ se esta cubriendo (abarcando) un periodo.

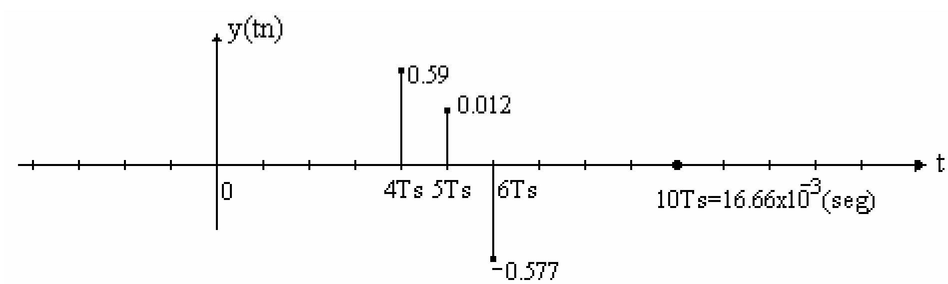


Se tiene solamente cruces por cero.

¿Qué sucede si muestreamos a *fs=10fo*?

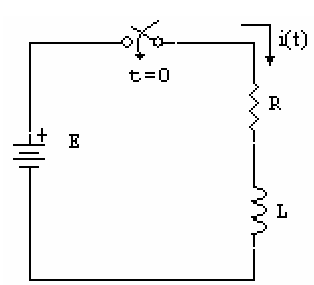
$$f_S = 10\,fo = 10(60Hz) = 600[Hz] \Rightarrow T_S = \frac{1}{600} = 1.66 \times 10^{-3}[seg]$$

¿Cómo nos queda la señal *y(tn)*?



¿Qué sucede son señales que no son periódicas?

Supongamos que tenemos un circuito RL alimentado con D.C.



$i(t = 0) = 0[A]$ la corriente de éste circuito es,

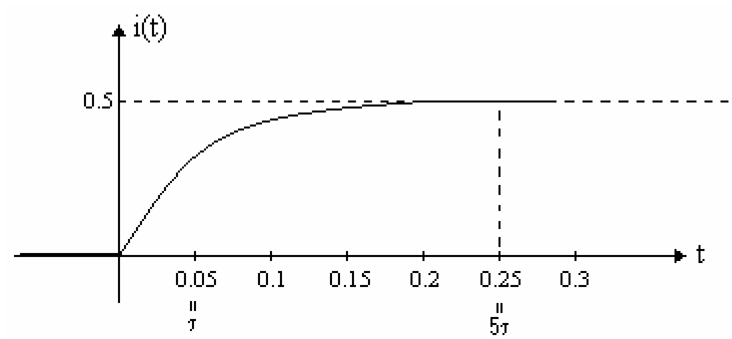
$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-R}{L}t}\right)$$

Tomando E=100[v]

$$\left.\frac{R}{L}=20\right\}\begin{matrix} R=200[\Omega] \\ L=10[H]\end{matrix}$$

$$i(t)=\frac{100}{200}\left(1-e^{-20t}\right)=0.5\left(1-e^{\frac{-t}{0.05}}\right)$$

Se requiere discretizar ó muestrear ésta señal.



Se debe tomar el tiempo característico, que para éste caso es τ.
Con base en τ, se toma el tiempo de muestreo.

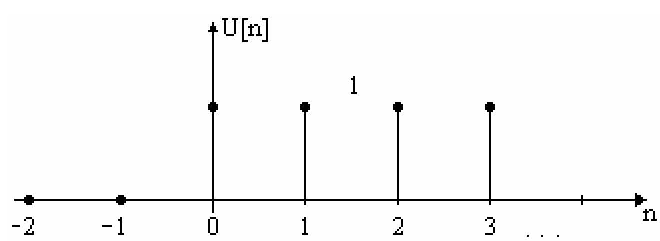
$$Ts<\frac{\tau}{10}\Rightarrow Ts=\frac{\tau}{100}\Rightarrow Ts=\frac{0.05}{100}=0.0005[seg]$$

Lo cual equivale a una frecuencia de muestreo de $fs=\frac{1}{Ts}=\frac{1}{0.0005}=2000[Hz]$ aunque la señal no tiene periodo. $y(tn)=0.5\left(1-e^{-20tn}\right)$ donde *tn=nTs* , entonces, $y[n]=0.5\left(1-e^{-20nTs}\right)$

Señales Comunes de Tiempo Discreto

- **Señal Escalón Unitario de Tiempo Discreto.** [kamen], [oppe]

Se define $u(t)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

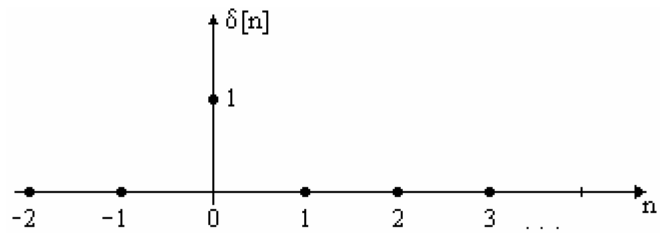


Se puede tener una señal escalón unitario desplazada.

$U[n \pm k]$ con $k = 0,1,2,3,4,...$
Escalón Unitario ≡ Secuencia Unitaria.

- **Señal Impulso Unitario de Tiempo Discreto.** [kamen], [oppe]

Se define $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



No tiene esas peculiaridades matemáticas que tiene $\delta(t)$

$\delta[n] \equiv$ delta de kronecker

Investigar: La propiedad del impulso $\delta(t)$ de escalamiento.
La propiedad de equivalencia de $\delta(t)$ llamada propiedad de muestreo.

$\delta[n] = \delta[an]$ con $a \in Z$ y $a \neq 0$

La propiedad de muestreo es,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\delta[n - no]x[n] = Ax[no]$$

$\delta[n]$ se puede expresar con base en impulsos unitarios, $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ derivada.
Además, la señal u[n] puede ser definida con base en la señal $\delta[n]$.

$$B[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$ ¿Cómo se puede dibujar esto?

Si $n = 0$

$$B[0] = \sum_{m=-\infty}^{0} \delta[m] = \delta[-\infty] + ... + \delta[-1] + \delta[0]$$

$$B[0] = 1$$

Si $n = 1$

$$B[1] = \sum_{m=-\infty}^{1} \delta[m] = \delta[-\infty] + ... + \delta[-1] + \delta[0] + \delta[1]$$

$B[1]=1$

$B[n]=u[n]$

Esta expresión se puede expresar.

$$k=n-m \Rightarrow m=n-k$$

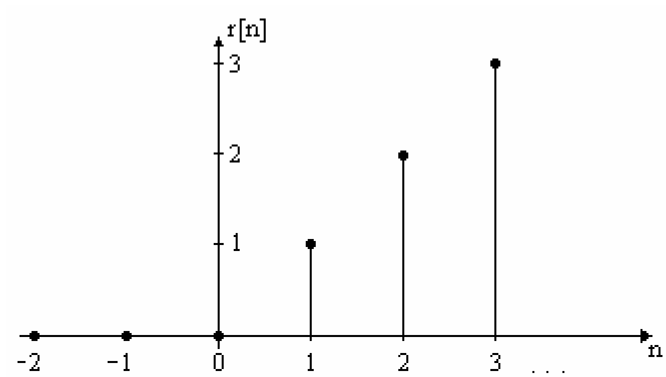
$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=\sum_{k=\infty}^{0}\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$
$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

Una de las utilidades de la señal $\delta[n]$ es obtener al valor de la señal $x[n]$ en *n=0*,

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$
$$ó$$
$$x[n]\delta[n-k]=x[k]\delta[n-k]$$

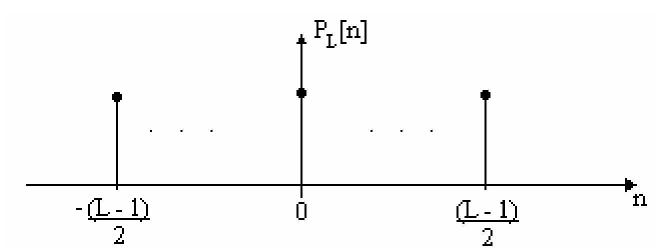
- **Señal Rampa.** [kamen]

Se define $r[n]=\begin{cases} n & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$



- **Señal Pulso Rectangular.** [kamen]

Se define $p_L[n]=\begin{cases} 1 & n=\dfrac{-(L-1)}{2},\ldots,-1,0,1,\ldots,\dfrac{(L-1)}{2} \\ 0 & para \quad otros \quad valores \quad de \quad "n". \end{cases}$



Longitud el pulso = $\frac{L-1}{2}+\frac{L-1}{2}+1=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}+\frac{L}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{2L}{2}=L$

Señales de Tiempo Discreto definidas por intervalos [kamen]

Se tiene la definición

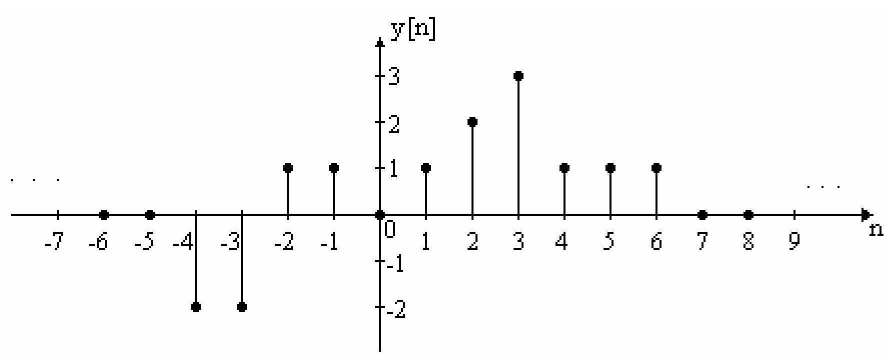
$$x[n]=\begin{cases} x_1[n] & n_1 \le n < n_2 \\ x_2[n] & n_2 \le n < n_3 \\ x_3[n] & n_3 \le n \end{cases} \qquad \text{condición } n_1 < n_2 < n_3$$

¿Cómo se define la señal x[n] en función de escalones de Tiempo Discreto?

$x_1[n]$
$x_2[n]$ Señales de tiempo discreto.
$x_3[n]$

$$x[n]=x_1[n]\{u[n-n_1]-u[n-n_2]\}+x_2[n]\{u[n-n_2]-u[n-n_3]\}+x_3[n]\{u[n-n_3]\}$$

Ejemplo:



$$y[n]=-2\{u[n+4]-u[n+2]\}+\{u[n+2]-u[n]\}+(n)\{u[n-1]-u[n-4]\}+\{u[n-4]-u[n-7]\}$$

Señal Exponencial Compleja y Sinusoidal de Tiempo Discreto [oppe]

La señal exponencial compleja de tiempo discreto está definida por,

$x[n]=c\alpha^n$ donde $\left\{\begin{matrix} c \\ \alpha \end{matrix}\right\}$ Números complejos

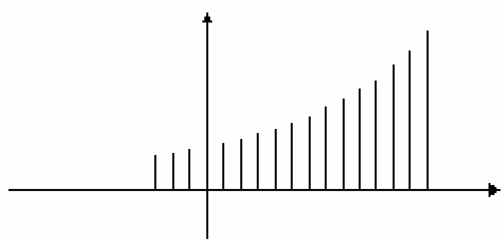
Se puede tener que:

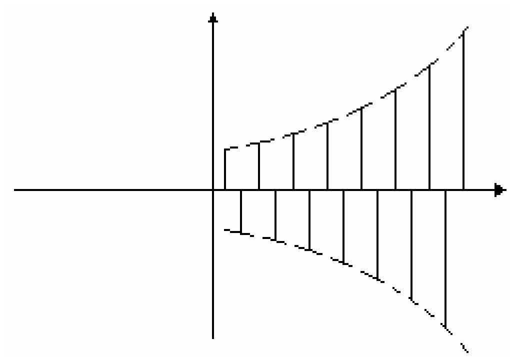
$\alpha = e^{\beta} \Rightarrow x[n] = ce^{\beta n}$

- Para $x[n] = c\alpha^{n}$ se tienen dos casos,

<u>Caso I</u>. $|\alpha| > 1$

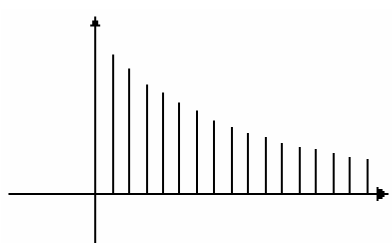
Si $\alpha > 1$ Si $\alpha < -1$

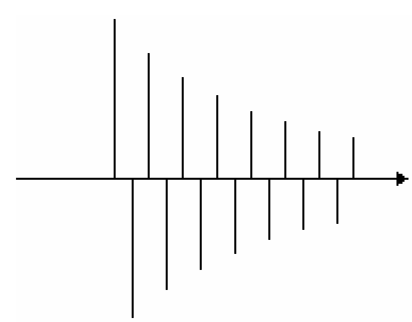




<u>Caso II</u>. $|\alpha| > 1$

Si $0 < \alpha < 1$ Si $-1 < \alpha < 0$





- Se define la señal exponencial compleja de tiempo discreto.

$$x[n] = e^{\beta n} = e^{j\Omega on} = \cos(\Omega_o n) + jsen(\Omega_o n)$$

n → adimensional
$\Omega_o \equiv [rad]$

$$x[n] = A\cos(\Omega_o n) = \frac{A}{2}e^{j\Omega on} + \frac{A}{2}e^{-j\Omega on}$$

Periodicidad de Exponenciales Complejos de Tiempo Directo [kamen], [oppe]

Para $x(t) = e^{j\omega o t}$ se tiene,

- A medida que se <u>aumenta</u> ωo, la velocidad de oscilación <u>aumenta</u>.
- La señal x(t) es periódica para cualquier valor de ωo.

Para $x[n] = e^{j\Omega o n}$ se tiene,

- Característica respecto a Ωo.

Se tiene $x[n] = e^{j\Omega o n}$, se tiene como nueva frecuencia $\Omega o' = \Omega o + 2\pi$, entonces se suma 2π.

$$x_2[n] = e^{j\Omega o' n} = e^{j(\Omega o + 2\pi)n} = e^{j\Omega o n} e^{j2\pi n}$$

Donde

$$e^{j2\pi n} = \cos(2\pi n) + jsen(2\pi n)$$

Para $n = 0,1,2,3,... \begin{cases} \cos(2\pi n) = 1 \\ sen(2\pi n) = 0 \end{cases}$

Esto hace que

$e^{j2\pi n} = 1$ para $n = 0,1,2,3,...$

Luego

$x_2[n] = e^{j\Omega o n} = x[n]$ esto es algo diferente al caso de tiempo continuo.

Con ase en lo anterior,

$x_3[n] = e^{j(\Omega o - 2\pi)n} = e^{j\Omega o n} = e^{-j2\pi n}$

$x_3[n] = e^{j\Omega o n} = x[n]$ sucede lo mismo al sumar o restar 2π en $x[n]$.

Ejercicio propuesto: generar un ejemplo en Matlab {sumar 2π, restar 2π}.

Ahora se tiene

$\Omega o' = \Omega o + \pi$ se cambia la frecuencia angular.

Lo anterior permite definir

$$x_4[n] = e^{j\Omega o' n} = e^{j(\Omega o + \pi)n} = e^{j\Omega o n} e^{j\pi n}$$

Donde

$$e^{j\pi n} = \cos(\pi n) + jsen(\pi n)$$

Para $n = 0,1,2,\ldots \begin{cases} \cos(\pi n) = \begin{cases} . \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ . \end{cases} \\ sen(\pi n) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \end{cases} \end{cases}$

Esto hace que $x_4[n] \neq x[n]$

Ahora se tiene lo siguiente,

$$\Omega o'' = \Omega o + 2\pi + \pi$$

Lo cual permite definir,

$$x_5[n] = e^{j(\Omega o'')n} = e^{j(\Omega o + 2\pi + \pi)n} = e^{j\Omega on} e^{j2\pi n} e^{j\pi n} = e^{j\Omega on} e^{j\pi n} = x_4[n]$$

$x_5[n] = x_4[n]$

Con base en lo anterior, ¿Cómo selecciono Ωo para una señal de tiempo discreto?

$$0 \leq \Omega o < 2\pi \quad \text{ó} \quad -\pi \leq \Omega o \leq \pi$$

Tomamos $y[n] = e^{j\Omega on} = \cos(\Omega_o n) + jsen(\Omega_o n) = \mathrm{Re} + j\,\mathrm{Im}$

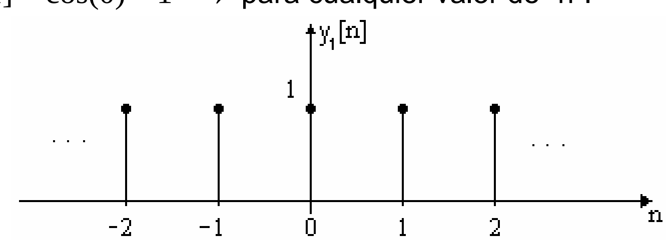
Se tiene $y[n] = y_1[n] + jy_2[n]$ donde

$$\mathrm{Re}\{y[n]\} \xrightarrow{hace \;\; que} y_1[n] = \cos(\Omega_o n)$$

Se toman diferentes valores de Ωo, entre $0 \;\; y \;\; 2\pi$.

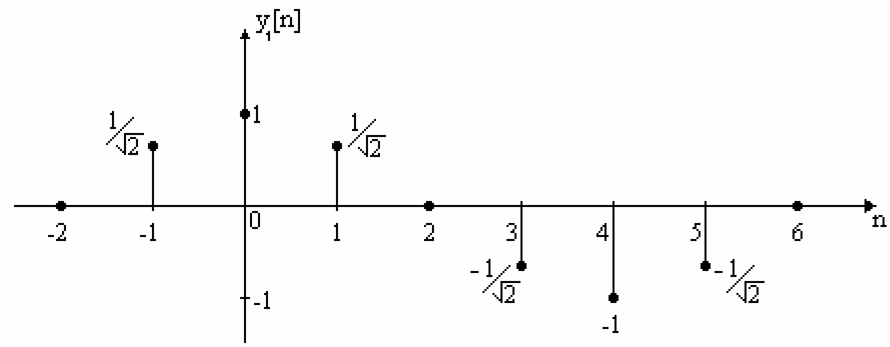
- Si $\Omega o = 0$

$$y_1[n] = \cos(0) = 1 \;\; \rightarrow \text{ para cualquier valor de “n”.}$$



- Si $\Omega o = 0$

$$y_1[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$$



$$n = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}n = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}0\right) = \cos(0) = 1$$

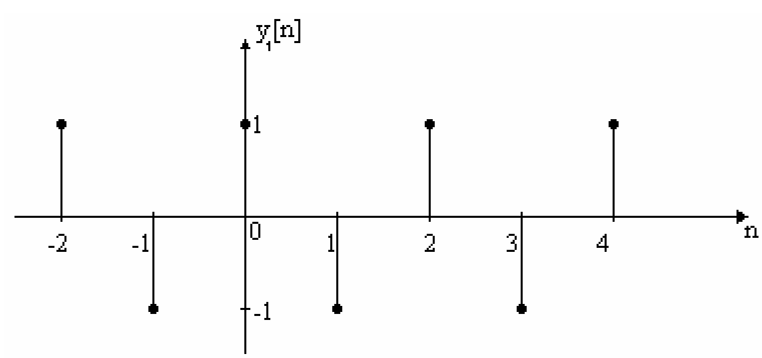
$$n = 1 \rightarrow \frac{\pi}{4}n = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n = 2 \rightarrow \frac{\pi}{4}n = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$n = 3 \rightarrow \frac{\pi}{4}n = \frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

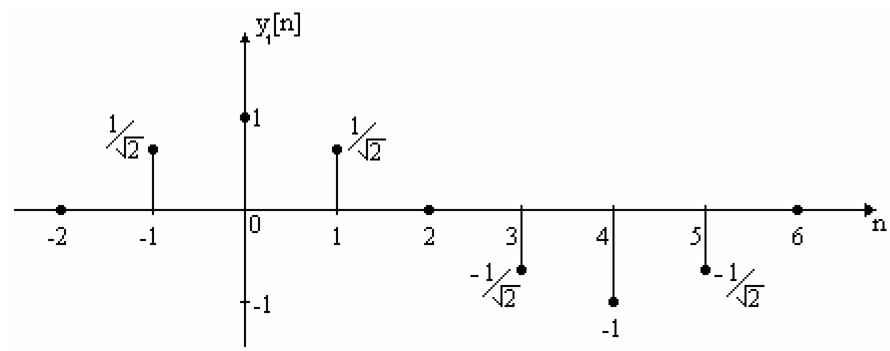
- Si $\Omega o = \pi$

$$y_1[n] = \cos(\pi n)$$



- Si $\Omega o = \frac{7\pi}{4}$

$$y_1[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right)$$



Característica respecto a la periodicidad

Si se tiene

$$x[n] = e^{j\Omega on} \text{ con periodo “N”.}$$

Con base en el concepto de periodicidad

$x[n] = x[n+N]$ $\rightarrow$ para señales de tiempo discreto.

$e^{j\Omega on} = e^{j\Omega o(n+N)} = e^{j\Omega on} e^{j\Omega oN}$

Para que sea periódica, se busca que,

$e^{j\Omega on} = 1 = \cos(\Omega_o n) + jsen(\Omega_o n)$

$\Omega_o n = 2\pi m$

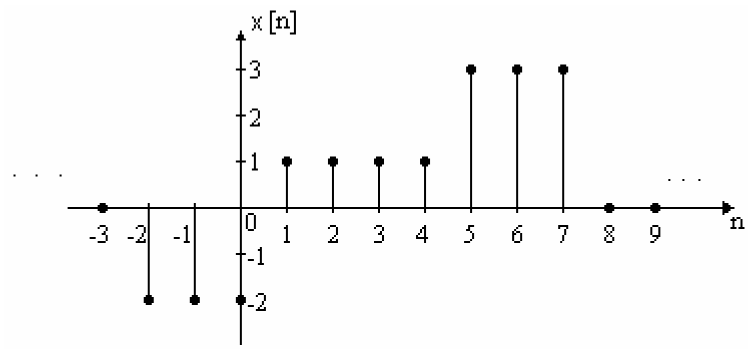
$\dfrac{\Omega_o}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$ $\rightarrow$ Es periódica si ésta relación da un número racional, ya que $m \in Z^+$ y $N \in Z^+$

Transformaciones a la variable Independiente de Tiempo Discreto

1. **Desplazamiento en el Tiempo.**

Consiste la señal,

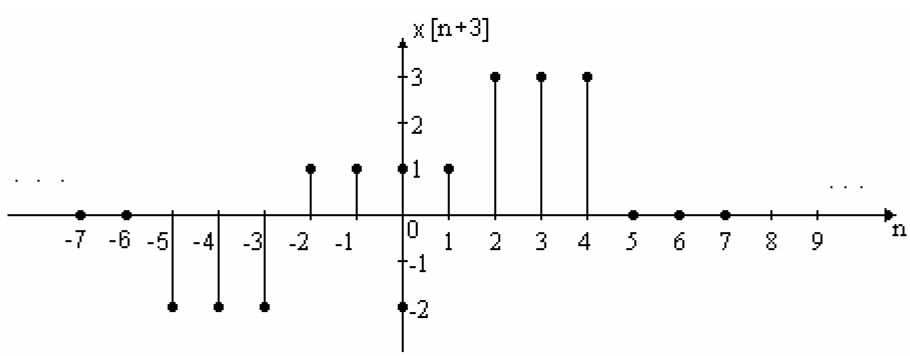
$$x[n] = \begin{cases} -2 & -2 \le n \le 0 \\ 1 & 1 \le n \le 4 \\ 3 & 5 \le n \le 7 \\ 0 & resto \end{cases}$$



Se quiere realizar

$x[n] \xrightarrow{T} x[n'] = x[n+3]$

$$x[n'] = x[n+3] = \begin{cases} -2 & \begin{array}{l} -2 \le n' \le 0 \\ -2 \le n+3 \le 0 \\ -5 \le n \le -3 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{l} 1 \le n' \le 4 \\ 1 \le n+3 \le 4 \\ -2 \le n \le 1 \end{array} \\ 3 & \begin{array}{l} 5 \le n' \le 7 \\ 5 \le n+3 \le 7 \\ -2 \le n \le 4 \end{array} \\ 0 & \quad resto \end{cases}$$



La salvedad es que para señales de tiempo discreto el desplazamiento debe ser un entero.
Si no, la señal desplazada tendría valores indefinidos.

2. **Escalamiento en el Tiempo.**

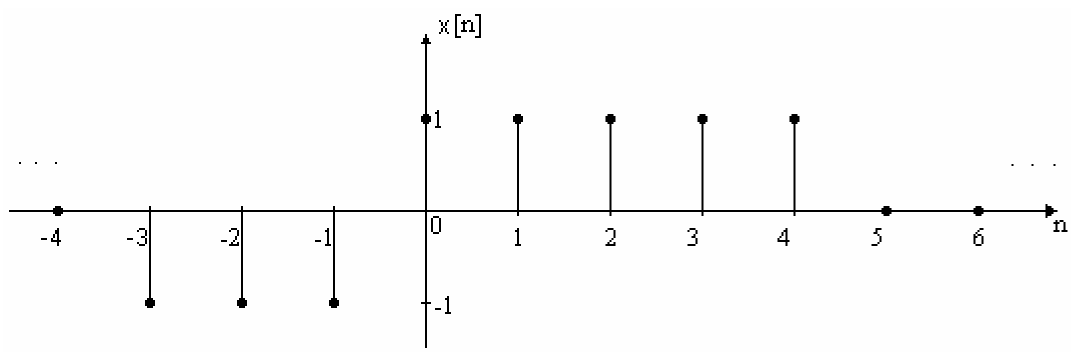
Existen dos casos: compresión y expansión en el tiempo.

- **Compresión:**

$x[n] \quad \rightarrow \quad x[kn]$ donde $k \in Z^{+} \qquad k > 1$
"La señal ocurre más rápido en el tiempo".
Aquí existe un efecto llamado DIEZMO.

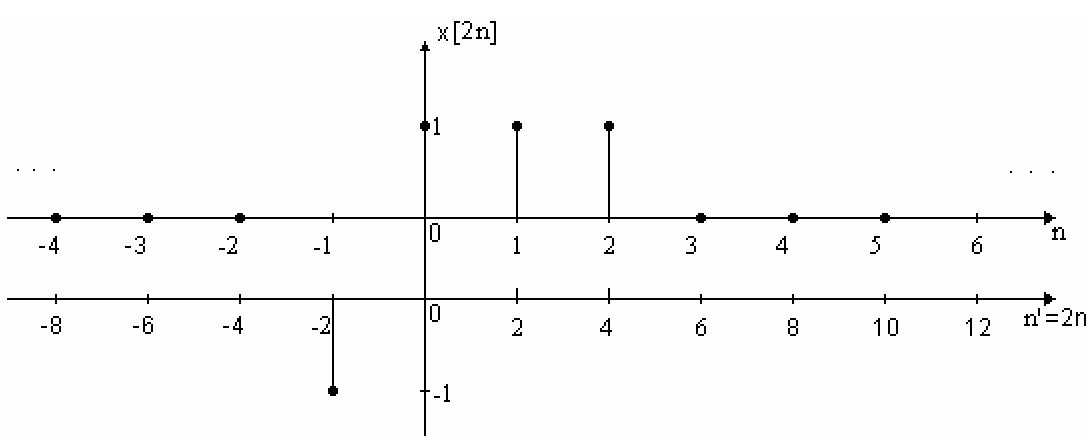
Supongamos que tenemos,

$$x[n] = \begin{cases} -1 & -3 \le n \le -1 \\ 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$



Se desea $x[n] \quad \rightarrow \quad x[2n] = x[n']$

$x[2n] \rightarrow$ "2n" es el argumento, este argumento es un entero par, lo que hace que los argumentos impares de $x[n]$ no sean necesarios para definir $x[2n]$.



La señal se ha diezmado en un factor de “2”. En el tiempo continuo no ocurre el “diezmo” debido a que $t \in R$.

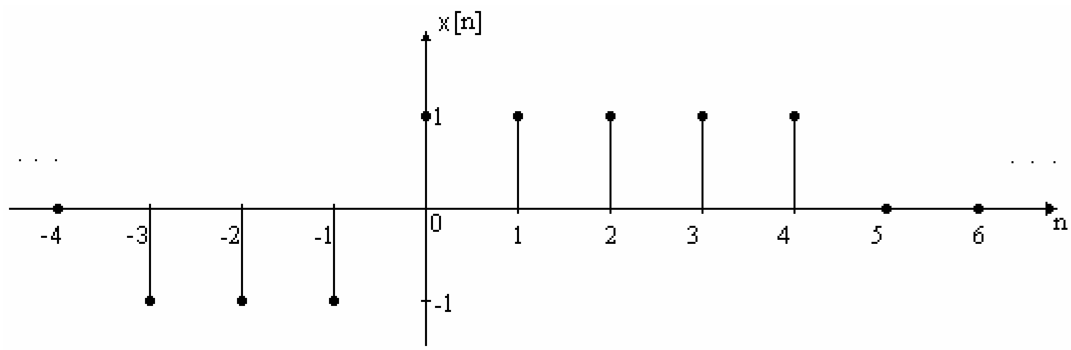
- **Expansión:**

Supongamos que se desea,

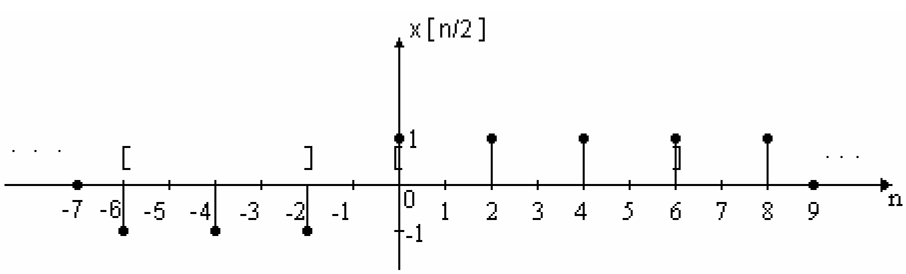
$$x[n] \;\rightarrow\; x\left[\frac{n}{2}\right] = x[n']$$

$$x[n] = \begin{cases} -1 & -3 \le n \le -1 \\ 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & resto \end{cases} \;\rightarrow\; \qquad x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$-3 \le \frac{n}{2} \le -1 \;\rightarrow\; -6 \le n \le -2$$
$$0 \le \frac{n}{2} \le 4 \;\rightarrow\; 0 \le n \le 8$$
$$resto$$



$$x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} -1 & -6 \le n \le -2 \\ 1 & 0 \le n \le 8 \\ 0 & resto \end{cases}$$

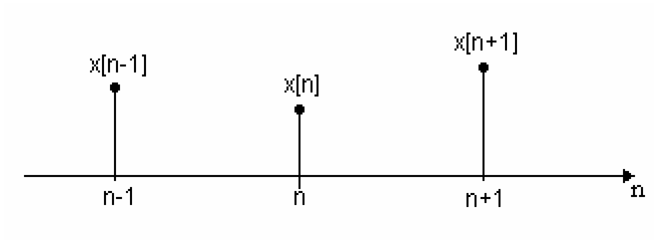


↑ para n=3 se puede poner “uno” o se realiza interpolación y obtener x[-3].

Investigar: ejemplo 2.5 pag. 64 del libro Roberts.

3. Diferenciación y Acumulación.

En señales de tiempo discreto no se utiliza la derivada como operación, lo que se utiliza es la primera diferencia.
En general siempre en una señal de tiempo discreto se tienen muestras.



Se puede expresar la primera diferencia desde dos puntos de vista:

- **Primera diferencia en adelanto.**

Una señal x[n] es $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$

- **Primera diferencia en atraso.**

$\Delta g[n-1] = g[n] - g[n-1]$

Ahora supongamos que

$$h[n] = \Delta(g[n])$$

$$g[n] = g[n_o] + \sum_{m=no}^{n-1} h[m]$$

$$g[n] = g[n_o] + \sum_{m=no}^{n-1} \Delta(g[m]) = g[n_o] + \sum_{m=no}^{n-1} (g[m+1] - g[m])$$

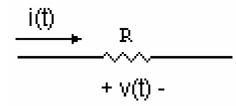
$$g[n] = g[\cancel{n_o}] + g[\cancel{n_o}+1] - g[\cancel{n_o}] + g[\cancel{n_o}+2] - g[\cancel{n_o}+1] + \ldots + g[n] - g[n-1]]$$

Señales de Potencia y Energía

Generalmente las señales que se trabajan son:

- Señal de corriente. v(t)
- Señal de tensión. i(t)

Para un elemento muestrivo



La potencia instantánea, $p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t) = Ri^2(t)$

La energía total gestada en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es:

$$E = \int_{t1}^{t2} p(t)dt = \int_{t1}^{t2} \frac{1}{R}v^2(t)dt[watts - segundo] \qquad (1)$$

$$E = \int_{t1}^{t2} p(t)dt = \int_{t1}^{t2} Ri^2(t)dt[watts - segundo] \qquad (2)$$

La energía es proporcional a la integral del cuadrado de la señal.

Se puede habla r sobre la base de $1[\Omega] \Rightarrow R = 1[\Omega]$, la energía asociada a cualquier señal x(t) se puede expresar como,

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 dt = \int_{t1}^{t2} x^2(t)dt \qquad (3)$$ ¿Es esto dimensionalmente correcto?

Se debe recordar que esta expresión de energía posee en “1” con las dimensiones apropiadas.
La potencia promedio asociada a la expresión de potencia instantánea está definida para un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$.

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} p(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} \frac{1}{R}v^2(t)dt \qquad (4)$$

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} Ri^2(t)dt \qquad (5)$$

Sobre la base de $R = 1[\Omega]$. La potencia promedio “P” asociada a cualquier señal *x(t)*.

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t1}^{t2} x^2(t)dt \qquad (6)$$ ¿Es esto dimensionalmente correcto?

Con base en lo anterior existe:

“SEÑAL DE ENERGÍA” es tal que (3) es **finita** incluso si el intervalo es infinito.

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 \, dt = \int_{t1}^{t2} x^2(t)dt < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Ejemplos:

- Señales exponenciales decrecientes.
- Sinusoidales exponencialmente amortiguadas.
- Pulsos rectangulares.

"SEÑAL DE POTENCIA" si la potencia es mayor que cero o incluso si el intervalo es infinito.

$$0 < P = Lim_{T1 \to +\infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T1}^{T1} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

Una señal de energía $(E < \infty)$ tiene potencia promedio cero.

$$P = Lim_{T1 \to +\infty} \frac{E}{2T_1} = 0$$

Una señal de potencia $(-\infty < P < \infty)$ tiene energía infinita.

$$0 < P = Lim_{T1 \to +\infty} \frac{1}{2T_1} \int_{-T1}^{T1} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$$

$$P = \frac{1}{2T_1} Lim_{T1 \to +\infty} \int_{-T1}^{T1} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{2T_1} E \Rightarrow E \to +\infty$$

Ejemplo: Determine la energía de la señal de $x(t) = 3tri\left(\frac{t}{4}\right)$.

La señal *tri(t)* es:

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow tri\left(\frac{t}{4}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{4}\right| & \left|\frac{t}{4}\right| < 1 \Rightarrow |t| < 4 \\ 0 & \left|\frac{t}{4}\right| \geq 1 \Rightarrow |t| \geq 4 \end{cases}$$

La energía de *x(t)* es,

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2\, dt = \int_{t1}^{t2} x^2(t)dt$$

$$E = \int_{t1}^{t2} \left|3tri\left(\frac{t}{4}\right)\right|^2 dt = 9\int_{t1}^{t2} tri^2\left(\frac{t}{4}\right)dt$$

$$E = 9\int_{-4}^{4} tri^2\left(\frac{t}{4}\right)dt = 9\int_{-4}^{0}\left(1+\frac{t}{4}\right)^2 dt + 9\int_{0}^{4}\left(1-\frac{t}{4}\right)^2 dt$$

$$E = 9\int_{-4}^{0}\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{16}\right)dt + 9\int_{0}^{4}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t}{16}\right)dt$$

$$E = 9\left[t+\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{48}\right]_{-4}^{0} + 9\left[t-\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{48}\right]_{0}^{4}$$

$$E = 9\left[-\left(-4+\frac{(-4)^2}{4}+\frac{(-4)^3}{48}\right)\right] + 9\left[4-\frac{(4)^2}{4}+\frac{(4)^3}{48}\right]$$

$$E = 9\left[4-\frac{(4)^2}{4}+\frac{(4)^3}{48}\right] + 9\left[4-\frac{(4)^2}{4}+\frac{(4)^3}{48}\right]$$

$$E = 18\left[4-4+\frac{4}{3}\right] = 18\left[\frac{4}{3}\right] = 24$$

Ejemplo: Determine la energía de la señal de $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

$$E = \sum_{m=n1}^{n2} |x[m]|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x[m]|^2 = \sum_{m=-N}^{+N} |x[m]|^2$$

$$E_\infty = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |x[m]|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^m u[m]\right|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

Ya que $\frac{1}{4} < 1$

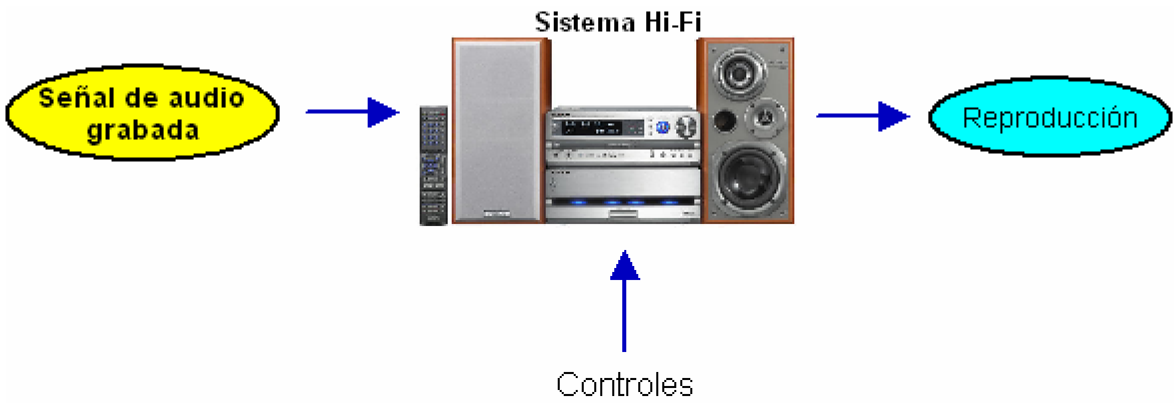
$$E_\infty = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$$

Sistemas Continuos y Discretos
[oppe]

Sistema: consiste en la interconexión de subsistemas, dispositivos y/o componentes, en donde se tienen señales de entrada y de salida las señales de entrada se transforman o hacen que el sistema responda, lo que hace que las señales de salida reflejen esas transformaciones o respuestas internas.

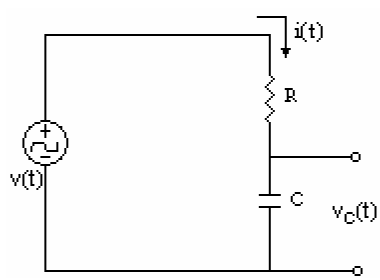
Ejemplos,

- Sistema de alta fidelidad.



- Osciloscopio.

- Circuito RC.



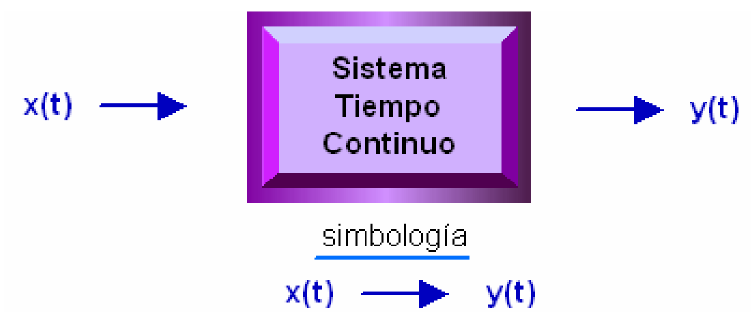
- Robot.

- Filtro.

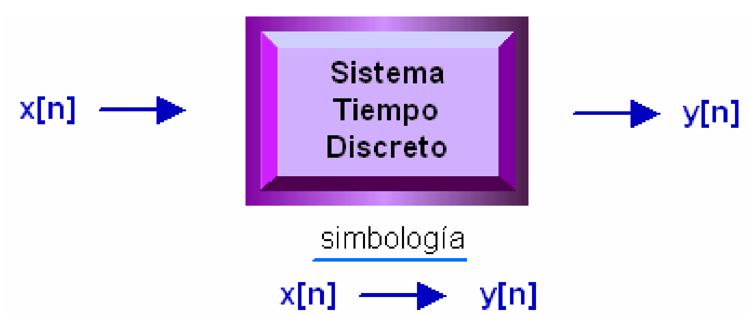
Para realizar el estudio y análisis de sistemas, ya no de tiempo continuo o de tiempo discreto, se modela cada uno de los componentes para luego establecer la conexión entre ellos. Este resultado expresado matemáticamente en el dominio del tiempo, permite el análisis del sistema. Este análisis se puede realizar con base en la respuesta del sistema a ciertas señales básicas de entrada.

Sistemas de Tiempo Continuo. [oppe]

Recibe una señal o señales de tiempo continuo y las transforma en señales de tiempo continuo.

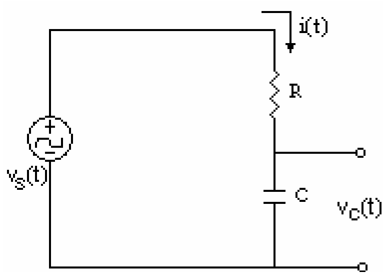


Sistemas de Tiempo Discreto. [oppe]



Ejemplos de sistemas:

I) Circuito RC (serie)



donde, $v_s(t)$ (señal de entrada) y $v_c(t)$ (señal de salida).

$$\sum v_i(t) = 0$$

$$-v_s(t) + i(t)R + v_c(t) = 0 \qquad (1)$$

En el condensador, se tiene, $i_c(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} \qquad (2)$

De la ecuación (1) se despeja *i(t)*.

$$i_c(t) = \frac{v_s(t) - v_c(t)}{R} \qquad (3)$$

Igualando (3) y (2).

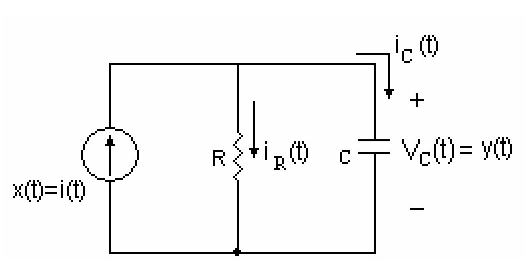
$$\frac{v_s(t) - v_c(t)}{R} = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$C\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{R}v_s(t) - \frac{1}{R}v_c(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{RC}v_s(t) - \frac{1}{RC}v_c(t)$$

Ecuación diferencial que describe la relación entrada y salida.

II) Circuito RC (paralelo).



donde, i(t) (señal de entrada) y $v_c(t)$ (señal de salida).

$\sum i_j(t) = 0$

$i(t) = i_R(t) + i_c(t)$ (1)

Para el condensador, se tiene, $i_c(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$ (2)

Para la resistencia,

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{R} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) y (2) en (1),

$i(t)\dfrac{v_c(t)}{R} + C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$

$x(t) = \dfrac{1}{R}y(t) + C\dfrac{dy(t)}{dt}$ (4)

¿Qué sucede si *x(t)=0* para $t \geq to$?

$\dfrac{y(t)}{R} + C\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$ (5) Esto es una ecuación diferencial de primer orden que necesita una condición inicial en $t = to \rightarrow y(to)$

¿Qué función matemática hace que se cumpla (5)?

$y(t) = Ae^{-kt}$ (6)

Se reemplaza (6) en (5),

$\dfrac{Ae^{-kt}}{R} + CA(-k)e^{-kt} = 0$

$Ae^{-kt}\left\{\dfrac{1}{R} - kC\right\} = 0$

$\dfrac{1}{R} - kC = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{RC}$ (7)

Como $y(t) = Ae^{-t/RC} \Rightarrow y(to) = Ae^{-to/RC} \Rightarrow A = y(to)e^{to/RC}$ (8) con $y(to) \neq 0$

Reemplazando (8) en (6),

$y(t) = y(to)e^{to/RC}e^{-to/RC} = y(to)e^{-(t-to)/RC}$ (9)

¿Qué sucede si *x(t) ≠ 0* para $t \geq 0$?

Se tiene $\frac{y(t)}{R}+C\frac{dy(t)}{dt}=x(t)$ (4)

Se multiplica (4) por $\frac{1}{C}e^{t/RC}$

$$\frac{1}{C}e^{t/RC}\left\{\frac{y(t)}{R}+C\frac{dy(t)}{dt}\right\}=\frac{x(t)}{C}e^{t/RC}$$

$$\frac{1}{RC}y(t)e^{t/RC}+e^{t/RC}\frac{dy(t)}{dt}=\frac{1}{C}x(t)e^{t/RC}$$

$$\frac{1}{C}x(t)e^{t/RC}=e^{t/RC}\left(\frac{1}{RC}y(t)+\frac{dy(t)}{dt}\right) \qquad (10)$$

El lado derecho de (10) es igual a,

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{t/RC}\right)=\frac{1}{RC}y(t)e^{t/RC}+e^{t/RC}\frac{dy(t)}{dt} \qquad (11)$$

Esta hace que

$$\frac{1}{C}x(t)e^{t/RC}=\frac{d}{dt}\left\{e^{t/RC}y(t)\right\} \qquad (12)$$

(12) es de la forma $\frac{dv(t)}{dt}=q(t)$ (13) donde $\begin{cases} v(t)=e^{t/RC}y(t) & (14) \\ q(t)=\frac{x(t)}{C}e^{t/RC} & (15) \end{cases}$

Se integra (13) a los dos lados,

$$\int_{v(to)}^{v(t)}\frac{dv(t)}{dt}dt=\int_{to}^{t}q(t)dt$$

$$v(t)-v(to)=\int_{to}^{t}q(t)dt \qquad para \qquad t\geq to$$

$$v(t)=v(to)+\int_{to}^{t}q(t)dt \qquad (16)$$

Reemplazando (16)

$$e^{t/RC}y(t) = y(to)e^{to/RC} + \int_{to}^{t}\frac{1}{C}x(\lambda)e^{\lambda/RC}d\lambda\left\{* e^{-t/RC}\right\} \qquad (17)$$

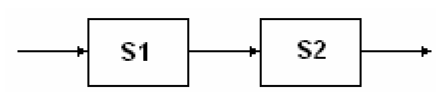
$$\boxed{y(t) = \underbrace{y(to)e^{(-1/RC)(t-to)}}_{\text{Respuesta debido a la condición inicial y(to)}} + \underbrace{\frac{1}{C}\int_{to}^{t}x(\lambda)e^{(-1/RC)(t-\lambda)}d\lambda}_{\text{Respuesta debido a la corriente de entrada i(t)=x(t).}}}$$

Si el circuito esta en CERO es t = to, entonces, y(to) = 0
Por tanto,

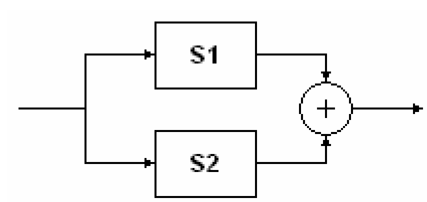
$$y(t) = \int_{to}^{t}\frac{1}{C}e^{(-1/RC)(t-\lambda)}x(\lambda)d\lambda$$

¿Como se interconectan los sistemas? [oppe]

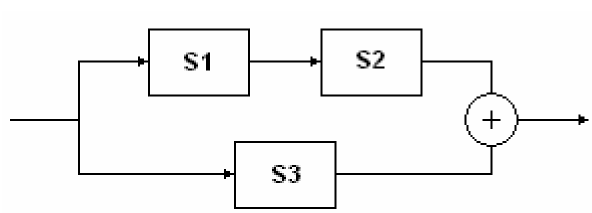
<u>Serie</u>



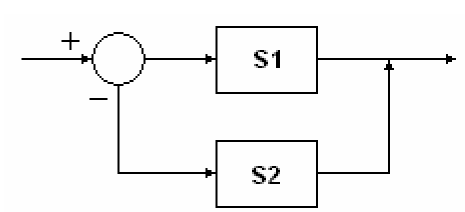
<u>Paralelo</u>



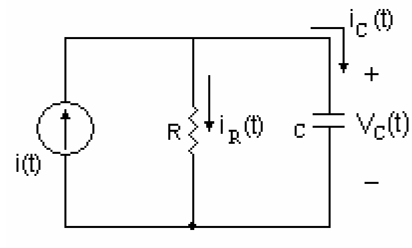
<u>Serie – Paralelo</u>



<u>Realimentación</u>



Tomemos de nuevo el circuito RC paralelo.

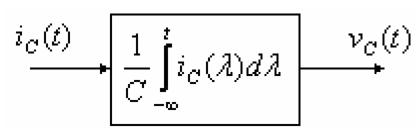


$$i = i_C(t) + i_R(t) \quad donde \quad i_R(t) = \frac{1}{R} v_C(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

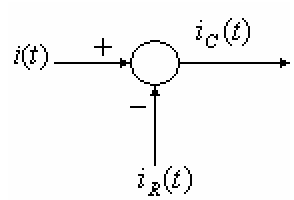
$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(\lambda) d\lambda$$

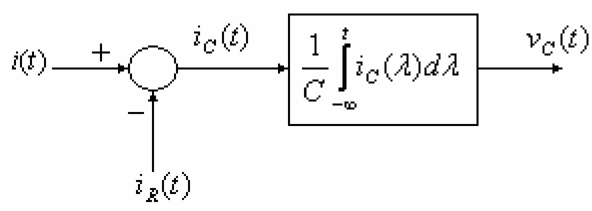
Esta ecuación se puede manejar como un sistema.



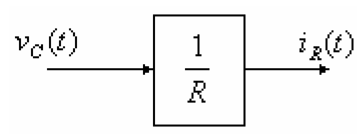
$i_C(t)$ se puede representar como

$$i_C(t) = i(t) - i_R(t)$$

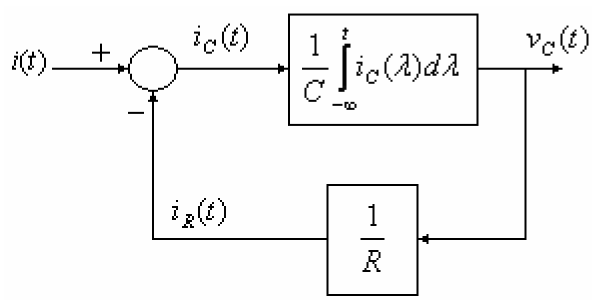




La ecuación se puede manejar $i_R(t) = \frac{1}{R} v_C(t)$



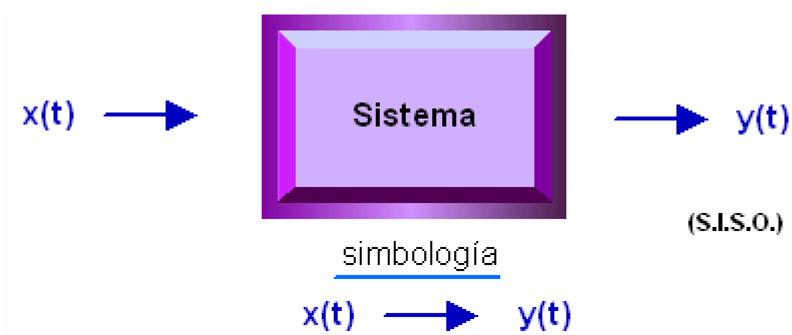
Finalmente se puede intercambiar,



Propiedades Básicas de los Sistemas [kamen], [oppe]

1. **Sistemas Lineales y No Lineales.** [kamen], [oppe]

Si un sistema es lineal, implica se puede aplicar al principio de "superposición".
Si una entrada consiste de una suma "ponderada" de varias señales, la salida debe ser la superposición de la respuesta del sistema a cada una de las señales de entrada.
Se tiene e sistema.



Para una entrada $x_1(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_2(t)$

Para otra entrada $x_2(t)$

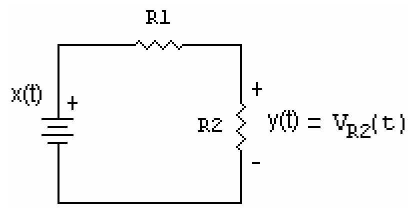
$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

El sistema es lineal si:

- (Aditividad). La respuesta a una entrada conformada por al suma de dos señales $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ es, $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$.

- (Escalamiento - homogeneidad). La respuesta a una entrada escalada en magnitud por "a" es, $ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$ ("a" es una constante compleja cualquiera.).

Estas dos propiedades se pueden considerar en una sola,
$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$
Ejemplo:
Consideremos un divisor de tensión en D.C. ¿El sistema es lineal?
Tomamos el circuito,



La salida se puede escribir $y(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} x(t)$ si $R_1 = R_2 = R \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{2} x(t)$.
Según el criterio de linealidad

$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Entonces, se considera la entrada $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.
Tomando $x_1(t)$

$$\alpha x_1(t) \rightarrow \alpha y_1(t) \text{ ¿ES ESTO CIERTO?}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\alpha x_1(t) = \alpha\left\{\frac{1}{2}x_1(t)\right\} = \alpha y_1(t)$$

Ya que $x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \dfrac{1}{2} x_1(t)$

Tomando ahora $x_3(t)$,

$$x_3(t) \rightarrow y_3(t) = \frac{1}{2} x_3(t)$$

$$y_3(t) = \frac{1}{2}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\}$$

$$y_3(t) = \alpha\left\{\frac{1}{2}x_1(t)\right\} + \beta\left\{\frac{1}{2}x_2(t)\right\}$$

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

<u>El sistema es lineal</u>

¿Que sucede si R_1 fuese una resistencia dependiendo de tensión $R_1(t) = Rx(t)$?

Tomamos $R_2 = R$

Esto genera que $y(t) = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} x(t) = \dfrac{R}{Rx(t) + R} x(t)$ *entonces,* $y(t) = \dfrac{x(t)}{x(t) + 1}$

Se toma una entrada de la forma,

$$x_4(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

Se toma $x_4(t)$ como entrada al sistema,

$$x_4(t) \to y_4(t) = \frac{x_4(t)}{x_4(t) + 1}$$

$$y_4(t) = \frac{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)}{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + 1}$$

Se tiene que,

$$x_1(t) \to y_1(t) = \frac{x_1(t)}{x_1(t) + 1}$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = \frac{x_2(t)}{x_2(t) + 1}$$

$$y_5(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \frac{\alpha x_1(t)}{x_1(t) + 1} + \frac{\beta x_2(t)}{x_2(t) + 1}$$

$$y_4(t) \neq y_5(t)$$

El sistema es NO LINEAL.

2. Sistemas Variantes e Invariantes en el Tiempo. [kamen], [oppe]

Sea el sistema $x(t) \to y(t)$.

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en la variable independiente para la señal de entrada produce el mismo desplazamiento de la variable independiente en la señal de salida.

- Sistema en tiempo continuo,

$$x(t) \to y(t)$$
$$x(t - to) \to y(t - to)$$

- Sistema en tiempo discreto,

$$x[n] \to y[n]$$
$$x[n - no] \to y[n - no]$$

¿Como se comprueba que un sistema es invariante en el tiempo?

a) Sea $y_1(t)$ la salida correspondiente a $x_1(t)$.

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

b) Se considera una segunda entrada $x_2(t) = x_1(t - to)$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ Se encuentra esta salida.

c) Se realiza el desplazamiento de $y_1(t)$.

$$y_1(t - to)$$

d) Si $y_2(t) = y_1(t - to)$ el sistema es invariante en el tiempo.

Ejemplo:
Sea un sistema definido por,

$$x(t) \rightarrow y(t) = \cos\{x(t)\}$$

- Se tiene una entrada,

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \cos\{x_1(t)\}$$

- Se considera

$$x_1(t - to) = x_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow y_2(t) = \cos\{x_1(t - to)\} \quad (1)$$

- Se toma $y_1(t)$ y se obtiene $y_1(t - to)$

$$y_1(t - to) = \cos\{x_1(t - to)\} \quad (2)$$

- Se comparan (1) y (2).

$$y_2(t) = y_1(t - to)$$

<u>El sistema es invariante en el tiempo.</u>

Ejemplo:
Sea $y[n] = nx[n]$.

- Se obtiene,

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = nx_1[n]$$

- Se toma una entrada desplazada,

$$x_2[n] = x_1[n - no]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - no]$$

- Se toma $y_1[n]$ y se obtiene $y_1[n - no]$

$$y_1[n - no] = (n - no)x_1[n - no]$$

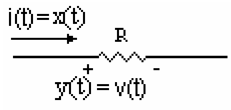
- $y_2[n] = n\lambda_1[n - no] \neq y_1[n - no] = (n - no)x_1[n - no]$

<u>No es invariante en el tiempo</u>

3. **Sistemas con y sin memoria.** [oppe]

Un sistema es sin memoria si el valor actual de la salida depende del valor actual de la entrada.
"Si su entrada en un tiempo dado depende solamente de la entrada en ese mismo tiempo".

Sistema en tiempo continuo.
Tenemos una resistencia

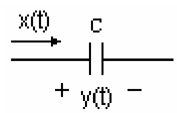


$$y(t) = Rx(t)$$

Este es un *sistema sin memoria* ya que la salida $y(t)$ en cualquier instante depende sólo del valor $x(t)$ en un instante

$$y(to) = Rx(to)$$

Tomemos un condensador



$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

La salida en cualquier instante de tiempo "*to*" depende de la historia pasada completa de la entrada.
Por lo tanto es un sistema con memoria.

El sistema sin memoria más simple es el sistema identidad.

Sistema de tiempo discreto.

Aquí también, el sistema sin memoria más simple es el sistema identidad.

$$y[n] \to x[n]$$

Los sistemas en tiempo discreto que poseen acumuladores, son *sistemas con memoria*.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$$

Los sistemas que poseen retrasos también son *con memoria*.

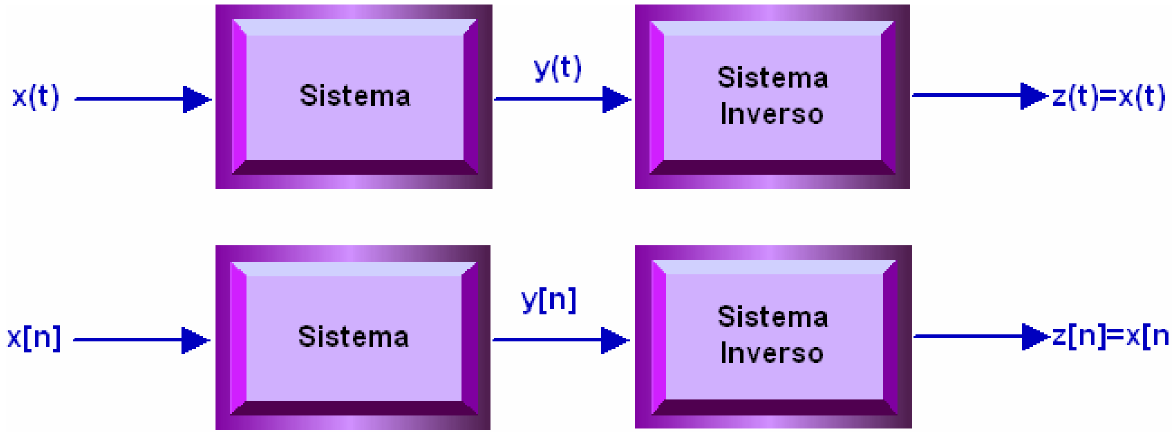
$$y[n] \to x[n-1]$$

Nota,
El concepto de memoria se refiere a la presencia de un mecanismo que mantiene o almacena información sobre los valores de la entrada en instantes diferentes al tiempo actual.

4. **Invertibilidad y Sistema inverso.** [oppe]

Un sistema es invertible si:

Distintas entradas producen distintas salidas.
Observando la salida se puede determinar la entrada.



Ejemplo1: tomamos el siguiente ejemplo,

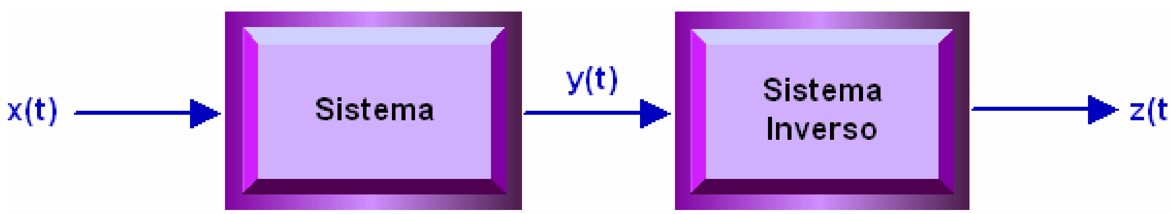
$$y(t) = 2x(t)$$
$$x(t) \rightarrow y(t) = 2x(t)$$

¿Diferentes entradas producen diferentes salidas?

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2x_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2x_2(t)$$
$$x_3(t) \rightarrow y_3(t) = 2x_3(t)$$

si todas las entradas son diferentes, entonces, todas estas salidas son diferentes.

¿Observando la salida se puede determinar la entrada?



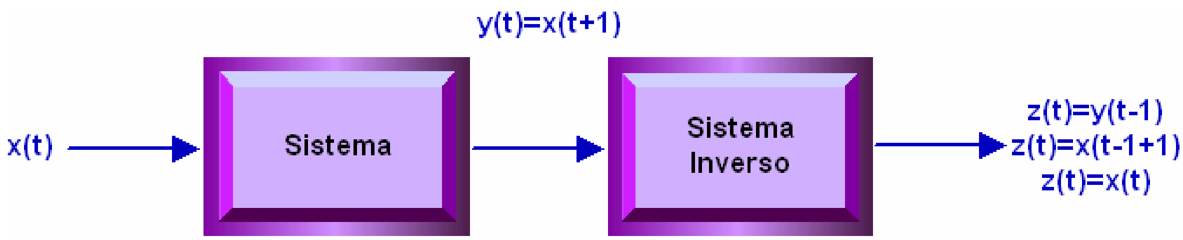
$$y = 2x(t) \Rightarrow z(t) = \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{2}(2x(t))$$
$$z(t) = x(t)$$

Ejemplo2: se tiene,

$$y(t) = x(t+1)$$
$$x(t) \rightarrow y(t) = x(t+1)$$

Tomamos varias entradas,

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1(t+1)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2(t+1)$$
$$x_3(t) \rightarrow y_3(t) = x_3(t+1)$$



5. **Causalidad.** [kamen], [oppe]

También se le llama NO ANTICIPATIVO.

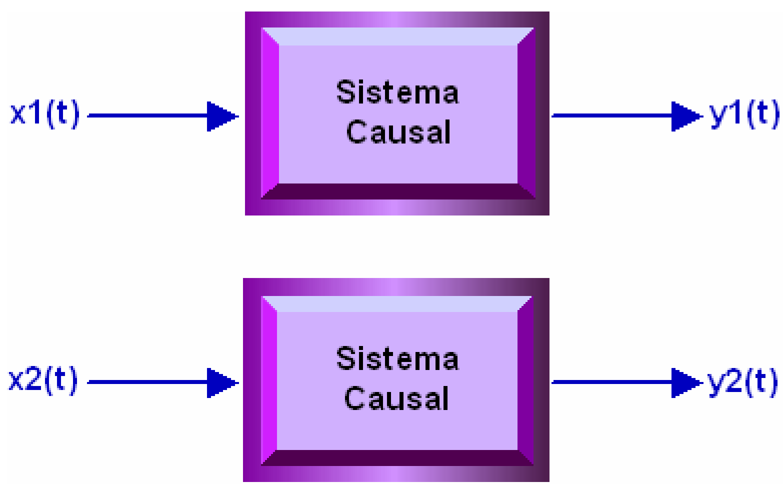
Se tiene un sistema de entrada $x(t)$.

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

El sistema es causal si la salida en cualquier instante "to" depende solo de los valores de la entrada para $t < to$.

Se tienen dos entradas a un sistema causal $x_1(t) \;\; y \;\; x_2(t)$ las cuales son idénticas hasta un punto to. Las salidas correspondientes $y_1(t) \;\; y \;\; y_2(t)$ deben ser idénticas hasta to ya que un sistema causal no puede predecir si las dos entradas serán diferentes después de to.

Si $x_1(t) = x_2(t) \quad para \quad t < to$



$y_1(t) = y_2(t) \quad para \quad t < to$.

Ejemplo:
Se tiene $y[n] = x[-n]$.

¿Este es un sistema causal?

Para $n \geq 0$

$y[4] = x[-4]$

$y[n_o] = x[-n_o]$ Valor pasado.

Para $n < 0$

$y[-n_o] = x[n_o]$ La salida depende de un valor futuro (NO ES UN SISTEMA CAUSAL).

Ejemplo: Se tiene el siguiente sistema,

¿Este es un sistema causal?

Se toman dos entradas.

$$x_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t \leq 5 \\ e^{-t} & t > 5 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha = 3 \rightarrow \begin{matrix} y_1(t) = x_1(t+\alpha) = x_1(t+3) \\ y_2(t) = x_2(t+\alpha) = x_2(t+3) \end{matrix}$$

$$x_2(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t \leq 5 \\ 0 & t > 5 \end{Bmatrix}$$

$$y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t+3 \le 5 = t \le 2 \\ e^{-t} & t+3 > 5 = t > 2 \end{Bmatrix}$$

$$¿\, y_1(t) = y_2(t) \quad para \quad t \le 5?$$

Para t = 3 $\rightarrow$ $\begin{matrix} y_1(t=3) = y_1(3) = e^{-3} \\ y_2(t=3) = 0 \end{matrix}$

$$y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t+3 \le 5 = t \le 2 \\ 0 & t+3 > 5 = t > 2 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:
Se tiene el siguiente sistema.

¿Este es un sistema causal?

Tenemos dos entradas,

$$x_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t \le 5 \\ e^{-t} & t > 5 \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow$ α = 3 $\rightarrow$ $\begin{matrix} y_1(t) = x_1(t-\alpha) = x_1(t-3) \\ y_2(t) = x_2(t-\alpha) = x_2(t-3) \end{matrix}$

$$x_2(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t \le 5 \\ 0 & t > 5 \end{Bmatrix}$$

$$y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1 & t-3 \le 5 = t \le 8 \\ e^{-(t-3)} & t-3 > 5 = t > 8 \end{Bmatrix}$$

$$¿\, y_1(t) = y_2(t) \quad para \quad t \le 5?$$

Para t = 3 $\rightarrow$ $\begin{array}{l} y_1(t=3) = y_1(3) = 1 \\ y_2(t=3) = 1 \end{array}$, para t =5 $\rightarrow$

$$y_1(t=5) = y_1(5) = 1$$
$$y_2(t=5) = 1$$
$$y_2(t) = \begin{cases} 1 & t-3 \le 5 = t \le 8 \\ 0 & t-3 > 5 = t > 8 \end{cases}$$

El sistema es causal.

6. Estabilidad. [oppe]

Es un concepto bastante utilizado en sistemas de control. Existen muchos tipos de estabilidad, nos ocuparemos de la estabilidad BIBO (Bounded-input Bounded-output) (Entrada acotada - Salida acotada).

Una señal $x(t)$ es acotada si,

$$|x(t)| < B$$
$$B < +\infty$$
$$-B < x(t) < B$$

Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada *x(t)*, su salida *y(t)* es acotada.

$$|x(t)| < B_1 \rightarrow |y(t)| < B_2$$

Ejemplo: $y(t) = e^{x(t)}$

$$|x(t)| < B_1 \rightarrow |y(t)| < B_2$$
$$e^{-B} < |y(t)| < e^{B}$$

CAPITULO 2.

Respuesta de Sistemas Lineales invariantes en el Tiempo (Convolución) LTI.

Introducción. [kamen], [oppe]
Existe una forma de observar y obtener la respuesta de un sistema en tiempo discreto y en tiempo continuo, la cual se conoce como **Convolución**.
Para el análisis, usando la convolución, de un sistema son básicas e importantes dos propiedades estudiadas:

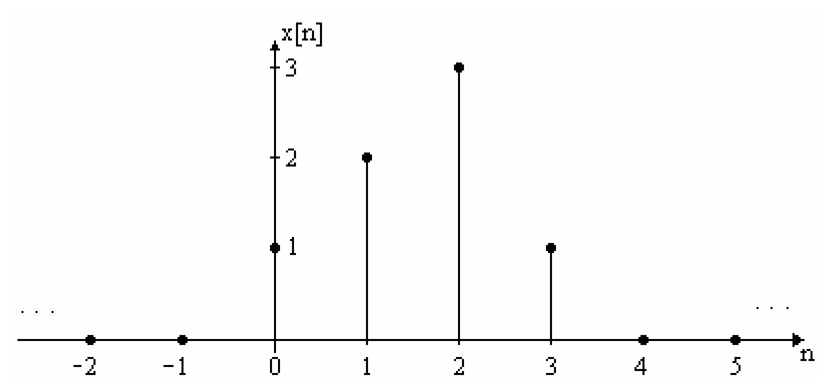
- Linealidad.
- Invarianza en el tiempo.

Se realizarán dos análisis:

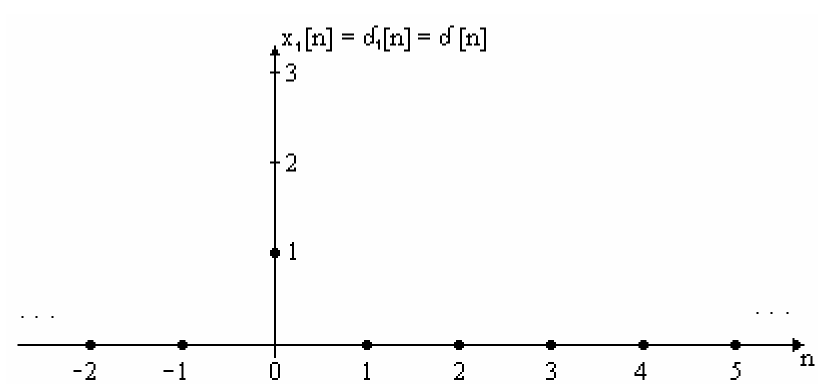
- Convolución de sistemas LTI en tiempo discreto.
- Convolución de sistemas LTI en tiempo continuo.

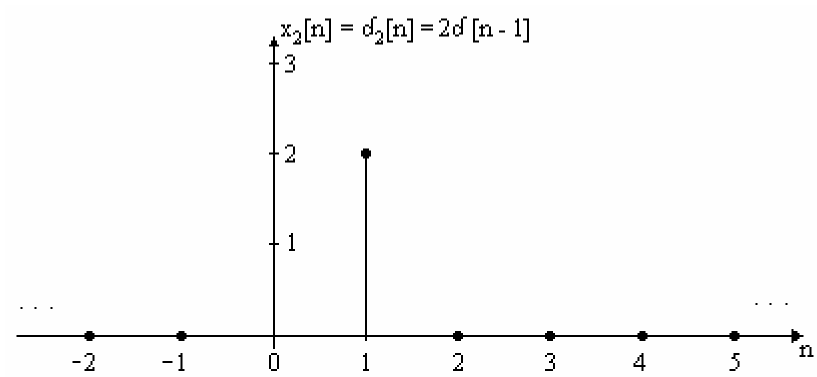
Convolución de sistemas LTI en tiempo discreto. [kamen], [oppe]

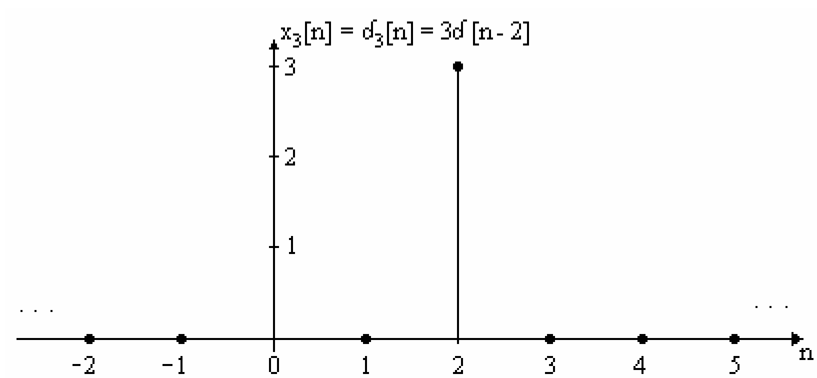
Representación de señales de tiempo discreto en base en la función impulso unitario. [oppe]
Se puede pensar en una señal en tiempo discreto como una secuencia de impulsos.
Consideremos la señal *x[n].*

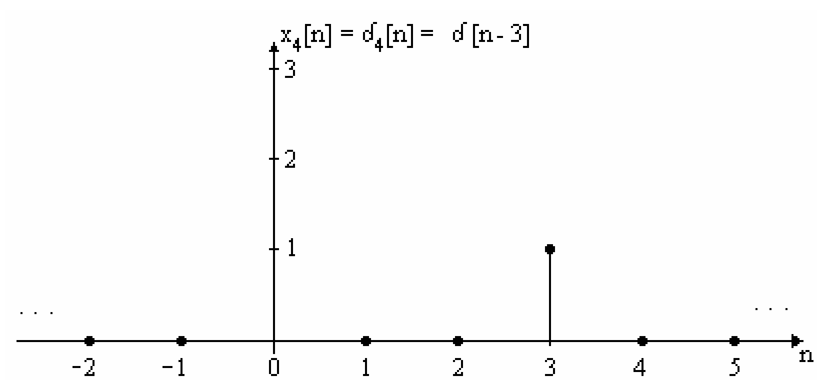


Podemos dibujar cuatro impulsos ESCALADOS y DESPLAZADOS en el tiempo.









$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] + x_4[n]$$

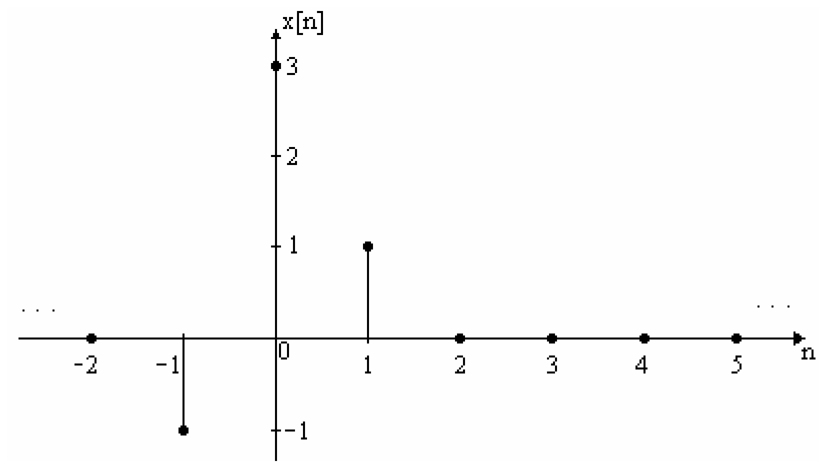
$$x[n] = x[0] * \delta[n] + x[1] * \delta[n-1] + x[2] * \delta[n-2] + x[3] * \delta[n-3]$$

$$x[n] = \sum \delta i[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

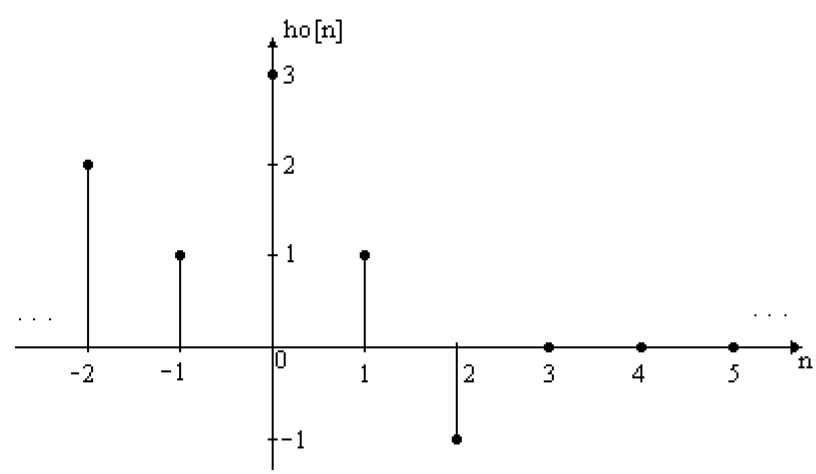
Propiedad de selección del impulso unitario discreto.
Se representa como un escalamiento.

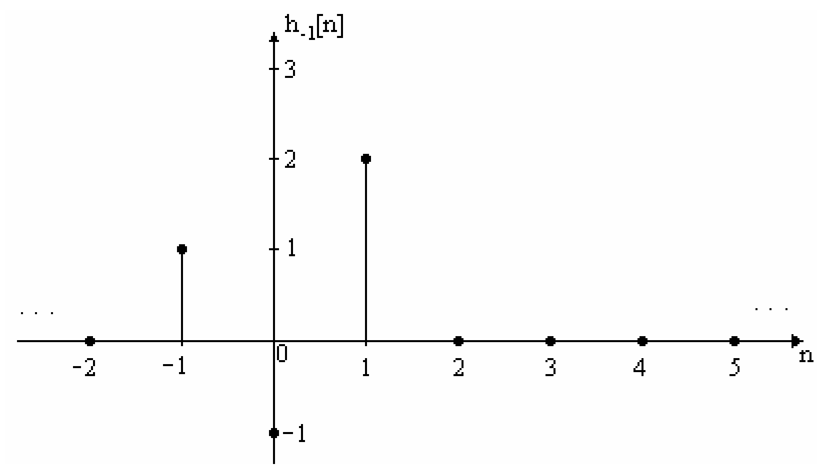
Representación al impulso unitario de tiempo discreto y la suma de convolución de sistemas LTI. [kamen], [oppe]
Consideremos un sistema lineal pero variante en el tiempo "S1" y la señal de entrada x[n].

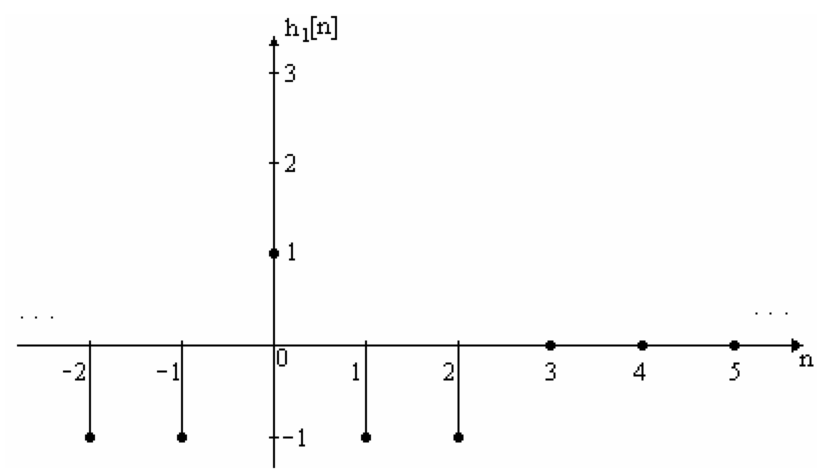


Conocemos del sistema lo siguiente,
La entrada será un impulso unitario desplazado $\delta[n-i]$ la salida a ese $\delta[n-i]$ será $hi[n]$ como es un sistema variante en el tiempo cada una de las "i" salidas $hi[n]$ será diferente.
Como las entradas $\delta[n-i]$ son impulsos unitarios, las salidas serán

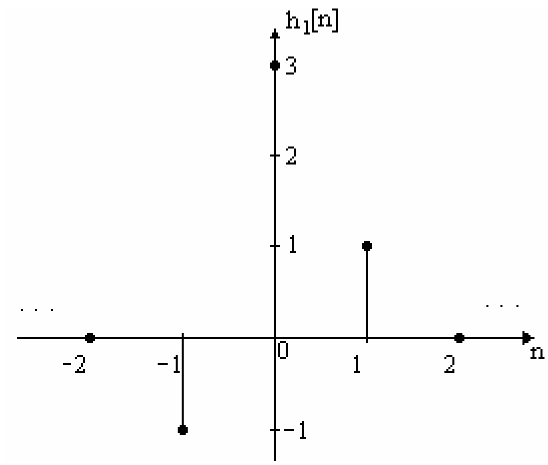
Respuesta al impulso.

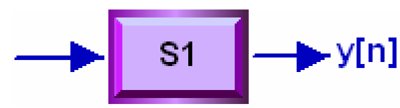




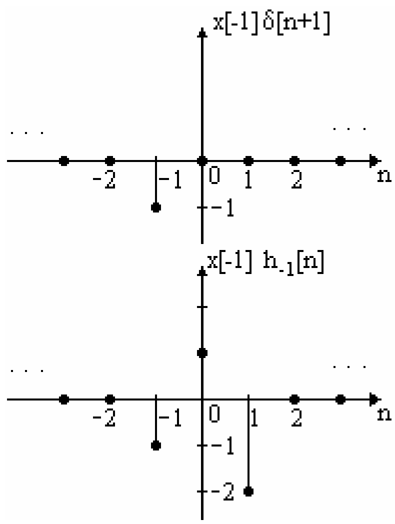


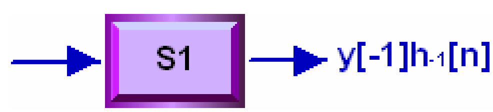
Se necesitan tres respuestas, debido a que *x[n]* solo tiene tres valores diferentes de cero. De acuerdo a la propiedad de "linealidad", la respuesta de S1 a *x[n]* (debido a que *x[n]* es una suma de impulsos) es la combinación lineal de las respuestas básicas.
Se toma *x[n]*,

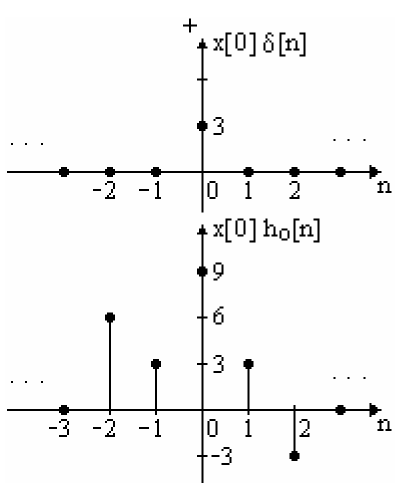


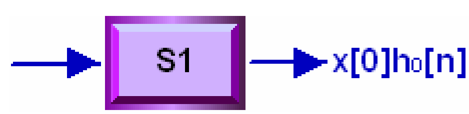


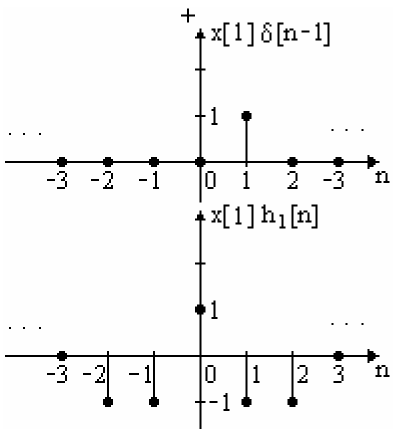
y[n] se puede representar por cada una de las siguientes respuestas,

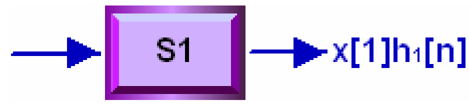


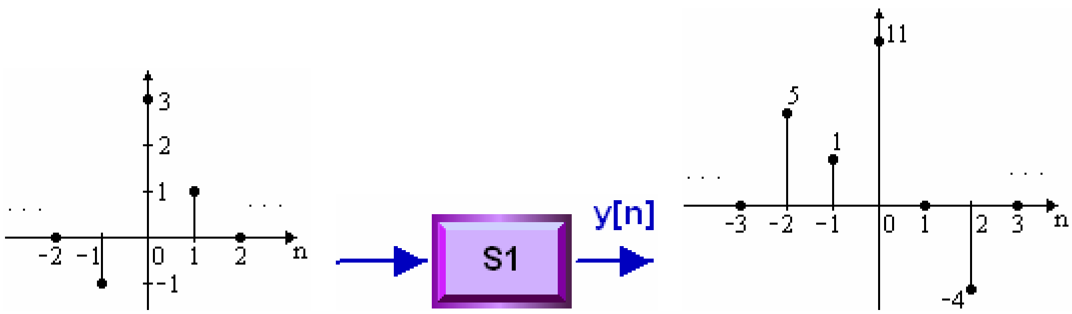




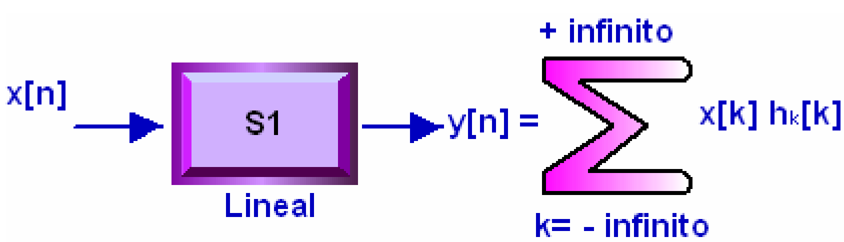








De manera general se puede decir,



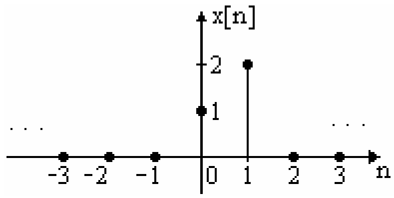
De ahora en adelante se tendrá,

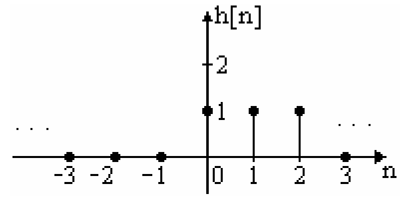
$$\left.\begin{array}{l} h[n] = h_0[n] \\ h[n-1] = h_1[n] \\ h[n+1] = h_{-1}[n] \end{array}\right\} \rightarrow \quad h_k[n] = h[n-k]$$

General,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

En general, se pueden tener tres métodos para encontrar la respuesta de un sistema LTI con base en la convolución.





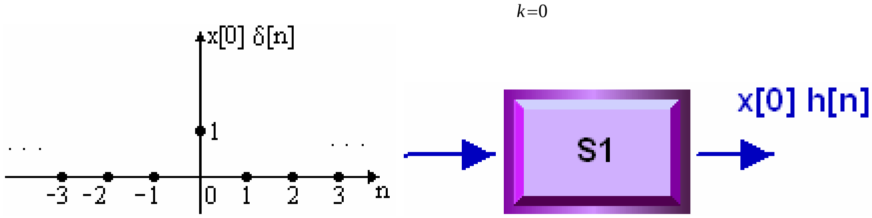
I) Primer Método.

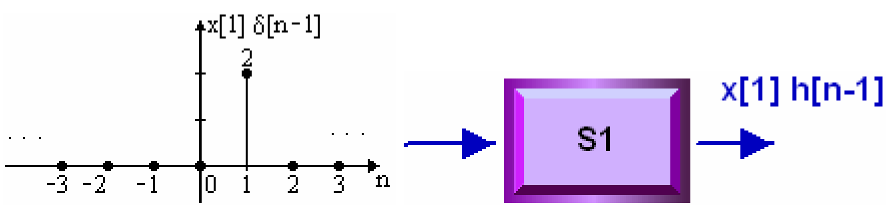
Este método es el más extenso, debido a que se descompone *x[n]*, como una suma de impulsos, lo cual produce respuestas a estos impulsos.

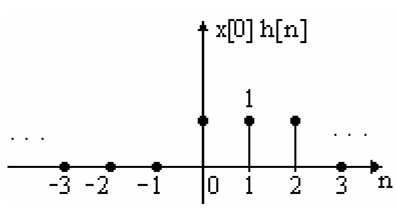
Si tenemos *x[n]*, esto hace que se pueda representar como una suma de impulsos.

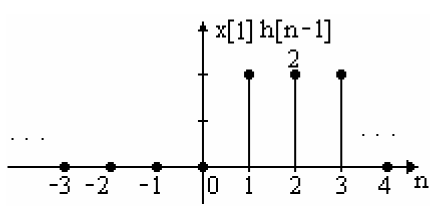
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Para la señal *x[n]* que tenemos, $x[n] = \sum_{k=0}^{1} x[k]\delta[n-k]$



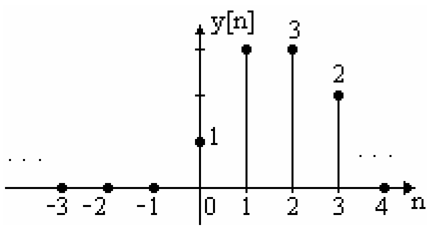






y[n] → será la suma,

$$y[n] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1]$$

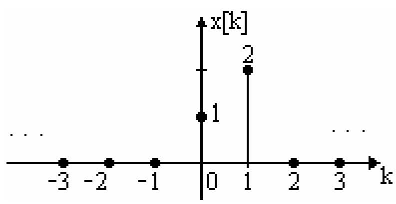


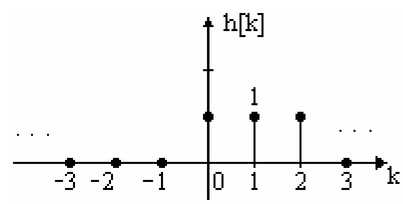
II) Segundo Método.

Consiste en formar *x[n]* y *y[n]* como funciones de "k".

$x[n] \xrightarrow{T} x[k]$ cambiar "n" por "k".

$h[n] \xrightarrow{T} h[k]$





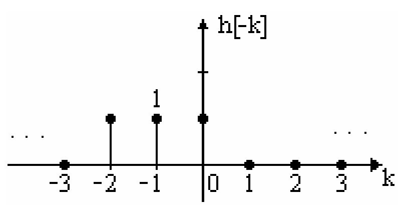
Como lo que se necesita es

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Podemos pensar en

$$g[k] = x[k]h[n-k]$$

Se necesita hacer la reflexión de $h[k] \xrightarrow{T} h[-k]$

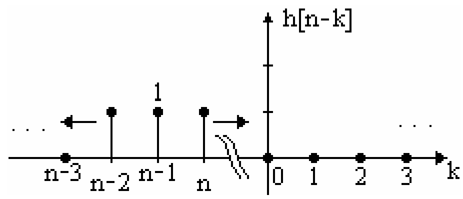


Lo que se tiene es *h[n-k]* → se realiza desplazamientos a *h[-k]* recordando que,

$$\begin{cases} n > 0 \Rightarrow se \quad mueve \quad h[-k] \quad hacia \quad la \quad derecha \\ n < 0 \Rightarrow se \quad mueve \quad h[-k] \quad hacia \quad la \quad izquierda \end{cases}$$

Se multiplica *x[k]* por *h[n-k]* para obtener *g[k]*.

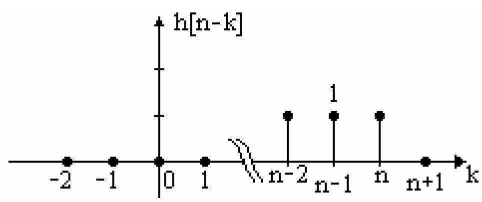
¿Cómo es h[n-k] para n<0?



¿Cuanto da g[k] para n<0?

$g[k] = 0$; para n<0

¿Cómo es h[n-k] para n>3?

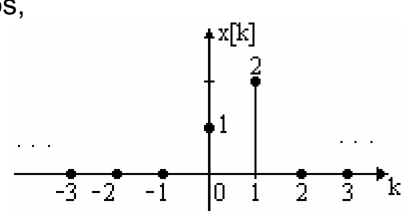


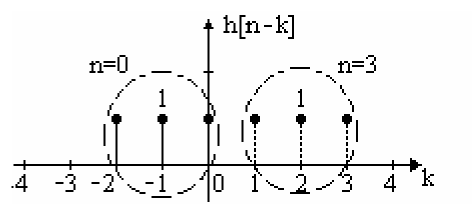
¿Cuánto da g[k] para n>3?

$g[k] = 0$; para n>3

Para $0 \leq n \leq 3$;

Tenemos,



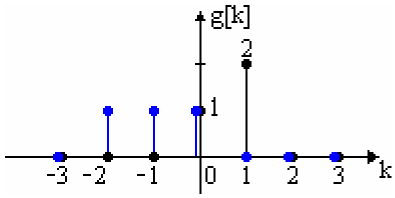


$$\begin{cases} \underline{\qquad} \Rightarrow & para \quad n = 0 \\ ---- \Rightarrow & para \quad n = 3 \end{cases}$$

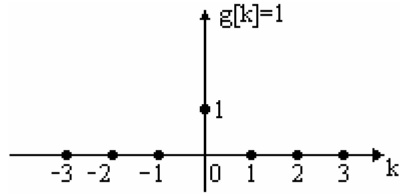
Tomamos,

g[k] ; para $0 \le n \le 3$ $\qquad$ $g[k] = x[k]h[n-k]$

Para *n=0*



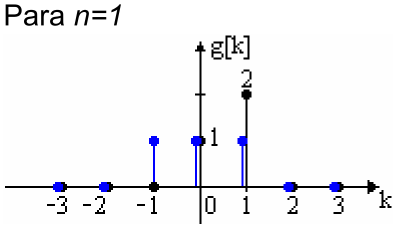
$\rightarrow$



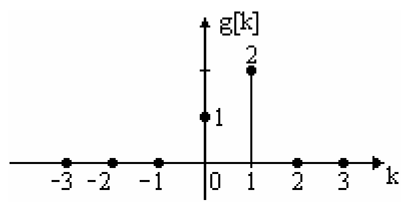
$$g[k] = \begin{Bmatrix} 1 & para & k = 0 \\ 0 & para & k \neq 0 \end{Bmatrix} para \quad n = 0$$

$$g[k] = \delta[k] \quad para \quad n = 0$$

Para *n=1*

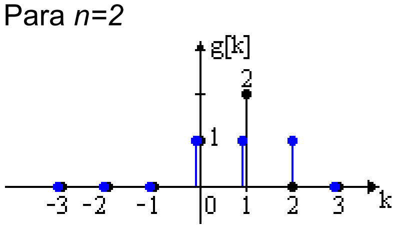


$\rightarrow$

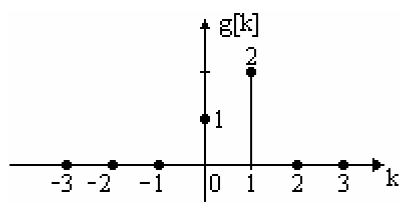


$g[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$ Para *n=1*

Para *n=2*

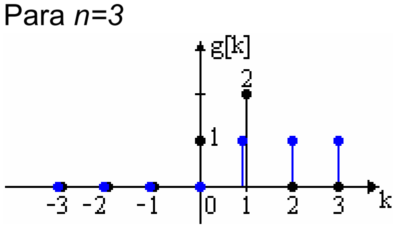


$\rightarrow$

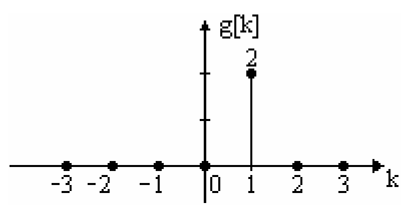


$g[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$

Para *n=3*



$\rightarrow$



$g[k] = 2\delta[k-1]$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]$

n=0 $\quad y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] = 1$

n=1 $\quad y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1] = 3$

n=2 $\quad y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] = 3$

n=3 $\quad y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] = 2$

$y[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$

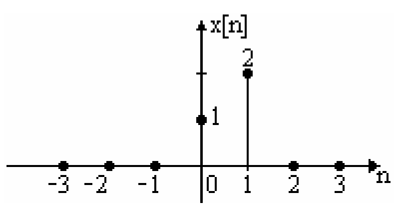
III) Tercer Método

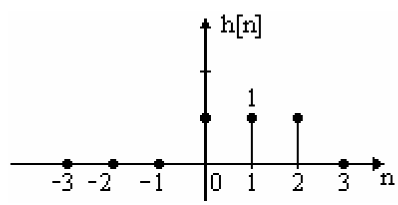
1. Se toman las dos señales *x[n]* y *h[n]* y forman *x[k]* y *h[k].*
2. Se transforma $h[k] \xrightarrow{T} h[n-k]$ y se “desliza” o mueve sobre la señal *x[k]* con base en “n”, realizando multiplicaciones y luego sumas para cada valor de “n”.

Se toman las dos señales.

$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

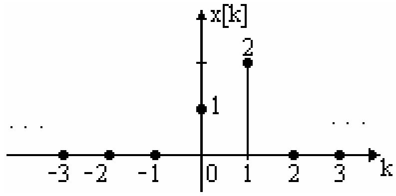


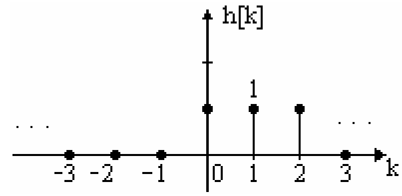


Se toman las señales como variable de “k”.

$x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$

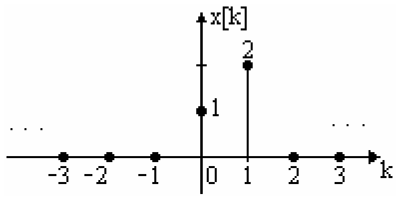
$$h[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 2 \\ 0 & resto \end{cases} = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] = \sum_{p=0}^{2} \delta[k-p]$$

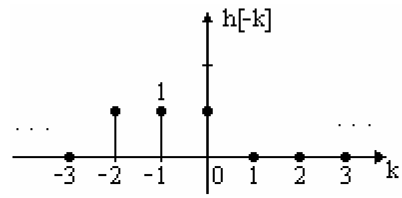




Ahora, se construye la reflexión de *h[k]*.

$$h[k] \xrightarrow{T} h[-k]$$





$x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$ $\qquad$ $h[-k] = \begin{cases} 1 & 0 \le -k \le 2 = 0 \ge k \ge -2 = -2 \le k \le 0 \\ 0 & resto \end{cases}$

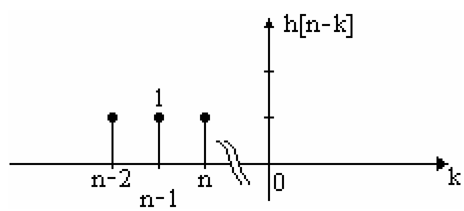
$$h[-k] = \delta[-k] + \delta[-k-1] + \delta[-k-2]$$

Ahora, se hace *h[n-k]* ¿Cómo queda esta señal?

Si $n < 0 \quad \Rightarrow \quad h[-k]$ se desplaza a la izquierda.

Si $n > 0 \quad \Rightarrow \quad h[-k]$ se desplaza a la derecha.

Para *n<0*: Nos queda *h[-k]*.



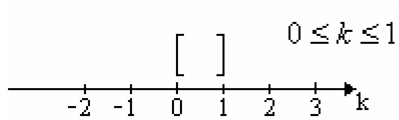
$$x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$$

$$h[n-k] = \begin{cases} 1 & 0 \le n-k \le 2 \;\; = \;\; -n \le -k \le 2-n \;\; = \;\; n \ge k \ge n-2 \;\; = \;\; n-2 \le k \le n \\ 0 & resto \end{cases}$$

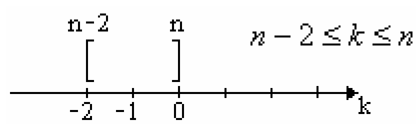
Si *n = -2* $\quad -2 \ge k \ge -4 \;\; = \;\; -4 \le k \le -2$

Tenemos que mirar los valores donde se encuentran definidas *x[k]* y *h[n-k]*.

Para *x[k]*.



Para *h[n-k]*.



Se tiene

a) Para *n < 0*: no existe traslape entre *x[k]* y *h[n-k]*.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = 0$$

b) Para $0 \leq n \leq 1$

$g[k] = x[k]h[n-k]$

$y[0] = 1$

$y[1] = 1 + 2 = 3$

$y[2] = 3$

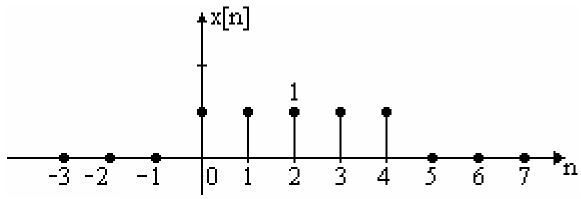
$y[3] = 2$

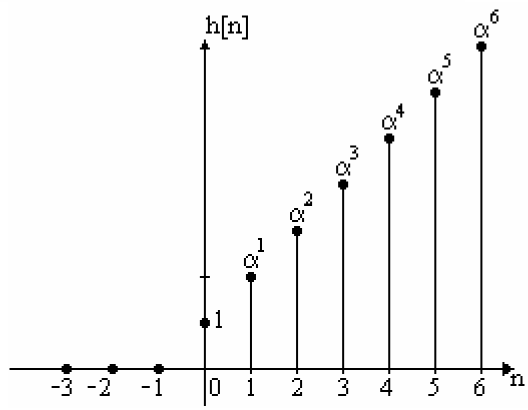
$y[4] = 0$

Ejemplo: se tienen dos señales,

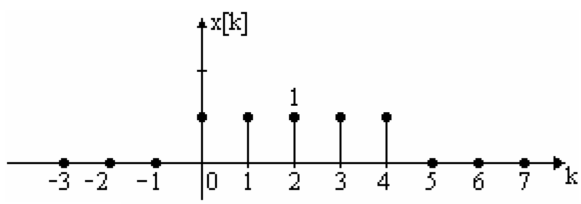
$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

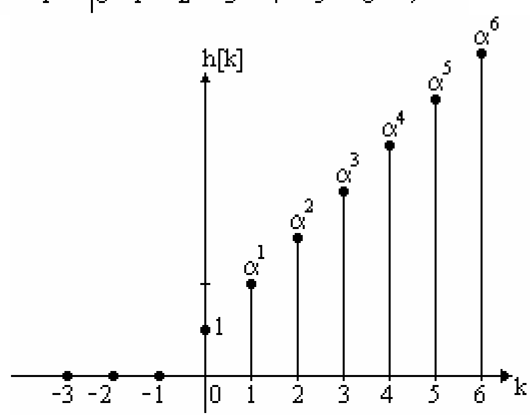
$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad \alpha = 2 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha > 1$$





Se toma como variable independiente “k”.



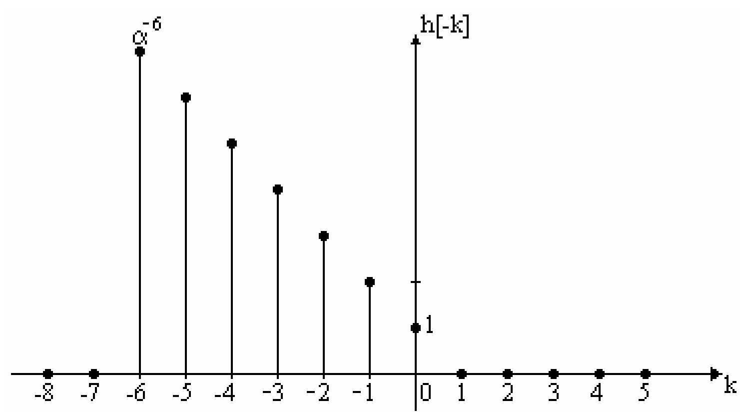


$$x[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 4 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad h[k] = \begin{cases} \alpha^{k} & 0 \le k \le 6 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad \alpha > 1$$

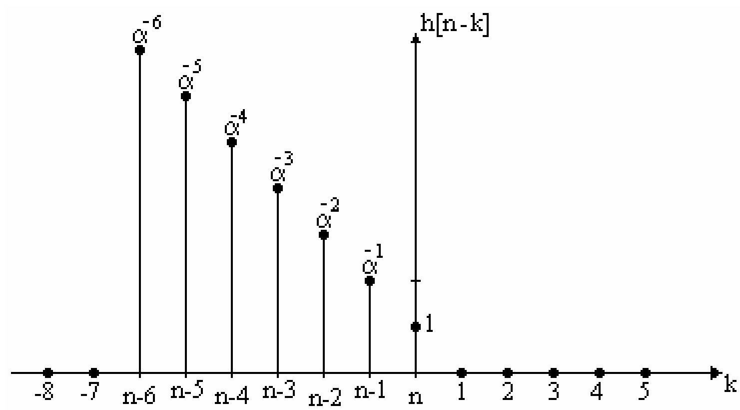
Se hace una inversión en el eje de variable independiente para *h[k]*.

$$h[k] \xrightarrow{\mathrm{T}} h[-k]$$

$$h[-k] = \begin{cases} \alpha^{-k} & 0 \le -k \le 6 \;\; = \;\; 0 \ge k \ge -6 \;\; = \;\; -6 \le k \le 0 \\ 0 & resto \end{cases}$$



Ahora, se toma *h[n-k]*, ¿Cómo queda *h[n-k]*?



$$h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \le n-k \le 6 \quad = \quad -n \le -k \le 6-n \quad = \quad n \ge k \ge n-6 \quad = \quad n-6 \le k \le n \\ 0 & resto \end{cases}$$

Si $n < 0 \quad \Rightarrow$ el dibujo se desplaza a la izquierda.

Si $n > 0 \quad \Rightarrow$ el dibujo se desplaza a la derecha.

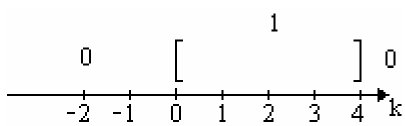
Lo importante es tomar *h[n-k]* y comenzar en un valor de *n<0* e ir aumentando “n” hasta que el producto de las dos señales *x[k]* y *h[n-k]* de cero.
Para cada uno de los diferentes valores de “n” se multiplican punto a punto *x[k]* y *h[n-k]*, y luego se hace la suma,

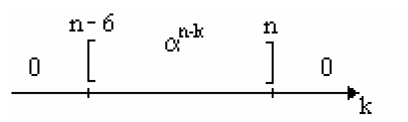
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Es necesario definir los intervalos donde *h[n-k]* se moverá sobre *x[k]*.

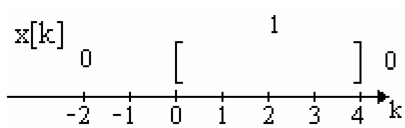
$$x[k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \le n-k \le 6 \; = \; -n \le -k \le 6-n \; = \; n \ge k \ge n-6 \; = \; n-6 \le k \le n \\ 0 & resto \end{cases}$$

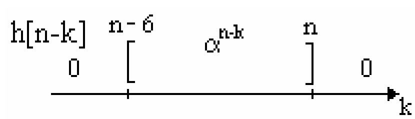




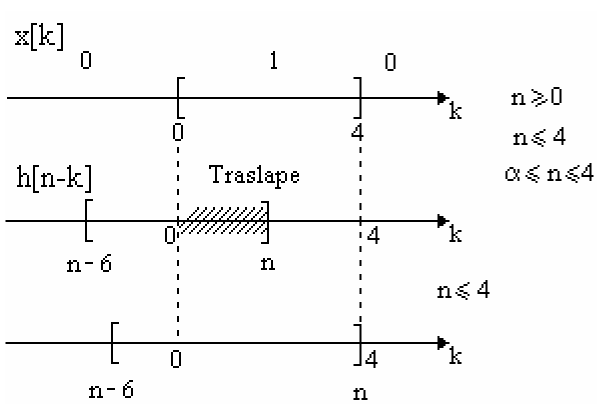
a) Para n < 0:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = 0$$ no existe traslape.



b) Para $n \ge 0$:

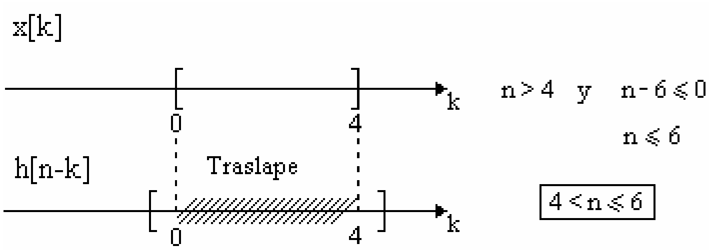


El intervalo donde se moverá “n” es $0 \le n \le 4$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k] \;\Rightarrow\; g[k] = x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \le k \le n \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

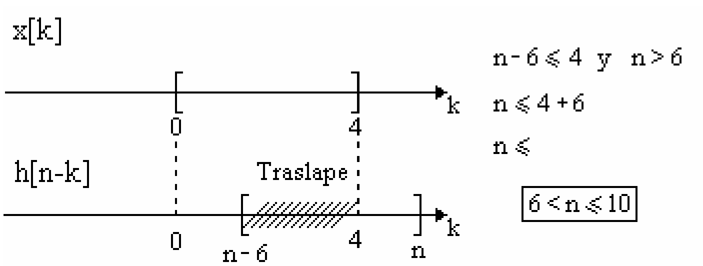
c) Para $n > 4$:



$$g[k] = x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & 0 \le k \le 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \alpha^{n} \sum_{k=0}^{4} (\alpha^{-1})^{k} = \alpha^{n} \left(\frac{1-(\alpha^{-1})^{5}}{1-(\alpha^{-1})} \right)$$

d).



$$g[k] = x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & n-6 \le k \le 4 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k}$$ $\rightarrow$ se hace cambio de variable.

$$r = K - n + 6 \quad \Rightarrow \quad n - k = 6 - r$$

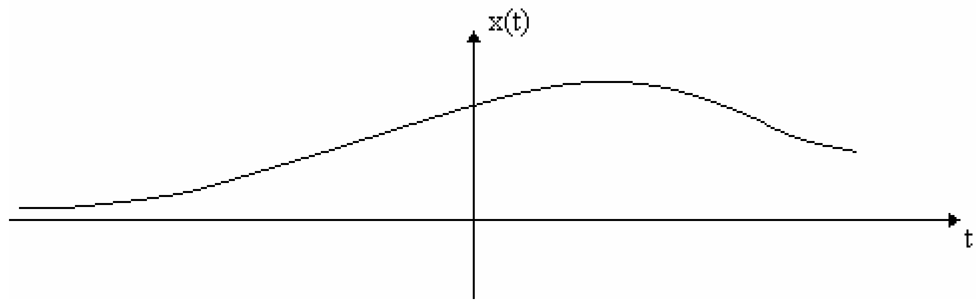
$$y[n] = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^{6} \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^{r} = \alpha^{6} \, \frac{1-(\alpha^{-1})^{n+1=10-n+1=-n+11}}{1-\alpha^{-1}}$$

e) Para n-6 > 4:
NO HAY TRASLAPE.

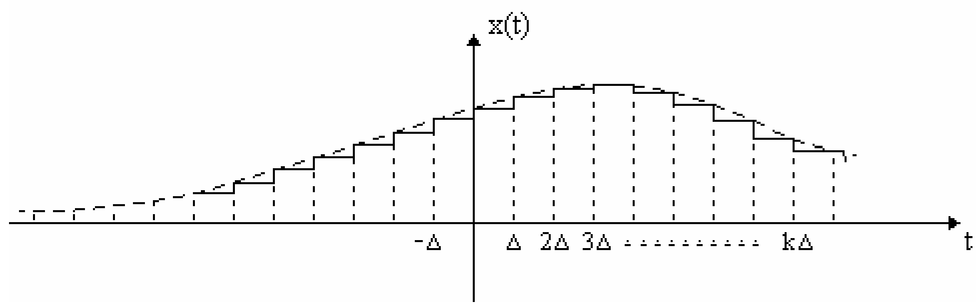
Convolución de sistemas LTI en tiempo discreto. [kamen], [oppe]

Sistemas continuos: Integral de Convolución
Al igual que en el caso discreto, lo que se busca es caracterizar completamente a un sistema en función de la respuesta el impulso unitario.
Todo se basó, en el caso discreto, con la propiedad de poder representar una señal como la superposición de señales impulso unitario escalado y desplazado.

Tomamos una señal,

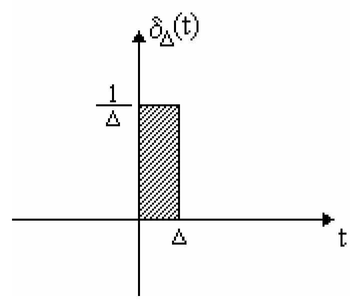


Se considera una aproximación *x*(*t*) denominada $\hat{x}(t)$ con señales impulso (desplazados y escalados).

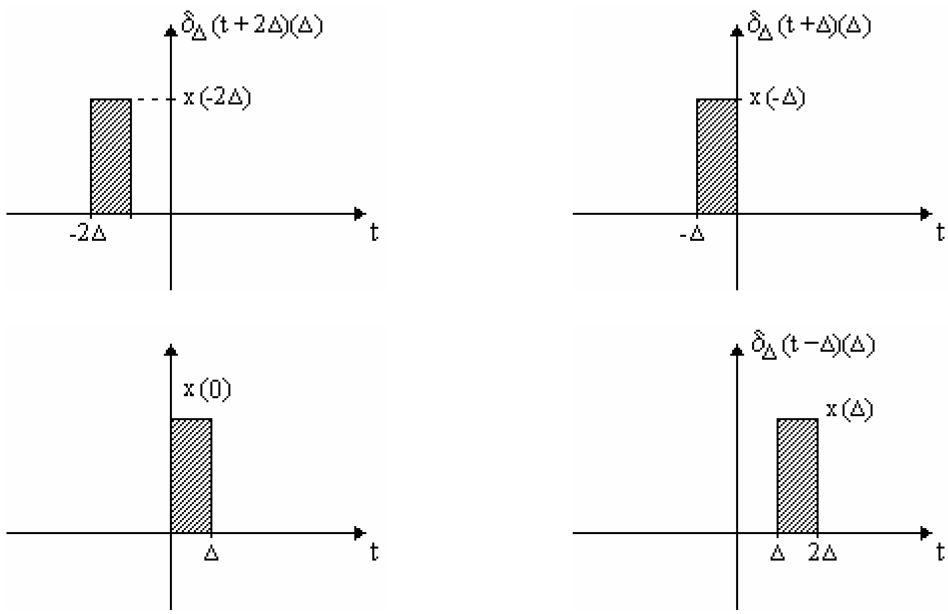


Se tiene una aproximación al impulso unitario

$$\delta_{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta} & 0\le t<\Delta\\ 0 & otro\quad t\end{cases}$$



Tomamos esta aproximación del impulso unitario y le realizamos dos operaciones: ESCALADO Y DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO.
Escalado: esta dada por el valor de la función *x*(*t*) en el tiempo donde se encuentra $\delta_\Delta(t)$.
Desplazamiento: puede ser un desplazamiento hacia la derecha o hacia la izquierda.



¿Cómo podemos representar la función *x*(*t*) en función de señales impulso unitario?
Para un tiempo "t"

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

Hemos representado una señal $\hat{x}(t)$ como una suma de señales impulso unitario escaladas y desplazadas $\delta_\Delta(t)$.
Ahora, si tenemos un sistema.

La salida será la superposición de las respuestas escaladas y desplazadas de $\delta_\Delta(t)$.

Si llamamos

$$\delta_\Delta(t-k\Delta) \xrightarrow{\mathrm{T}} \hat{h}_{k\Delta}(t)$$

Usando la propiedad de superposición, tenemos que

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

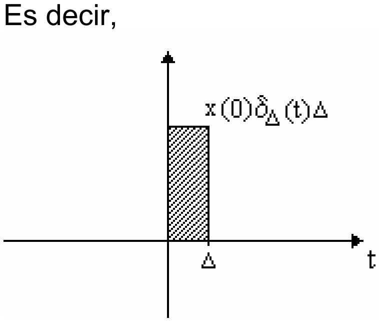
Ahora, por superposición

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

Si hacemos que $\Delta \to 0$

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

Se sabe que cada una de las señales impulso unitario, son validas en cierto intervalo de tiempo.
Es decir,



Este pulso es válido para $0 \le t \le \Delta$

Y como la señal que se forma es debido a la superposición de todos los pulsos, se tiene,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

Para cualquier valor de t, solo un término de la sumatoria es cero.
Podemos obtener o aplicar el límite cuando $\Delta \to 0$.
$\hat{x}(t)$ se aproxima a $x(t)$.

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

¿Qué sucede cuando $x(t) = u(t)$?

Donde $u(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau$$

Esto nos lleva a pensar que,

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau$ llamamos $x_{\tau}(t) = h(t-\tau)$

Entonces, $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

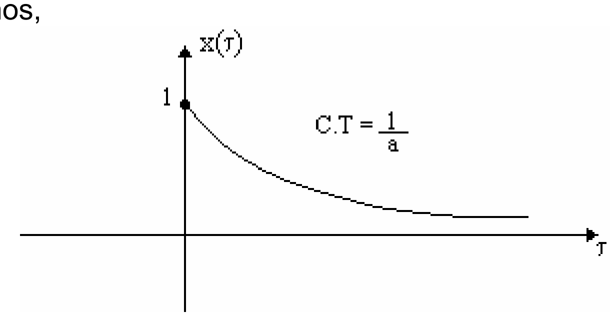
Ejemplo_1:

Sea un sistema LTI dado por $h(t) = u(t)$.

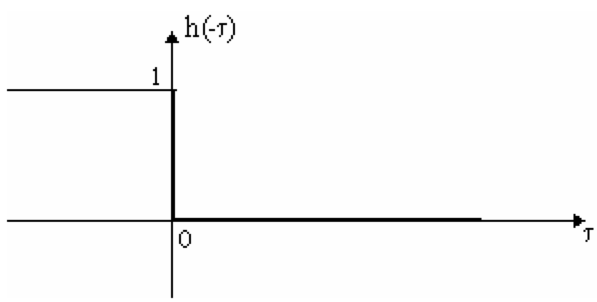
Con entrada $x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$

Tenemos que obtener $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

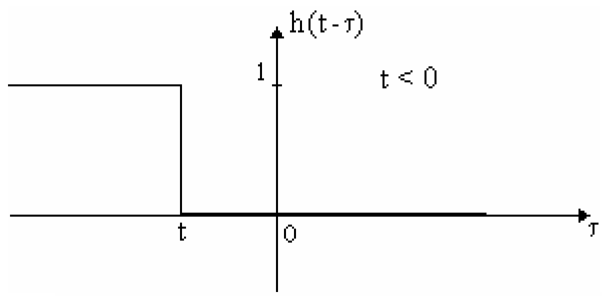
Primero representamos,

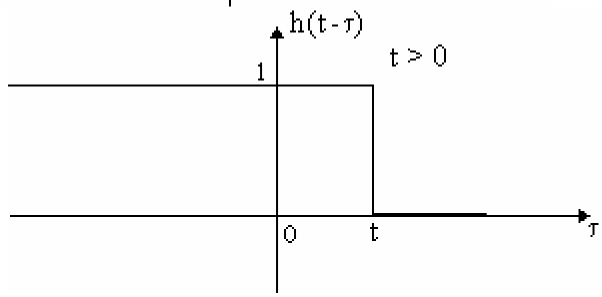


Representamos $h(-\tau)$



Ahora, como es $h(t-\tau)$, cuando $t < 0$ y $t > 0$.





Cuando t < 0 , entonces, al multiplicar las dos, $x(t)$ y $h(t\text{-}\tau)$ da un resultado de cero. La integral es valida en $t \geq 0$.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a}e - \frac{1}{a}e^{-at}$$

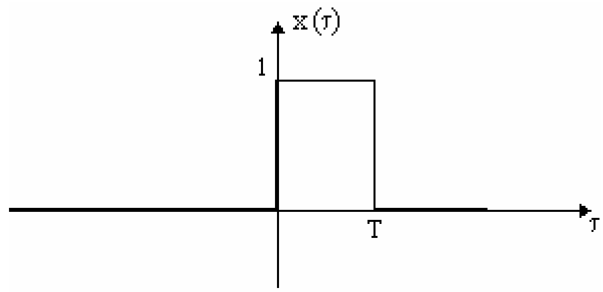
$$y(t) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

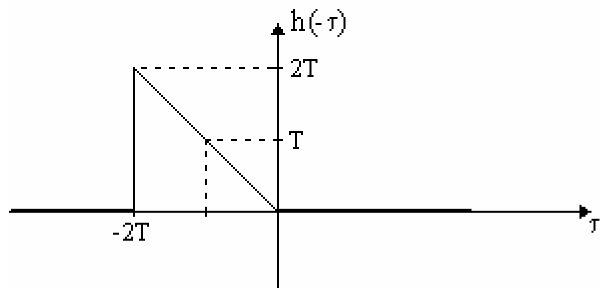
Ejemplo2: Realizar la convolución de las siguientes señales,

$$x(t) = \begin{cases} 1 \quad 0 < t < T \\ 0 \quad para \quad otro \quad valor \quad de \quad t \end{cases}$$

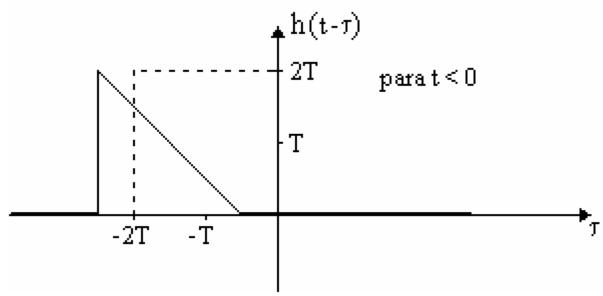
$$h(t) = \begin{cases} t \quad 0 < t < 2T \\ 0 \quad para \quad otro \quad valor \quad de \quad t \end{cases}$$

Dibujamos las señales en función de “τ”.



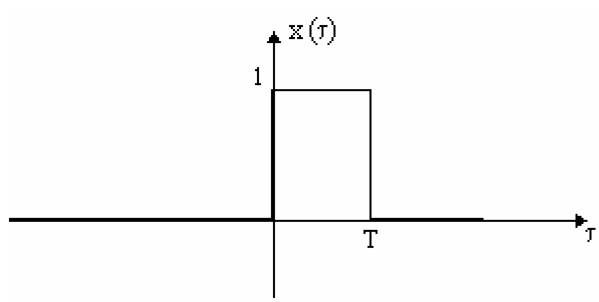


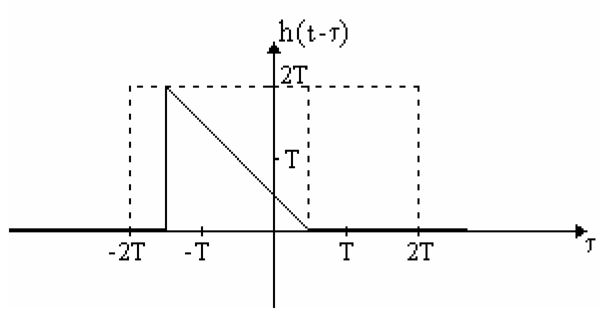
¿Cómo podemos ver a $h(t - \tau)$?



Solo es valida la integral para $t > 0$.

¿Que sucede cuando $h(-\tau)$ se corre $0 < t < T$?

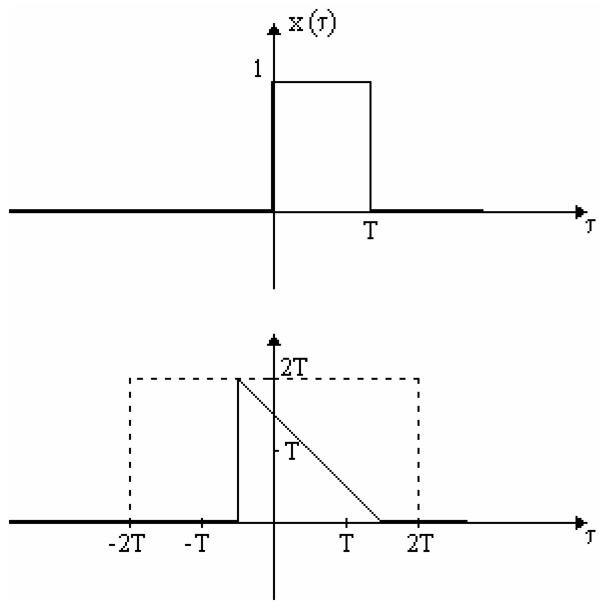




$$y(t) = \int_0^t t\,d\tau = \int_0^t (-\tau + t)\,d\tau = \left| -\frac{\tau^2}{2} + t\tau \right|_0^t$$

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + t^2 - 0 = \frac{1}{2}t^2$$

¿Qué sucede cuando $h(-\tau + t)$ se come T < t < 2T ?

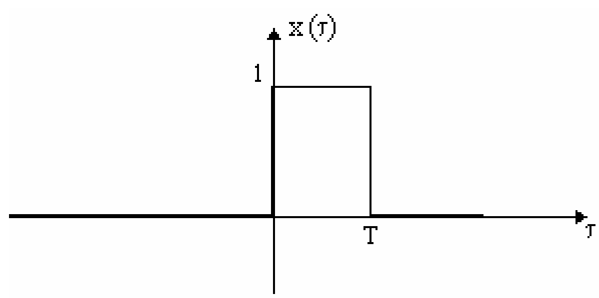


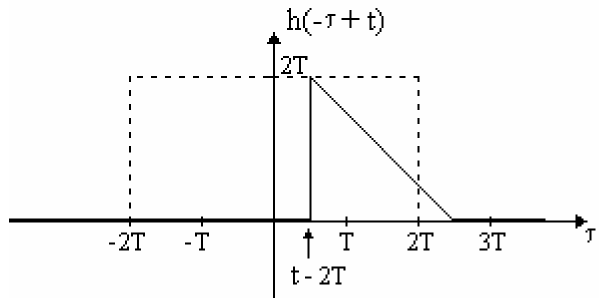
La integral debe estar evaluada entre 0 y T

$$y(t) = \int_0^T (-\tau + t)\,d\tau = \left| -\frac{\tau^2}{2} + t\tau \right|_0^T$$

$$y(t) = -\frac{T^2}{2} + tT$$

¿Qué sucede cuando $h(-\tau + t)$ se corre 2T < t < 3T ?





La integral debe ser evaluada entre t – 2T y T.

$$y(t)=\int_{0}^{T}(-\tau+t)d\tau=\left|-\frac{\tau^{2}}{2}+t\tau\right|_{t-2T}^{T}=-\frac{T^{2}}{2}+tT+\frac{(t-2T)^{2}}{2}-t(t-2T)$$

$$y(t)=-\frac{T^{2}}{2}+tT+\frac{1}{2}\left(t^{2}-4tT+4tT^{2}\right)-t^{2}+2tT$$

$$y(t)=\frac{3T^{2}}{2}+tT-\frac{1}{2}t^{2}$$

Propiedades de los Sistemas LTI. [kamen], [oppe]

Los sistemas LTI poseen la siguiente respuesta

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

La característica de un sistema LTI está determinada por su respuesta al impulso. Solo se cumple en sistemas LTI.

I) **Propiedad Conmutativa.**

Discreto:

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k]$$

Continuo:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Se reemplaza r = n – k

II) **Propiedad Distributiva.**

Discreto:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Continuo:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

III) **Propiedad Asociativa.**

Discreto:

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

Continuo:

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

IV) **Sistemas LTI con y sin memoria.**

Un sistema es sin memoria si su salida en cualquier tiempo depende solo del valor de la entrada en ese mismo tiempo.
Se sabe que

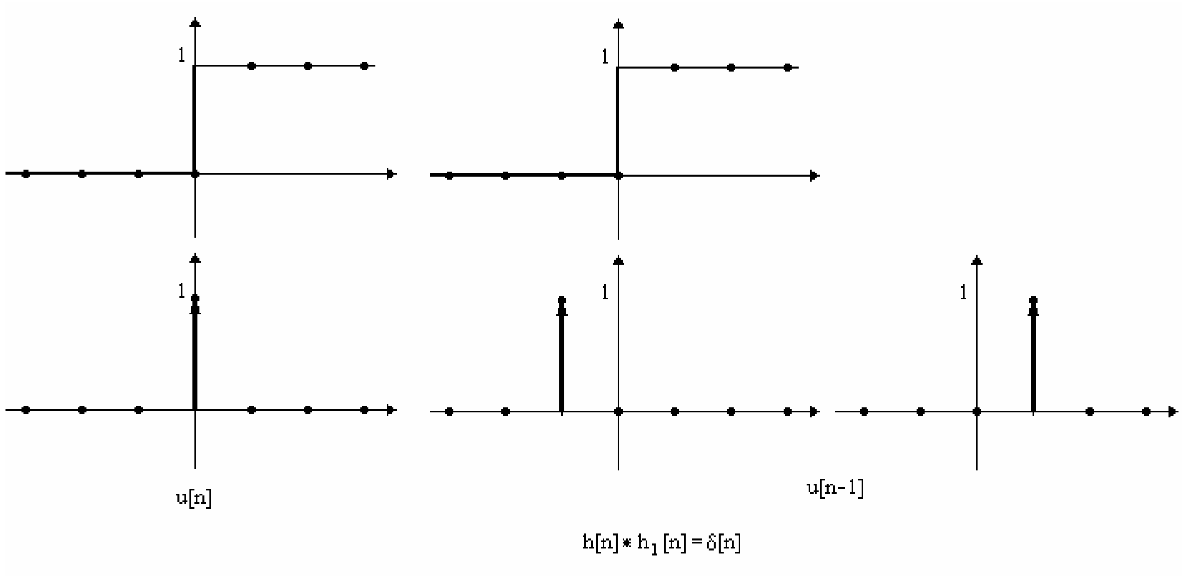
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[-1]h[n+1] + x[0]h[0] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + x[3]h[n-3] + ...$$

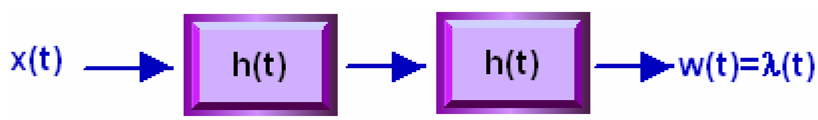
La única forma que esto sea cierto, es que $h[n] = 0$ para $n \neq 0$.

Para este caso
$h[n] = k\delta[n]$ para cumplir en la condición.
Donde $h[0] = k$, luego $y[n] = kx[n]$

$$h[n] * h_1[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] * \delta[n] - u[n]\delta[n-1]$$



V) **Invertibilidad.**

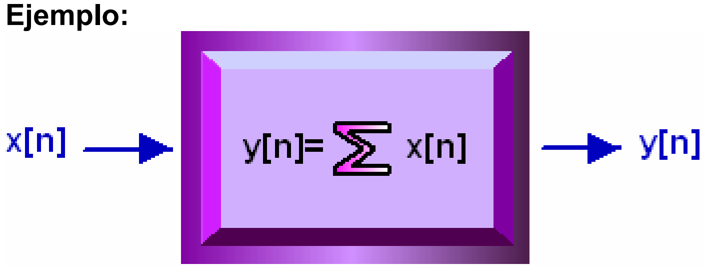


La respuesta total
al impulso es
$h(t)*h_1(t)$

$h_1(t)$ es la respuesta al impulso del sistema inverso $h(t)*h_1(t)=\delta(t)$.

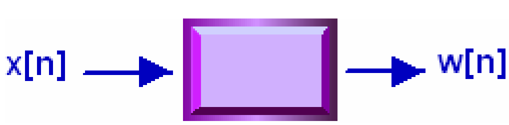
Caso discreto:
$h[n]*h_1[n]=\delta[n]$

Ejemplo:



$y[n]=x[n]+y[n-1]$

$y[n-1]=x[n-1]+y[n-2]+\sum_{k=-\infty}^{n-2}x[k]$



$w[n]=y[n]-y[n-1]=x[n]+\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]$

$$y[n-1] = y[n-2] + x[n-1]$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{-\infty}^{n-1} x[k]$$

El sistema inverso es $y[n] = x[n] - x[n-1]$

Si

$$x[n] = \delta[n]$$

$$entonces$$

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

CAPITULO 3.

Sistemas descritos por Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones en Diferencias. [kamen]

1. **Ecuaciones Diferenciales Lineales Entrada/Salida con Coeficientes Constantes.** [kamen], [oppe]

Se tienen los sistemas SISO (Single Input Single Output) como aquellos que poseen una entrada y una salida.

Estos sistemas pueden ser modelados usando una ecuación diferencial que muestra la relación entrada - salida.
Una ecuación diferencial Entrada / Salida que representa un sistema de tiempo continuo SISO es,

$$y^{(N)}(t)+\sum_{i=0}^{N-1} a_i y^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{M} b_j x^{(j)}(t) \qquad (1)$$

Donde,

$y^{(i)}(t) \rightarrow$ i-ésima derivada de *y*(*t*).

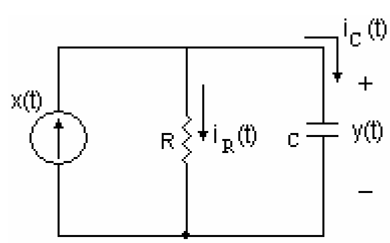
$x^{(j)}(t) \rightarrow$ j-ésima derivada de la señal de entrada *x*(*t*).

$\left.\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\right\} \rightarrow$ Constantes Є R.

Para resolver ésta ecuación diferencial se necesitan N condiciones iniciales definidas a continuación,

$\{y(0), y^{(1)}(0), y^{(2)}(0), ..., y^{(N-1)}(0)\}$

Se tiene el siguiente circuito eléctrico, definido como un sistema SISO.



$$\sum_j i_j(t)$$
$$x(t) - i_R(t) - i_C(t) = 0$$
$$x(t) - \frac{1}{R}y(t) - C\frac{dy(t)}{dt} = 0$$
$$x(t) = \frac{1}{R}y(t) + C\frac{dy(t)}{dt}$$

Está de acuerdo con la ecuación (1) $\left\{\frac{1}{C}x(t) = \frac{1}{RC}y(t) + \frac{dy(t)}{dt}\right.$ (2)

La solución de (2) está dada por,

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ Particular y homogénea.

La solución homogénea es,

$y_h(t) = ?$ En este caso $x(t)$ = 0.

Con esto, nos queda,

$$\frac{1}{R}y(t) + C\frac{dy(t)}{dt} = 0 \qquad (3)$$

Se plantea,

$$y_h(t) = Ae^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (4)$$

Se reemplaza $y_h(t)$ en la ecuación diferencial (3),

$$-\frac{CAe^{\frac{-t}{\tau}}}{\tau} + \frac{A}{R}e^{\frac{-t}{\tau}} = 0$$
$$Ae^{\frac{-t}{\tau}}\left(-\frac{C}{\tau} + \frac{1}{R}\right) = 0$$

$$\tau = RC \qquad (5)$$

Como se tiene una ecuación diferencial de primer orden, es necesario una condición inicial, $y_h(to)$.

Se reemplaza la condición inicial en (4).

$y_h(to) = Ae^{\frac{-to}{\tau}}$ luego $A = y_h(to)e^{\frac{to}{\tau}}$

La solución es,

$$y_h(t) = y(to)e^{\frac{to}{RC}}e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$y_h(t) = y(to)e^{-\frac{1}{RC}(t-to)} \qquad (6)$$

Ahora, se supone que $x(t) \neq 0 \quad para \quad t \geq to$
La ecuación diferencial del sistema es,

$$\frac{Cdy(t)}{dt} + \frac{1}{R}y(t) = x(t) \quad \text{Se multiplica por } \frac{1}{C}e^{\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{e^{\frac{t}{RC}}dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}y(t) = \frac{1}{C}e^{\frac{t}{RC}}x(t)$$

$$e^{\frac{t}{RC}}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t)\right\} = \frac{1}{C}e^{\frac{t}{RC}}x(t)$$

$$si \quad f(t) = e^{\frac{t}{RC}}y(t)$$

$$luego \quad \frac{df(t)}{dt} = e^{\frac{t}{RC}}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}y(t)$$

$$y \quad si \quad g(t) = \frac{1}{C}e^{\frac{t}{RC}}x(t)$$

$$por \quad \tan to \qquad \frac{df(t)}{dt} = g(t) \qquad (7)$$

$$\int_{f(to)}^{f(t)} \frac{df(t)}{dt}dt = \int_{to}^{t} g(t)dt$$

$$f(t) - f(to) = \int_{to}^{t} g(t)dt \qquad (8)$$

$$f(t) - f(to) + \int_{to}^{t} g(t)dt$$

$$e^{\frac{t}{RC}}y(t) = g(to)e^{\frac{to}{RC}} + \int_{to}^{t}\frac{1}{C}e^{\frac{\lambda}{RC}}x(\lambda)d\lambda \qquad multiplica \quad por \quad e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$y(t) = y(to)e^{\frac{-t}{RC}(t-to)} + \frac{1}{C}\int_{to}^{t} e^{\frac{-1}{RC}(t-\lambda)}x(\lambda)d\lambda \qquad (9)$$

Es posible tener una ecuación diferencial de primer orden más general,

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \qquad (10)$$

$$hay \quad que \quad llevarla \quad a \quad la \quad forma \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Para esto, se define una función auxiliar,

$$(12) \quad f(t) = y(t) - b_1 x(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = f(t) + b_1 x(t) \qquad (11)$$

$$luego, \quad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} \qquad (13)$$

Reemplazando (13) y (11) en (10),

$$\frac{df}{dt} + \cancel{b_1 \frac{dx}{dt}} + a\{f(t) + b_1 x(t)\} = \cancel{b_1 \frac{dx}{dt}} + b_0 x(t)$$

$$\frac{df}{dt} + a\{f(t) + b_1 x(t)\} = b_0 x(t)$$

$$\frac{df}{dt} + af(t) = (b_0 - ab_1)x(t) \qquad (14)$$

(14) ya tiene la forma $\frac{dy}{dt} + ay(t) = bx(t)$

Esta ecuación tiene como solución, para $t \geq to$.

$$y(t) = e^{-a(t-to)} y(to) + \int_{to}^{t} e^{-a(t-\lambda)} (b_0 - ab_1) x(\lambda) d\lambda$$

Ahora, para (14) la solución es,

$$f(t) = e^{-a(t-to)} f(to) + \int_{to}^{t} e^{-a(t-\lambda)} (b_0 - ab_1) x(\lambda) d\lambda \qquad (15)$$

Reemplazando (12) en (15)

$$y(t) - b_1 x(t) = e^{-a(t-to)} \{y(to) - b_1 x(to)\} + \int_{to}^{t} e^{-a(t-\lambda)} (b_0 - ab_1) x(\lambda) d\lambda$$

$$(16) \quad y(t) = \{y(to) - b_1 x(to)\} e^{-a(t-to)} + \int_{to}^{t} e^{-a(t-\lambda)} (b_0 - ab_1) x(\lambda) d\lambda + b_1 x(t)$$

Ecuaciones en Diferencias. [kamen], [oppe]

De manera general se puede plantear,

$$(17) \qquad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad\qquad n \geq 0$$

$$donde \qquad \left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} \; constantes$$

Se puede definir el operador,

$$D^k y[n] = y[n-k] \qquad\qquad (18)$$

Usando (18) en (17)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k D^k y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k D^k x[n]$$

La solución de la ecuación (17) es de manera análoga es la solución de una ecuación diferencial.

$$(19) \qquad y[n] = \underbrace{y_h[n]}_{\text{depende de las condiciones iniciales}} + \underbrace{y_p[n]}_{\text{depende de la entrada}}$$

La ecuación (17) se puede expresar de la siguiente forma,

$$(20) \qquad a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$(21) \qquad y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\}$$

En la ecuación (21) se pudo observar lo siguiente,

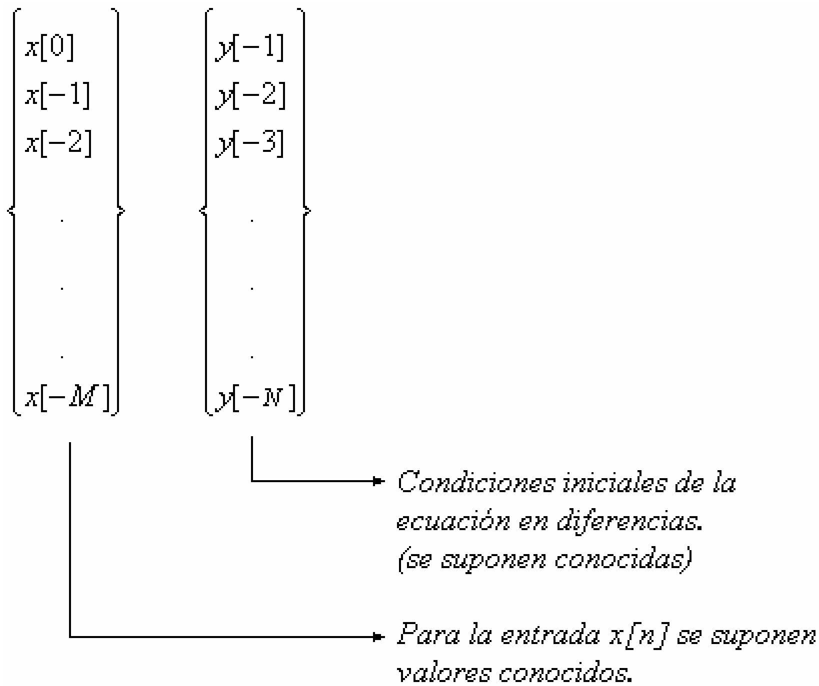
$* \quad x[n-k] \;\rightarrow\; es \;\; conocida \;\; (datos \;\; conocidos).$

$* \quad si \;\; y[n-k] \;\; es \;\; conocida, \;\; entonces \;\; se \;\; puede \;\; determinar \;\; y[n].$

- Cuando en (21) se hace n = 0, resulta lo siguiente,

$$y[0] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[-k] \right\} \qquad\qquad (22)$$

¿Qué se necesita en (22) para obtener *y*[0]?



- Haciendo en (21) *n* = 1, resulta lo siguiente,

$$y[1] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[1-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[1-k]\right\} \qquad (23)$$

¿Qué se necesita en (23)?

$k = 0 \;\rightarrow\; x[1]$	$k = 1 \;\rightarrow\; y[0]$
$k = 1 \;\rightarrow\; x[0]$	$k = 2 \;\rightarrow\; y[-1]$
$k = 2 \;\rightarrow\; x[-1]$	$k = 3 \;\rightarrow\; y[-2]$
$k = 3 \;\rightarrow\; x[-2]$	$k = 4 \;\rightarrow\; y[-3]$
.	.
.	.
.	.
$k = M \;\rightarrow\; x[1-M]$	$k = N \;\rightarrow\; y[1-N]$

A este procedimiento se le llama “Solución por Recursividad”, es decir, realizando iteraciones.

Ejemplo:

Se tiene $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n\geq 0 \qquad (24)$

Con condiciones iniciales

$$y[-1]=1$$
$$y[-2]=0$$

Se tiene, $y[n]=\frac{3}{4}y[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}y[n-2]$

- para n = 0,

$$y[0]=\frac{3}{4}y[-1]+1-\frac{1}{8}y[-2]$$
$$y[0]=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

- para n = 1,

$$y[1]=\frac{3}{4}y[0]+\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}y[-1]$$
$$y[1]=\frac{21}{16}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{27}{16}$$

- para n = 2,

$$y[2]=\frac{3}{4}y[1]+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}y[0]$$
$$y[2]=\frac{81}{64}+\frac{1}{4}-\frac{7}{32}=\frac{73}{64}$$

Solución Homogénea de la Ecuación en Diferencias. [kamen], [oppe]

Esta solución se obtiene cuando se hace $x[n]$ = 0 para toda n, en la ecuación (17).

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=0 \qquad (24)$$

La solución de (24) tiene la forma,

$$y[n]=A\alpha^n \qquad (25)$$

Sustituyendo (25) en (24) se obtiene,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A\alpha^{(n-k)} = 0 \qquad (26)$$

Existen "N" raíces características $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_N$; las cuales pueden ser iguales o diferentes.
Si todas las raíces son diferentes,

$$y_h[n] = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + ... + A_N\alpha_N^n$$

Ejemplo: se tiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$y[n] - \frac{13}{12}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] - \frac{1}{24}y[n-3] = 0$$

Las condiciones iniciales son

$$y[-1] = 6$$
$$y[-2] = 6$$
$$y[-3] = -2$$

La ecuación característica es,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\alpha^{-k} = 0 \qquad donde \qquad N = 3$$
$$\sum_{k=0}^{3} a_k\alpha^{-k} = 0$$
$$a_0\alpha^0 + a_1\alpha^{-1} + a_2\alpha^{-2} + a_3\alpha^{-3} = 0$$
$$1 - \frac{13}{12}\alpha^{-1} + \frac{3}{8}\alpha^{-2} - \frac{1}{24}\alpha^{-3} = 0$$
$$\alpha^3 - \frac{13}{12}\alpha^2 + \frac{3}{8}\alpha - \frac{1}{24} = 0$$

Se encuentran todas las raíces,

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\left(\alpha - \frac{1}{4}\right) = 0$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

Como todas las raíces son diferentes,

$$y_h[n] = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n + A_3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Si se substituyen las condiciones iniciales,

$$y[-1]=6=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+A_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$
$$y[-2]=6=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+A_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$
$$y[-3]=-2=A_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+A_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+A_3\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$$

Se resuelve éste sistema de ecuaciones,

$$A_1=7$$
$$A_2=-\frac{10}{3}$$
$$A_3=\frac{1}{2}$$

La solución homogénea es,

$$y_h[n]=7\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Solución Particular de la Ecuación en Diferencias. [kamen], [oppe]

La ecuación en diferencias tiene la forma,

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$ Suma ponderada de $x[n]$ con versiones retrasadas.

Discretización de Ecuaciones Diferenciales. [kamen]

1. **Caso Primer Orden.**

Se tiene una ecuación diferencial de primer orden que describe a un sistema LTI de tiempo continuo.

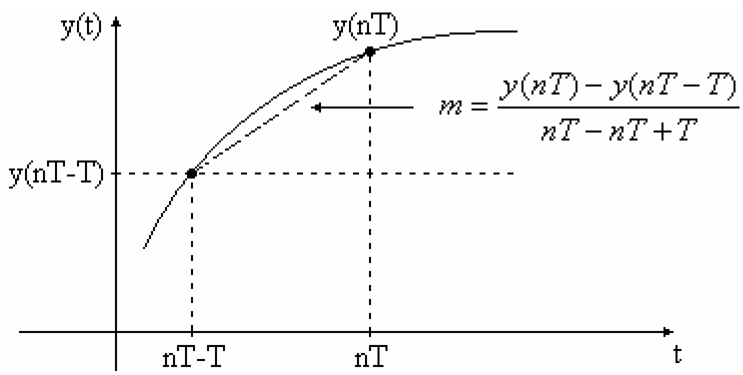
$$\frac{dy}{dt} + ay(t) = bx(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + bx(t) \qquad a \quad y \quad b \quad son \quad cons\tan tes$$

Se ajusta

$$t = nT \begin{cases} T & \rightarrow número \quad fijo \quad positivo \\ n & \rightarrow entero \quad (n \in Z) \end{cases}$$

Esto hace que,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT} = -ay(nT) + bx(nT)$$



$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT} \approx \frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} = -ay(nT) + bx(nT)$$

Se establece $y[n] = y(t)\big|_{t=nT}$ $\qquad$ $x[n] = x(t)\big|_{t=nT}$

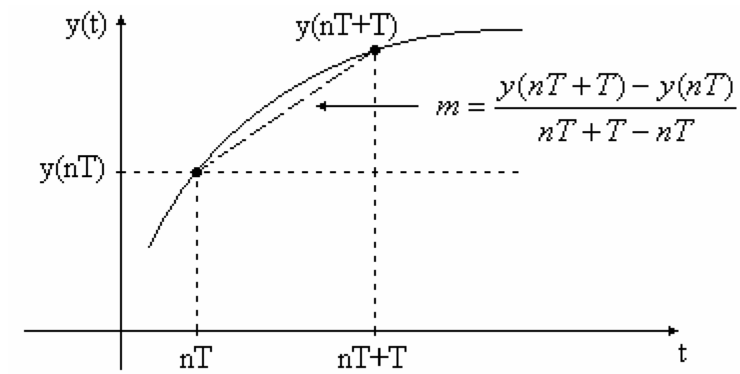
$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} = -ay[n] + bx[n]$$
$$y[n] + aTy[n] = Tbx[n] + y[n-1]$$
$$y[n] = \frac{1}{1+aT} y[n-1] + \frac{Tb}{1+aT} x[n]$$

Pero la aproximación a la primera derivada se puede obtener de la siguiente forma,

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + bx(t)$$

$$si \quad t = nT,$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT} = -ay(nT) + bx(nT)$$



Se reemplaza la aproximación,

$$\frac{y(nT+T) - y(nT)}{T} = -ay(nT) + bx(nT)$$

$$y(nT+T) - y(nT) = -aTy(nT) + Tbx(nT)$$

$$y[n+1] - y[n] = -aTy[n] + Tbx[n]$$

Tener una ecuación en diferencias con diferencias adelante no es muy conveniente. Por esto, se hace $n = n-1$

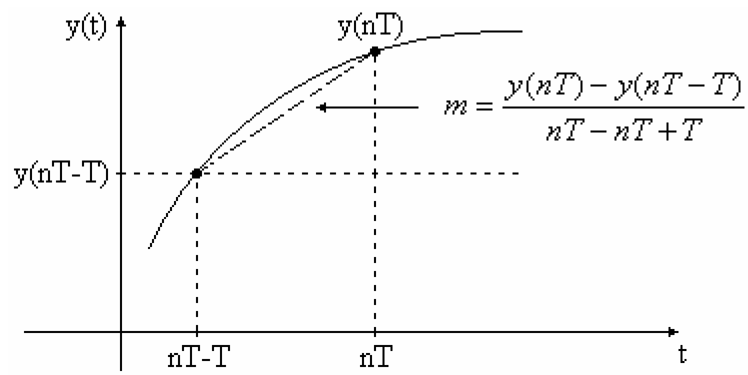
$$y[n] - y[n-1] = -aTy[n-1] + Tbx[n-1]$$

$$y[n] = (1-aT)y[n-1] + Tbx[n-1]$$

La aproximación a la primera derivada se puede obtener de la siguiente forma.

$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + bx(t)$$

Si $t = nT - T$,



$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT-T} = -ay(nT-T) + bx(nT-T)$$

$$\frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} = -ay(nT-T) + bx(nT-T)$$

$$\frac{y[n]y[n-1]}{T} = -ay[n-1] + bx[n-1]$$

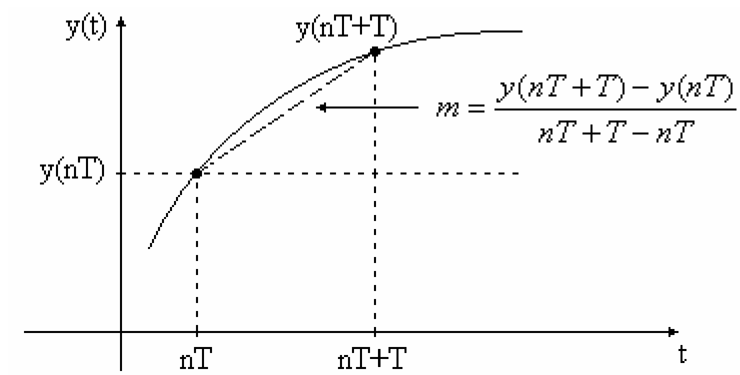
$$y[n] = (1 - aT)y[n-1] + Tbx[n-1]$$

2. Caso Segundo Orden.

Se tiene,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

Se aproxima,



$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT-T) - y(nT)}{T}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT+T} - \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=nT}}{T} = \frac{\frac{y(nT+2T) - y(nT+T)}{T} - \frac{y(nT+T) - y(nT)}{T}}{T}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT+2T)-2y(nT+T)+y(nT)}{T^2}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial,

$$\frac{y(nT+2T)-2y(nT+T)+y(nT)}{T^2}+a_1\left(\frac{y(nT+T)}{T}-\frac{y(nT)}{T}\right)+a_0y(nT)=$$
$$b_1\left(\frac{x(nT+T)}{T}-\frac{x(nT)}{T}\right)+b_0x(nT)$$

Simplificando,

$$\frac{y[n+2]}{T^2}-\frac{2y[n+1]}{T^2}+\frac{y[n]}{T^2}+\frac{a_1}{T}y[n+1]-\frac{a_1}{T}y[n]+a_0y[n]=\frac{b_1}{T}x[n+1]-\frac{b_1}{T}x[n]+b_0x[n]$$

Haciendo *n* = *n* – *2*

$$\frac{1}{T^2}y[n]-\frac{2}{T^2}y[n-1]+\frac{1}{T^2}y[n-2]+\frac{a_1}{T}y[n-1]-\frac{a_1}{T}y[n-2]+a_0y[n-2]=$$
$$\frac{b_1}{T}x[n-1]-\frac{b_1}{T}x[n-2]+b_0x[n-2]$$

$$\frac{1}{T^2}y[n]+\left(a_0+\frac{1}{T^2}-\frac{a_1}{T}\right)y[n-2]+\left(\frac{a_1}{T}-\frac{2}{T^2}\right)y[n-1]=\frac{b_1}{T}x[n-1]+\left(b_0-\frac{b_1}{T}\right)x[n-2]$$

CAPITULO 4.

Series de Fourier de Señales Periódicas de tiempo discreto y continuo.
[kamen], [oppe]

Representación de Señales Periódicas en Series de Fourier.

Hasta el momento se ha representado una señal como una combinación de impulsos desplazados, lo cual nos permitió desarrollar y obtener la respuesta de un sistema LTI en forma de suma de convolución o integral de convolución.

Se tratarán las exponenciales complejas con el fin de poder representar una señal como una combinación lineal de señales básicas.

A ésta representación se le conoce como SERIE y TRANSFORMADA DE FOURIER.

Respuesta de Sistemas LTI a Exponenciales Complejas.

Cuando se tiene una señal como combinación lineal de señales básicas, éstos deben poseer las siguientes propiedades:

- Estas señales se pueden usar para construir una variedad de señales.
- La respuesta de un sistema LTI a una señal básica debe ser simple, lo que permite construir la respuesta a la combinación lineal de la entrada.

Esto hace plantearse lo siguiente:

¿El conjunto de señales exponenciales complejas continuas y discretas presenta estas dos propiedades?

Nosotros vimos que una señal exponencial compleja continua tiene la forma

$x(t) = Ae^{j\omega ot}$ ¿Cuál es el periodo? $To = \frac{2\pi}{|\omega o|}$ ¿Es periódica?

Si

$$x(t) = A\cos(\omega ot) + jAsen(\omega ot)$$

$$x_2(t) = B\cos(\omega ot) = \frac{B}{2}e^{j\omega ot} + \frac{B}{2}e^{-j\omega ot}$$

$$x_3(t) = Ce^{j(\omega ot+\phi)}$$

DE FORMA GENERAL,

$$x(t) = Ae^{st} \quad s \to complejos$$

Nosotros vimos que una señal exponencial compleja discreta tiene la forma,

$$x[n] = C\alpha^n \quad donde \quad C \equiv Número, \quad \alpha = e^{\beta}$$

$pero \quad C \equiv |C|e^{j\theta}, \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega o}$ De forma general.

$x[n] = e^{j\omega on}$ ¿Es periódica? $\omega o N = 2\pi m \rightarrow \dfrac{\omega o}{2\pi} = \dfrac{m}{N} \rightarrow si \quad esto \quad es \quad racional.$

DE FORMA GENERAL, $x[n] = Z^n$

Resumiendo,
$s \rightarrow \# \quad complejo$
$Z \rightarrow \# \quad complejo$

Podemos establecer la siguiente pregunta,
¿Cómo es la respuesta de un sistema LTI ante entradas exponenciales complejas?
¿Por qué es importante estudiar la exponencial compleja en sistemas LTI?

Tenemos un sistema LTI con respuesta al impulso *h*(*t*). Tenemos una entrada al sistema $x(t) = e^{st}$
La salida de sistema es,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

$$e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$$

H(*s*) factor complejo de amplitud.

Un sistema que posee una salida compuesta de una constante compleja multiplicada por la entrada.
A esta señal se le conoce como FUNCIÓN PROPIA (EIGENFUNCIÓN) del sistema.
A el factor amplitud se el conoce como VALOR PROPIO (EIGENVALUE).

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-st}d\tau$$

Las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI.

Tenemos un sistema LTI con h[n] respuesta al impulso unitario discreto,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad \rightarrow \quad salida$$

$$x[n] = Z^n \quad \rightarrow \quad entrada$$

$$\psi[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n]Z^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]Z^n Z^{-k} = Z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]Z^{-k} = H(Z)Z^n$$

Sumatoria convergente

Tenemos que: las exponenciales complejas discretas son funciones propias de los sistemas.

Supongamos que,

$x(t) = a_1 e^{s1t} + a_2 e^{s2t}$ Con base e el resultado anterior (función propia).

$$a_1 e^{s1t} \rightarrow a_1 H_1(s_1) e^{s1t}$$
$$a_2 e^{s2t} \rightarrow a_2 H_2(s_2) e^{s2t}$$

Con base en la propiedad de superposición,

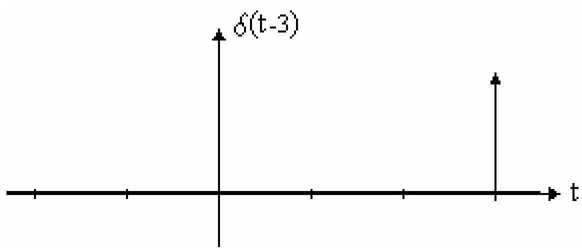
$$y(t) = a_1 H_1(s_1) e^{s1t} + a_2 H_2(s_2) e^{s2t}$$

DE FORMA GENERAL

Caso continuo $\begin{cases} si \quad se \quad tiene \qquad x(t) = \sum_k a_k e^{Skt} \\ la \quad salida \quad es \quad y(t) = \sum_k a_k H_k(s_k) e^{Skt} \end{cases}$

Caso discreto $\begin{cases} si \quad se \quad tiene \qquad x[n] = \sum_k a_k {Z_k}^n \\ la \quad salida \quad es \quad y[n] = \sum_k a_k H_k(Z_k) {Z_k}^n \end{cases}$

Ejemplo: se tiene un sistema $y(t) = x(t-3)$
Si $x(t) = e^{j2t}$ ¿Cuál es la respuesta al impulso? Si $x(t) = \delta(t)$
Entonces, $h(t) = \delta(t-3)$



Si $x(t) = e^{j2t} \Rightarrow y(t) = H(s)e^{j2t}$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-3)e^{-3\tau}d\tau = e^{-3s} \quad como \quad s = j2$$

$$H(j2) = e^{-j6}$$

$$y(t) = H(j2)e^{j2t} = e^{-j6}e^{j2t} = e^{j(2t+6)}$$

Ejemplo: consideremos la siguiente entrada,

$x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)$ La salida será, $con \quad y(t) = x(t-3)$

$$y(t) = \cos(4(t-3)) + \cos(7(t-3))$$

Tomamos la función *x*(*t*) y la expresamos en función de exponenciales complejas.

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{-j7t}$$

Se sabe que $H(s) = e^{-3s}$

$$y(t) = \frac{1}{2}H_1(s_1)e^{j4t} + \frac{1}{2}H_2(s_2)e^{-j4t} + \frac{1}{2}H_3(s_3)e^{j7t} + \frac{1}{2}H_4(s_4)e^{-j7t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-j12}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{j12}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{-j21}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{j21}e^{-j7t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{j(4t-12)} + \frac{1}{2}e^{j(-4t+12)} + \frac{1}{2}e^{j(7t-21)} + \frac{1}{2}e^{j(-7t+21)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j4(t-3)} + \frac{1}{2}e^{j7(t-3)} + \frac{1}{2}e^{-j7(t-3)}$$

$$y(t) = \cos[4(t-3)] + \cos[7(t-3)]$$

Series de Fourier de Señales Periódicas de Tiempo Continuo

[kamen], [oppe]

Combinaciones Lineales de Exponenciales Complejas Relacionadas Armónicamente.

Al comienzo del curso, encontramos las exponenciales complejas relacionadas armónicamente.
Armónicas, son exponenciales periódicas con un periodo común **To**.

Si tengo una señal exponencial compleja, $x(t) = e^{j\omega t}$.
¿Qué se necesita para que esta señal sea periódica?

$$e^{j\omega t} = e^{j\omega(t+To)} = e^{j\omega t} e^{j\omega To}$$

$$e^{j\omega To} = 1 \Rightarrow \omega To = 2\pi k$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Donde, $\omega o = \dfrac{2\pi}{To} \rightarrow \textit{frecuencua} \quad \textit{fundamental}$

Para que se cumpla $\omega To = 2\pi k$ $\qquad \omega \rightarrow$ debe ser múltiplo de ωo (entero)

Reemplazamos $\omega o = \dfrac{2\pi}{To} \;\; o \;\; To = \dfrac{2\pi}{\omega o} \;\; \Rightarrow \;\; \omega \dfrac{2\pi}{\omega o} = 2\pi k \;\; \Rightarrow \;\; \omega = \omega o k$

Reemplazamos $\omega = \omega o k$ y tendremos un conjunto de exponenciales relacionadas armónicamente,

$\varphi_k(t) = e^{j\omega okt}$ $\qquad$ Si k=0 $\rightarrow$ $\varphi_o(t) = 1$

Para que $e^{j\omega okt}$ sea periódica, se tiene, $e^{j\omega ok(t+To)} = e^{j\omega okt} e^{j\omega okTo}$

$k\omega oTo = 2\pi k \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{To}{k} = \dfrac{2\pi}{\omega ok}$ Esto hace que la k-ésima armónica sea periódica con periodo fundamental *To*.
Un conjunto de señales relacionadas armónicamente es,

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega ot} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)T} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Cada una de las señales de $\varphi_k(t)$ tiene una frecuencia fundamenta que es múltiplo de ωo. Esto hace que cada señal $\varphi_k(t)$ sea periódica en periodo T.
Podemos tener una señal *x*(*t*) conformada por un conjunto de exponentes relacionados armónicamente,

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega ot}=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$ Representación de la serie de Fourier

Combinación lineal con periodo T.

Para k=0 se tiene una constante.

Para k=1 posee frecuencia fundamental ωo.
K=-1 "Componentes fundamentales".
"Componentes de la 1° armónica".

Para k=N "Componentes de la N-ésima armónica".
K=-N

Ejemplo: se tiene una señal periódica *x*(*t*) con frecuencia fundamental de $5\pi[rad/seg]$. expresada de la siguiente forma,

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{+3}a_k e^{j5\pi tk}$$

Donde

$$a_o=1$$

$$a_1=\frac{1}{4}=a_{-1}$$

$$a_2=\frac{1}{2}=a_{-2}$$

$$a_3=\frac{1}{3}=a_{-3}$$

Reescribimos la señal,

$$x(t)=a_{-3}e^{j5\pi t(-3)}+a_{-2}e^{j5\pi t(-2)}+a_{-1}e^{j5\pi t(-1)}+a_0e^{j5\pi t(0)}+a_1e^{j5\pi t(1)}+a_2e^{j5\pi t(2)}+a_3e^{j5\pi t(3)}$$

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{-j15\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j10\pi t}+\frac{1}{4}e^{-j5\pi t}+1+\frac{1}{4}e^{j5\pi t}+\frac{1}{2}e^{j10\pi t}+\frac{1}{3}e^{j15\pi t}$$

$$x(t)=1+\frac{1}{4}\left(e^{j5\pi t}+e^{-j5\pi t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j10\pi t}+e^{-j10\pi t}\right)+\frac{1}{3}\left(e^{j15\pi t}+e^{-j15\pi t}\right)$$

$$x(t)=1+\frac{1}{2}\cos(5\pi t)+\cos(10\pi t)+\frac{2}{3}\cos(15\pi t)$$

Reemplazamos,

x(*t*) función real, entonces, $x^*(t)$ = *x*(*t*) como

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega ot}\Rightarrow x^*(t)=x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k^* e^{-jk\omega ot}$$

Si reemplazamos *k* por –*k*,

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^{*} e^{jk\omega ot}$ Esto hace que $a_k = a_{-k}^{*}$ o $a_k^{*} = a_{-k}$ esto hace que a_k y a_{-k} *sean iguales.*

Con base en esto, tomamos

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

$$x(t)=a_o+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k e^{jk\omega ot}+a_{-k}e^{-jk\omega ot}\right)$$

Estos dos términos son constantes
ya que son conjugados.

$$x(t)=a_o+\sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{a_k e^{jk\omega ot}\right\}$$

pero

$$a_k = A_k e^{j\theta_K}$$

$$x(t)=a_o+\sum_{k=1}^{+\infty} 2\,\mathrm{Re}\left\{A_k e^{j(k\omega ot+\theta_K)}\right\}$$

$$x(t)=a_o+2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega ot+\theta_K)$$

Forma más común de las series de Fourier.

Pero $a_k = B_k + jC_k \Rightarrow x(t)=a_o+2\sum[B_k\cos(\omega okt)-C_k sen(\omega okt)]$

Representación en Series de Fourier.

Hasta el momento hemos obtenido la representación de una señal y la respuesta de un sistema a esa señal en el dominio del tiempo, ya sea, en tiempo discreto o en tiempo continuo.

Fourier hablaba o fundamenta su concepto en representar una señal como una suma de exponenciales complejas, cada una de ellas con un escalamiento. Ese escalamiento se conoce como los coeficientes de la serie de Fourier.

La importancia de las exponenciales complejas en el estudio de sistemas LTI está en el hecho que la respuesta de un sistema LTI en una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja solo son un cambio de amplitud.

Se toma un sistema de tiempo continuo,

$$x(t)\rightarrow LTI \rightarrow y(t)$$

Donde,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Si se tiene, $x(t) = e^{st}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad donde \quad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Se toma un sistema de tiempo discreto,

$$x[n] \rightarrow LTI \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad si \quad x[n] = Z^n$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]Z^{n-k} = Z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]Z^{-k}$$

$$y[n] = H(Z)Z^n \quad donde \quad H(Z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]Z^{-k}$$

Si se generaliza

$$x(t) = a_1e^{S_1t} + a_2e^{S_2t} + a_3e^{S_3t}$$

Como el sistema es LTI

$$a_1e^{S_1t} \rightarrow LTI \rightarrow a_1H(s_1)e^{S_1t}$$
$$a_2e^{S_2t} \rightarrow LTI \rightarrow a_2H(s_2)e^{S_2t}$$
$$a_3e^{S_3t} \rightarrow LTI \rightarrow a_3H(s_3)e^{S_3t}$$
$$x(t) \rightarrow LTI \rightarrow y(t) = a_1H(s_1)e^{S_1t} + a_2H(s_2)e^{S_2t} + a_3H(s_3)e^{S_3t}$$

En general,

Si $x(t) = \sum_k a_k e^{S_K t}$

$$x(t) \rightarrow LTI \rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k)e^{S_K t}$$

Una señal es periódica si

$$x(t) = x(t+T)$$

Existe un $T \in R$ tal que cumple lo anterior además, $\omega o = \frac{2\pi}{T} \rightarrow$ frecuencia fundamental.

Existe la señal,

$x(t) = e^{j\omega ot}$ La cual es periódica con $T = \frac{2\pi}{\omega o}$

Existe el conjunto de señales relacionadas armónicamente, $\phi_k(t)$.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega ot} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} \qquad k = 0,1,2,3,....$$

Cada $\phi_k(t)$ posee una frecuencia fundamental que es múltiplo de ωo, siendo cada $\phi_k(t)$ periódica con periodo *T*.
De ésta forma se puede tener una condición lineal de exponenciales complejas relacionadas armónicamente,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

Supongamos que una señal se pueda representar de la siguiente forma,

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$ Esto hace necesario que se tengan que determinar los coeficientes a_k.

Multiplicamos

$$x(t) * e^{-jn\omega ot} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot} e^{-jn\omega ot}$$

$\text{int}\, egramos,$

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega ot} dt = \sum a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega ot} dt$$

Tomando la integral,

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega ot} dt = \int_0^T \cos[(k-n)\omega ot] dt + j\int_0^T sen[(k-n)\omega ot] dt \quad \text{Usando Euler}$$

Si $k \neq n$

$$\cos(k-n)\omega ot \quad y \quad sen(k-n)\omega ot$$

$$\omega o = \frac{2\pi}{T} \qquad (k-n)\frac{2\pi}{To} = \frac{2\pi}{\dfrac{T}{|k-n|}} \qquad \text{Periodo fundamental.}$$

Integramos en la longitud T, luego estas integrales darán cero.

$$\int_{o}^{T}\cos[(k-n)\omega ot]dt=\frac{1}{(k-n)\omega o}sen(k-n)\omega ot\Big|_{o}^{T}=\frac{1}{(k-n)\omega o}\left(sen(k-n)\omega oT-sen(0)\right)$$

$$=\frac{1}{(k-n)\omega o}\left(sen(k-n)\frac{2\pi}{T}T-0\right)$$

$$Si \quad k=n,$$

$$\int_{0}^{T}e^{j(k-n)\omega ot}dt=\int_{o}^{T}1dt=T$$

resumiendo,

$$\int_{0}^{T}e^{j(k-n)\omega ot}dt=\begin{cases}T & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

Esto hace que tengamos, para *k* = *n*.

$$\int_{0}^{T}x(t)e^{-jn\omega ot}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kT$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}x(t)e^{-jn\omega ot}dt$$

Resumiendo,

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\omega ot}=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{T}x(t)e^{-jk\omega ot}dt$$

a_k “Coeficientes de la serie de Fourier”.
“Coeficientes espectrales de *x*(*t*)”.

$$a_o=\frac{1}{T}\int_{T}x(t)dt \quad \rightarrow$$ Componente CD “Valor Medio”.

Ejemplo: sea $x(t)=sen(\omega ot)$
Esta se puede descomponer en una suma de exponenciales complejas.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jk\omega ot}$$

Aplicamos la definición

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega ot}dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T sen(\omega ot)e^{-jk\omega ot}dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega ot} - e^{-j\omega ot}\right)e^{-jk\omega ot}dt$$

$$a_k = \frac{1}{2jT}\int_0^T e^{j\omega ot(1-k)}dt - \frac{1}{2jT}\int_0^T e^{-j\omega ot(k+1)}dt$$

$$si \quad k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2Tj}\int_0^T e^{j\omega ot}dt - \frac{1}{2Tj}\int_0^T e^{-j\omega ot}dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2Tj}\left[\frac{1}{j\omega o}e^{j\omega ot}\right]_o^T - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{j\omega o}e^{-j\omega ot}\right]_0^T$$

$$a_0 = \frac{1}{2Tj}\left[\frac{1}{j\omega o}e^{j\frac{2\pi}{T}T} - \frac{1}{j\omega o}(1)\right] - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{j\omega o}e^{-j\frac{2\pi}{T}T} + \frac{1}{j\omega o}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2Tj}\left[\frac{1}{j\omega o}e^{j2\pi} - \frac{1}{j\omega o}\right] - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{j\omega o}e^{-j2\pi} + \frac{1}{j\omega o}\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{2Tj}\left[\frac{1}{j\omega o}\left(\cos 2\pi + jsen2\pi - 1\right)\right] - \frac{1}{2Tj}\left[\frac{1}{j\omega o}\left(-\cos 2\pi + jsen2\pi + 1\right)\right]$$

$$a_0 = 0$$

$$si \quad k = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2Tj}\int_0^T e^{j\omega ot(0)}dt - \frac{1}{2Tj}\int_0^T e^{-j\omega ot(2)}dt$$

$$a_1 = \frac{1}{2Tj}\int_0^T dt - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{j\omega o2}e^{-j2\omega ot}\right]_0^T$$

$$a_1 = \frac{1}{2Tj}T - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{2j\omega o}\left(e^{-j2\left(\frac{2\pi}{T}\right)T} - 1\right)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2Tj}T - \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{2j\omega o}(\cos 4\pi - jsen4\pi - 1)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$si \quad k = -1$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2Tj}\int_0^T e^{-j\omega ot2}dt - \frac{1}{2Tj}\int_0^T dt$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{2j\omega o}e^{-j2\omega ot}\right]_0^T - \frac{1}{2Tj}T$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{2j\omega o}\left(e^{-j2\left(\frac{2\pi}{T}\right)T} - 1\right)\right] - \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2Tj}\left[-\frac{1}{2j\omega o}(\cos 4\pi + jsen4\pi - 1)\right] - \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$si \quad k \neq 1 \quad y \quad k \neq -1$$

$$a_k = \frac{1}{2Tj}\frac{1}{j\omega o(1-k)}\left[e^{j\omega ot(1-k)}\right]_0^T - \frac{1}{2Tj}\frac{1}{-j\omega o(1+k)}\left[e^{-j\omega ot(1+k)}\right]_0^T$$

$$a_k = \frac{-1}{2T\omega o(1-k)}\left[e^{j\omega oT(1-k)} - 1\right] + \frac{1}{2T\omega o(1+k)}\left[e^{-j\omega oT(1+k)} - 1\right]$$

$$a_k = \frac{-1}{2T\frac{2\pi}{T}(1-k)}\left[\cos\left(2\pi(1-k)\right) + jsen\left(2\pi(1-k)\right) - 1\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi(1+k)}\left[\cos\left(2\pi(1+k)\right) - jsen\left(2\pi(1+k)\right) - 1\right]$$

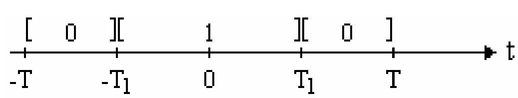
$$a_k = 0$$

Ejemplo:

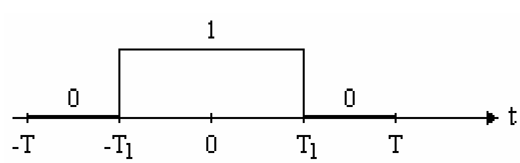
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases} \qquad T > T_1$$

$$\left.|t| < T_1 \quad \Rightarrow \quad -T_1 < t < T_1\right\} \; 1$$

$$\left.\begin{array}{l} |t| > T_1 \quad \Rightarrow \quad t > T_1 \quad y \quad t < -T_1 \\ |t| < \dfrac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad -T_2 < t < T_2 \end{array}\right\} \; 0$$



Señal periódica



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega ot}\,dt$$

$$si \quad k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T1}^{T1} dt = \frac{1}{T}\left[T\right]_{-T1}^{T1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}(T_1 + T_1) = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T1}^{T1} e^{-jk\omega ot}dt = \frac{1}{T}\left[-\frac{1}{jk\omega o}e^{-jk\omega ot}\right]_{-T1}^{T1}$$

$$a_k = \frac{1}{jk2\pi}\left[-e^{-jk\omega oT1} + e^{jk\omega oT1}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{e^{jk\omega oT1} - e^{-jk\omega oT1}}{2j}\right] = \frac{1}{k\pi}sen(k\omega oT_1)$$

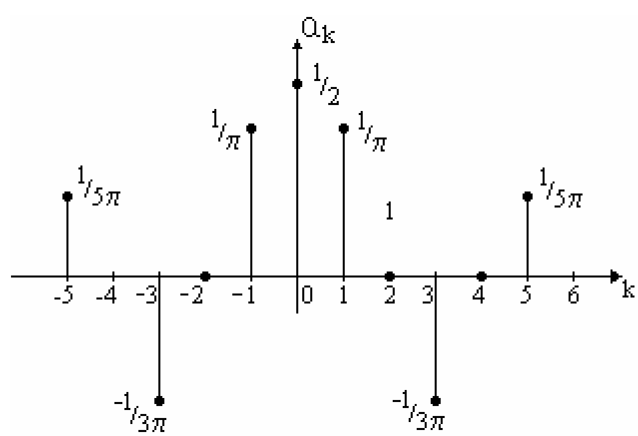
$$a_k = \frac{sen(k\omega oT_1)}{k\pi} \qquad k \neq 0$$

$$si \quad T = 4T_1$$

$$a_k = \frac{2T_1}{4T_1} = 0$$

$$a_k = \frac{sen\left(k\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)}{k\pi} = \frac{sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

k	a_k
1	$a_1 = \frac{1}{\pi}$
-1	$a_{-1} = \frac{1}{\pi}$
2	$a_2 = 0$
-2	$a_{-2} = 0$
3	$a_3 = \frac{-1}{3\pi}$



-3	$a_{-3} = \frac{-1}{3\pi}$
4 -4	$a_4 = 0$ $a_{-4} = 0$
5 -5	$a_5 = \frac{1}{5\pi}$ $a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$

Convergencia de las Series de Fourier.

Consideremos el problema de aproximar una señal periódica *x*(*t*) mediante la combinación lineal de un número finito de exponenciales complejas relacionadas armónicamente.
Se sabe que,
x(*t*) se puede aproximar por

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

Si tomamos un número finito de componentes

$$x_N(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega ot}$$

Con esto, se puede obtener el error generado, al usar una aproximación de N componentes

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t)$$
$$e_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega ot}$$

Se puede usar o emplear una medida cualitativa del tamaño del error,

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$

Propiedades de la Serie de Fourier de Tiempo Continuo.

1. **Linealidad.** Sean dos señales $\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$ Periódicas con periodo T.

Donde

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k$$
$$y(t) \xrightarrow{Fs} b_k$$

Si tenemos una combinación lineal, el periodo de la señal resultante será *T*.

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{Fs} c_k = Aa_k + Bb_k$$

2. **Desplazamiento en el Tiempo.** Supongamos que tenemos *x*(*t*) con periodo *T*.

Hacemos,

$$y(t) = x(t - to)$$

Para

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k$$
$$y(t) \xrightarrow{Fs} b_k$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - to)e^{-jk\omega ot}dt \qquad haciendo \quad \tau = t - to$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega o(\tau + to)}d\tau = \frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega o\tau}e^{-jk\omega oto}d\tau$$

$$b_k = e^{-jk\omega oto}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega o\tau}d\tau = e^{-jk\omega oto}a_k$$

$$b_k = a_k e^{-jk\omega oto}$$

3. **Inversión en el Tiempo.**

Si tenemos *x*(*t*) con periodo *T*.

$$x(t) \xrightarrow{Fs} a_k$$

$$y(t) = x(-t)$$

Tenemos la ecuación de síntesis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

Para el caso *y*(*t*) tendremos,

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega ot}$$

Haciendo $k = -m$.

$$y(t)=x(-t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m}e^{jm\omega ot}$$

Si
$$x(t)\xrightarrow{Fs}a_k$$
$$y(t)=x(-t)\xrightarrow{Fs}b_k=a_{-k}$$

4. Multiplicación.

Si tenemos
$$x(t)\xrightarrow{Fs}a_k$$
$$y(t)\xrightarrow{Fs}b_k$$

$$z(t)=x(t)\cdot y(t)\xrightarrow{Fs}c_k=\sum_{L=-\infty}^{+\infty} a_L b_{k-L}$$

$$\downarrow$$

$$periodo\quad T$$

5. Conjugación.

$$x(t)\xrightarrow{Fs}a_k$$

Tenemos $\downarrow$

$$periodo\quad T$$

Tomamos el complejo conjugado,

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

$$[x(t)]^*=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}\right)^*$$

$$[x(t)]^*=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega ot}$$

$$k=-m$$

$$[x(t)]^*=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m}^* e^{jm\omega ot}$$

Si

$$z(t)=[x(t)]^*\xrightarrow{Fs}c_k=b_k=a_{-k}^*$$

¿Qué sucede cuando $x(t)=x^*(t)$?

$a_k = a_{-k}^*$

$\Downarrow$

$a_k^* = \left(a_{-k}^*\right)^*$

$a_k^* = a_{-k}$

6. Relación de Parseval

Sea $x(t) \xrightarrow{Fs} a_k$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T}\int_T \left|\sum a_k e^{jk\omega ot}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \sum \left|a_k e^{jk\omega ot}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \sum |a_k|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Series de Fourier de Señales Periódicas de Tiempo Discreto

[kamen], [oppe]

Como este concepto es para señales periódicas,

$x[n] = x[n+N] \qquad N \in Z^{+-}$

Si N es el entero positivo más pequeño, entonces, N es el periodo de la señal y *x*(*t*) es periódica.
Si N es el periodo de la señal,
Entonces, se define

$$\Omega o = \frac{2\pi}{N} \quad \rightarrow \quad frecuencia \quad fundamental.$$

Por ejemplo, $x_1[n] = e^{j\Omega on}$ es periódica con periodo N tal que $\Omega o = \frac{2\pi}{N}$.

Existe un conjunto de exponenciales complejas de tiempo discreto que son periódicas, todas con periodo N.

$$a_k[n] = e^{jk\Omega on} = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad donde, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

¿A medida que *k* aumenta, todas las exponenciales $a_k[n]$ son diferentes (Así como en el caso de Tiempo Continuo)?

$$a_k[n] = e^{jk\Omega on}$$

¿Qué sucede si hacemos *k*+*N*=*k*?

$$a_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\Omega on} = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+N}[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n}$$

$$donde$$

$$e^{j2\pi n} = \cos 2\pi n + jsen2\pi n$$

$$e^{j2\pi n} = 1$$

$$a_{k+N}[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\Omega on}$$

Conclusión: solo existe N exponenciales periódicas diferentes.

$$a_0[n] = e^{j0n} = 1$$

$$a_1[n] = e^{j\Omega on}$$

$$a_2[n] = e^{j2\Omega on}$$

$$a_{N-1}[n] = e^{j(N-1)\Omega on} = e^{j2\pi n}e^{-j\Omega on} = e^{-j\Omega on}$$

$$a_N[n] = e^{jN\Omega on} = e^{j2\pi n} = 1 = a_0[n]$$

$$a_{N+1}[n] = e^{j(N+1)\Omega on} = e^{j2\pi n}e^{j\Omega on} = e^{j\Omega on} = a_1[n]$$

Ejemplo: consiere

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a) Demuestre que $a[k] = N$ para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$
b) Demuestre que $a[k] = 0$ siempre que *k* no sea un múltiplo entero de *k*.

a) Como se busca demostrar que
$a[k] = N$ Para $k = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$
Se hace que

$$k = pN \quad donde \quad p \in Z$$

$$a[k]\Big|_{k=pN} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}npN} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi pn}$$

Donde

$$e^{j2\pi n} = \cos(2\pi n) + jsen(2\pi n)$$

$n = 0, \qquad e^{j0} = \cos(0) + jsen(0) = 1$

$n = 1, \qquad e^{j2\pi} = \cos(2\pi) + jsen(2\pi) = 1$

$n = 2, \qquad e^{j6\pi} = \cos(6\pi) + jsen(6\pi) = 1$

$$a[k]\Big|_{k=pN} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi pn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

b) Usando,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & para \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$a[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n$$

Para $k \neq pN \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq 1$

$$a[k] = \frac{1-e^{j2\pi k}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = 0$$

Serie Discreta de Fourier.

Fourier establece que si se suman exponenciales complejas relacionadas armónicamente, por un factor a_k que puede ser complejo, se puede reconstruir cualquier señal continua *x*[*n*].

$x[n] = \sum a_k e^{jk\Omega on}$ Esta sumatoria es valida solo sobre un rango de valores, debido a que los $a_k[n]$ solo son diferentes dentro de ese rango de valores.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk\Omega on} = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{jk\Omega on}$$

o

$$x[n] = \sum_{k=2}^{N+1} a_k e^{jk\Omega on}$$

En general se tiene,

(1) $$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega on}$$ a_k Coeficientes de la serie de Fourier.

$\downarrow$

Serie Discreta de Fourier.

Tomando (1) y multiplicando por $e^{jq\Omega on}$ donde $\Omega o = \dfrac{2\pi}{N}$, siendo, N el periodo de *x*[*n*].

$$x[n]e^{-jq\Omega on} = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega on} e^{-jq\Omega on}$$

Sumando los N términos.

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jq\Omega on} = \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega on} e^{-jq\Omega on}$$
$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jq\Omega on} = \sum_{n=<N>} \sum_{k=<N>} a_k e^{j\Omega on(k-q)}$$

Reordenando

(2) $$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jq\Omega on} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(k-q)}$$

$$se \quad toma$$
$$\sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(k-q)} = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onL} = f[L]$$

¿Qué sucede si $L = 0, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, ...$?

Tomando $L = pN$ con $p \in Z^{+-}$ $\quad p = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

$$f[pN] = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onpN} = \sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}npN} = \sum_{n=<N>} e^{j2\pi np}$$

Para un valor de *p*,

a) *p* = 0

$$f[pN]\Big|_{p=0} = \sum_{n=<N>} e^{j0} = \sum_{n=<N>} 1 = N$$

b) *p* = 1

$$f[pN]\Big|_{p=1} = \sum_{n=<N>} e^{j2\pi n}$$

Para los diferentes valores de *n*,

$$n = 0, \qquad e^{j0} = \cos(0) + jsen(0) = 1$$

$$n = 1, \qquad e^{j2\pi} = \cos(2\pi) + jsen(2\pi) = 1$$

$$n = 2, \qquad e^{j4\pi} = \cos(4\pi) + jsen(4\pi) = 1$$

$$n = 3, \qquad e^{j6\pi} = \cos(6\pi) + jsen(6\pi) = 1$$

$$f[pN]\Big|_{p=1} = \sum_{n=<N>} e^{j2\pi n}$$

Para todos los valores de *n* tal que *n* = <*N*> la expresión da 1, luego,

$$f[pN]\Big|_{p=1} = \sum_{n=<N>} e^{j2\pi n} = \sum_{n=<N>} 1 = N$$

c) *p* = 2

$$f[pN]\Big|_{p=1} = \sum_{n=<N>} e^{j4\pi n}$$

Para los diferentes valores de *n*.

$$n = 0, \qquad e^{j0} = \cos(0) + jsen(0) = 1$$

$$n = 1, \qquad e^{j4\pi} = \cos(4\pi) + jsen(4\pi) = 1$$

$$n = 2, \qquad e^{j8\pi} = \cos(8\pi) + jsen(8\pi) = 1$$

$$f[pN]\Big|_{p=2} = \sum_{n=<N>} e^{j4\pi n} = N$$

Para todos los valores de *n* tal que *n* = <*N*>.

d) El resto se cumple para los demás valores de *p*.

¿Se cumple para los *p* negativos {-1,-2,-3,…}?

Retomando la expresión,

$$\sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(k-q)} = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onL}$$

$$si \quad L = 0 \quad \Rightarrow \quad L = k - q = 0 \quad \Rightarrow \quad k = q$$

$$si \quad L = pN \quad \Rightarrow \quad pN = k - q$$

$$si \quad p = 1 \quad \Rightarrow \quad N = k - q \quad \Rightarrow \quad k = N + q$$

$$si \quad L = pN \quad \Rightarrow \quad pN = k - q$$

$$si \quad p = 2 \quad \Rightarrow \quad 2N = k - q \quad \Rightarrow \quad k = 2N + q$$

$$si \quad p = 3 \quad \Rightarrow \quad 3N = k - q$$

$$\sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(k-q)} = \begin{cases} N & cuando \quad k = q \quad ó \\ & cuando \quad k - q = pN \\ 0 & \end{cases}$$

De (2)

$$\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jq\Omega on} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(k-q)}$$

$$a_q = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jq\Omega on}$$

Coeficientes de la Serie Discreta de Fourier.

Ejemplo: $x[n] = sen(\Omega on)$

Aplicando la definición,

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega on} = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} sen(\Omega on) e^{-jk\Omega on}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \left(\frac{e^{j\Omega on} - e^{-j\Omega on}}{2j} \right) e^{-jk\Omega on}$$

$$a_k = \frac{1}{2jN} \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(1-k)} - \frac{1}{2jN} \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(-1-k)}$$

Como son dos sumatorias finitas,

$$A = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(1-k)} = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onL} = m[L]$$
$$m[L]\big|_{L=pN} = m[pN] = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onpN} = \sum_{n=<N>} e^{j2\pi np} = N$$

$$para \quad p = \{0,\pm1,\pm2,...\}$$

$$para \quad todos \quad los \quad valores \quad de \quad n \quad tal \quad que \quad n =< N >$$

$$\Rightarrow A = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(1-k)} = \begin{cases} N & cuando \quad -k+1=0 \\ & k=1 \\ 0 & para \quad otros \quad valores \quad de \quad k \end{cases}$$

$$B = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(-1-k)} = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onL} = z[L]$$
$$z[L]\big|_{L=pN} = z[pN] = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega onpN} = N$$

$$para \quad p = \{0,\pm1,\pm2,...\}$$

$$\Rightarrow B = \sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(-1-k)} = \begin{cases} N & cuando \quad -1-k=0 \\ & k=-1 \\ 0 & para \quad otros \quad valores \quad de \quad k \end{cases}$$

Cuando k = 1,

$$a_1 = \frac{1}{2jN}(N) - \frac{1}{2jN}\sum_{n=<N>} e^{j\Omega on(-2)}$$
$$a_1 = \frac{1}{2jN}(N) - \frac{1}{2jN}\sum_{n=<N>} e^{-j\frac{4\pi}{N}n}$$
$$a_1 = \frac{1}{2jN}(N) - \frac{1}{2jN}\sum_{n=<N>} \left(e^{-j\frac{4\pi}{N}}\right)^n \qquad \alpha = e^{-j\frac{4\pi}{N}}$$
$$a_1 = \frac{1}{2j} - \frac{1}{2jN}\left(\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{2j} - \frac{1}{2jN}\left(\frac{1-e^{-j4\pi}}{1-e^{-j\frac{4\pi}{N}}}\right)$$
$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

CAPITULO 5.

La Transformada de Fourier. [kamen], [oppe]

Transformada Continua de Fourier.

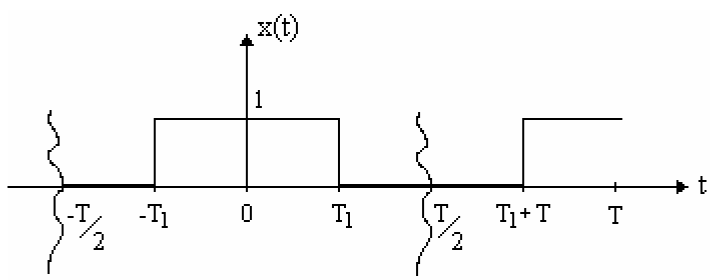
Vimos:
Representación de Señales Periódicas usando combinaciones de exponenciales complejas y el efecto de ésta representación en los sistemas LTI.

Transformada Continua de Fourier de Señales Aperiódicas. [oppe]

Tomemos la siguiente señal,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 |t| < T \\ 0 & T_1 < |t| < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Esta señal se repite periódicamente con periodo T.



$$x(t) = 0 \quad para \quad T_1 < |t| < \frac{T}{2}$$

$$x = 1 \quad para \quad |t| < T_1$$

$$\Downarrow$$

$$-T_1 < t < T_1$$

$$|t| < \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad -T_2 < t < \frac{T}{2}$$

$$|t| > T_1 \quad \Rightarrow \quad t > T_1$$

$$t < -T_1$$

¿Cómo son los a_k?

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega ot}dt$$

Si *k* = 0,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T1}^{T1} 1dt = \frac{1}{T}(t)_{-T1}^{T1} = \frac{T_1 + T_1}{T} = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T1}^{T1} e^{-jk\omega ot}dt = \frac{1}{T}\left(-\frac{1}{jk\omega ot}e^{-jk\omega ot}\right)_{-T1}^{T1}$$

$$a_k = -\frac{1}{jk\omega oT}\left(e^{-jk\omega oT1} - e^{jk\omega oT1}\right) = \frac{1}{jk\omega oT}\left(e^{jk\omega oT1} - e^{-jk\omega oT1}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{k\frac{2\pi}{T}T}\left(\frac{e^{jk\omega oT1} - e^{-jk\omega oT1}}{2j}\right)\cdot 2 = \frac{1}{k\pi}sen(k\omega oT_1)$$

$$a_k = \frac{sen(k\omega oT_1)}{k\pi}$$

$$si \quad T = 4T_1 \qquad T_1 = \frac{T}{4} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{sen\left(k\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)}{k\pi} = \frac{sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

Expresamos ahora

$$a_k = \frac{2sen(k\omega oT_1)}{k\omega oT}$$

Con ésta ecuación se puede generar

$$Ta_k = \frac{2sen(k\omega oT_1)}{k\omega o} \qquad tomando \quad \omega = k\omega o$$

$$Ta_k = \frac{2sen(\omega T_1)}{\omega}$$

Es decir, se toma a ω como una variable continua.

Entonces, la función $\frac{2sen(\omega T_1)}{\omega}$ que es la envolvente de Ta_k. Los coeficientes de a_k son tan solo muestras igualmente especiales.

¿Qué sucede si $T_1 = \frac{T}{4}$?

$$Ta_k = \frac{2sen\left(\omega\frac{T}{4}\right)}{\omega} = \frac{2sen\left(\frac{\omega T}{4}\right)}{\omega}$$ Entonces, $Ta_k = 0$ cuando $sen\left(\frac{\omega T}{4}\right) = 0$

Es decir, $\dfrac{\omega T}{4} = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \\ 3\pi \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\frac{\omega T}{4} = \pi \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{T} = 2\omega o$$
$$\frac{\omega T}{4} = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{8\pi}{T} = 4\omega o$$
$$\frac{\omega T}{4} = 3\pi \Rightarrow \omega = \frac{12\pi}{T} = 6\omega o$$

Cuando, $\dfrac{\omega T}{4} = 0 \Rightarrow \omega = 0$ aplicando L'Hopital, $\dfrac{\frac{2T}{4}\cos\left(\frac{\omega T}{4}\right)}{1} \Rightarrow \dfrac{2T}{4} = \dfrac{T}{2}$

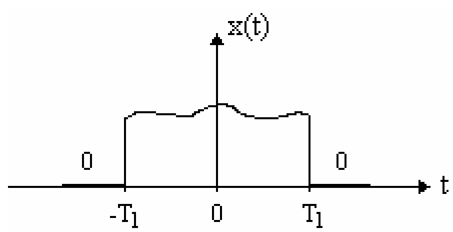
A medida que *T* se incrementa ó como $\omega o = \dfrac{2\pi}{T} \rightarrow$ a medida que ωo disminuye.

Entonces, la envolvente se da como un muestreo cada vez mas estrecho.

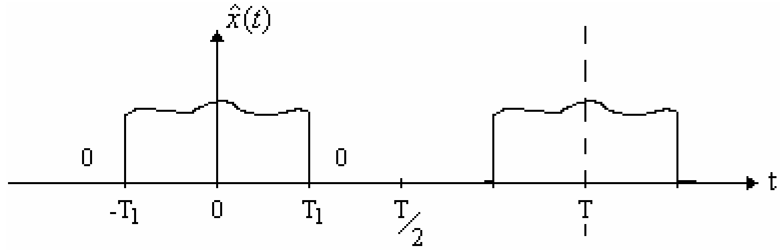
Si *T* aumenta, la onda cuadrada periódica, se vuelve un pulso rectangular. Es decir, una señal aperiódica.

Con base en esto, se puede decir lo siguiente, se toma una señal *x*(*t*) de duración finita,

$$x(t) = 0 \quad para \quad |t| > T_1$$



Con base en *x*(*t*) se construye una señal periódica $\hat{x}(t)$.



$x(t) = \lim_{T\rightarrow+\infty} \hat{x}(t)$

¿Cómo es este efecto en la Serie de Fourier de $\hat{x}(t)$?
Aplicando el concepto de Serie Fourier en

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega ot} dt \qquad donde \quad \omega o = \frac{2\pi}{T}$$

Entonces, $\hat{x}(t) = x(t)$ para $|t| < \frac{T}{2}$ y $x(t) = 0$ fuera de éste intervalo.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad e^{-jk\omega ot} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega ot} dt$$

Tomando

$$Ta_k \rightarrow envolvente$$

$$Ta_k = x(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega ot} dt$$

$$a_k = \frac{X(j\omega)}{T}$$

Se reemplaza,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{X(j\omega)}{T} e^{jk\omega ot}$$

Como $\omega o = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-jk\omega ot} d\omega o$

Como $T \rightarrow +\infty \Rightarrow \omega o \rightarrow d\omega$

$$x(t) = \lim_{T \to +\infty} \hat{x}(t) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega o) e^{-jk\omega ot} d\omega o$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$X(j\omega) \rightarrow$ Transformada de Fourier de *x*(*t*). Espectro.
$x(t) \rightarrow$ Transformada inversa de Fourier.

Resumiendo,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Ejemplo1:

Considere $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ $\alpha > 0$, se desea $x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$
Entonces por definición,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t(\alpha + j\omega)}dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega}\left[e^{-t(\alpha + j\omega)}\right]_0^{+\infty}$$

$$X(j\omega) = -\frac{1}{\alpha + j\omega}\left(e^{-\infty} - 1\right) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{1/2}} = \left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-1/2}$$

$$Si \quad \omega \to +\infty \quad \Rightarrow \quad |X(j\omega)| = 0$$

$$Si \quad \omega \to -\infty \quad \Rightarrow \quad |X(j\omega)| = 0$$

$$Si \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad |X(j\omega)| = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{d|X(j\omega)|}{d\omega} = -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-3/2}(2\omega)$$

$$\frac{d|X(j\omega)|}{d\omega} = \frac{-\omega}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{3/2}} = 0$$

¿Para que valores de ω se cumple la expresión?

$$\frac{d^2|X(j\omega)|}{d\omega^2} = -\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-3/2} + \frac{3\omega}{2}\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-5/2}(2\omega)$$

$$= \left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-3/2}\left\{-1 + 3\omega^2\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-1}\right\} = 0$$

$$-1+3\omega^2\left(\alpha^2+\omega^2\right)^{-1}=0$$

$$\frac{-\left(\alpha^2+\omega^2\right)+3\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}=0$$

$$-\alpha^2-\omega^2+3\omega^2=0$$

$$-\alpha^2+2\omega^2=0$$

$$2\omega^2=\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

Punto de Inflexión.

$$Si \quad \omega=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\left|X\left(j\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right|=\frac{1}{\left(\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\left(\dfrac{3\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\alpha\sqrt{3}}$$

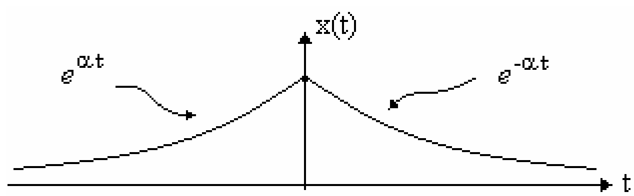
$$Si \quad \omega=\alpha$$

$$\left|X\left(j\alpha\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha^2}}=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$$

Ejemplo2:

$x(t)=e^{-\alpha|t|} \qquad \alpha>0$

¿Cómo es el dibujo de la señal $x(t)$?



Por definición,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{t(\alpha - j\omega)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(\alpha + j\omega)} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}\left(e^{t(\alpha - j\omega)}\right)\Big|_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{\alpha - j\omega}\right)\left(e^{-t(\alpha + j\omega)}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}\left(e^{0} - e^{-\infty}\right) - \frac{1}{\alpha + j\omega}\left(e^{-\infty} - e^{0}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha + j\omega + \alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = 2\alpha\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-1}$$

$$Si \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad |X(j0)| = \frac{2}{\alpha}$$

$$\frac{d|X(j\omega)|}{d\omega} = -2\alpha\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-2}(2\omega) = \frac{-4\alpha\omega}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^2} = 0$$

$$\frac{d^2|X(j\omega)|}{d\omega^2} = -4\alpha\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-2} + 8\alpha\omega^2\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-3}$$

$$4\alpha\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-2}\left\{-1 + 2\omega^2\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-1}\right\} = 0$$

$$\frac{4\alpha}{\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^2}\left\{-1 + 2\omega^2\left(\alpha^2 + \omega^2\right)^{-1}\right\} = 0$$

$$-1 + \frac{2\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2} = 0$$

$$-\alpha^2 - \omega^2 + 2\omega^2 = 0$$

$$-\alpha^2 + \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = \alpha^2 \qquad \Rightarrow \omega = \alpha$$

$$X(j\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

Transformada Continua de Fourier de Señales Periódicas.

Consideremos, $x(t) \rightarrow$ señal con transformada de Fourier.
$x(t) \xrightarrow{T.F} X(j\omega)$, posee un solo impulso en $\omega = \omega o \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega o)$.

Aplicando la expresión d ela transformada inversa dada por,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega o)e^{j\omega t}d\omega$$
$$x(t) = e^{j\omega ot}$$

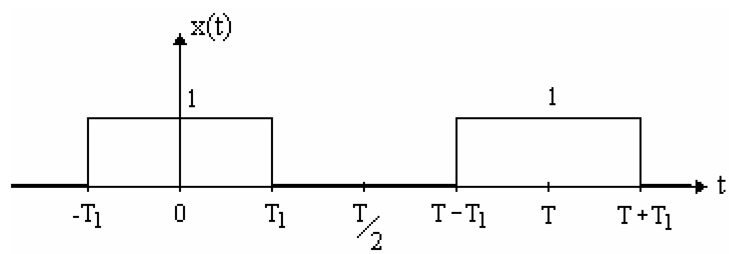
Generalizando, si $x(j\omega)$ está formada por una combinación lineal de impulsos igualmente esparcidos en frecuencia,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k(\omega - k\omega o)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega o)e^{j\omega t}d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega ot}$$

Ejemplo:
Consideremos la señal



Los coeficientes de la Serie de Fourier para $x(t)$ son,

$$a_k = \frac{sen(k\omega oT_1)}{\pi k}$$

Esto hace que su transformada de Fourier sea

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{sen(k\omega oT_1)}{\pi k}\delta(\omega - k\omega o)$$
$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen(k\omega oT_1)}{k}\delta(\omega - k\omega o)$$

$$Si \quad T = 4T_1$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen\left(\frac{k2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)}{k} \delta(\omega - k\omega o)$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2sen\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} \delta(\omega - k\omega o)$$

$$Si \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) = \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$Si \quad \omega = \omega 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) = 2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\delta(\omega - \omega o) = 2\delta(\omega - \omega o)$$

$$Si \quad \omega = 2\omega 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) = \frac{2sen(\pi)}{2}\delta(\omega - 2\omega o) = 0\delta(\omega - 2\omega o)$$

Propiedades de la Transformada Continua de Fourier.

Se parte de $x(t) \xrightarrow{T.F} X(j\omega) \qquad y(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega)$

1. **linealidad.**

$$ax(t) + by(t) \xrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

2. **Desplazamiento de Tiempo.**

$$x(t - to) \xrightarrow{F} e^{-j\omega to} X(j\omega)$$

3. **Conjugación y Simetría Conjugada.**

$$x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$$
$$x^{*}(t) \xrightarrow{F} X^{*}(-j\omega)$$

4. **Diferenciación e Integración.**

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

5. **Escalamiento de Tiempo y Frecuencia.**

$$x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

6. **Relación de Parseval.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

7. **Propiedad de Convolución.**

$$x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$X(j\omega) \rightarrow H(j\omega) \rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

8. **Propiedad de Multiplicación.**

$$r(t) = s(t) \cdot p(t) \xrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(S(j\omega) * P(j\omega)\right)$$

Transformada Discreta de Fourier.

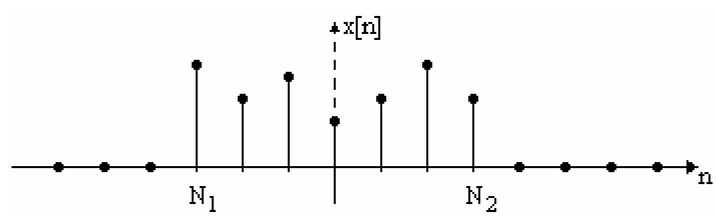
Transformada Discreta de Fourier de Señales Aperiódicas. [kamen], [oppe]

¿Cómo es la representación de series de Fourier de una Señal de Tiempo Discreto?

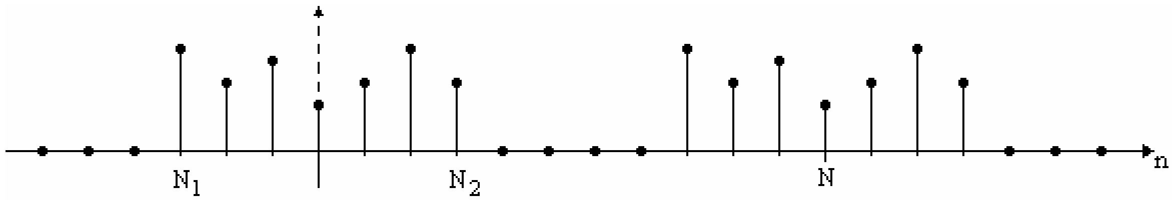
$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega on}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega on} \qquad \Omega o = \frac{2\pi}{N}$$

Tomando una secuencia de datos (señal de Tiempo Discreto). $x[n]$ Como señal aperiódica.



Con $x[n]$ se puede formar $\hat{x}[n]$.



La señal $\hat{x}[n]$ se puede reconstruir con base en su representación en Series de Fourier.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \hat{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Lo mismo que para el caso continuo, $x[n] = \hat{x}[n]$ en un periodo que incluye.

$$N_1 \leq n \leq N_2$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N1}^{N2} \hat{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N1}^{N2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Tomando $X(e^{j\Omega})$ y $\Omega = k\Omega o$

$$Na_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Reemplazando $a_k = \dfrac{x[e^{j2}]}{N}$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{X(e^{j\Omega})}{N} e^{jk\Omega on} = \sum_{k=<N>} \frac{X(e^{jk\Omega o})}{N} e^{jk\Omega on}$$

$$\Omega o = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = \frac{2\pi}{\Omega o}$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{2\pi} X(e^{jk\Omega o}) e^{jk\Omega on} \Omega o$$

Conforma $N\uparrow \quad \Rightarrow \quad \Omega o = \dfrac{2\pi}{N}$

$Si \quad N \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \Omega o \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega o = d\Omega o$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega on}d\omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Ejemplo: Considere, $x[n] = \alpha^n u[n] \qquad |\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \alpha < 1$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha e^{-j\Omega})^n$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

Ejemplo: sea $x[n] = \alpha^{|n|} \qquad |\alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \alpha < 1$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^{-n}e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n}e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha e^{j\Omega})^n + \sum_{m=1}^{+\infty}(\alpha e^{j\Omega})^n$$

Transformada Discreta de Fourier de Señales Periódicas. [oppe]

Si tomamos $x[n]$ como una señal periódica en periodo.

$$N = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Se tiene

$$x[n] \to a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n]e^{-jk\Omega on}$$

La transformada de Fourier es,

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

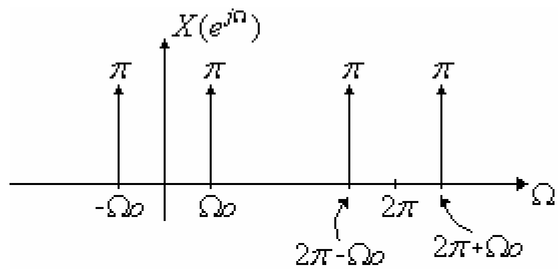
Ejemplo: Considere la señal periódica,

$x[n] = \cos(\Omega on)$ Donde $\Omega o = \dfrac{2\pi}{5} \Rightarrow N = 5$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\Omega on} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega on} \qquad a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \pi\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{5}\right)$$



Ejemplo: $y[n] = 10sen(\Omega on) \qquad \Omega o = \dfrac{2\pi}{10}$

Encontrar $y[n] \xrightarrow{T.F.} Y(e^{j\Omega})$

Se pueden obtener los coeficientes de la serie de Fourier,

$y[n] \xrightarrow{S.F.} a_k$ Ya que es periódica.

$$a_k = ?$$

$$y[n] = 10\left(\frac{e^{j\Omega on} - e^{-j\Omega on}}{2j}\right)$$

$$y[n] = \frac{5}{j}e^{j\Omega on} - \frac{5}{j}e^{-j\Omega on}$$

$$a_1 = \frac{5}{j} \qquad a_{-1} = -\frac{5}{j}$$

Esto hace que

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{10\pi}{j}\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{10}\right) - \frac{10\pi}{j}\delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{10}\right)$$

Ejemplo: sea $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$

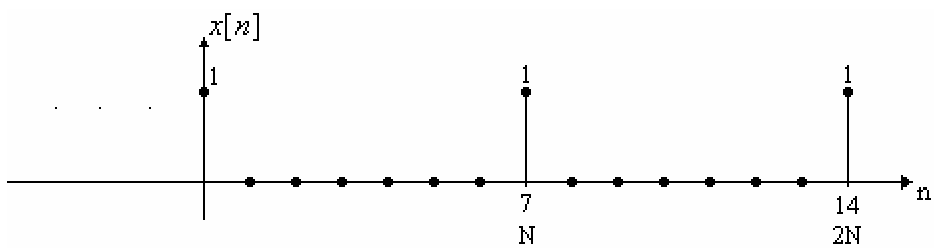
Es posible $x[n]\longrightarrow a_k=?$

Para $x[n]\Rightarrow$ ¿Dónde están ubicados los impulsos?
A medida que avanza k, cada impulso está en $n=kN$

k	N
0	0
1	N
2	2N
3	3N

Donde N es el periodo.

Si se dibuja $x[n]$



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\Omega on}$$

Seleccionando $0\le n\le N-1$

$$e^{-j\Omega on}=\cos(\Omega on)-jsen(\Omega on)=A$$

$$A=\begin{cases} n=0\rightarrow 1 \\ n=1\rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)-jsen\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ . \\ . \\ . \end{cases}$$

$a_k=\frac{1}{N}(1)(1)$ Cuando $n=0$, el resto de valores de $a_k=0$

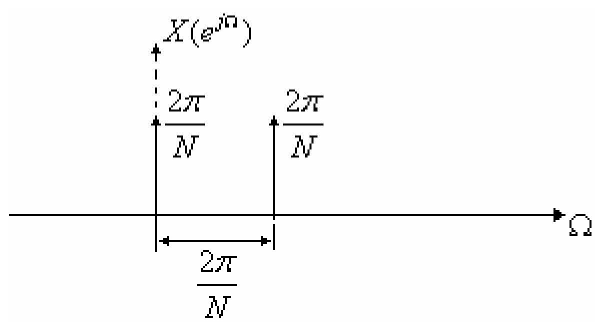
$$a_k = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$
$$X(e^{j\Omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

¿Dónde están ubicados los impulsos?

$$\Omega = \frac{2\pi}{N}k$$

A medida que k aumenta,



Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier. [oppe]

La transformada de Fourier siempre es periódica en Ω con periodo 2π .

1. **Linealidad.**

$$x_1[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\Omega})$$
$$x_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\Omega})$$
$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\Omega}) + bX_2(e^{j\Omega})$$

2. **Desplazamiento de Tiempo.**

$$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\Omega})$$
$$x[n-no] \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega no} X(e^{j\Omega})$$

3. **Desplazamiento en Frecuencia.**

$$e^{j\Omega o} x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\Omega - \Omega o)})$$

4. Diferenciación y Acumulación.

$$x[n]-x[n-1]\xleftrightarrow{F}(1-e^{-j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

$$sea \quad y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xleftrightarrow{F}\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(e^{j\Omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

5. Inversión en Tiempo.

$$x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\Omega})$$

$$x[-n]\xleftrightarrow{F}X(e^{-j\Omega})$$

6. Diferenciación en Frecuencia.

$$x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\Omega})$$

$$nx[n]\xleftrightarrow{F}j\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

7. Relación de Parseval.

$$x[n]\xleftrightarrow{F}X(e^{j\Omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega$$

8. Propiedad de Convolución.

Sea $\quad y[n]=x[n]*h[n]$

$$Y(e^{j\Omega})=X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$

9. Propiedad de Multiplicación.

Sea $\quad y[n]=x_1[n]\cdot x_2[n]$

$$x_1[n]\xleftrightarrow{F}X_1(e^{j\Omega})$$

$$x_2[n]\xleftrightarrow{F}X_2(e^{j\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\Omega\theta)})d\theta$$