

**HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA LA ASIGNATURA DE CÁLCULO  
NUMÉRICO PARA INGENIERÍA ELECTRÓNICA CON APLICACIONES EN  
MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5**

**DIEGO ANDRÉS FORERO GÓMEZ**



**ESCUELA DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
Bucaramanga  
2009**

**HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA LA ASIGNATURA DE CÁLCULO  
NUMÉRICO PARA INGENIERÍA ELECTRÓNICA CON APLICACIONES EN  
MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5**

**PROYECTO DE GRADO**

**DIEGO ANDRÉS FORERO GÓMEZ**

**DIRECTOR DE PROYECTO  
JESÚS ANTONIO VEGA URIBE  
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**



**ESCUELA DE INGENIERÍA Y ADMINISTRACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRÓNICA  
2009**

*Nota de aceptación:*

---

---

---

---

*Firma del Presidente del Jurado.*

---

*Firma del Jurado.*

---

*Firma del Jurado.*

---

*Dedicado a:*

*A Dios Nuestro Señor Todopoderoso, a mi madre Neyla Gómez Sanabria quien con sus esfuerzos, sacrificios y consejos ha fomentado mi desarrollo personal, intelectual y profesional y a mis hijas Alejandra y Gabriela Forero quienes son la razón para levantarme cada día y afrontarlo con la convicción y el deseo de hacer bien las cosas.*



## **AGRADECIMIENTOS**

Ante todo, dar gracias a Dios Nuestro Señor Omnipotente por permitirme llegar al final de esta etapa de mi vida, llena de satisfacciones, alegrías y tristezas que me hicieron cada día una mejor persona.

A mi madre Neyla Gómez Sanabria, por darme la oportunidad de vivir este proceso de formación contando siempre con su acompañamiento afectivo, intelectual y económico.

A mis hijas Alejandra y Gabriela Forero, por convertirse en el motor que rige cada acto de mi vida.

A mi hermana Estefanía, quien al lado de mis hijas, es una fuente de motivación y alegrías.

A la ingeniera Mónica Uribe, por su apoyo afectivo, intelectual y logístico.

Al ingeniero Jesús Vega, quien con su dirección, ingenio y paciencia hizo posible que este proyecto fuese una realidad.

Y finalmente, al Doctor Héctor Pérez, al Doctor Omar Pinzón y al ingeniero Fabio Guzmán por brindar sus conocimientos que se convirtieron en soluciones en momentos difíciles.

## **CONTENIDO**

	Pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	20
<b>1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</b>	22
<b>2. ANTECEDENTES</b>	23
<b>3. JUSTIFICACIÓN</b>	25
<b>4. OBJETIVOS</b>	26
4.1. OBJETIVO GENERAL	26
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	26
<b>5. METODOLOGÍA</b>	27
<b>6. DISEÑO WEB DE NAVEGACIÓN</b>	29
6.1. INFORMACIÓN GENERAL	29
6.2. DISEÑO WEB	29
<b>7. DISEÑO DE APLICACIONES EN MATLAB</b>	34
7.1. DISEÑO DE NAVEGACIÓN DE LAS APLICACIONES	34
7.2. DISEÑO DE LAS INTERFACES GRÁFICAS DE USUARIO EN EL AMBIENTE DE DESARROLLO MATLAB	37
7.2.1. Diseño a Mano Alzada	37
7.2.2. Capítulo I – Introducción al Cálculo Numérico	41
7.2.3. Capítulo II – Solución Numérica a Ecuaciones No Lineales	60
7.2.4. Capítulo III – Interpolación y Aproximación Polinomial	74
7.2.5. Capítulo IV – Diferenciación e Integración Numérica	108
7.2.6. Capítulo V – Solución Numérica a Sistemas de Ecuaciones No Lineales	132
7.2.7. Capítulo VI – Solución Numérica a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	140

<b>8.</b>	<b>PRUEBAS</b>	<b>148</b>
<b>8.1.</b>	<b>CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO</b>	<b>148</b>
<b>8.1.1.</b>	Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería	148
<b>8.1.1.1.</b>	Planteamientos Físicos	148
<b>8.1.1.1.1.</b>	Cuerpos en Caída Libre	148
<b>8.1.1.1.2.</b>	Movimiento Parabólico	152
<b>8.1.1.1.3.</b>	Sistemas Masa - Resorte	155
<b>8.1.1.2.</b>	Planteamientos Electrónicos	159
<b>8.1.1.2.1.</b>	Redes Pasivas	159
<b>8.1.1.2.2.</b>	Controladores de Tensión Alterna	163
<b>8.1.2.</b>	Aproximaciones y Errores de Redondeo	167
<b>8.2.</b>	<b>CAPÍTULO II – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES NO LINEALES</b>	<b>170</b>
<b>8.2.1.</b>	Método de Búsqueda Progresiva	170
<b>8.2.2.</b>	Método de Bisección	174
<b>8.2.3.</b>	Método de Falsa Posición	177
<b>8.2.4.</b>	Método de Punto Fijo	181
<b>8.2.5.</b>	Método de Newton - Raphson	185
<b>8.2.6.</b>	Método de la Secante	189
<b>8.2.7.</b>	Método de Müller	192
<b>8.3.</b>	<b>CAPÍTULO III – INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL</b>	<b>195</b>
<b>8.3.1.</b>	Interpolación	195
<b>8.3.1.1.</b>	Interpolación Segmentaria Lineal	195
<b>8.3.1.2.</b>	Aproximación con el Polinomio de Lagrange	199
<b>8.3.1.3.</b>	Interpolación Segmentaria Cuadrática	204
<b>8.3.1.4.</b>	Interpolación Segmentaria Cúbica	209
<b>8.3.2.</b>	Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	215
<b>8.3.3.</b>	Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados	220
<b>8.3.3.1.</b>	Regresión Lineal	220
<b>8.3.3.2.</b>	Regresión Cuadrática	224
<b>8.4.</b>	<b>CAPÍTULO IV – DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA</b>	<b>229</b>
<b>8.4.1.</b>	Diferenciación Numérica	229
<b>8.4.2.</b>	Integración Numérica	233
<b>8.4.2.1.</b>	Método Trapezoidal	233
<b>8.4.2.2.</b>	Método de Simpson	237
<b>8.4.2.3.</b>	Método de Cuadratura de Gauss	240
<b>8.4.3.</b>	Integración Numérica Compuesta	244
<b>8.4.3.1.</b>	Método Trapezoidal Compuesto	244
<b>8.4.3.2.</b>	Método de Simpson Compuesto	248
<b>8.5.</b>	<b>CAPÍTULO V – SOLUCIÓN NUMÉRICA A SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES</b>	<b>251</b>
<b>8.5.1.</b>	Método de Punto Fijo para Varias Variables	251

<b>8.5.2.</b>	Método de Newton - Raphson para Varias Variables	257
<b>8.6.</b>	<b>CAPÍTULO VI – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS</b>	263
<b>8.6.1.</b>	Método de Euler	263
<b>8.6.2.</b>	Método de Taylor	268
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>		<b>272</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>		<b>273</b>
<b>ANEXOS</b>		<b>274</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Diagrama de Módulos de la Herramienta	27
Figura 2. Logo del Proyecto del Diseño Web de Navegación	30
Figura 3. Logo de la Universidad del Diseño Web de Navegación	30
Figura 4. Página de Inicio del Diseño Web de Navegación	31
Figura 5. Página de Objetivos del Diseño Web de Navegación	31
Figura 6. Página de Temas del Diseño Web de Navegación	32
Figura 7. Página de Aplicaciones del Diseño Web de Navegación	32
Figura 8. Página de Enlaces del Diseño Web de Navegación	33
Figura 9. Logo del BISEMIC del Diseño Web de Navegación	33
Figura 10. Diagrama de Navegación del Capítulo I	34
Figura 11. Diagrama de Navegación del Capítulo II	35
Figura 12. Diagrama de Navegación del Capítulo III	35
Figura 13. Diagrama de Navegación del Capítulo IV	36
Figura 14. Diagrama de Navegación del Capítulo V	36
Figura 15. Diagrama de Navegación del Capítulo VI	36
Figura 16. Diseño a mano alzada de la ventana de Presentación	38
Figura 17. Diseño a mano alzada del Menú de Acceso	39
Figura 18. Diseño a mano alzada de las GUI's	39
Figura 19. Ventana de Mensaje de las GUI's	40
Figura 20. Ventana de Advertencia de las GUI's	40
Figura 21. Ventana de Error de las GUI's	41
Figura 22. Ventana de Presentación del Módulo I	41
Figura 23. Menú de Acceso Principal del Capítulo I	42
Figura 24. Menú de Acceso de Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería	43
Figura 25. Menú de Acceso de Planteamientos Físicos	44
Figura 26. Ventana de Advertencia de Cuerpos en Caída Libre	45
Figura 27. Ventana de Error de Cuerpos en Caída Libre	45
Figura 28. GUI de la aplicación Cuerpos en Caída Libre	46
Figura 29. Ventana de Advertencia de Movimiento Parabólico	47
Figura 30. Ventana de Error de Movimiento Parabólico	48
Figura 31. GUI de la aplicación Movimiento Parabólico	49
Figura 32. Ventana de Advertencia de Sistemas Masa- Resorte	50
Figura 33. Ventana de Error de Sistemas Masa- Resorte	51
Figura 34. GUI de la aplicación Sistemas Masa- Resorte	51
Figura 35. Menú de Acceso de Planteamientos Electrónicos	52
Figura 36. Ventana de Advertencia de Redes Pasivas	53
Figura 37. Ventana de Error de Redes Pasivas	54
Figura 38. Ventana de Error de Redes Pasivas	54
Figura 39. GUI de la aplicación Redes Pasivas	55
Figura 40. Ventana de Advertencia de Controladores de Tensión Alterna	56

Figura 41. Ventana de Error de Controladores de Tensión Alterna	57
Figura 42. GUI de la aplicación Controladores de Tensión Alterna	57
Figura 43. Ventana de Advertencia de Aproximaciones y Errores de Redondeo	58
Figura 44. GUI de la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo	59
Figura 45. Ventana de Presentación del Módulo II	60
Figura 46. Menú de Acceso Principal del Capítulo II	61
Figura 47. Ventana de Advertencia de Método de Búsqueda Progresiva	62
Figura 48. Ventana de Mensaje de Método de Búsqueda Progresiva	63
Figura 49. Ventana de Error de Método de Búsqueda Progresiva	63
Figura 50. GUI de la aplicación Método de Búsqueda Progresiva	64
Figura 51. GUI de la aplicación Método de Bisección	65
Figura 52. GUI de la aplicación Método de Falsa Posición	67
Figura 53. Ventana de Error de Método de Punto Fijo	68
Figura 54. GUI de la aplicación Método de Punto Fijo	69
Figura 55. Ventana de Error de Método de Newton – Raphson	70
Figura 56. GUI de la aplicación Método de Newton – Raphson	71
Figura 57. GUI de la aplicación Método de la Secante	72
Figura 58. GUI de la aplicación Método de Müller	74
Figura 59. Ventana de Presentación del Módulo III	75
Figura 60. Menú de Acceso Principal del Capítulo III	76
Figura 61. Menú de Acceso de Interpolación	77
Figura 62. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Lineal	78
Figura 63. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados	79
Figura 64. Ventana de Error de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados	80
Figura 65. Ventana de Error de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados	80
Figura 66. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados	81
Figura 67. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	82
Figura 68. Ventana de selección de archivo .txt generada con la función uigetfile de MATLAB	82
Figura 69. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	83
Figura 70. Ventana de selección de archivo .wk1 generada con la función uigetfile de MATLAB	83
Figura 71. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	84
Figura 72. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos <i>Adquiridos</i> desde un Archivo .wk1	84
Figura 73. Menú de Acceso de Aproximación con el Polinomio de Lagrange	85

Figura 74. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Tabulados	87
Figura 75. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	87
Figura 76. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	88
Figura 77. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Cuadrática	89
Figura 78. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Tabulados	91
Figura 79. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	91
Figura 80. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	92
Figura 81. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Cúbica	93
Figura 82. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Tabulados	95
Figura 83. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	95
Figura 84. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	96
Figura 85. Menú de Acceso de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	97
Figura 86. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Tabulados	99
Figura 87. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	99
Figura 88. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	100
Figura 89. Menú de Acceso de Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados	101
Figura 90. Menú de Acceso de Regresión Lineal	102
Figura 91. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Tabulados	103
Figura 92. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	104
Figura 93. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	104
Figura 94. Menú de Acceso de Regresión Cuadrática	105
Figura 95. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Tabulados	107
Figura 96. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	107
Figura 97. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	108

Figura 98. Ventana de Presentación del Módulo IV	109
Figura 99. Menú de Acceso Principal del Capítulo IV	110
Figura 100. Menú de Acceso de Diferenciación Numérica	111
Figura 101. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	112
Figura 102. Ventana de Error de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	113
Figura 103. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	114
Figura 104. Menú de Acceso de Diferenciación Numérica de Datos Bidimensionales	115
Figura 105. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Tabulados	116
Figura 106. Ventana de Error de Diferenciación Numérica con Datos Tabulados	116
Figura 107. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Tabulados	117
Figura 108. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	117
Figura 109. Ventana de selección de archivo .txt generada con la función uigetfile de MATLAB	118
Figura 110. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	118
Figura 111. Ventana de selección de archivo .wk1 generada con la función uigetfile de MATLAB	119
Figura 112. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt	119
Figura 113. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1	120
Figura 114. Menú de Acceso de Integración Numérica	121
Figura 115. Menú de Acceso de Método de Newton - Cotes	122
Figura 116. Ventana de Advertencia de Método Trapezoidal	123
Figura 117. Ventana de Error de Método Trapezoidal	123
Figura 118. GUI de la aplicación Método Trapezoidal	124
Figura 119. GUI de la aplicación Método de Simpson	126
Figura 120. GUI de la aplicación Método de Cuadratura de Gauss	127
Figura 121. Menú de Acceso de Integración Numérica Compuesta	128
Figura 122. GUI de la aplicación Método Trapezoidal Compuesto	130
Figura 123. GUI de la aplicación Método de Simpson Compuesto	132
Figura 124. Ventana de Presentación del Módulo V	133
Figura 125. Menú de Acceso Principal del Capítulo V	134
Figura 126. Ventana de Advertencia de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	135
Figura 127. GUI de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	136



Figura 128. GUI adicional de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	137
Figura 129. Ventana de Advertencia de Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables	139
Figura 130. GUI de la aplicación Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables	140
Figura 131. Ventana de Presentación del Módulo VI	141
Figura 132. Menú de Acceso Principal del Capítulo VI	142
Figura 133. Ventana de Advertencia de Método de Euler	143
Figura 134. GUI de la aplicación Método de Euler	144
Figura 135. GUI de la aplicación Método de Taylor	145
Figura 136. Archivo .mat de Redes Pasivas	146
Figura 137. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Redes Pasivas	146
Figura 138. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Redes Pasivas	147
Figura 139. Planteamiento y resultados del problema para Cuerpos en Caída Libre según el libro	149
Figura 140. Resultados en GUI de la aplicación Cuerpos en Caída Libre	151
Figura 141. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Cuerpos en Caída Libre	151
Figura 142. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Cuerpos en Caída Libre	152
Figura 143. Planteamiento y resultados del problema para Movimiento Parabólico según el libro	153
Figura 144. Resultados en GUI de la aplicación Movimiento Parabólico	154
Figura 145. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Movimiento Parabólico	154
Figura 146. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Movimiento Parabólico	155
Figura 147. Planteamiento y resultados del problema para Sistemas Masa - Resorte según el libro	156
Figura 148. Resultados en GUI de la aplicación Sistemas Masa – Resorte	157
Figura 149. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Sistemas Masa – Resorte	158
Figura 150. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Sistemas Masa – Resorte	159
Figura 151. Planteamiento y resultados del problema para Redes Pasivas según el libro	160
Figura 152. Resultados en GUI de la aplicación Redes Pasivas	160
Figura 153. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Redes Pasivas	161
Figura 154. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Redes Pasivas	162

Figura 155. Planteamiento y resultados del problema para Controladores de Tensión Alterna según el libro	164
Figura 156. Resultados en GUI de la aplicación Controladores de Tensión Alterna	165
Figura 157. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Controladores de Tensión Alterna	166
Figura 158. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Controladores de Tensión Alterna	167
Figura 159. Planteamiento y resultados del problema para Aproximaciones y Errores de Redondeo según el libro	168
Figura 160. Resultados en GUI de la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo	169
Figura 161. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Aproximaciones y Errores de Redondeo	169
Figura 162. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Aproximaciones y Errores de Redondeo	170
Figura 163. Planteamiento y resultados del problema para Método de Búsqueda Progresiva según el libro	171
Figura 164. Resultados en GUI de la aplicación Método de Búsqueda Progresiva	172
Figura 165. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Búsqueda Progresiva	172
Figura 166. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Búsqueda Progresiva	173
Figura 167. Resultados en GUI de la aplicación Método de Bisección	175
Figura 168. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Bisección	176
Figura 169. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Bisección	177
Figura 170. Planteamiento y resultados del problema para Método de Falsa Posición según el libro	178
Figura 171. Resultados en GUI de la aplicación Método de Falsa Posición	179
Figura 172. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Falsa Posición	180
Figura 173. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Falsa Posición	181
Figura 174. Planteamiento y resultados del problema para Método de Punto Fijo según el libro	182
Figura 175. Resultados en GUI de la aplicación Método de Punto Fijo	183
Figura 176. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Punto Fijo	184
Figura 177. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Punto Fijo	185
Figura 178. Planteamiento y resultados del problema para Método de	

	Newton - Raphson según el libro	186
Figura 179.	Resultados en GUI de la aplicación Método de Newton - Raphson	187
Figura 180.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Newton – Raphson	188
Figura 181.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Newton – Raphson	189
Figura 182.	Planteamiento y resultados del problema para Método de la Secante según el libro	190
Figura 183.	Resultados en GUI de la aplicación Método de la Secante	190
Figura 184.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de la Secante	191
Figura 185.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de la Secante	192
Figura 186.	Planteamiento y resultados del problema para Método de Müller según el libro	193
Figura 187.	Resultados en GUI de la aplicación Método de Müller	193
Figura 188.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Müller	194
Figura 189.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Müller	195
Figura 190.	Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Lineal según el libro	196
Figura 191.	Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal	197
Figura 192.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Lineal	198
Figura 193.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Lineal	199
Figura 194.	Planteamiento y resultados del problema para Aproximación con el Polinomio de Lagrange según el libro	200
Figura 195.	Resultados en GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange	201
Figura 196.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange	202
Figura 197.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange	203
Figura 198.	Hoja de Matriz Construida del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange	204
Figura 199.	Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Cuadrática según el libro	205
Figura 200.	Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática	207
Figura 201.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cuadrática	208

Figura 202. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cuadrática	209
Figura 203. Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Cúbica según el libro	210
Figura 204. Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica	212
Figura 205. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cúbica	213
Figura 206. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cúbica	214
Figura 207. Planteamiento y resultados del problema para Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton según el libro	216
Figura 208. Resultados en GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	217
Figura 209. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	218
Figura 210. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	219
Figura 211. Hoja de Matriz Construida del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton	220
Figura 212. Planteamiento y resultados del problema para Regresión Lineal según el libro	221
Figura 213. Resultados en GUI de la aplicación Regresión Lineal	222
Figura 214. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Regresión Lineal	223
Figura 215. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Regresión Lineal	224
Figura 216. Planteamiento y resultados del problema para Regresión Cuadrática según el libro	225
Figura 217. Resultados en GUI de la aplicación Regresión Cuadrática	227
Figura 218. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Regresión Cuadrática	228
Figura 219. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Regresión Cuadrática	229
Figura 220. Planteamiento y resultados del problema para Diferenciación Numérica según el libro	230
Figura 221. Resultados en GUI de la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	231
Figura 222. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	232
Figura 223. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada	233
Figura 224. Planteamiento y resultados del problema para Método Trapezoidal según el libro	234
Figura 225. Resultados en GUI de la aplicación Método Trapezoidal	235

Figura 226. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método Trapezoidal	236
Figura 227. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método Trapezoidal	237
Figura 228. Resultados en GUI de la aplicación Método de Simpson	238
Figura 229. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Simpson	239
Figura 230. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Simpson	240
Figura 231. Planteamiento y resultados del problema para Método de Cuadratura de Gauss según el libro	241
Figura 232. Resultados en GUI de la aplicación Método de Cuadratura de Gauss	242
Figura 233. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Cuadratura de Gauss	243
Figura 234. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Cuadratura de Gauss	244
Figura 235. Planteamiento y resultados del problema para Método Trapezoidal Compuesto según el libro	245
Figura 236. Resultados en GUI de la aplicación Método Trapezoidal Compuesto	246
Figura 237. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método Trapezoidal Compuesto	247
Figura 238. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método Trapezoidal Compuesto	248
Figura 239. Resultados en GUI de la aplicación Método de Simpson Compuesto	249
Figura 240. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Simpson Compuesto	250
Figura 241. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Simpson Compuesto	251
Figura 242. Planteamiento y resultados del problema para Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables según el libro	252
Figura 243. Resultados en GUI de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	255
Figura 244. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	256
Figura 245. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables	257
Figura 246. Planteamiento y resultados del problema para Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables según el libro	258
Figura 247. Resultados en GUI de la aplicación Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables	260
Figura 248. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de	

	Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables	261
Figura 249.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables	262
Figura 250.	Planteamiento y resultados del problema para Método de Euler según el libro	264
Figura 251.	Resultados en GUI de la aplicación Método de Euler	266
Figura 252.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Euler	267
Figura 253.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Euler	268
Figura 254.	Resultados en GUI de la aplicación Método de Taylor	269
Figura 255.	Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Taylor	270
Figura 256.	Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Taylor	271

## ÍNDICE DE ANEXOS

	Pág.
<b>ANEXO A.</b> Contenido teórico del Capítulo I – Introducción al Cálculo Numérico.	275
<b>ANEXO B.</b> Contenido teórico del Capítulo II – Solución Numérica a Ecuaciones No Lineales.	307
<b>ANEXO C.</b> Contenido teórico del Capítulo III – Interpolación y Aproximación Polinomial.	331
<b>ANEXO D.</b> Contenido teórico del Capítulo IV – Diferenciación e Integración Numérica.	361
<b>ANEXO E.</b> Contenido teórico del Capítulo V – Solución Numérica a Sistemas de Ecuaciones No Lineales.	383
<b>ANEXO F.</b> Contenido teórico del Capítulo VI – Solución Numérica a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.	391

## **RESUMEN GENERAL DE TRABAJO DE GRADO**

**TÍTULO:** HERRAMIENTA COMPUTACIONAL PARA LA ASIGNATURA DE CÁLCULO NUMÉRICO PARA INGENIERÍA ELECTRÓNICA CON APLICACIONES EN MATLAB SOBRE PLATAFORMA LOTUS LEARNING SPACE 5.

**AUTOR(ES):** DIEGO ANDRÉS FORERO GÓMEZ

**FACULTAD:** Facultad de Ingeniería Electrónica

**DIRECTOR(A):** JESÚS ANTONIO VEGA URIBE

### **RESUMEN**

La Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, hace algunos años ha venido destinando recursos tecnológicos, académicos y económicos, para desarrollar e implementar soportes teóricos y prácticos para muchas asignaturas incluidas en las estructuras de sus programas académicos sobre la plataforma Lotus Learning Space 5, que permite el acceso a dichos recursos y conocimientos vía Internet por parte de los estudiantes inscritos. La ausencia de una herramienta que cumpla la función anteriormente descrita para la asignatura Cálculo Numérico incluida en el contenido programático vigente de su Facultad de Ingeniería Electrónica, genera la idea de diseñarla, implementarla y ponerla en funcionamiento, teniendo en cuenta que el análisis numérico juega un papel fundamental en la formación del Ingeniero Electrónico, ya que forja las bases y otorga los métodos a implementar en la resolución de fenómenos tanto a nivel académico como industrial, mediante la aplicación de poderosas técnicas matemáticas. Esta herramienta está constituida por un contenido teórico bien diseñado que respalda los conceptos adquiridos en la asignatura catedrática y por una serie de aplicaciones desarrolladas en MATLAB, que permiten de manera interactiva la comprobación del funcionamiento y la aplicabilidad de todos los conceptos teóricos disponibles, mediante la ejecución, resolución y visualización de resultados finales de problemas de diversos tipos en un ambiente de interacción y navegación muy agradable y de fácil acceso a través de un diseño web en Flash sobre la plataforma Lotus Learning Space 5. La implementación de una herramienta de este tipo en la página web principal de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga y el manejo adecuado orientado por el docente titular de la asignatura, ayudan a la comprensión de las temáticas propuestas en el programa e impulsan una formación más integral aprovechando los recursos tecnológicos disponibles y siendo congruentes con las actuales tendencias académicas.



**PALABRAS  
CLAVES:**

Aplicaciones, Cálculo Numérico, herramienta, interfaces gráficas de usuario, MATLAB, métodos.

**Vº Bº DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO**

## **FINAL WORK ABSTRACT**

**TITLE:** SOFTWARE TOOL FOR NUMERIC CALCULATION FOR ELECTRONIC ENGINEERING WITH APPLICATIONS IN MATLAB WITH LOTUS LEARNING SPACE 5 PLATFORM.

**AUTHOR:** DIEGO ANDRÉS FORERO GÓMEZ

**DEPARTMENT:** Facultad de Ingeniería Electrónica

**DIRECTOR:** JESÚS ANTONIO VEGA URIBE

### **ABSTRACT**

The Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, some years ago has come dedicating technological, academic and economic resources, to develop and to implement theoretical and practical supports for many subjects included in the structures of its academic programs on the platform Lotus Learning Space 5 that it allows the access to this resources and knowledge via Internet on the part of the entered students. The absence of a tool that completes the function previously described for the subject Numeric Calculation included in the effective programmatic content of its Department of Electronic Engineering, it generates the idea of designing it, to implement it and to put it into operation, keeping in mind that the numeric analysis plays a fundamental paper in the Electronic Engineer's formation, since forge the bases and it grants the methods to implement in the resolution of phenomena so much at academic level as industrial, by means of the application of powerful mathematical techniques. This tool is constituted by a well designed theoretical content that it supports the concepts acquired in the subject professor and for a series of applications developed in MATLAB that allow in an interactive way the confirmation of the operation and the applicability of all the available theoretical concepts, by means of the execution, resolution and visualization of final results of problems of diverse types in an interaction atmosphere and very pleasant sailing and of easy access through a design web in Flash on the platform Lotus Learning Space 5. The implementation of a tool of this type in the page main web of the Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga and the appropriate handling guided by the educational holder of the subject, they help to the understanding of the thematic proposals in the program and they impel a more integral formation taking advantage of the available technological resources and being appropriate with the current academic tendencies.

**KEYWORDS:**

Applications, Numeric Calculation, tool, graphic user interfaces, MATLAB, methods

**V° B° DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO**

## INTRODUCCIÓN

El hombre, a lo largo de la historia, ha debido enfrentar un sin número de eventos fenomenológicos que rodean cada una de sus acciones y lo acompañan en su diario vivir. El proceso de comprensión de la naturaleza de dichos eventos ha dado origen a las más poderosas técnicas matemáticas para el modelado de sistemas y procesos, conocidas como métodos de análisis numérico. El problema de estas radica en que por lo general son de carácter iterativo y se convierten en tediosas y agotadoras.

Como puede suponerse con facilidad; la comprensión y el entendimiento de estas técnicas son bastante complejos y se hace necesaria la utilización de recursos de respaldo. El advenimiento de las computadoras que ofrecieron mayores velocidades de procesamiento, y el desarrollo de dispositivos de almacenamiento de alta densidad, permitieron minimizar el tiempo de ejecución de los métodos de análisis numérico.

Las actuales tendencias industriales giran en torno al concepto de automatización de procesos y un elemento muy importante en su interior es la caracterización de los mismos, es decir, establecer un patrón de comportamiento y de respuesta por parte del sistema frente a determinadas variaciones. Este establecimiento se puede realizar mediante la aplicación de algoritmos de análisis numérico y le otorga de esta manera la relevancia que posee en la actualidad su aprendizaje.

La intención del proyecto es generar la interacción de estudiantes de Ingeniería Electrónica, con los múltiples métodos de análisis numérico que permiten la resolución de muchos fenómenos que se presentan en diversos ámbitos a los cuales pueden enfrentarse; mediante la comprobación práctica de la composición teórica de dichos métodos, a través de una herramienta computacional dinámica complementaria a la asignatura catedrática incluida en el programa de estudios de la facultad; herramienta altamente funcional, que brinda un contenido teórico bien fundamentado, producto de una larga y enfocada recopilación, de fácil acceso y visualmente agradable, facilitando de esta manera una formación integral, con el aprovechamiento de los recursos tecnológicos disponibles y encaminándola hacia las futuras tendencias académicas.

Además, los estudiantes tienen a su disposición aplicaciones modulares funcionales, desarrolladas en MATLAB, que pueden ser descargadas desde Internet debido a la disposición de la herramienta en la plataforma Lotus Learning Space 5 de la página web de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, abarcando los temas descritos en el programa de la asignatura de

una forma interactiva, mediante Interfaces Gráficas de Usuario (*Graphic User Interface, GUI*); constituyéndose de esta manera en un laboratorio virtual que proporciona un respaldo práctico a los conceptos teóricos disponibles.

## 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Los estudiantes de Ingeniería y en especial los de Ingeniería Electrónica requieren estar en continuo contacto con el análisis y los métodos numéricos, este aprendizaje juega un rol fundamental y marca la diferencia en el desempeño individual futuro del profesional en formación, ya que dichos aspectos de su formación involucran sin lugar a duda el manejo de las más poderosas técnicas matemáticas aplicadas a la resolución de problemas de diversos tipos como modelado de sistemas de control, sistemas de ecuaciones diferenciales tanto lineales como no lineales, diseño de estrategias de control, predicción de comportamientos fenomenológicos, análisis y procesamiento de señales, entre otros.

Debido a la complejidad que presentan dichos análisis y que en ocasiones, los métodos aplicados pueden tornarse tediosos debido a la alta dependencia de un gran número de iteraciones para la determinación del resultado final, se hace necesaria la utilización de software especializado, enfocado en el análisis numérico que brinde la oportunidad a los estudiantes de respaldar y consolidar los conceptos teóricos adquiridos mediante la visualización y corroboración de resultados de funcionamiento de los métodos estudiados y empleados, garantizando de esta manera una familiarización consistente con los mismos durante la etapa de formación como tal.

Teniendo en cuenta estos aspectos y el poco tiempo asignado para las horas de clase teórica, es fácil concluir que un aprendizaje tan complejo y con un contenido analítico considerablemente alto, puede no ser tan efectivo, si no se implementan herramientas que faciliten el entendimiento y la comprensión de las temáticas abarcadas por la asignatura.

El diseño, la implementación y la puesta en funcionamiento de una herramienta computacional que brinde como prestaciones un soporte teórico y la interacción del estudiante con aplicaciones relacionadas, puede ser en gran parte la solución al problema que se presenta.

## 2. ANTECEDENTES

Desde hace algunos años ha venido naciendo una fuerte y bien marcada tendencia académica que encamina la educación y el aprendizaje hacia un concepto denominado e-learning o aprendizaje virtual. Este aprendizaje virtual consiste principalmente en el máximo aprovechamiento de los recursos tecnológicos, con el fin de satisfacer la necesidad de innovar en modelos de educación y ampliar la cobertura de la misma.

La Universidad Pontificia Bolivariana, Seccional Bucaramanga en el año 2001 implementó la plataforma Lotus Learning Space 5.0 sobre su página web, con el fin de ofrecer un recurso virtual de fácil acceso que respalda las asignaturas dispuestas en los diferentes contenidos programáticos y adicionalmente para que se constituyera tanto en un permanente contenido teórico como en un sistema complementario de evaluación y control del aprendizaje.

Actualmente, sobre esta plataforma se encuentra dispuesta gran cantidad de cursos correspondientes a la mayoría de asignaturas de los planes de estudio que ofrece la Universidad. Estos cursos han sido diseñados por docentes, egresados, estudiantes de pre-grado y profesionales de la región, bajo diversas técnicas de diseño y acceso.

Con respecto a la Facultad de Ingeniería Electrónica, existen cursos sobre plataforma Lotus Learning Space 5.0 que abarcan el contenido teórico y las aplicaciones correspondientes a asignaturas como Antropología en la Cultura, Química General, Álgebra Lineal, Circuitos Eléctricos I, Sistemas y Señales, Técnicas Digitales I, Técnicas Digitales II, Máquinas Eléctricas, Ingeniería Económica, Electrónica Industrial, Microprocesadores I, Microprocesadores II, Comunicaciones Analógicas, Comunicaciones Especiales y Laboratorio de Comunicaciones Especiales cubriendo de esta manera una cantidad significativa de asignaturas sobre el plan de estudios vigente de esta facultad. En particular la herramienta computacional desarrollada para la asignatura Sistemas y Señales, cuenta con aplicaciones diseñadas en MatLab 7.0, con opción de descarga desde la plataforma Lotus Learning Space y ejecución sin instalación previa de MatLab.

A nivel regional, las distintas instituciones de educación superior han implementado este tipo de herramientas con el fin de encaminar sus procesos educativos hacia la tendencia de educación virtual. Por ejemplo, la Universidad Autónoma de Bucaramanga ofrece programas de pregrado completos bajo la

modalidad de e-learning. La universidad Industrial de Santander ha desarrollado tutoriales complementarios para algunas asignaturas como Procesamiento de Señales que comprenden plataformas como Lotus Learning Space y aplicaciones en MatLab.

En otras regiones del país, instituciones como la Universidad del Valle, la Fundación Universitaria Católica del Norte y la Universidad Nacional de Colombia han destinado recursos económicos, tecnológicos, humanos y de tiempo, con el mismo fin de las tres instituciones de Santander anteriormente mencionadas.

Como una característica común, tanto a nivel nacional como internacional, las instituciones académicas prefieren la herramienta computacional MatLab para efectuar el tratamiento matemático del cálculo y el análisis numérico mediante el diseño, desarrollo e implementación de algoritmos que efectúan los métodos numéricos necesarios para encontrar las soluciones correspondientes. De esta manera, instituciones como la Universidad Metropolitana de Caracas y el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey han desarrollado cursos de Algebra Lineal, Estadística, Cálculo y Análisis Numérico sobre la plataforma Lotus Learning Space de IBM con aplicaciones desarrolladas en MatLab<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, [en línea] Learning Space, publicado en 2001, [citado en 2008] disponible en la página de internet:  
[http://www.gate.upm.es/informe\\_evaluacion/documentos/LearningSpace.pdf](http://www.gate.upm.es/informe_evaluacion/documentos/LearningSpace.pdf)



### 3. JUSTIFICACIÓN

La Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, hace algunos años ha venido destinando recursos tecnológicos, académicos y económicos, para desarrollar e implementar soportes teóricos y prácticos para muchas asignaturas incluidas en las estructuras de sus programas académicos sobre la plataforma Lotus Learning Space 5, que permite el acceso a dichos recursos y conocimientos vía Internet por parte de los estudiantes inscritos.

La ausencia de una herramienta que cumpla la función anteriormente descrita para la asignatura Cálculo Numérico incluida en el contenido programático vigente de su Facultad de Ingeniería Electrónica, genera la idea de diseñarla, implementarla y ponerla en funcionamiento, teniendo en cuenta que el análisis numérico juega un papel fundamental en la formación del Ingeniero Electrónico, ya que forja las bases y otorga los métodos a implementar en la resolución de fenómenos tanto a nivel académico como industrial, mediante la aplicación de poderosas técnicas matemáticas. Esta herramienta está constituida por un contenido teórico bien diseñado que respalda los conceptos adquiridos en la asignatura catedrática y por una serie de aplicaciones desarrolladas en MATLAB, que permiten de manera interactiva la comprobación del funcionamiento y la aplicabilidad de todos los conceptos teóricos disponibles, mediante la ejecución, resolución y visualización de resultados finales de problemas de diversos tipos en un ambiente de interacción y navegación muy agradable y de fácil acceso a través de un diseño web en Flash sobre la plataforma Lotus Learning Space 5.

La implementación de una herramienta de este tipo en la página web principal de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga y el manejo adecuado orientado por el docente titular de la asignatura, ayudan a la comprensión de las temáticas propuestas en el programa e impulsan una formación más integral aprovechando los recursos tecnológicos disponibles y siendo congruentes con las actuales tendencias académicas.

## **4. OBJETIVOS**

### **4.1. OBJETIVO GENERAL**

- Diseño, implementación y puesta en funcionamiento de una herramienta computacional constituida por un contenido teórico fundamentado y una serie de aplicaciones desarrolladas en MATLAB con la opción de descarga, sobre plataforma Lotus Learning Space 5 con acceso desde la página web principal de la Universidad, con el fin de ofrecer soporte teórico y práctico que complemente el contenido de la asignatura Cálculo Numérico.

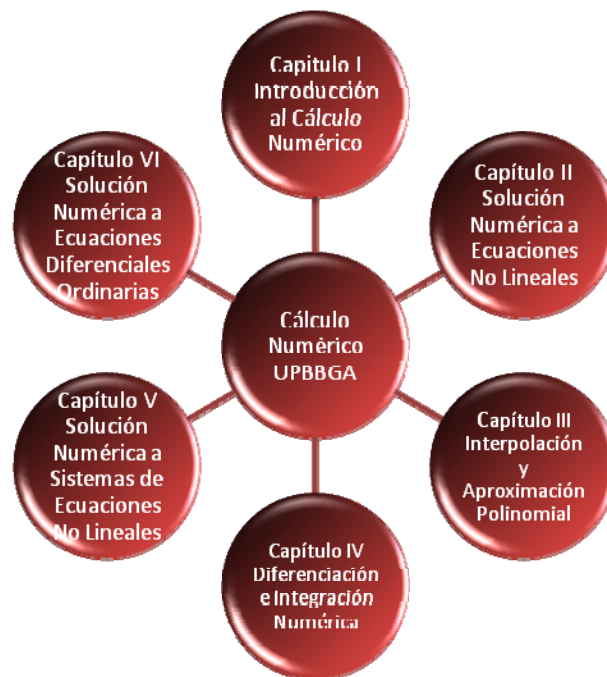
### **4.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Recopilar y validar la información obtenida de Internet, Manuales de usuario de MATLAB, del paquete MacroMedia y de Lotus Learning Space 5, tesis relacionadas, aplicaciones desarrolladas, tendencias actuales de diseño web, bibliografía disponible sobre Análisis y Métodos Numéricos. (Recopilación de información. Estado del arte.)
- Clasificar y analizar la información sobre los temas de interés (Gestión de la información).
- Incorporar conocimiento sobre diseño de Interfaces Gráficas de Usuario, depuración y creación de algoritmos en MATLAB para el desarrollo de las aplicaciones.
- Diseñar los módulos de la herramienta computacional.
- Construir el contenido teórico de la herramienta.
- Incorporar conocimiento sobre la programación en el ambiente de diseño web Flash incluido en el paquete Macromedia.
- Realizar el diseño web de navegación para la herramienta y ubicar en dicho diseño web las aplicaciones de MATLAB y el contenido teórico en archivos .PDF.
- Crear el Manual de Usuario de la herramienta.

## 5. METODOLOGÍA

Con el fin de abarcar todos los temas contenidos en el programa de la asignatura de Cálculo Numérico incluida en la estructura programática de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, se sugiere que la herramienta esté constituida por seis módulos correspondientes a los seis capítulos del programa anteriormente mencionado.

Figura 1. Diagrama de Módulos de la Herramienta



Fuente: Autor

Estos módulos poseen una Interfaz Gráfica de Usuario (*Graphic User Interface, GUI*) desarrollada en el ambiente computacional MATLAB, que permite el acceso a cada una de las aplicaciones.

A partir de la selección desde menús que se superponen entre sí, el usuario puede acceder a la aplicación deseada e ingresa los datos particulares que requiere cada aplicación y la ejecuta a la espera de visualizar el resultado del proceso.

Para cada uno de los capítulos se genera un contenido teórico de respaldo en formato digital que condensa toda la información necesaria para el aprendizaje de las técnicas aplicadas en el análisis numérico.

Como complemento, la creación de un Manual de Usuario que orienta y asiste de manera clara y concisa sobre la forma adecuada de utilizar la herramienta.

Tanto los módulos desarrollados en MATLAB, como los contenidos teóricos en formato digital de cada uno de ellos y el manual de usuario de la herramienta son implementados en un ambiente web de navegación desarrollado de forma híbrida en DreamWeaver y Flash, ambientes de desarrollo web incluidos en el paquete Macromedia, y posteriormente se instala la herramienta completa en la plataforma Lotus Learning Space 5 de la página web principal de la Universidad.

## **6. DISEÑO WEB DE NAVEGACIÓN**

### **6.1. INFORMACION GENERAL**

El diseño Web es una actividad que consiste en la estructuración e implementación de sitios Web teniendo como consideraciones fundamentales la navegabilidad, la interactividad, la funcionalidad, el equilibrio en la distribución gráfica, la disposición de la información y la composición de los elementos de interacción con el medio empleando texto, imagen, audio y video.

El diseño de páginas Web es una herramienta del diseño gráfico de uso extendido que cumple de forma dinámica y altamente gráfica con la exposición y transferencia de información, la cual se enlaza para crear una estructura de acceso a la misma con la intención de facilitar la adquisición por parte del usuario.

Para dicho diseño es necesario tener un conocimiento de herramientas para el diseño y edición de páginas Web y animaciones, las cuales son Macromedia Dreamweaver, Macromedia Fireworks y Macromedia Flash, en este caso.

### **6.2. DISEÑO WEB**

Las consideraciones que se tendrán en cuenta para este diseño Web son:

- La implementación de una tendencia bastante corporativa que permite la disposición de la información de manera sencilla, funcional y agradable visualmente, empleando animaciones, constituyendo así un diseño Web muy elegante con elementos gráficos bien elaborados pero que no sobrecargan la página de ninguna manera.
- La utilización de colores característicos de la Universidad, que para este caso fueron empleados el negro y el rojo, este último en diferentes tonalidades con la intención de darle un aspecto de degradación gráfica que contribuyera con la adquisición de un fondo visualmente agradable pero suficientemente sobrio.
- La información seleccionada para ser dispuesta en la plataforma Web de navegación sugiere cinco páginas enlazadas entre sí, en las cuales se encuentra una página de inicio o presentación, una página de objetivos en

la cual se exponen tanto el objetivo general como los objetivos específicos del proyecto, una página de temas donde se enumera cada uno de los capítulos que constituyen el programa de la asignatura Cálculo Numérico de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad y se muestra un punto de acceso para descargar un archivo .PDF con el contenido teórico de cada capítulo, una página de aplicaciones con puntos de acceso para descargar un archivo .rar con el ejecutable de la aplicación de cada uno de los módulos desarrollados en MATLAB y finalmente, una página de enlaces en la cuál se muestran puntos de acceso a sitios Web relacionados con el desarrollo del proyecto como son la página del Grupo de Investigación en Bioingeniería, Señales y Microelectrónica BISEMIC de la Universidad y la página de MathWorks, compañía desarrolladora de la herramienta computacional MATLAB.

- La creación de un logo animado en Macromedia Flash que caracteriza al proyecto, basado en un elemento particular de la ejecución de las aplicaciones desarrolladas en MATLAB, puntos discretos bidimensionales, dándole una identidad al diseño Web y la creación de un logo de la Universidad, animado igualmente en Macromedia Flash.

Figura 2. Logo del Proyecto del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

Figura 3. Logo de la Universidad del Diseño Web de Navegación



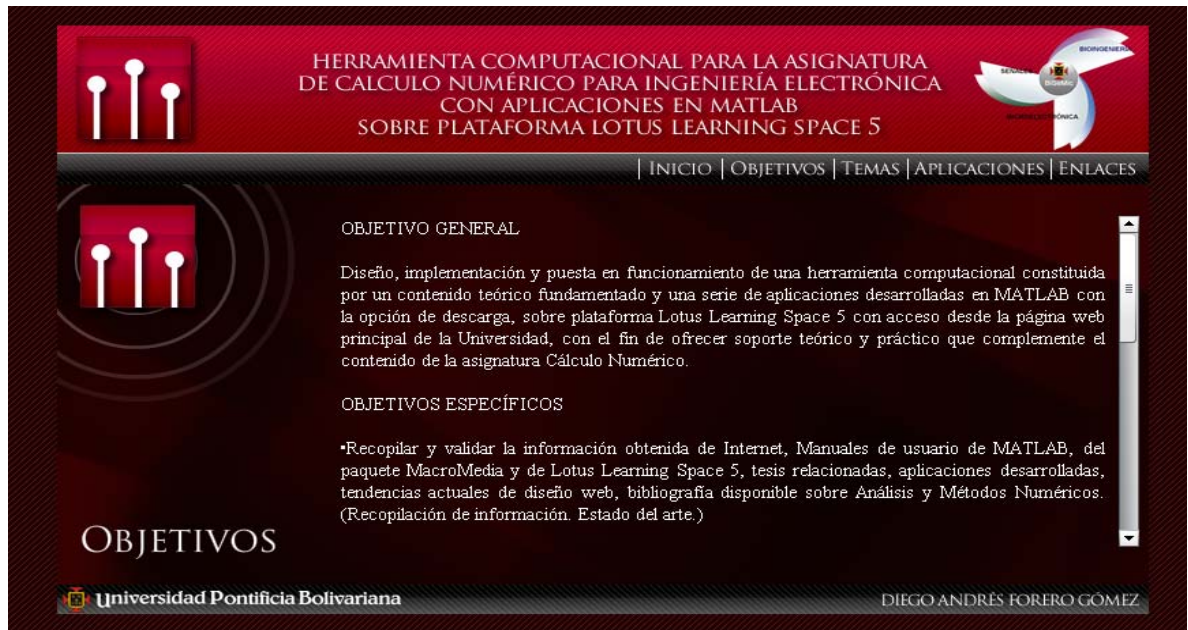
Fuente: Autor

Figura 4. Página de Inicio del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

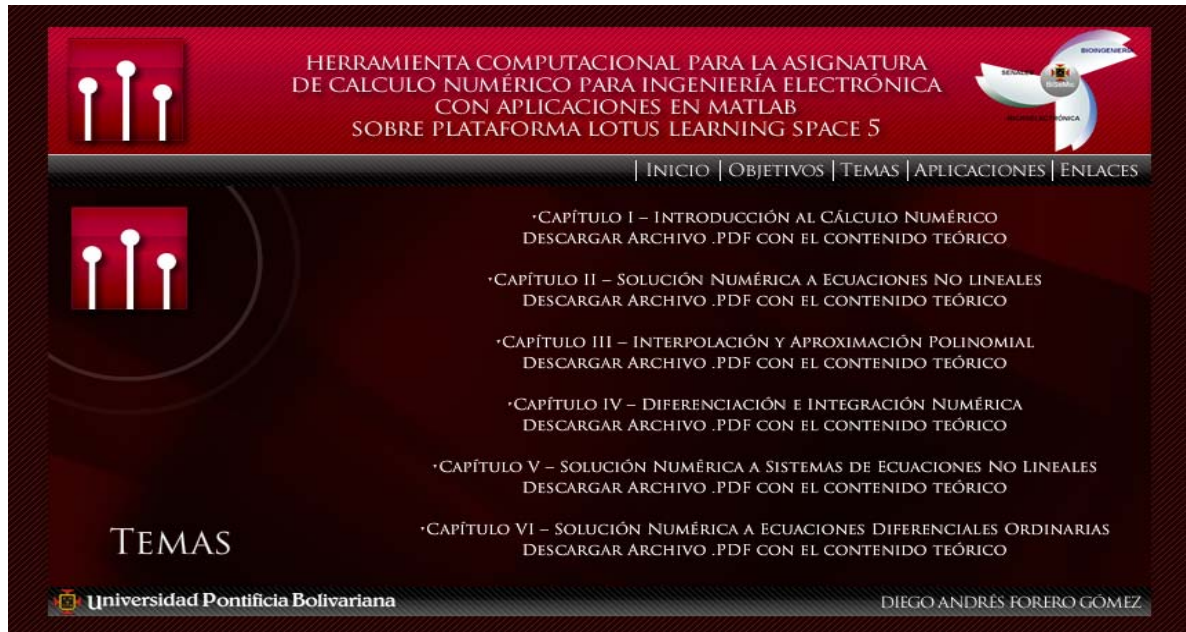
Figura 5. Página de Objetivos del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

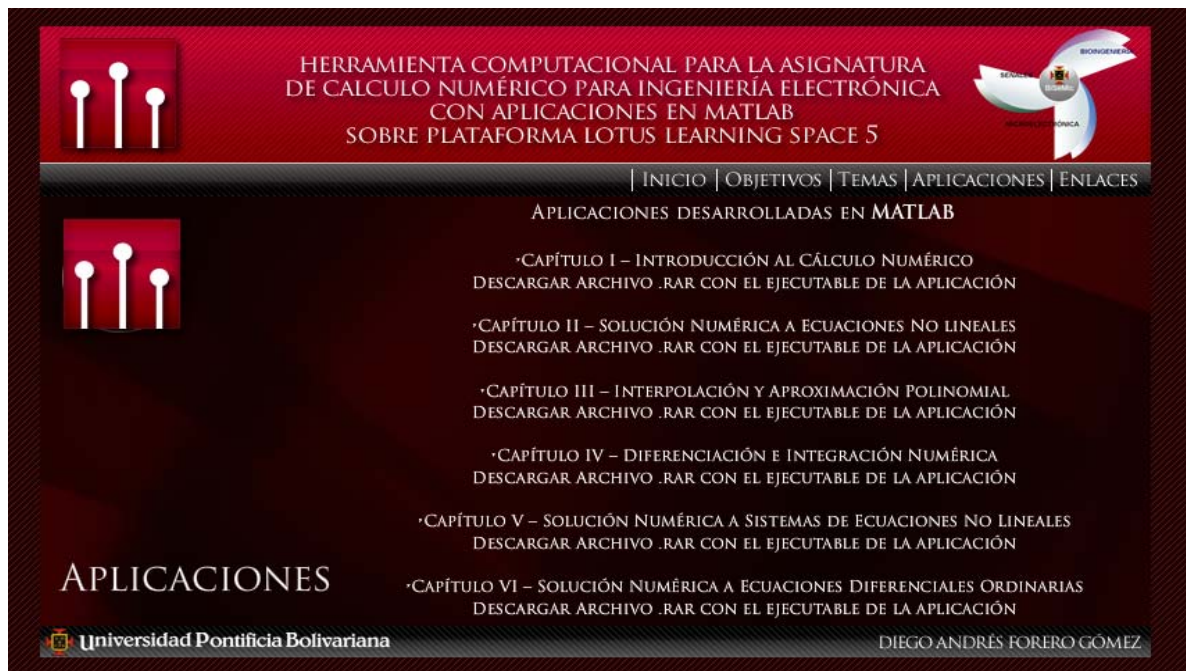


Figura 6. Página de Temas del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

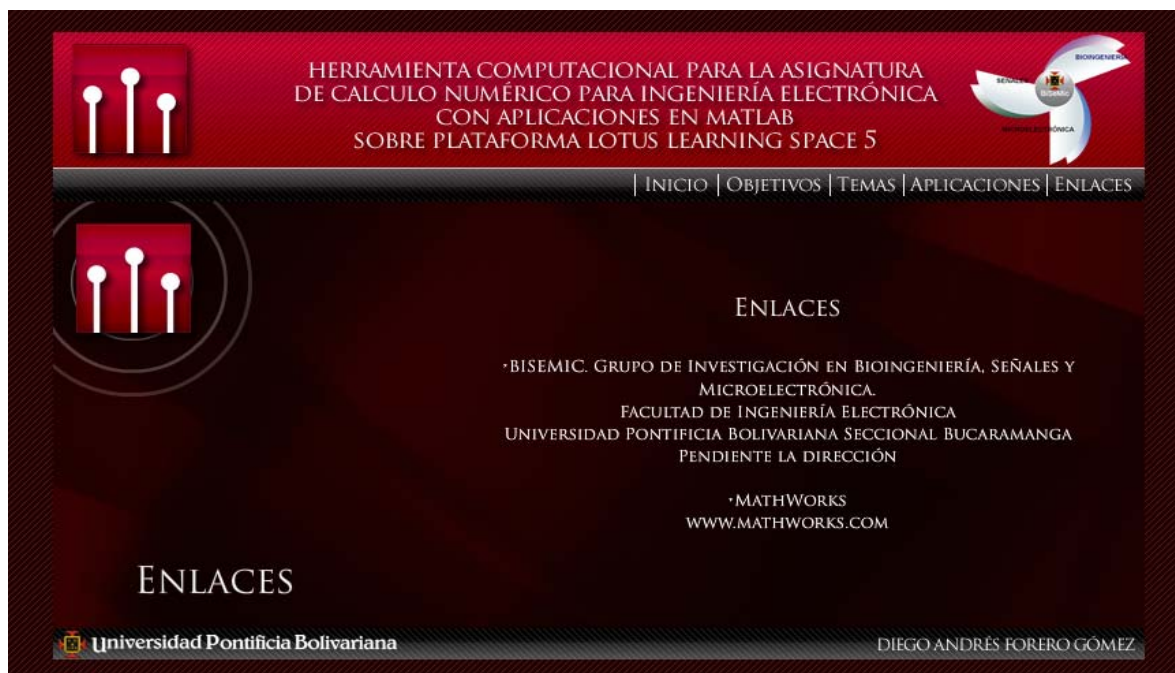
Figura 7. Página de Aplicaciones del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor



Figura 8. Página de Enlaces del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

Figura 9. Logo del BISEMIC del Diseño Web de Navegación



Fuente: Autor

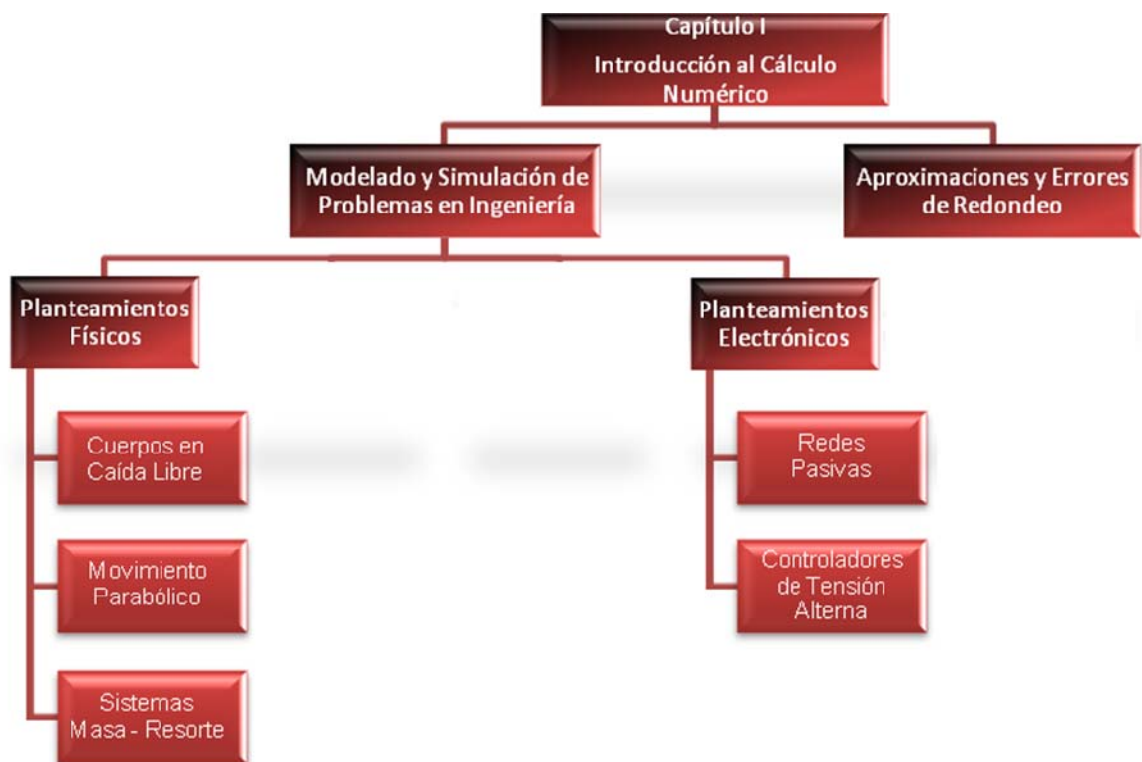
## 7. DISEÑO DE APLICACIONES EN MATLAB

### 7.1. DISEÑO DE NAVEGACIÓN DE LAS APLICACIONES

Cada módulo está constituido por una serie particular de temas. La estrategia de navegación dentro de cada módulo es la más sencilla posible pensando en la comodidad del usuario. Por tal motivo, dicha estrategia se compone de menús que pueden superponerse entre sí, ofreciendo opciones permanentes de retorno tanto al menú inmediatamente anterior como la opción de retorno al menú principal de cada módulo.

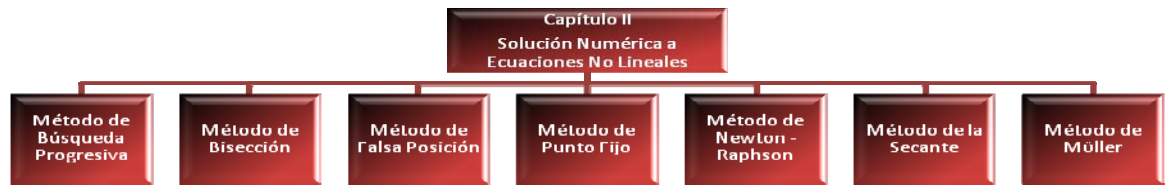
Las Figuras 10, 11, 12, 13, 14 y 15 describen mediante árboles tipo organigrama las opciones de navegación de cada uno de los seis módulos que componen las aplicaciones en MATLAB de la herramienta.

Figura 10. Diagrama de Navegación del Capítulo I



Fuente: Autor

Figura 11. Diagrama de Navegación del Capítulo II



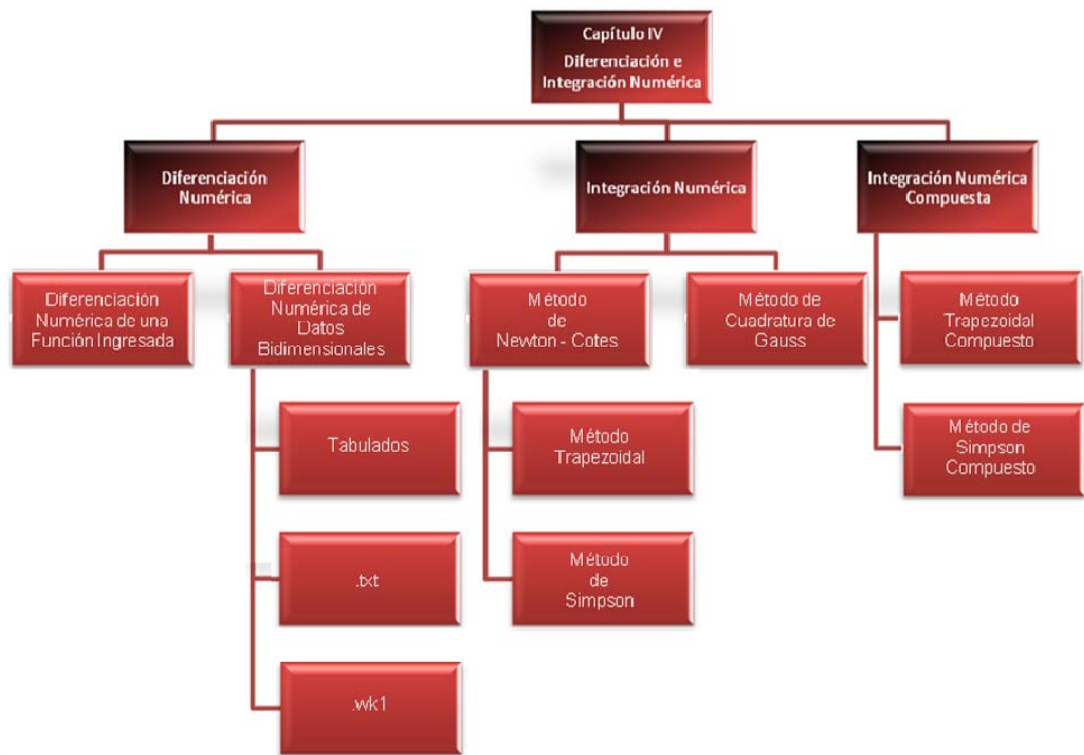
Fuente: Autor

Figura 12. Diagrama de Navegación del Capítulo III



Fuente: Autor

Figura 13. Diagrama de Navegación del Capítulo IV



Fuente: Autor

Figura 14. Diagrama de Navegación del Capítulo V



Fuente: Autor

Figura 15. Diagrama de Navegación del Capítulo VI



Fuente: Autor

## **7.2. DISEÑO DE LAS INTERFACES GRÁFICAS DE USUARIO EN EL AMBIENTE DE DESARROLLO MATLAB**

Una Interfaz Gráfica de Usuario (*Graphic User Interface, GUI*) es una plataforma de diseño personalizada que permite el ingreso, la interacción y la visualización de información por parte del usuario de la aplicación desarrollada.

En el ambiente computacional de desarrollo y análisis numérico MATLAB es posible diseñar GUI's altamente funcionales y adicionalmente se aprovecha todo su potencial de procesamiento y análisis numérico.

Cuando se pretende generar archivos ejecutables .exe en MATLAB es necesario compilar los códigos fuente. Para el diseño y desarrollo de interfaces gráficas de usuario MATLAB cuenta con una herramienta denominada GUIDE, pero esta herramienta presenta conflictos para la creación de ejecutables, incrementa el tamaño de los archivos y no permite realmente una personalización considerable de las interfaces. La solución a esta serie de inconvenientes es generar las interfaces gráficas de usuario con código de programación.

### **7.2.1. DISEÑO A MANO ALZADA**

La etapa de prediseño de las interfaces gráficas de usuario de la herramienta se compone de un bosquejo a mano alzada, teniendo en cuenta las consideraciones plasmadas en el libro de MathWorks, creadores de MATLAB, referente al diseño de GUI's, con el fin de construir interfaces altamente funcionales y visualmente agradables. Otro aspecto importante de esta etapa son las prestaciones particulares previstas para cada una de las aplicaciones a desarrollar, de tal forma que la visualización en pantalla de información tanto de entrada, como de proceso y salida sea la mayor posible.

Con esta premisa y sumada la intención de presentar de forma gráfica los resultados de la ejecución de las aplicaciones, se hace necesario componer las interfaces gráficas de usuario por una ventana principal ajustada a la resolución del computador en el cuál se ejecuta la aplicación, dicha ventana consta de manera general de secciones para el título de la aplicación, para el escudo de la Universidad, un eje bidimensional o tridimensional y secciones para los parámetros de entrada, para los resultados de ejecución y para los botones de acceso a prestaciones particulares de cada aplicación.

La ventana de presentación de cada Módulo está conformada por cuatro secciones, una reservada para el escudo de la Universidad, una para el logo de la

herramienta, una para el título del Módulo y una para el nombre del diseñador de la aplicación.

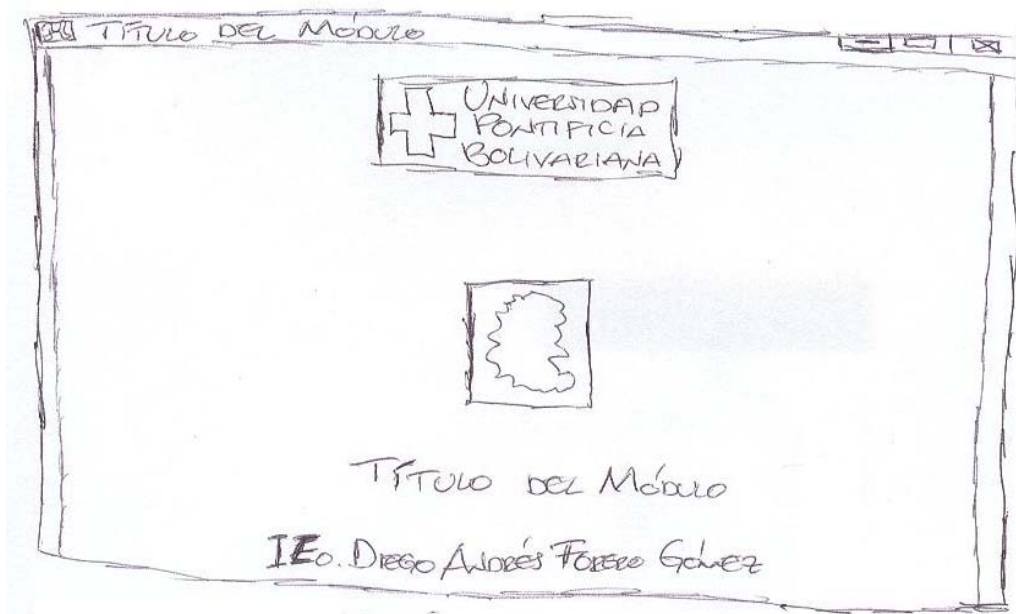
Los menús de navegación y acceso a las aplicaciones están conformados por dos secciones, una para el escudo de la Universidad y otra para el acceso de cada aplicación, sección compuesta por un botón y el título correspondiente.

La Figura 16 muestra el diseño a mano alzada de la ventana de presentación de cada Módulo.

La Figura 17 muestra el diseño a mano alzada de los menús de acceso.

La Figura 18 muestra el diseño a mano alzada de la interfaces gráficas de usuario de la herramienta.

Figura 16. Diseño a mano alzada de la ventana de Presentación



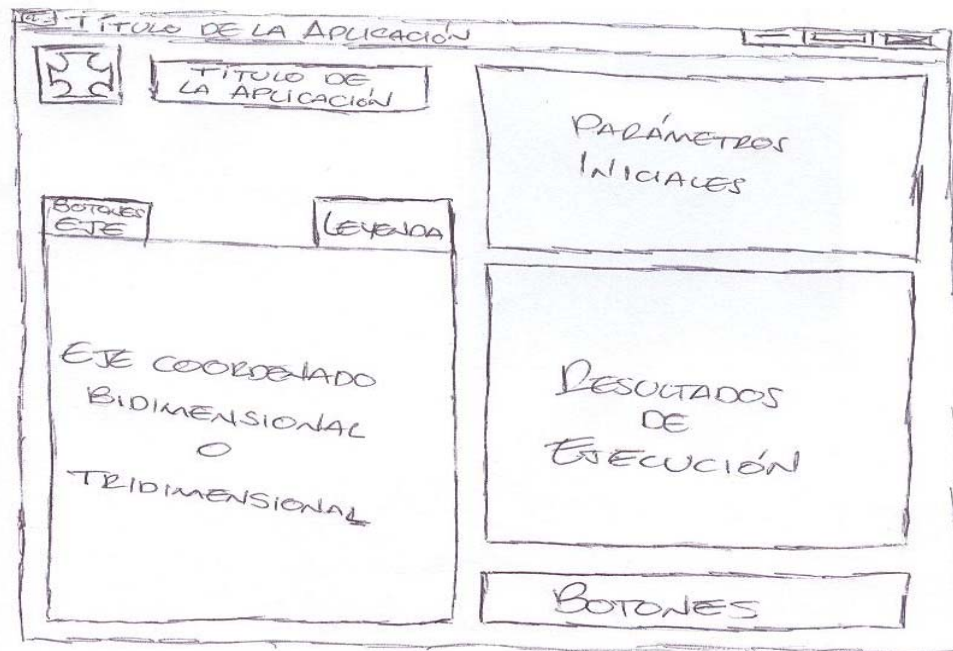
Fuente: Autor

Figura 17. Diseño a mano alzada del Menú de Acceso



Fuente: Autor

Figura 18. Diseño a mano alzada de las GUI's



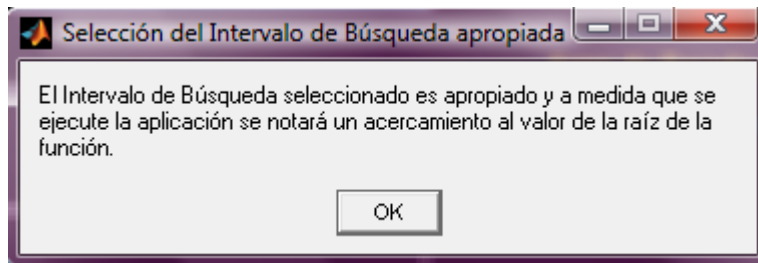
Fuente: Autor



La selección del color de fondo de las aplicaciones se basa en la idea de simular un osciloscopio, instrumento de enorme utilidad para la visualización de señales, ya que la presentación gráfica de los resultados de la ejecución de cada una de las aplicaciones es primordial y se constituye en una prestación fundamental de las mismas. La selección de los demás colores empleados en las interfaces gráficas de usuario se fundamenta en un sentido de contraste lógico que permite una visualización clara de la información sin olvidar las consideraciones de estética pertinentes.

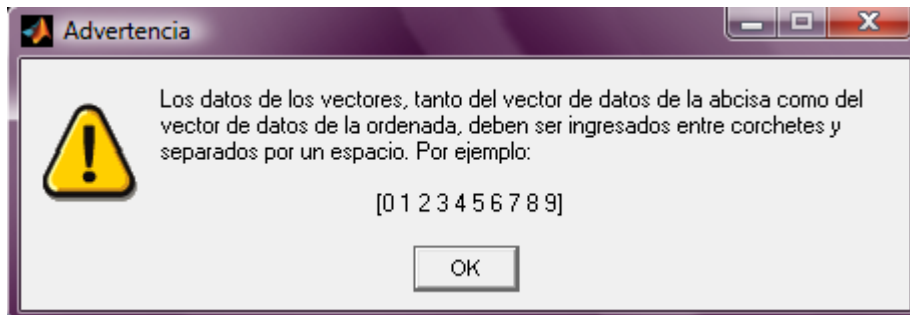
Adicionalmente, todas las GUI's de la herramienta cuentan con ventanas de mensaje, de advertencia y de error que ofrecen información importante sobre el ingreso de los parámetros de entrada o sobre errores cometidos durante la ejecución.

Figura 19. Ventana de Mensaje de las GUI's



Fuente: Autor

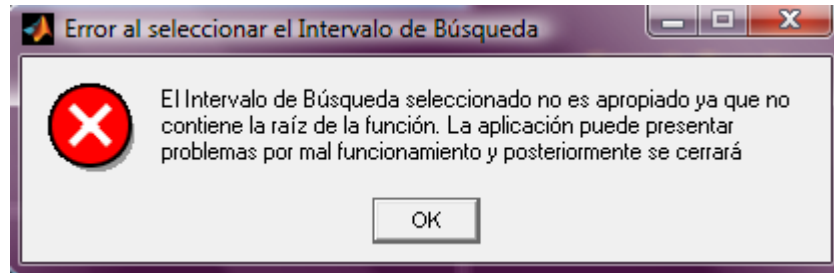
Figura 20. Ventana de Advertencia de las GUI's



Fuente: Autor



Figura 21. Ventana de Error de las GUI's



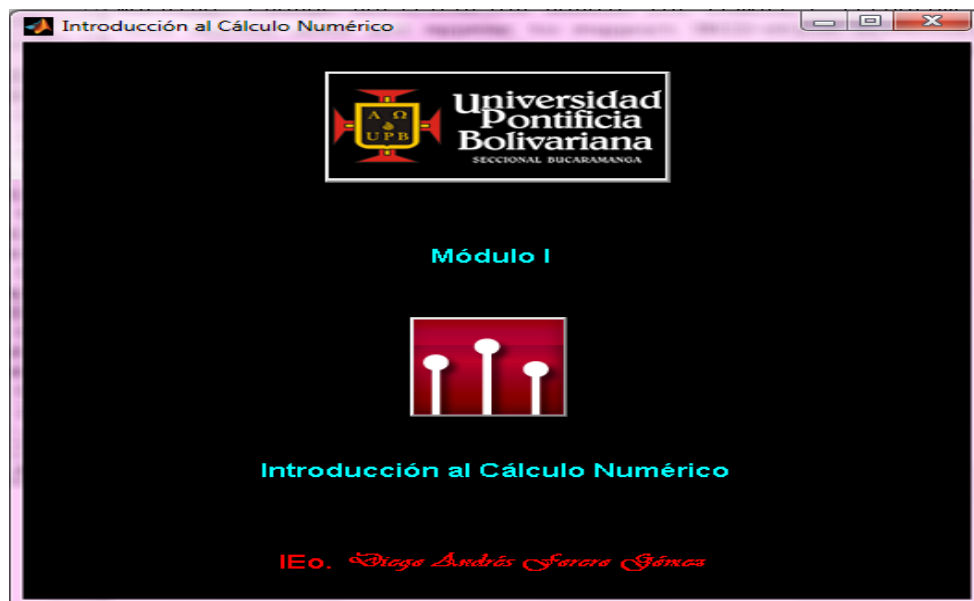
Fuente: Autor

Estas ventanas se diseñan empleando las funciones msgbox, wrnbox y errbox de MATLAB y se personaliza el mensaje de la ventana para cada situación.

## 7.2.2. CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO

El módulo que abarca los temas del capítulo I del programa de la asignatura de Cálculo Numérico de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, denominado Introducción al Cálculo Numérico, se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 22.

Figura 22. Ventana de Presentación del Módulo I

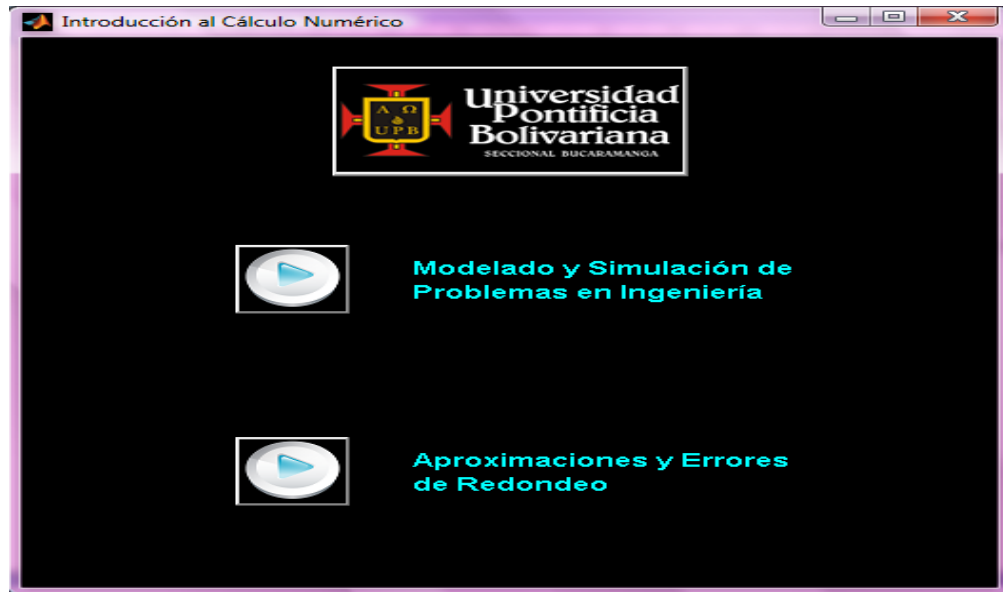


Fuente: Autor

Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería
- Aproximaciones y Errores de Redondeo

Figura 23. Menú de Acceso Principal del Capítulo I



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Planteamientos Físicos
- Planteamientos Electrónicos

Figura 24. Menú de Acceso de Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Planteamientos Físicos oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Cuerpos en Caída Libre
- Movimiento Parabólico
- Sistemas Masa - Resorte

Figura 25. Menú de Acceso de Planteamientos Físicos



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción **Cuerpos en Caída Libre** oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación se observa el comportamiento de problemas que implican el descenso de cuerpos.

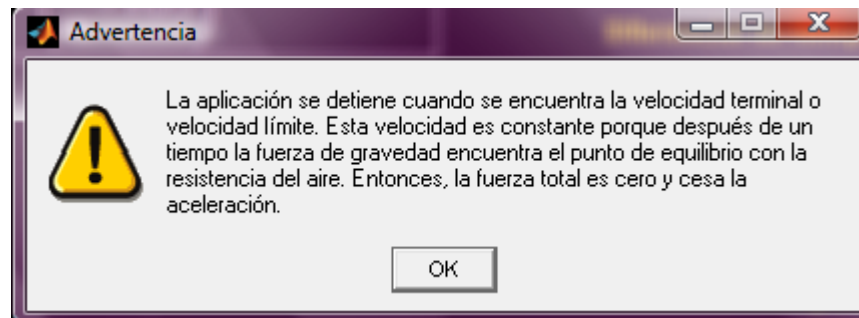
La GUI de la aplicación **Cuerpos en Caída Libre** permite el ingreso de parámetros tales como:

- Masa del cuerpo
- Coeficiente de resistencia o arrastre del aire
- Diferencial de tiempo

La aplicación cuenta con una imagen que muestra la fórmula que modela la velocidad de la caída libre y una imagen que explica claramente cada una de las variables que intervienen en este planteamiento físico.

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la aplicación se detiene cuando se encuentra la velocidad terminal o velocidad límite.

Figura 26. Ventana de Advertencia de Cuerpos en Caída Libre



Fuente: Autor

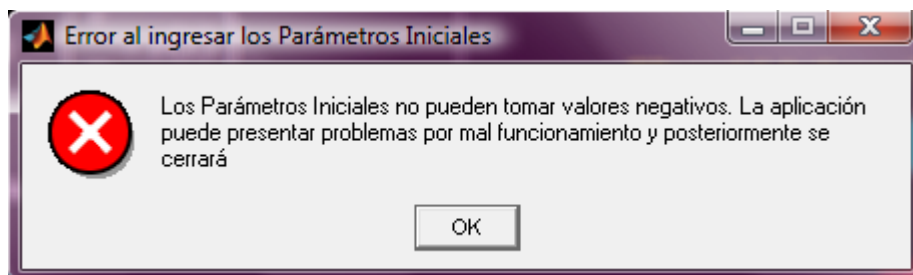
Como resultados de ejecución ofrece:

- Velocidad calculada numérica y analíticamente
- Error verdadero porcentual
- Tiempo transcurrido

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso de la velocidad, calculada numérica y analíticamente en función del tiempo, de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación dispone también de una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando que el ingreso de valores negativos para los parámetros de entrada no es permitido, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 27. Ventana de Error de Cuerpos en Caída Libre

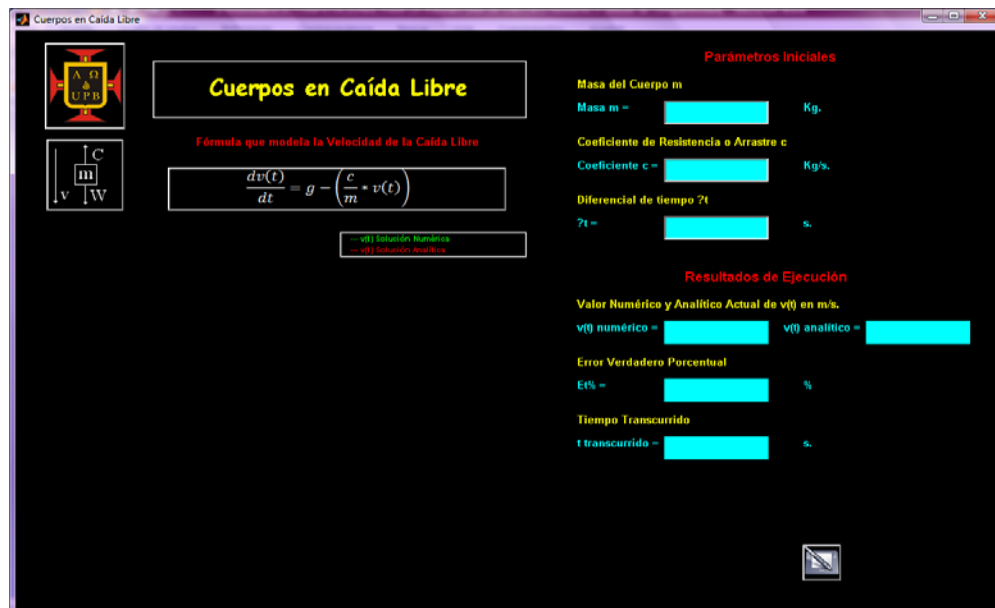


Fuente: Autor

La aplicación cuenta también con un botón denominado Graficar, que cumple la función de ejecutar la aplicación como tal empleando los datos ingresados y ofreciendo los resultados anteriormente mencionados, un botón denominado Reestablecer, que tiene como función generar una nueva GUI de la aplicación como si se acabase de pulsar el botón del menú de acceso de Planteamientos Físicos, dos botones denominados Zoom y Zoom Reset, que tienen como función realizar acercamientos o eliminar acercamientos efectuados con anterioridad respectivamente y dos botones denominados Guardar Archivo .mat y Guardar Archivo .xls, que se encargan de guardar tanto parámetros iniciales como resultados de ejecución de manera distinta, el primero, guarda un archivo .mat (.mat es la extensión de los archivos de datos de MatLab) reutilizable en el workspace de MatLab u otras aplicaciones y el segundo, genera un archivo .xls (.xls es la extensión de los archivos de Excel), mostrando de una forma más agradable y organizada los datos de la aplicación.

Los botones descritos anteriormente conforman la sección de botones de acceso a otras prestaciones de las GUI's de la herramienta. Esta sección es común para todas las GUI's y efectúan las acciones descritas para cada una de ellas. Los botones denominados Reestablecer, Zoom, Zoom Reset, Guardar Archivo .mat y Guardar Archivo .xls, se generan posteriormente a la finalización de la ejecución normal de la aplicación, ya que realmente ofrecen prestaciones muy puntuales que no afectan de manera significativa el proceso analítico que se desea exponer como tal.

Figura 28. GUI de la aplicación Cuerpos en Caída Libre



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Planteamientos Físicos que se muestra en la Figura 25 y se selecciona la opción Movimiento Parabólico oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación se observa el desplazamiento bidimensional de un cuerpo lanzado con un ángulo y velocidad inicial determinados.

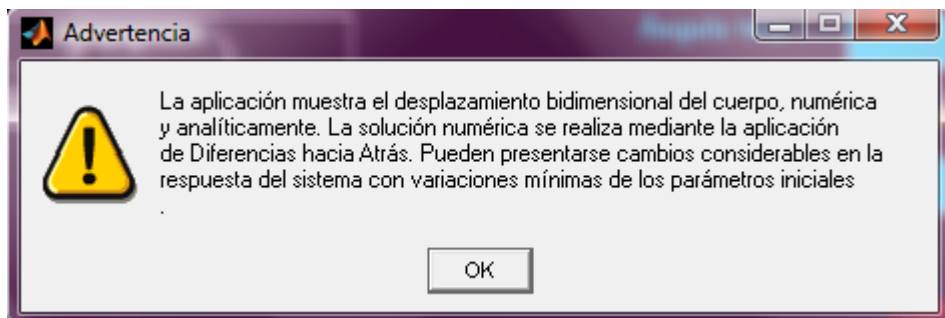
La GUI de la aplicación Movimiento Parabólico permite el ingreso de parámetros tales como:

- Desplazamiento Horizontal Total
- Velocidad Inicial
- Ángulo Inicial de Lanzamiento
- Diferencial de Desplazamiento Horizontal
- Altura Inicial

La aplicación cuenta con una imagen que muestra la fórmula que modela el desplazamiento bidimensional del movimiento parabólico.

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la aplicación determina el desplazamiento bidimensional del cuerpo de forma numérica y analítica, aclarando adicionalmente que la solución numérica se efectúa a través de la aplicación de Diferencias hacia Atrás.

Figura 29. Ventana de Advertencia de Movimiento Parabólico



Fuente: Autor

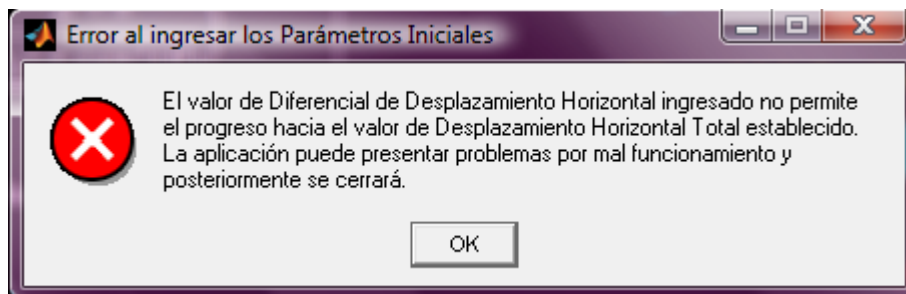
Como resultados de ejecución ofrece:

- Desplazamiento vertical calculado numérica y analíticamente
- Valor actual del desplazamiento horizontal
- Error verdadero porcentual

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso de la altura en función del desplazamiento horizontal, calculada numérica y analíticamente de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación dispone también de una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando que el valor de Diferencial de Desplazamiento Horizontal ingresado no permite llegar al valor de Desplazamiento Horizontal Total establecido, esto sucede cuando dichos valores tienen signos opuestos, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 30. Ventana de Error de Movimiento Parabólico

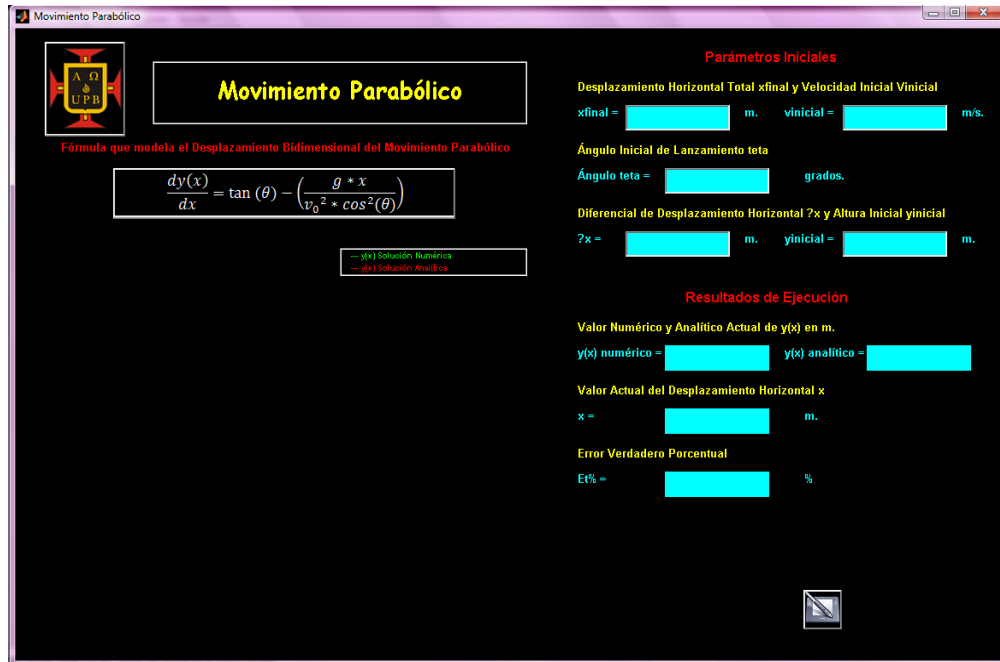


Fuente: Autor

Adicionalmente, la aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.



Figura 31. GUI de la aplicación Movimiento Parabólico



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Planteamientos Físicos que se muestra en la Figura 25 y se selecciona la opción Sistemas Masa- Resorte oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ver el comportamiento de un sistema de suspensión de un automóvil.

La GUI de la aplicación Sistemas Masa- Resorte permite el ingreso de parámetros tales como:

- Masa del Automóvil  $m$  y Coeficiente de Amortiguación  $c$
- Primer cruce por la condición de equilibrio
- Condiciones iniciales de  $x(0)$  y  $dx(0)/dt$
- Selección del tipo de Vibración Libre del Automóvil y selección del Método Numérico
- Intervalo de Búsqueda o Punto Inicial de Búsqueda y Diferencial de tiempo según la selección del Método Numérico

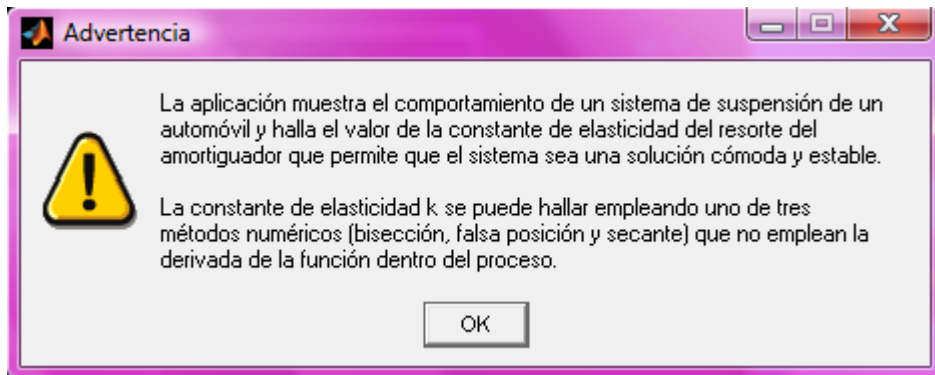
➤ Error de Parada

La selección tanto del tipo de vibración libre del automóvil como del método numérico se efectúa mediante menús desplegables y la confirmación se realiza con el botón ubicado al lado derecho de dichos menús.

La aplicación cuenta con una imagen que muestra la fórmula que modela la respuesta del sistema dependiendo del tipo de vibración libre seleccionado.

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la aplicación muestra el comportamiento de un sistema de suspensión de un automóvil y halla el valor de la constante de elasticidad del resorte del amortiguador mediante tres métodos numéricos.

Figura 32. Ventana de Advertencia de Sistemas Masa- Resorte



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

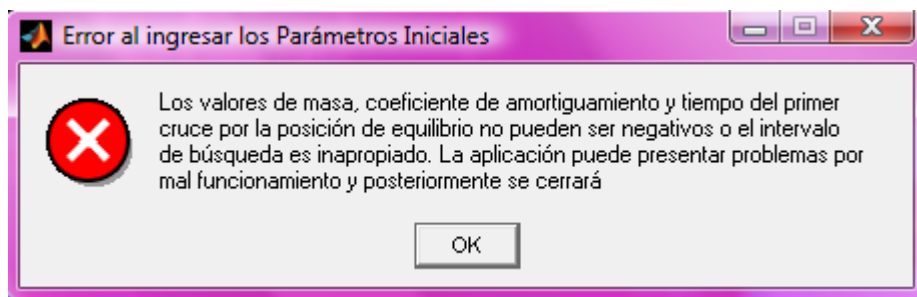
- Coeficientes de la solución (A, B)
- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje k y valor en eje  $x(k)$ )

Adicionalmente, la aplicación cuenta con dos ejes coordenados bidimensionales. El primero, muestra el desplazamiento en función de la constante de elasticidad del resorte k y muestra el progreso en la búsqueda del valor de dicha constante que satisface las condiciones del sistema mediante el método numérico y error de parada seleccionados. El segundo eje coordenado bidimensional, muestra la respuesta del sistema en función del tiempo desde la condición inicial  $t = 0$ . Las gráficas descritas para el primer eje se muestran simultáneamente. Los ejes

cuentan con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación dispone también de una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando la existencia de un error bien sea porque los valores de masa, coeficiente de amortiguamiento y tiempo del primer cruce por la posición de equilibrio son negativos y no pueden tomar dichos valores o porque el intervalo de búsqueda es inapropiado, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

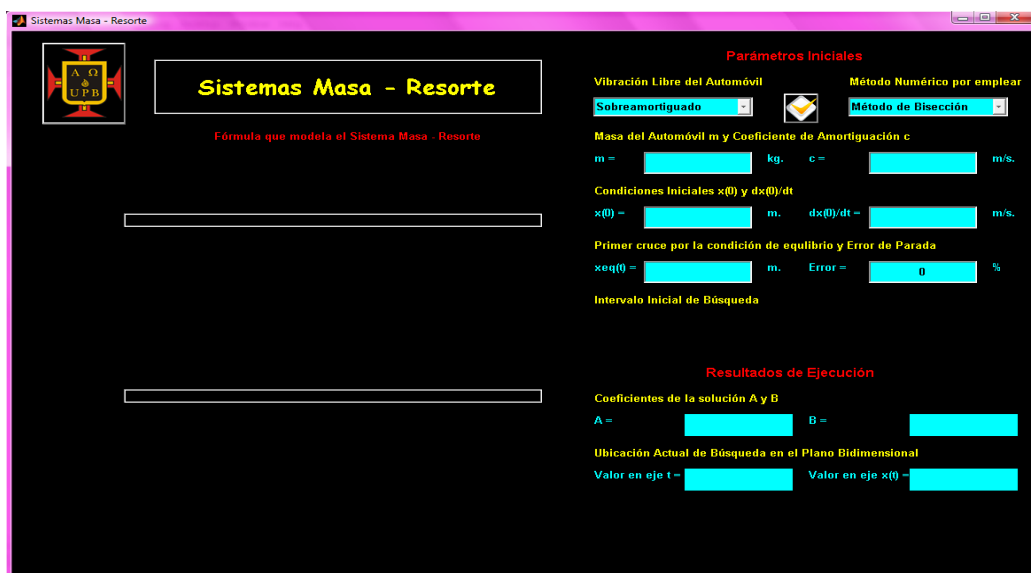
Figura 33. Ventana de Error de Sistemas Masa- Resorte



Fuente: Autor

Adicionalmente, la aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 34. GUI de la aplicación Sistemas Masa- Resorte



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Modelado y Simulación de Problemas en Ingeniería que se muestra en la Figura 24 y se selecciona la opción Planteamientos Electrónicos oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Redes Pasivas
- Controladores de Tensión Alterna

Figura 35. Menú de Acceso de Planteamientos Electrónicos



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Redes Pasivas oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible hacer una selección de ocho redes pasivas diferentes, compuestas por una fuente, sea de tensión continua o de corriente continua, y resistencias combinadas con capacitores o inductancias. La selección se efectúa mediante un menú desplegable y se confirma oprimiendo el botón que se encuentra al lado derecho del menú desplegable.

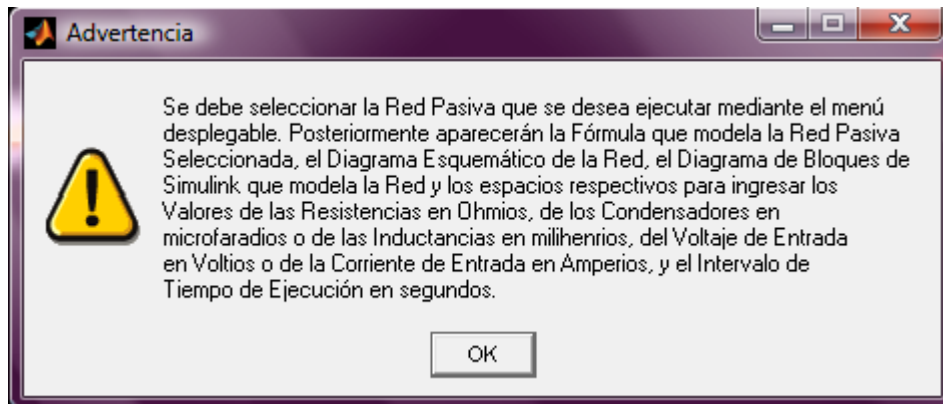
Posteriormente, aparecen tres imágenes; una que muestra la fórmula que modela la red pasiva seleccionada, otra que muestra el diagrama esquemático y otra que muestra el diagrama de bloques de Simulink para dicha red pasiva.

La GUI de la aplicación Redes Pasivas permite el ingreso de parámetros tales como:

- Valores resistivos requeridos
- Valores capacitivos o inductivos requeridos
- Voltaje de entrada o Corriente de Entrada
- Tiempo inicial y final de ejecución

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la selección de la red pasiva se efectúa mediante el menú desplegable y explica los eventos que ocurren posterior a la confirmación de la selección de la red pasiva.

Figura 36. Ventana de Advertencia de Redes Pasivas



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

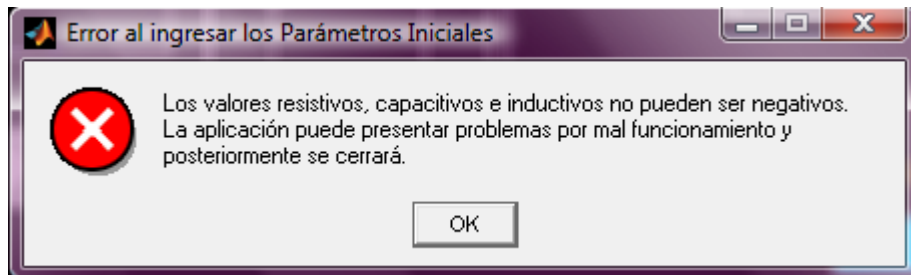
- Tiempo actual de ejecución
- Voltaje de Salida calculado numérica y analíticamente
- Voltaje de Salida determinado por Simulink
- Error entre el voltaje de salida calculado numérica y analíticamente

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado tridimensional que muestra el progreso del voltaje de salida, calculado numérica y

analíticamente, y el determinado por Simulink en función del tiempo, de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

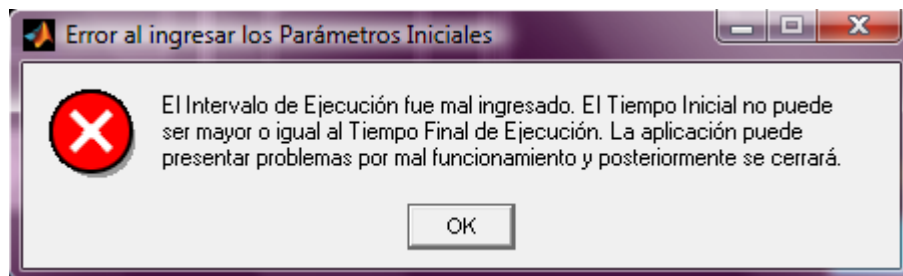
La aplicación dispone también de dos ventanas de error similares a la que se muestra en la Figura 21. Una notifica que los valores resistivos, capacitivos e inductivos no pueden ser negativos, y la otra notifica que los valores del intervalo de ejecución ingresados son errados, esto sucede cuando el tiempo inicial es mayor o igual al tiempo final de ejecución. Las dos ventanas otorgan un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierran la aplicación.

Figura 37. Ventana de Error de Redes Pasivas



Fuente: Autor

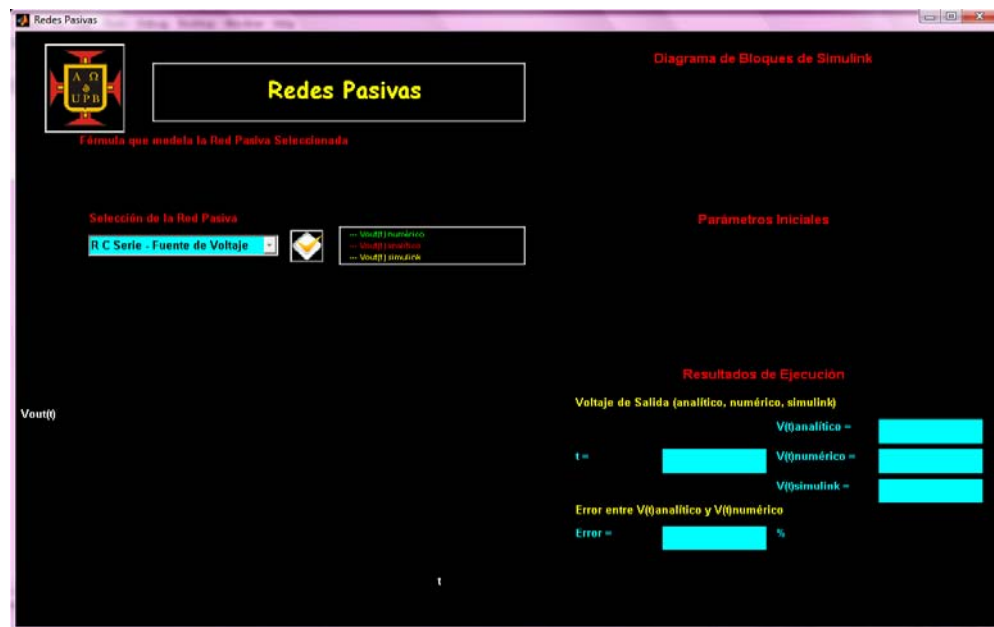
Figura 38. Ventana de Error de Redes Pasivas



Fuente: Autor

Adicionalmente, la aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita con anterioridad, pero elimina los botones denominados Zoom y Zoom Reset y agrega un botón denominado Rotar que tiene como función girar el eje tridimensional de la aplicación para obtener otras vistas de las gráficas.

Figura 39. GUI de la aplicación Redes Pasivas



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Planteamientos Electrónicos que se muestra en la Figura 35 y se selecciona la opción Controladores de Tensión Alterna oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible hacer una selección de dos controladores de tensión alterna diferentes, un convertor monofásico con carga RL y un convertor trifásico conectado en estrella con carga RL. La selección se efectúa mediante un menú desplegable y se confirma oprimiendo el botón que se encuentra al lado derecho del menú desplegable.

Posteriormente, aparecen dos imágenes; una que muestra la fórmula que determina el valor del ángulo beta y otra que muestra el diagrama esquemático del controlador de tensión alterna seleccionado.

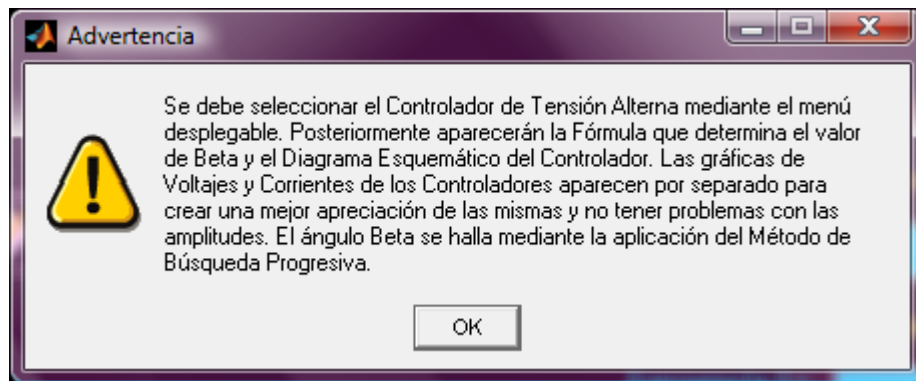
La GUI de la aplicación Controladores de Tensión Alterna permite el ingreso de parámetros tales como:

- Valor de Resistencia e Inductancia
- Valor de Frecuencia
- Valor de Ángulo Alfa

- Voltaje Eficaz de alimentación

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la selección del controlador de tensión alterna se efectúa mediante el menú desplegable y explica los eventos que ocurren posterior a la confirmación de la selección de la red pasiva.

Figura 40. Ventana de Advertencia de Controladores de Tensión Alterna



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

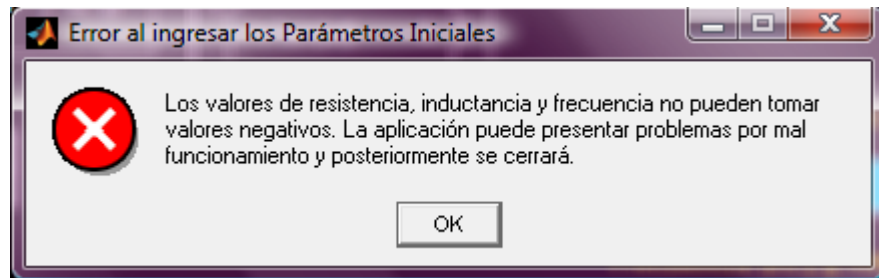
- Ángulo Beta
- Ángulo Teta
- Impedancia

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso del ángulo beta en función de la corriente de salida. El objetivo es encontrar el valor del ángulo beta que hace que la corriente de salida sea cero amperios. También se dispone de un eje coordenado tridimensional que muestra el progreso de voltajes o corrientes en función del tiempo, de forma simultánea. Los ejes cuentan con cuadros de leyenda que explican claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación dispone también de una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando que los valores de resistencia, inductancia y frecuencia no pueden ser negativos, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.



Figura 41. Ventana de Error de Controladores de Tensión Alterna



Fuente: Autor

Adicionalmente, la aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita con anterioridad, pero elimina los botones denominados Zoom y Zoom Reset y agrega un botón denominado Rotar que tiene como función girar el eje tridimensional de la aplicación para obtener otras vistas de las gráficas.

También se añaden tres botones más denominados Gráficas de Voltaje, Gráficas de Voltaje de SCR y Gráficas de Corriente que se encargan de controlar las gráficas que se visualizan en el eje tridimensional evitando de esta forma conflictos por amplitudes o por saturación visual (exceso de gráficas simultáneas) en dicho eje.

Figura 42. GUI de la aplicación Controladores de Tensión Alterna



Fuente: Autor

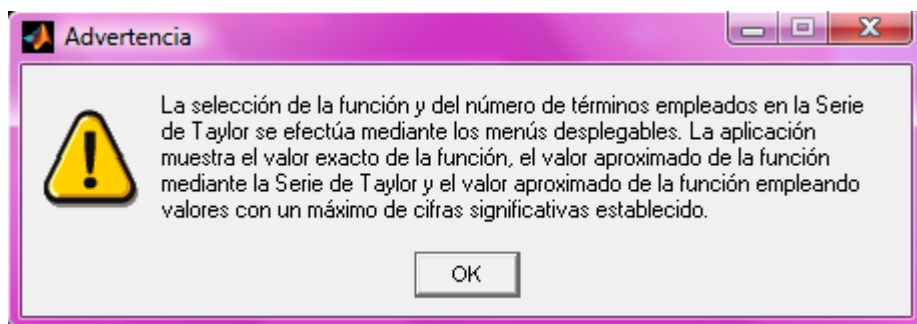
Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo I y se selecciona la opción Aproximaciones y Errores de Redondeo oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible hacer una selección de dos funciones, seno o coseno de  $t$ , aproximarla mediante la Serie de Taylor empleando determinado número de términos de dicha serie. La selección tanto de la función como del número de términos se efectúa mediante menús desplegables.

La GUI de la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo permite el ingreso de parámetros tales como:

- Selección de la Función
- Selección del número de términos de la Serie de Taylor
- Valor de  $t$  al cual se va a aproximar la función
- Valor inicial de  $t$  para usar la Serie de Taylor
- Número de cifras significativas

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica que la selección tanto de la función como del número de términos se hacen con los menús desplegables y notifica los valores de la función que ofrece la aplicación.

Figura 43. Ventana de Advertencia de Aproximaciones y Errores de Redondeo



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

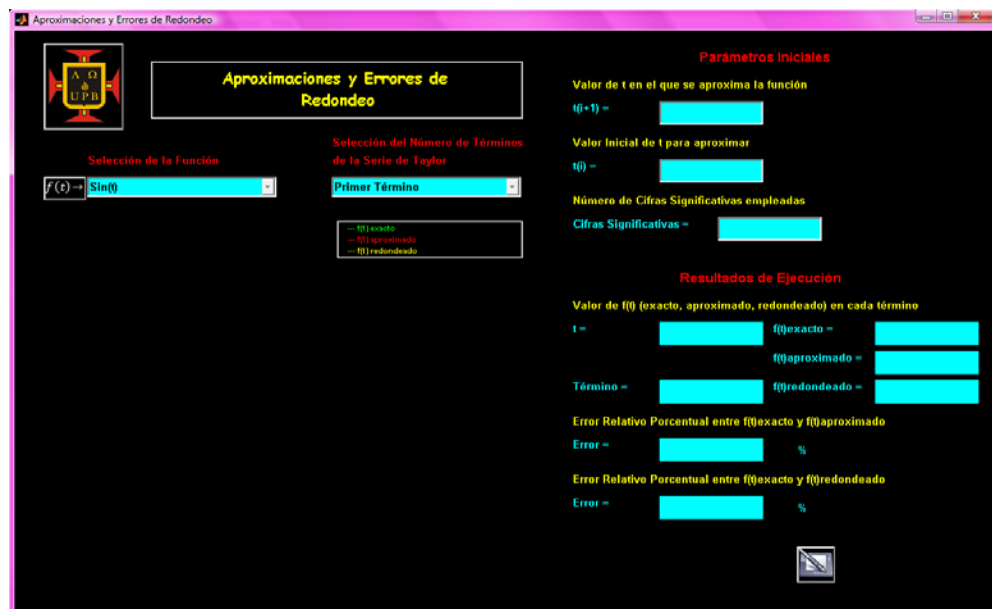
- Valor de  $t$  por aproximar

- Número de Términos empleados
- Valor exacto de la función
- Valor aproximado de la función
- Valor redondeado de la función
- Error relativo porcentual entre el valor exacto y el valor aproximado
- Error relativo porcentual entre el valor exacto y el valor redondeado

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso tanto del valor aproximado como del valor redondeado de la función desde el primer término de la Serie de Taylor hasta el número de términos seleccionado, comparando en cada momento los valores anteriormente mencionados con el valor exacto. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 44. GUI de la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo

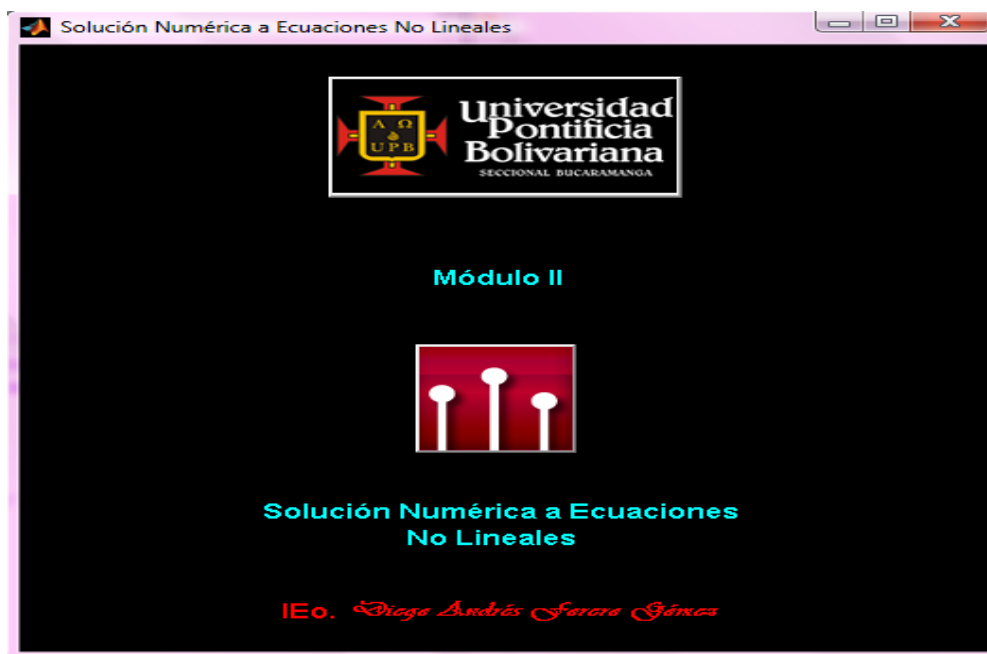


Fuente: Autor

### 7.2.3. CAPÍTULO II – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES NO LINEALES

Este módulo, denominado Solución Numérica a Ecuaciones No Lineales, abarca los temas del capítulo II del programa de la asignatura Cálculo Numérico y se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 45.

Figura 45. Ventana de Presentación del Módulo II



Fuente: Autor

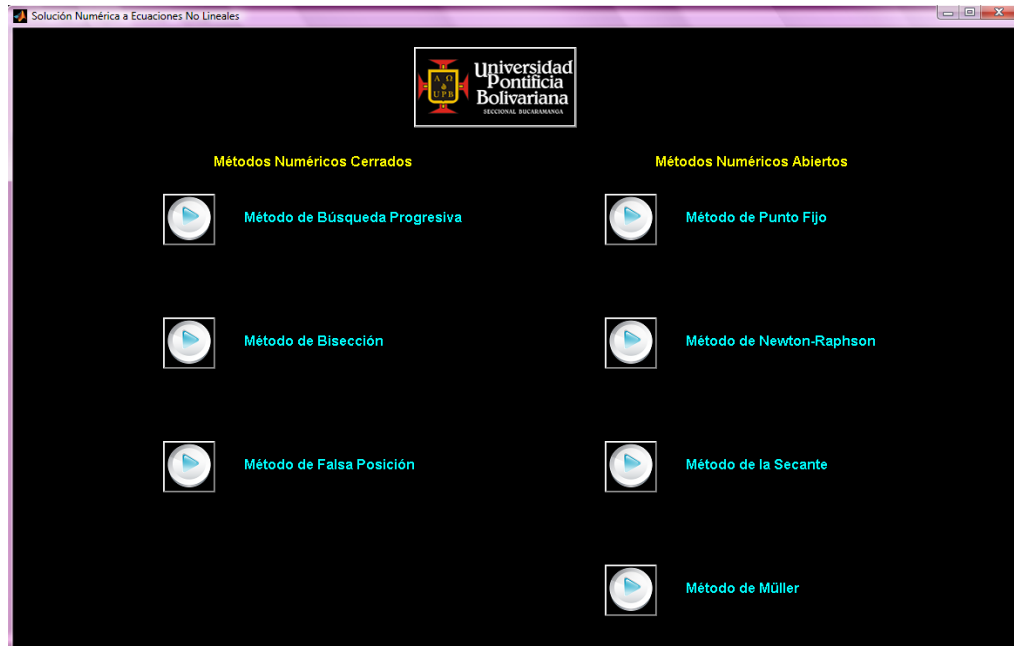
Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método de Búsqueda Progresiva
- Método de Bisección
- Método de Falsa Posición
- Método de Punto Fijo
- Método de Newton – Raphson

- Método de la Secante
- Método de Müller

Adicionalmente se muestra una clasificación que determina cuales son métodos numéricos abiertos y cuales cerrados.

Figura 46. Menú de Acceso Principal del Capítulo II



Fuente: Autor

Al seleccionar cada opción disponible dentro del menú de acceso principal, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de cada aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. Las aplicaciones de este módulo permiten hallar la raíz de una función no lineal con un error de parada establecido por el usuario.

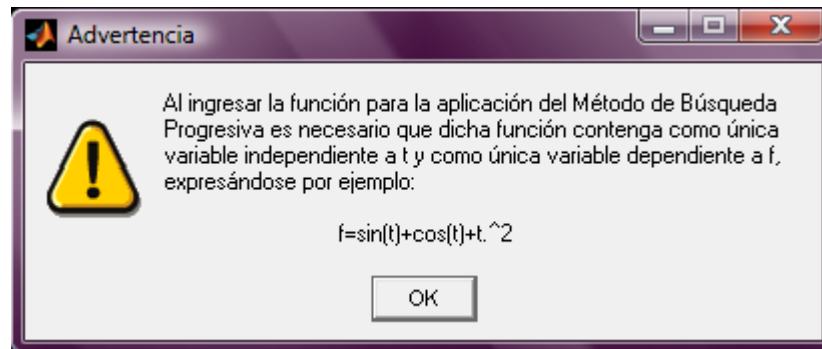
La GUI de la aplicación Método de Búsqueda Progresiva permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización

- Punto inicial y final del intervalo de búsqueda
- Error de parada porcentual.

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe ingresarse la función  $f(t)$ .

Figura 47. Ventana de Advertencia de Método de Búsqueda Progresiva



Fuente: Autor

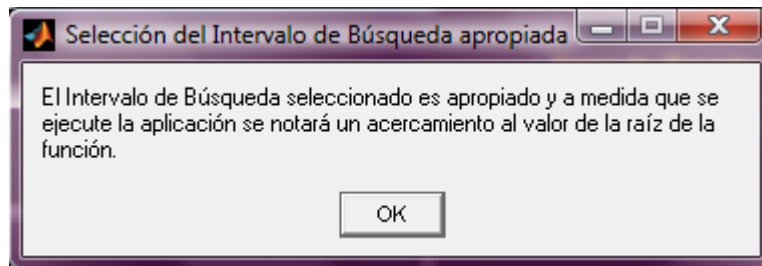
Esta ventana de advertencia es común para las aplicaciones del Módulo II de la herramienta, modificando para cada una de ellas el nombre de la aplicación en el mensaje.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Verificación de la selección adecuada del intervalo de búsqueda, es decir, si la raíz se encuentra dentro de los límites de dicho intervalo
- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

Si la raíz se encuentra dentro del intervalo de búsqueda se abre una ventana de mensaje similar a la que se muestra en la Figura 19, notificando que la selección de dicho intervalo es correcta, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y continúa con la ejecución normal de la aplicación.

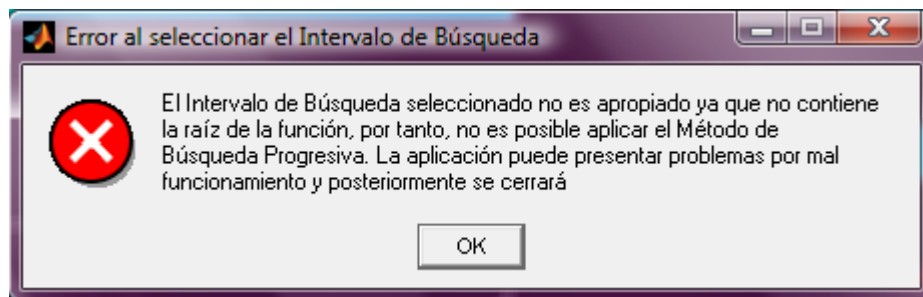
Figura 48. Ventana de Mensaje de Método de Búsqueda Progresiva



Fuente: Autor

Si la raíz no se encuentra dentro del intervalo de búsqueda se abre una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21 notificando el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 49. Ventana de Error de Método de Búsqueda Progresiva



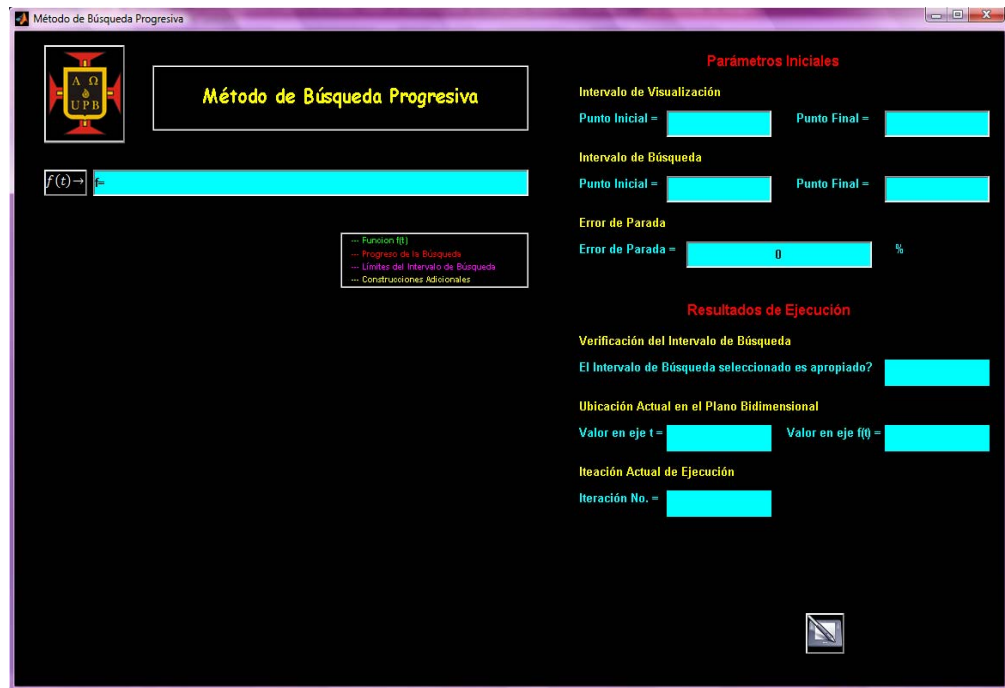
Fuente: Autor

Las ventanas que se muestran en las Figuras 48 y 49 son comunes para las aplicaciones de Método de Bisección y Método de Falsa Posición.

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de búsqueda y muestra además, el progreso de la búsqueda desde el punto inicial de la misma hasta el valor de la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 50. GUI de la aplicación Método de Búsqueda Progresiva



Fuente: Autor

La GUI de la aplicación Método de Bisección permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de búsqueda
- Error de parada porcentual.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Verificación de la selección adecuada del intervalo de búsqueda
- Punto inicial y final del intervalo actual de búsqueda
- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )



- Iteración actual del proceso de búsqueda.

La verificación del intervalo de búsqueda y el resultado de la misma se efectúa de manera similar a la descrita en la GUI Método de Búsqueda Progresiva.

En cuanto al eje coordenado bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo inicial de búsqueda y muestra la construcción de los nuevos intervalos de búsqueda marcando de forma discreta sus límites discriminando visualmente los intervalos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 51. GUI de la aplicación Método de Bisección



Fuente: Autor

La GUI de la aplicación Método de Falsa Posición permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de búsqueda
- Error de parada porcentual.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Verificación de la selección adecuada del intervalo de búsqueda
- Punto inicial y final del intervalo actual de búsqueda
- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

La verificación del intervalo de búsqueda y el resultado de la misma se efectúa de manera similar a la descrita en la GUI Método de Búsqueda Progresiva.

En cuanto al eje coordenado bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo inicial de búsqueda y muestra la construcción de los nuevos intervalos de búsqueda a partir de construcciones adicionales descritas en el contenido teórico disponible en el Anexo B, marcando de forma discreta sus límites discriminando visualmente los intervalos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 52. GUI de la aplicación Método de Falsa Posición



Fuente: Autor

La GUI de la aplicación Método de Punto Fijo permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial de búsqueda
- Diferencial de Tiempo  $\Delta t$
- Error de parada porcentual.

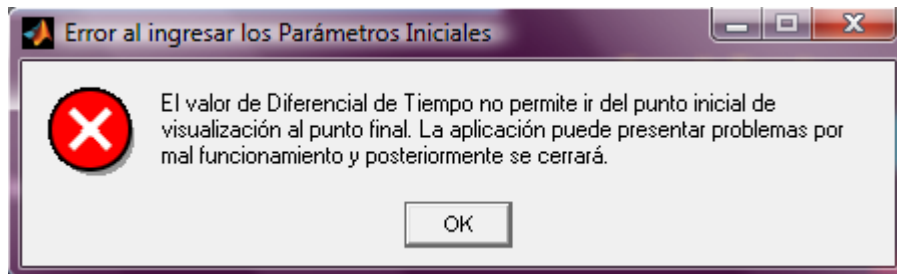
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación anterior de búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

La aplicación cuenta con una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, que notifica que el Diferencial de Tiempo  $\Delta t$  ingresado no permite ir del punto inicial de visualización al punto final, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 53. Ventana de Error de Método de Punto Fijo

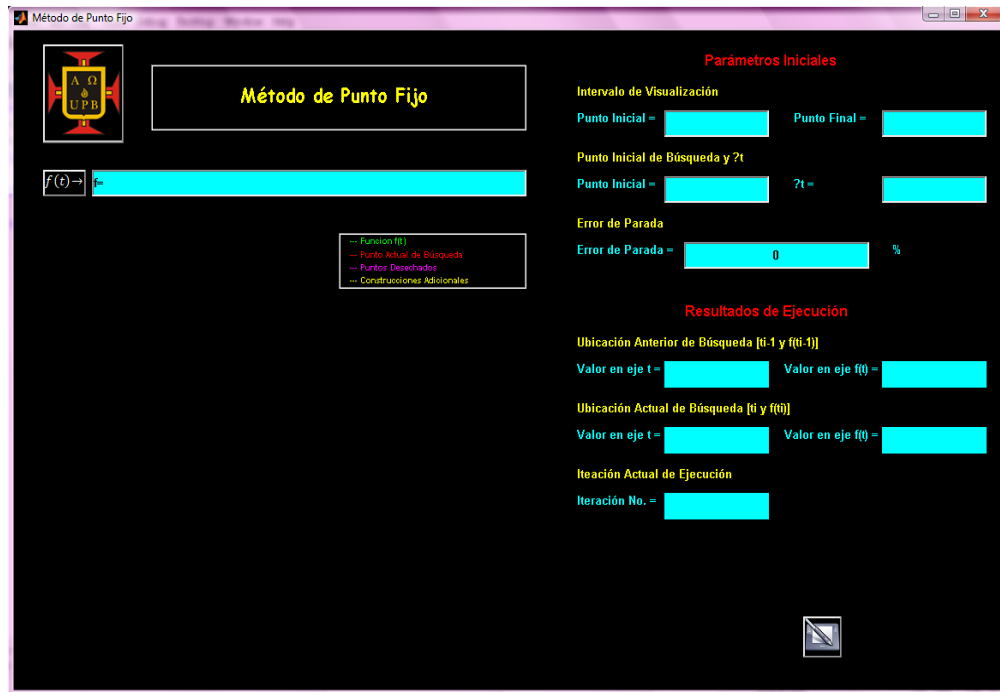


Fuente: Autor

En cuanto al eje coordenado bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta el punto inicial de búsqueda y muestra la construcción de los nuevos puntos de búsqueda mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo B, marcando de forma discreta dichos puntos y discriminando visualmente los puntos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 54. GUI de la aplicación Método de Punto Fijo



Fuente: Autor

La GUI de la aplicación Método de Newton - Raphson permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial de búsqueda
- Diferencial de Tiempo  $\Delta t$
- Error de parada porcentual.

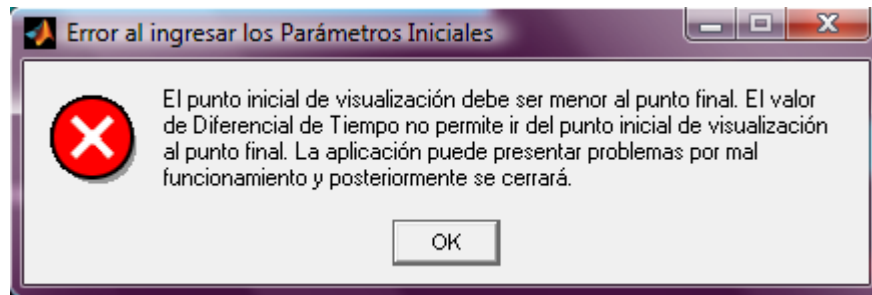
Como resultados de ejecución ofrece:

- Derivada del punto actual de búsqueda

- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación posterior de búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

La aplicación cuenta con una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, que notifica que el punto inicial de visualización debe ser menor que el punto final y que el Diferencial de Tiempo  $\Delta t$  ingresado no permite ir del punto inicial de visualización al punto final, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 55. Ventana de Error de Método de Newton - Raphson



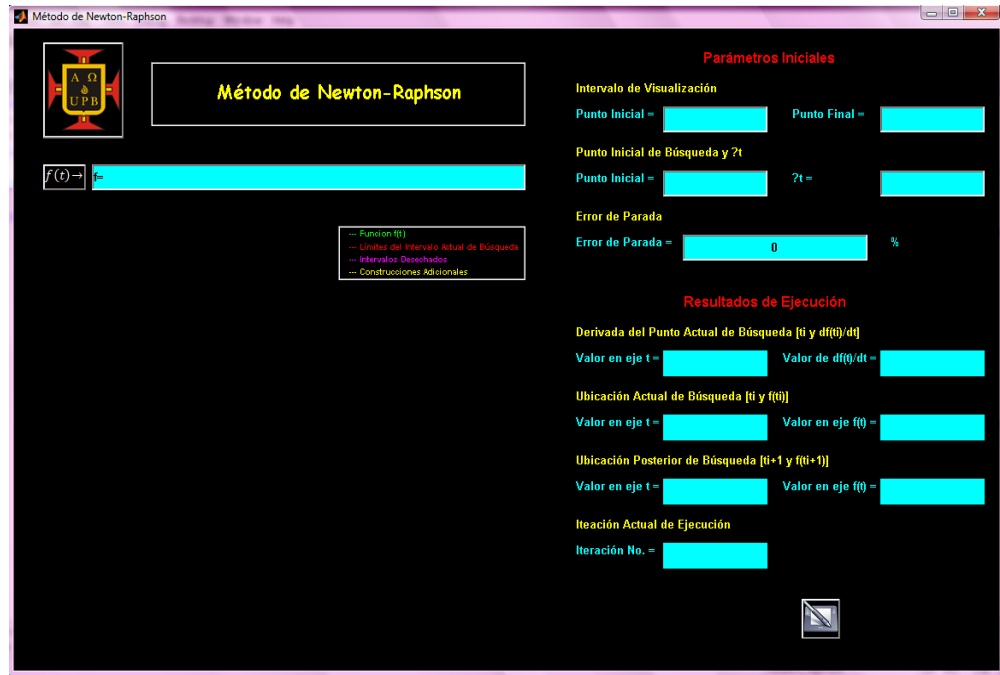
Fuente: Autor

Esta ventana de error es común para las aplicaciones de Método de la Secante y de Método de Müller.

En cuanto al eje coordenado bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta el punto inicial de búsqueda y muestra la construcción de los nuevos puntos de búsqueda mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo B, marcando de forma discreta dichos puntos y discriminando visualmente los puntos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 56. GUI de la aplicación Método de Newton - Raphson



Fuente: Autor

La GUI de la aplicación Método de la Secante permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial de búsqueda
- Diferencial de tiempo ( $\Delta t$ )
- Error de parada porcentual.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación anterior de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

- Ubicación actual de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación posterior de la búsqueda en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los puntos anterior, actual y posterior de búsqueda, muestra las construcciones adicionales descritas en el contenido teórico disponible en el Anexo B, que ayudan a la generación de nuevos puntos de búsqueda y discrimina visualmente los puntos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 57. GUI de la aplicación Método de la Secante



Fuente: Autor



La GUI de la aplicación Método de Müller permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Puntos iniciales de búsqueda ( $t_0$ ,  $t_1$  y  $t_2$ )
- Diferencial de tiempo ( $\Delta t$ )
- Error de parada porcentual.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Coeficientes del polinomio de aproximación parabólica ( $a$ ,  $b$  y  $c$ )
- Posibilidades para el siguiente punto de aproximación (Posibilidad 1 y 2)
- Ubicación del siguiente punto de aproximación en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Iteración actual del proceso de búsqueda.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los puntos iniciales de búsqueda, muestra las construcciones adicionales descritas en el contenido teórico disponible en el Anexo B, que ayudan a la generación de nuevos puntos de búsqueda y discrimina visualmente los puntos que ya no son útiles hasta encontrar la raíz dependiendo del error de parada ingresado. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 58. GUI de la aplicación Método de Müller



Fuente: Autor

#### 7.2.4. CAPÍTULO III – INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL

Este módulo, denominado Interpolación y Aproximación Polinomial, abarca los temas contenidos en el capítulo III del programa de la asignatura de Cálculo Numérico y se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 59.

Figura 59. Ventana de Presentación del Módulo III

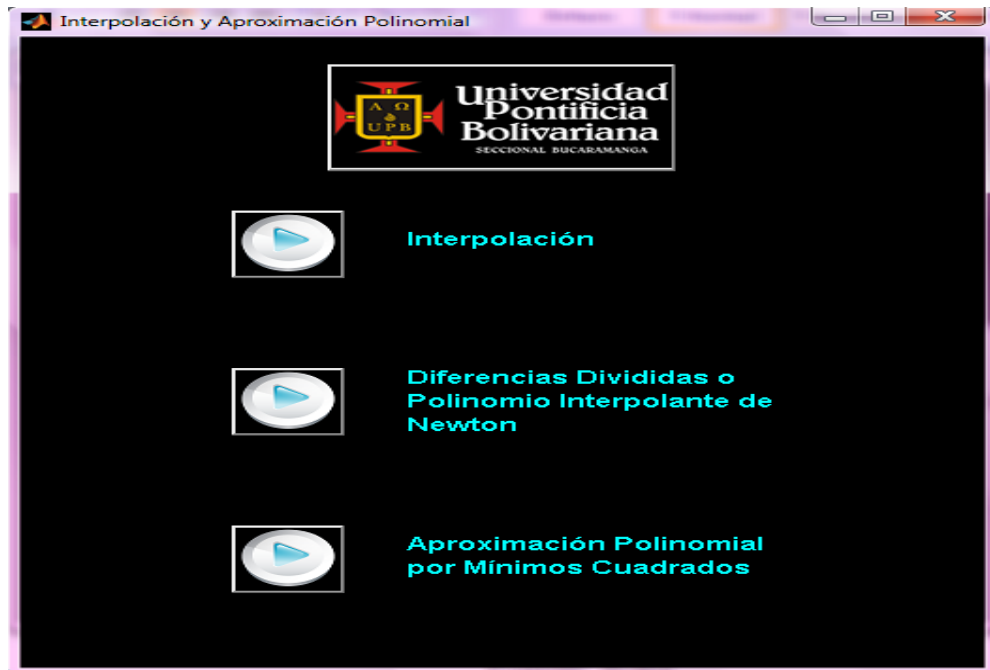


Fuente: Autor

Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Interpolación
- Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton
- Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados

Figura 60. Menú de Acceso Principal del Capítulo III



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Interpolación oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Interpolación Segmentaria Lineal
- Aproximación con el Polinomio de Lagrange
- Interpolación Segmentaria Cuadrática
- Interpolación Segmentaria Cúbica

Figura 61. Menú de Acceso de Interpolación



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Interpolación Segmentaria Lineal oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados
- Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Estas tres opciones para el ingreso de los parámetros iniciales se describen así:

En la primera opción, los datos pueden ser ingresados por el usuario directamente desde el teclado. En la segunda, pueden ser adquiridos desde un archivo .txt en el cuál los datos del vector de la abscisa y de la ordenada se encuentran dispuestos por columnas. En la tercera, pueden ser adquiridos desde un archivo .wk1.

Las razones por las cuáles se escogen los tres tipos de ingreso de parámetros iniciales anteriormente mencionados son en primera instancia, que el ingreso de datos desde el teclado ofrece infinitas opciones generadas por el usuario y en segunda instancia, que la adquisición de datos desde archivos permite el manejo de información generada por instrumentos de medida como un FLUKE o por sistemas automatizados o controlados por ordenador tanto a nivel académico como industrial en dos formatos ampliamente utilizados como son.txt y .wk1.

Todas las aplicaciones de este módulo cuentan con dichas opciones para el ingreso de los parámetros iniciales.

Figura 62. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Lineal



Fuente: Autor

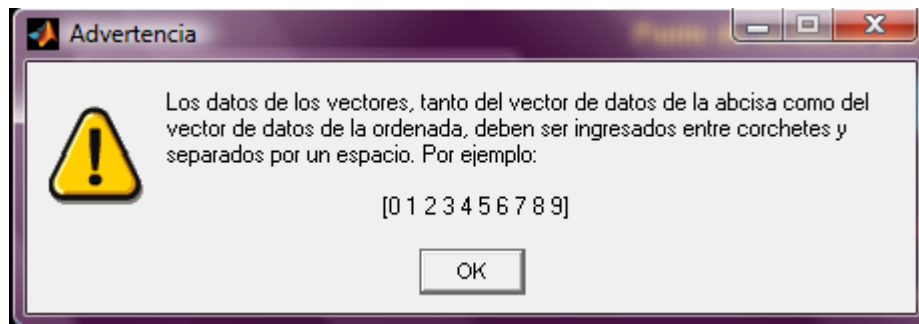
Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y unir cada par de puntos mediante un segmento lineal. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual deben ingresarse los datos.

Figura 63. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados



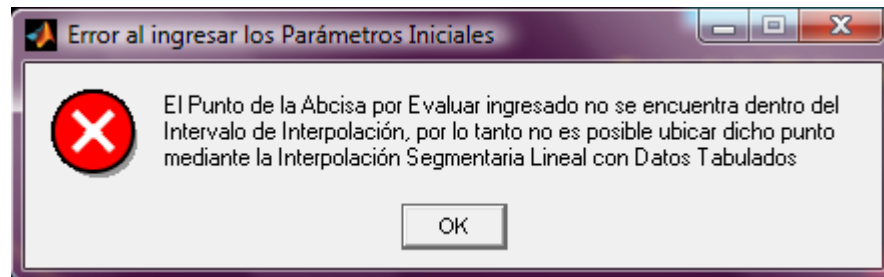
Fuente: Autor

Esta ventana de advertencia es común para las aplicaciones del Módulo III de la herramienta que implican ingreso de datos tabulados.

Si el punto de la abcisa por evaluar es menor que el valor mínimo del vector de datos de la abcisa o mayor al valor máximo del mismo vector, es decir, está fuera del intervalo que delimitan estos dos valores, se interpolan los vectores ingresados y posteriormente, la aplicación dispone de una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, que notifica el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

La razón por la cual se considera este evento como un error es que la interpolación y la aproximación polinomial no son considerados como métodos predictivos, es decir, están regidos por la información ingresada y son incapaces de suponer el valor que puede tomar un valor fuera de los límites de la interpolación o aproximación.

Figura 64. Ventana de Error de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados



Fuente: Autor

Si los tamaños de los vectores ingresados no son iguales, la aplicación cuenta con una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, que notifica el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 65. Ventana de Error de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados



Fuente: Autor

Las ventanas de error que se muestran en las Figuras 64 y 65 son comunes para todas las aplicaciones del Módulo III de la herramienta, modificando el nombre de la aplicación dentro del mensaje, según sea el caso.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del límite izquierdo del subintervalo actual de interpolación en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación del límite derecho del subintervalo actual de interpolación en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

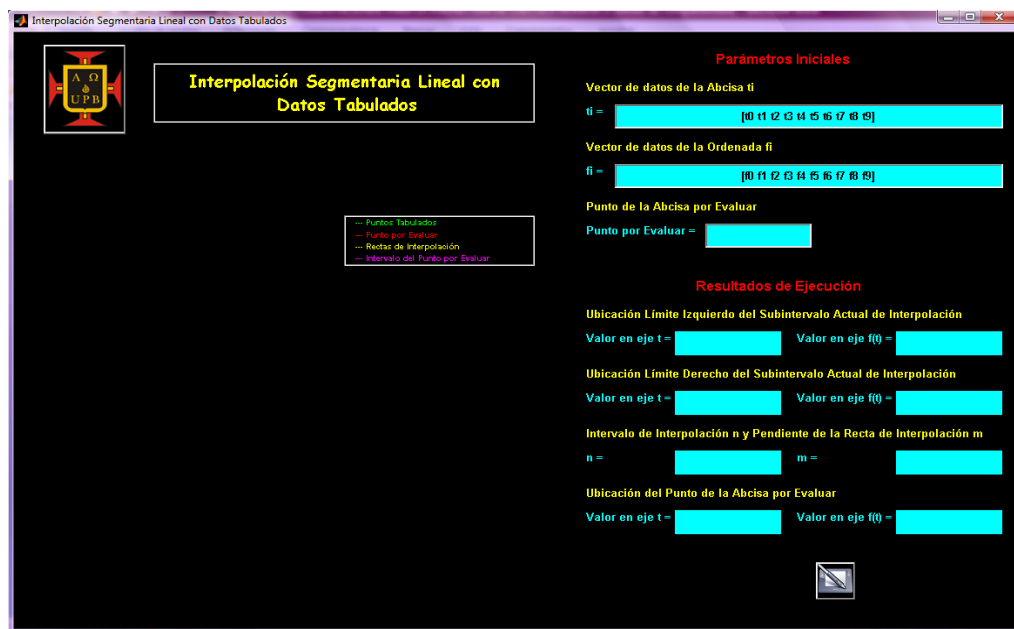


- Intervalo de interpolación
- Pendiente de la recta de interpolación
- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción de cada segmento lineal de interpolación, marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar y discrimina visualmente los puntos que delimitan el intervalo en el cuál se encuentra el punto por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 66. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Tabulados



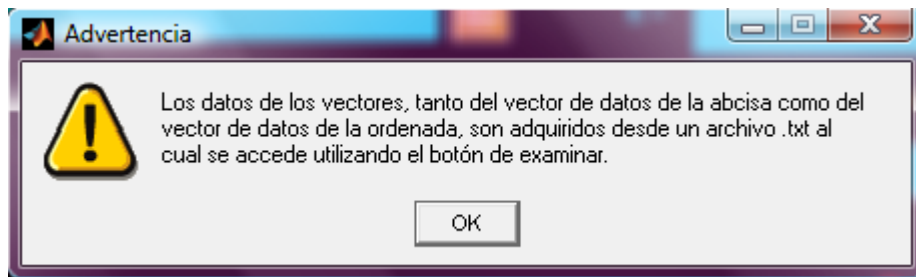
Fuente: Autor

Para las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1, las GUI's solo se diferencian de la GUI con datos tabulados en que poseen un botón denominado Examinar, el cuál al ser pulsado abre una ventana creada por la función uigetfile de MATLAB para la selección del archivo haciendo

un filtro que muestra únicamente archivos.txt o archivos .wk1 dependiendo de la aplicación. Otra diferencia radica en una sección en la cual se muestra toda la ruta del archivo seleccionado en la ventana mencionada anteriormente.

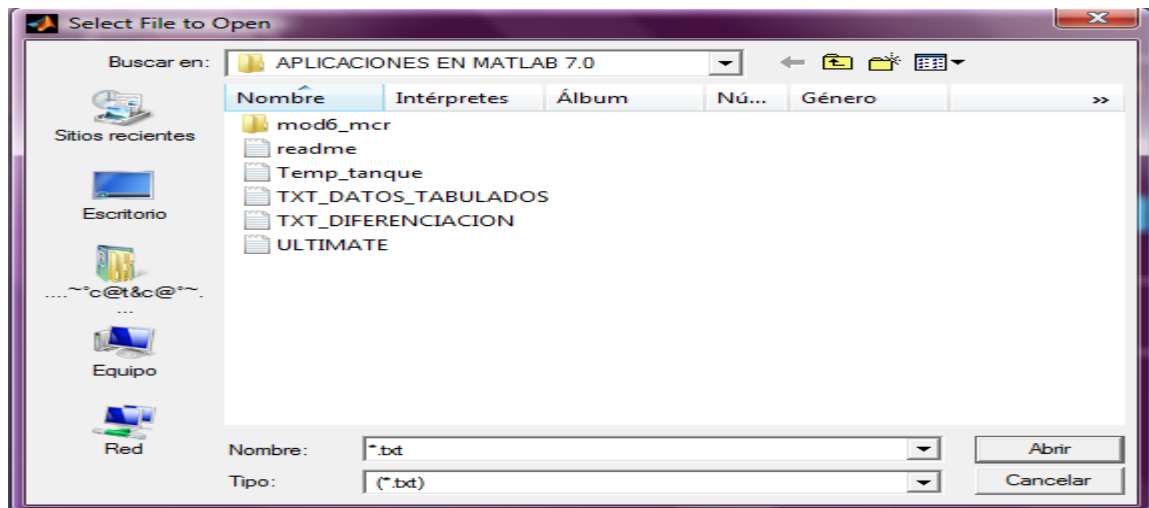
Dichas aplicaciones poseen también una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, que notifica la forma de seleccionar el archivo.

Figura 67. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

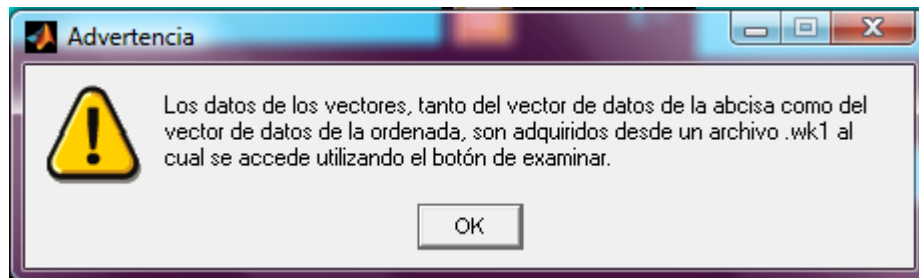
Figura 68. Ventana de selección de archivo .txt generada con la función uigetfile de MATLAB



Fuente: Autor

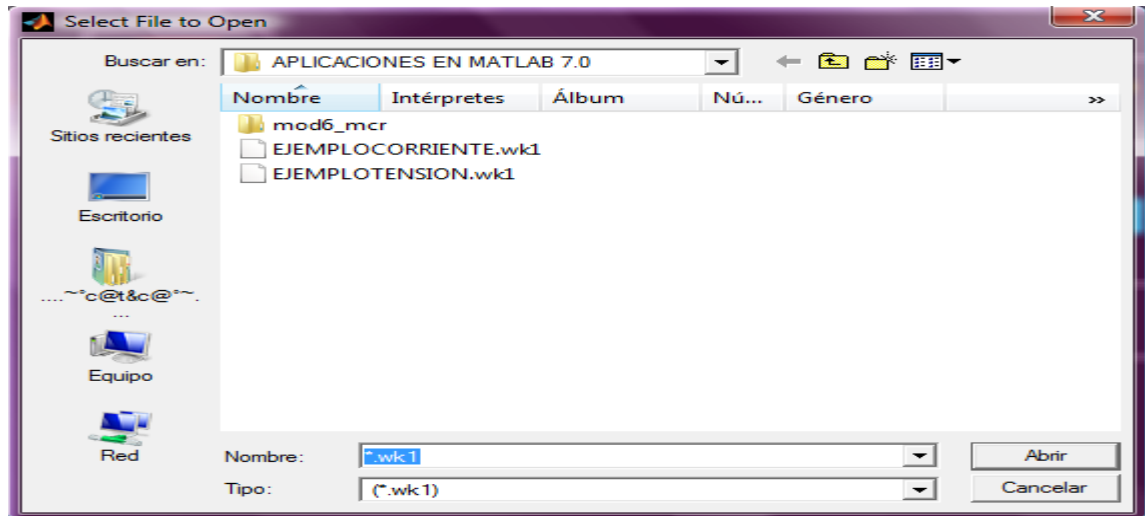
Las ventanas que se muestran en las Figuras 67 y 68 son comunes para todas las aplicaciones del Módulo III de la herramienta que implican ingreso de datos adquiridos desde un archivo .txt.

Figura 69. Ventana de Advertencia de Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



Fuente: Autor

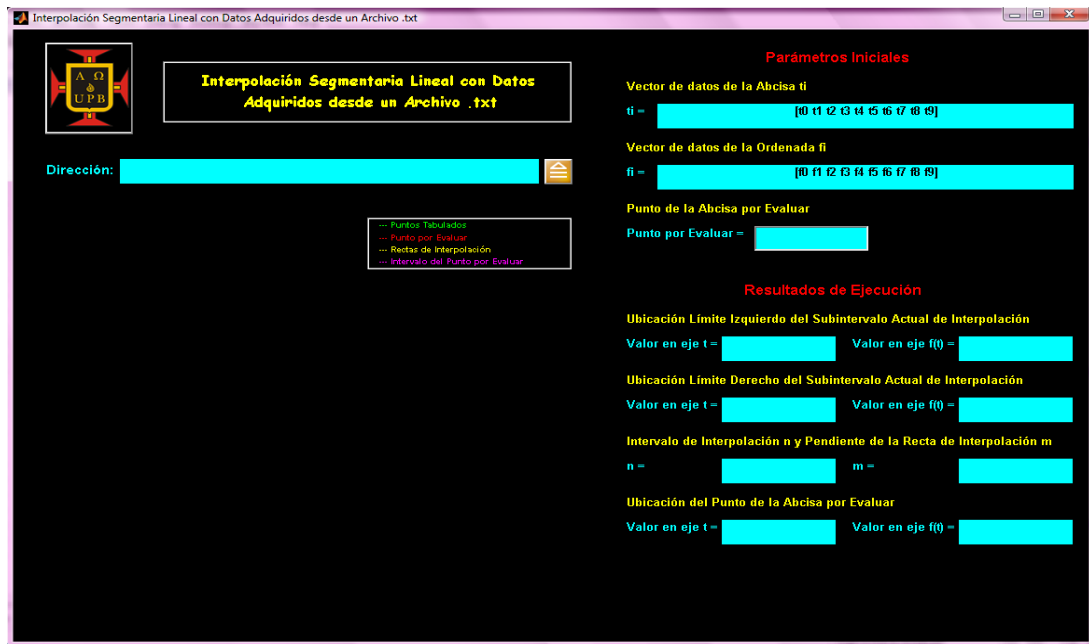
Figura 70. Ventana de selección de archivo .wk1 generada con la función uigetfile de MATLAB



Fuente: Autor

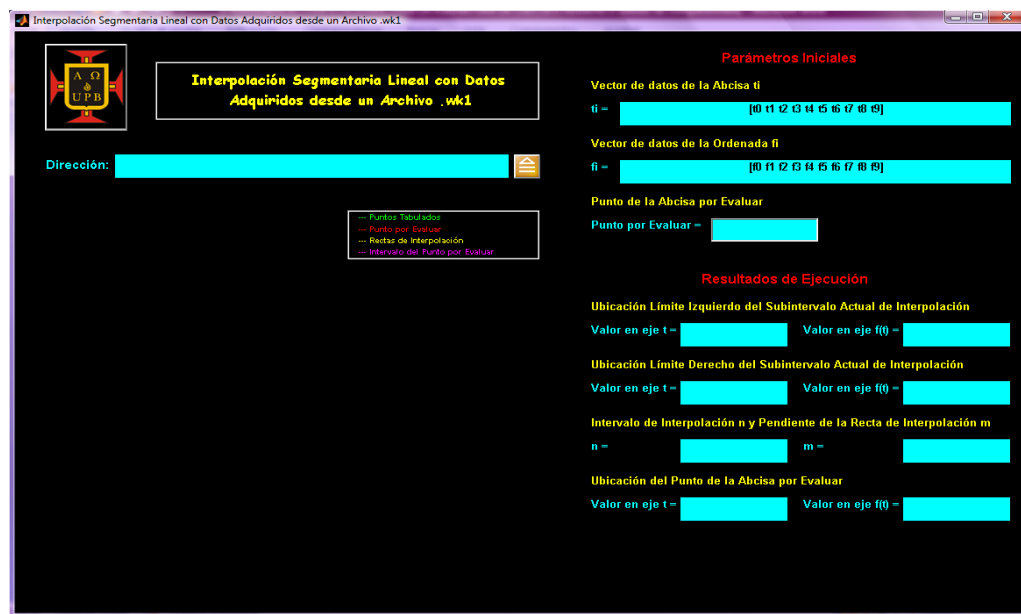
Las ventanas que se muestran en las Figuras 69 y 70 son comunes para todas las aplicaciones del Módulo III de la herramienta que implican ingreso de datos adquiridos desde un archivo .wk1.

Figura 71. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 72. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

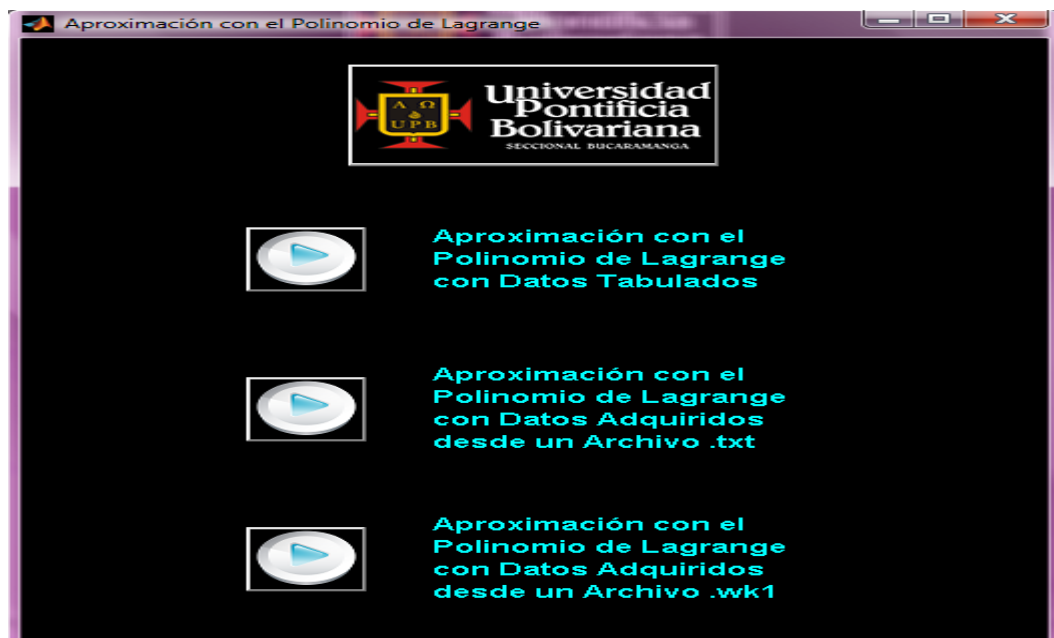


Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Interpolación y se selecciona la opción Aproximación con el Polinomio de Lagrange oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Tabulados
- Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Figura 73. Menú de Acceso de Aproximación con el Polinomio de Lagrange



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio mediante la técnica descrita en el Anexo C, polinomio que pasa por dichos puntos. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del

intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Número de operadores de Lagrange determinados
- Selección del operador de Lagrange por visualizar

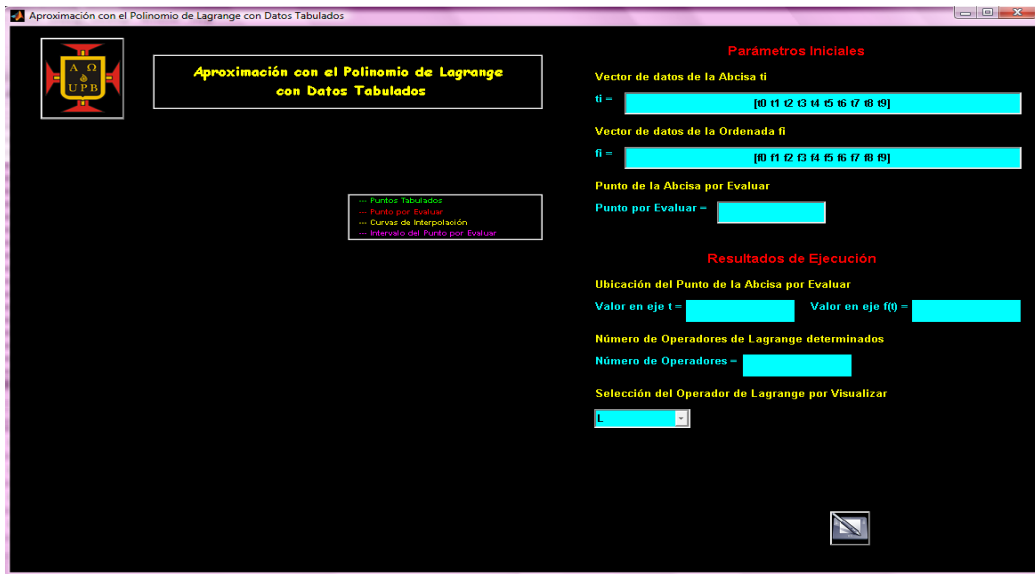
La selección del operador de Lagrange por visualizar se efectúa mediante un menú desplegable que construye el número de opciones seleccionables de acuerdo al número de puntos bidimensionales ingresados. Por ejemplo, si se ingresan nueve puntos bidimensionales, la aplicación construye diez opciones seleccionables, nueve corresponden a los nueve operadores de Lagrange necesarios para interpolar los puntos, operadores cuyo cálculo se describe en el contenido teórico disponible en el Anexo C, y una opción adicional que permite graficar todos los operadores simultáneamente. La confirmación de la selección se realiza mediante un botón denominado Graficar Operadores de Lagrange, ubicado al lado derecho del menú desplegable.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción del polinomio de aproximación de Lagrange que interpola todos los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La visualización de los operadores de Lagrange requiere refrescar el eje coordenado, volver a graficar los puntos discretos ingresados y finalmente visualizar el o los operadores según la selección.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 74. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Tabulados



Fuente: Autor

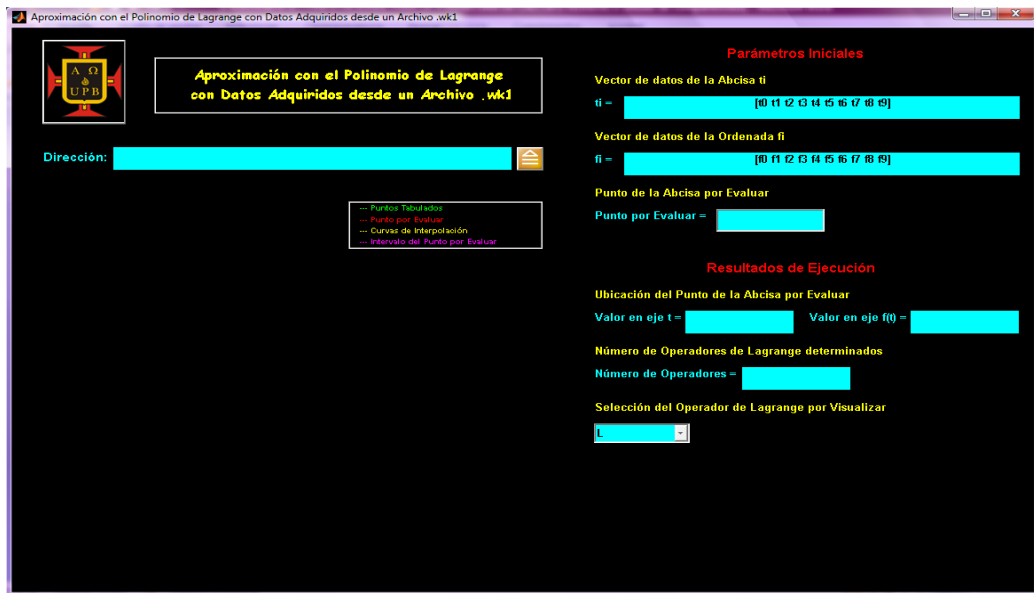
Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 75. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 76. GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



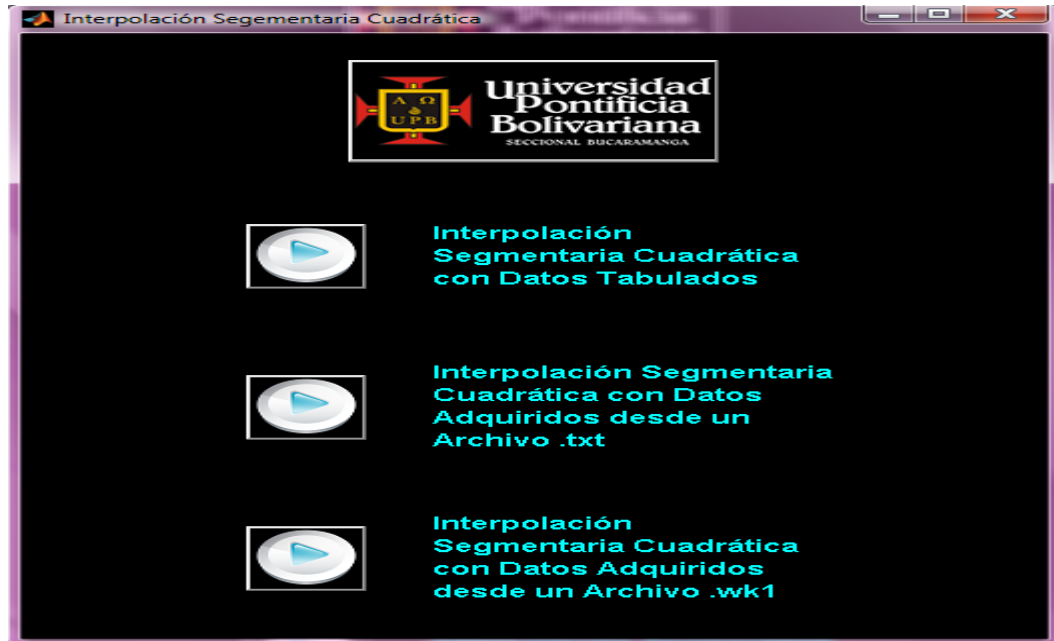
Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Interpolación y se selecciona la opción Interpolación Segmentaria Cuadrática oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Tabulados
- Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



Figura 77. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Cuadrática



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio de segundo orden por cada par de puntos, mediante la técnica descrita en el Anexo C. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Número de intervalos determinados
- Selección de la Segmentaria Cuadrática por visualizar
- Coeficientes de la Segmentaria Cuadrática seleccionada ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ )

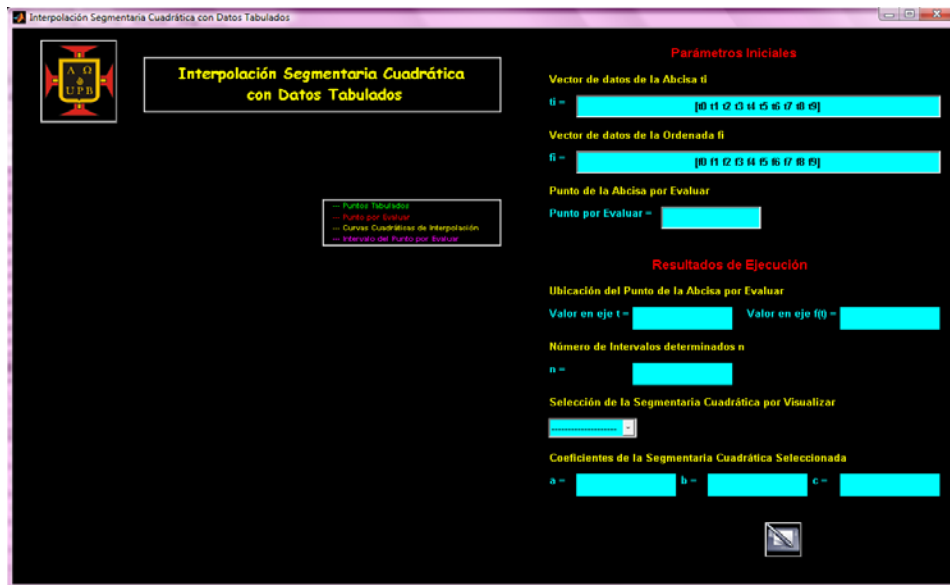
La selección de la Segmentaria Cuadrática por visualizar se efectúa mediante un menú desplegable que construye el número de opciones seleccionables de acuerdo al número de puntos bidimensionales ingresados. Por ejemplo, si se ingresan nueve puntos bidimensionales, la aplicación construye nueve opciones seleccionables, ocho corresponden a los ocho intervalos generados y una opción adicional que permite graficar todas las segmentarias cuadráticas de los ocho intervalos simultáneamente. La confirmación de la selección se realiza mediante un botón denominado Graficar Segmentaria Cuadrática, ubicado al lado derecho del menú desplegable.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción de las segmentarias cuadráticas que interpolan todos los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La visualización de las segmentarias cuadráticas requiere refrescar el eje coordenado, volver a graficar los puntos discretos ingresados y finalmente visualizar la o las segmentarias según la selección. Adicionalmente, muestra los coeficientes de la segmentaria cuadrática seleccionada en los espacios respectivos.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 78. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Tabulados



Fuente: Autor

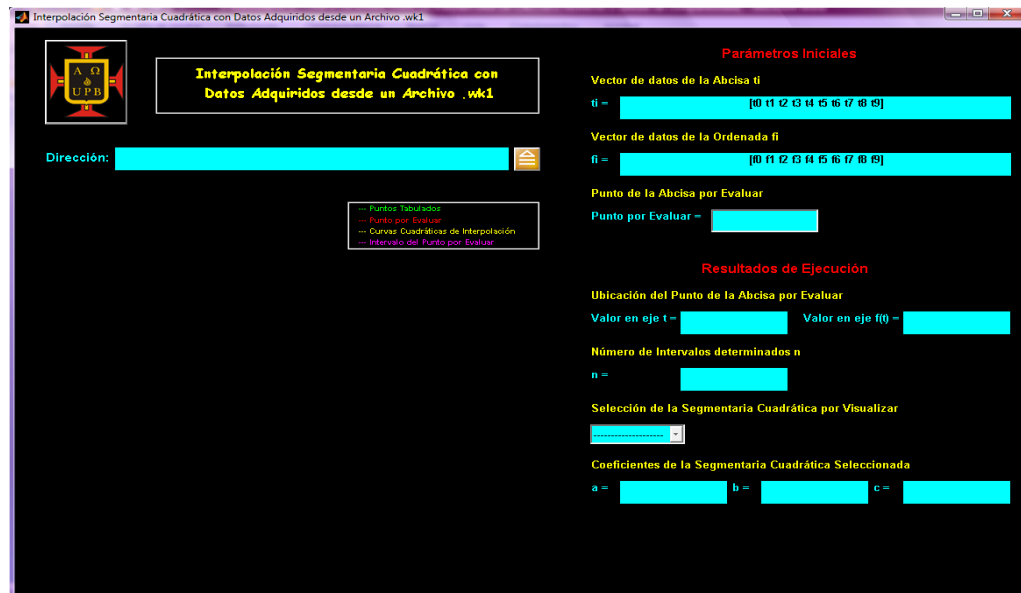
Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 79. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 80. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

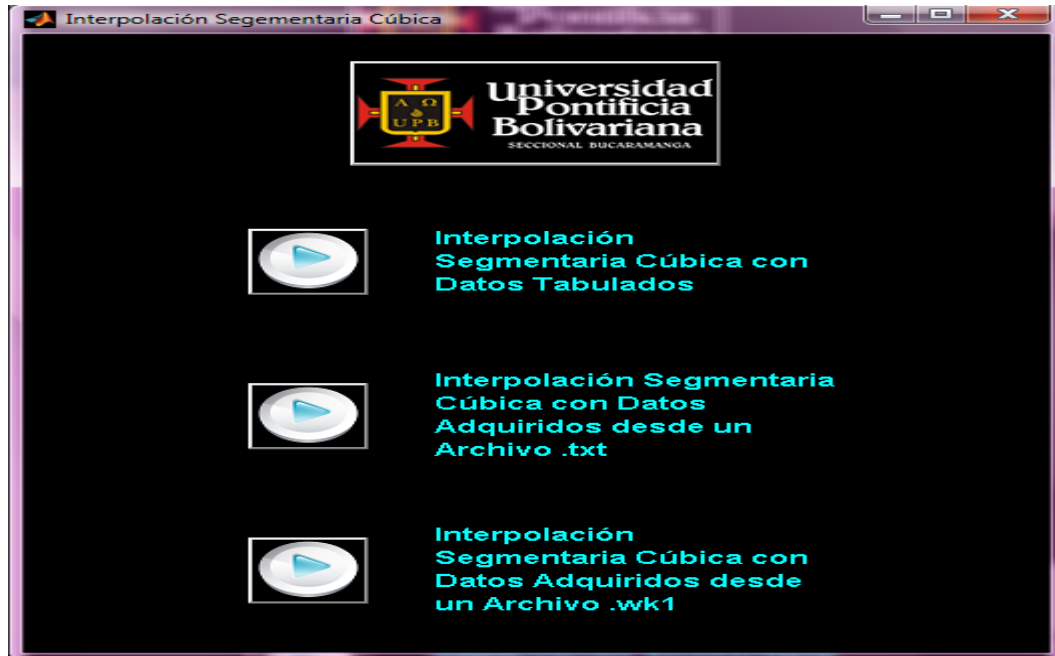


Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Interpolación y se selecciona la opción Interpolación Segmentaria Cúbica oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Tabulados
- Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Figura 81. Menú de Acceso de Interpolación Segmentaria Cúbica



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio de tercer orden por cada par de puntos, mediante la técnica descrita en el Anexo C. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método. La GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Número de intervalos determinados
- Selección de la Segmentaria Cúbica por visualizar
- Coeficientes de la Segmentaria Cúbica seleccionada ( $a, b, c, d$ )

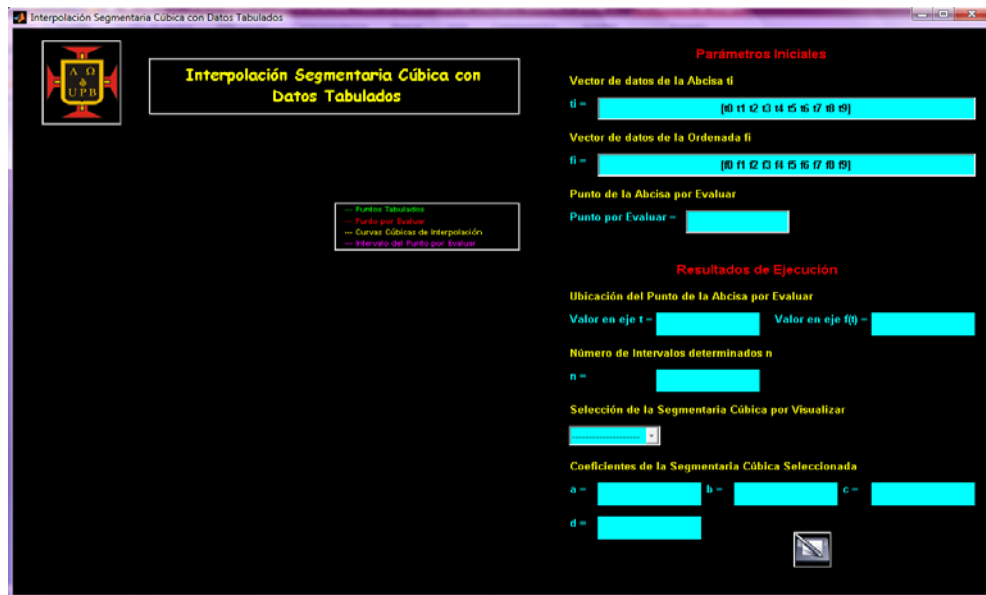
La selección de la Segmentaria Cúbica por visualizar se efectúa mediante un menú desplegable que construye el número de opciones seleccionables de acuerdo al número de puntos bidimensionales ingresados. Por ejemplo, si se ingresan nueve puntos bidimensionales, la aplicación construye nueve opciones seleccionables, ocho corresponden a los ocho intervalos generados y una opción adicional que permite graficar todas las segmentarias cúbicas de los ocho intervalos simultáneamente. La confirmación de la selección se realiza mediante un botón denominado Graficar Segmentaria Cúbica, ubicado al lado derecho del menú desplegable.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción de las segmentarias cúbicas que interpolan todos los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La visualización de las segmentarias cúbicas requiere refrescar el eje coordenado, volver a graficar los puntos discretos ingresados y finalmente visualizar la o las segmentarias según la selección. Adicionalmente, muestra los coeficientes de la segmentaria cúbica seleccionada en los espacios respectivos.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

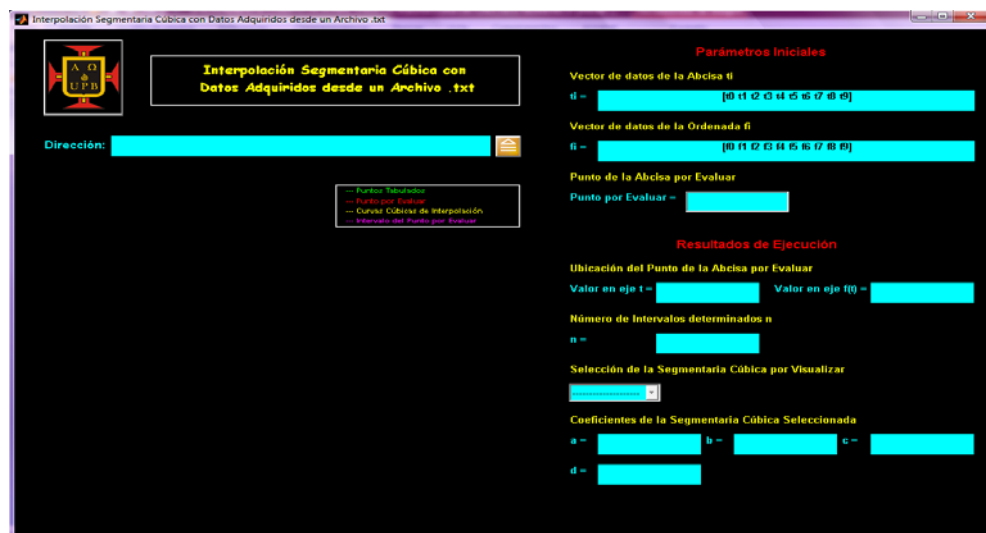
Figura 82. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Tabulados



Fuente: Autor

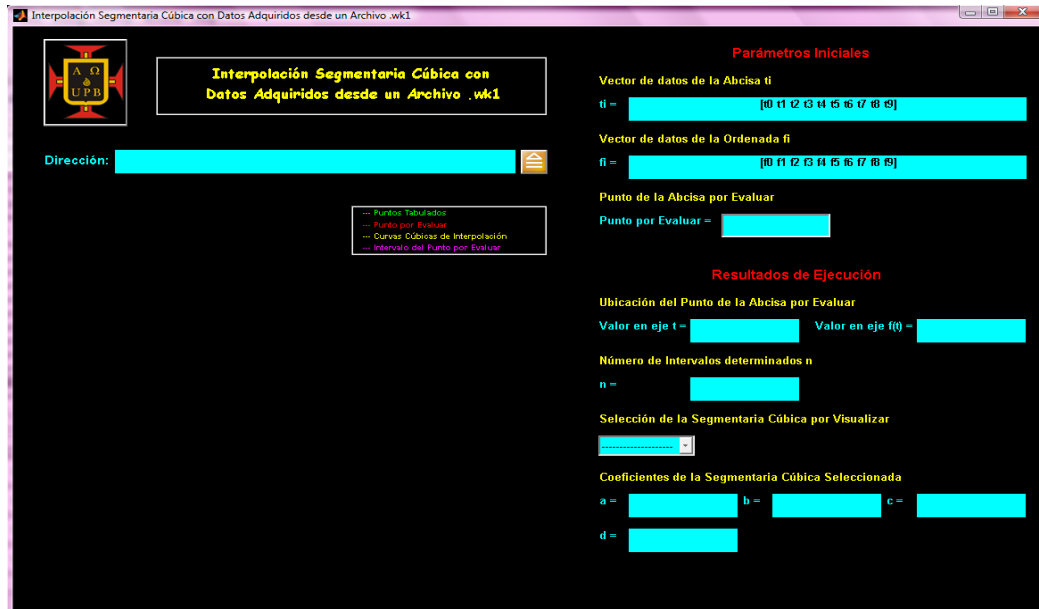
Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 83. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 84. GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



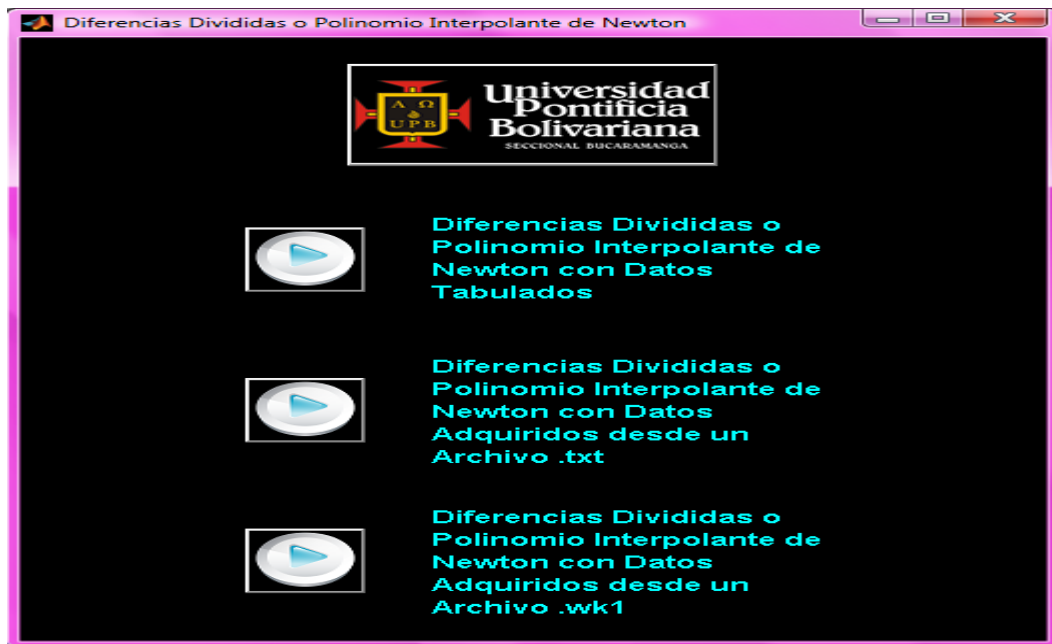
Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo III y se selecciona la opción Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Tabulados
- Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



Figura 85. Menú de Acceso de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio de orden  $n - 1$ , siendo  $n$  el número de puntos ingresados, mediante la técnica descrita en el Anexo C. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

La aplicación cuenta también con una imagen de una matriz, que muestra claramente la forma en la que se construye cada uno de los polinomios interpolantes de Newton.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Orden más alto posible de la diferencia dividida
- Selección del polinomio interpolante de Newton de orden  $n$  por visualizar

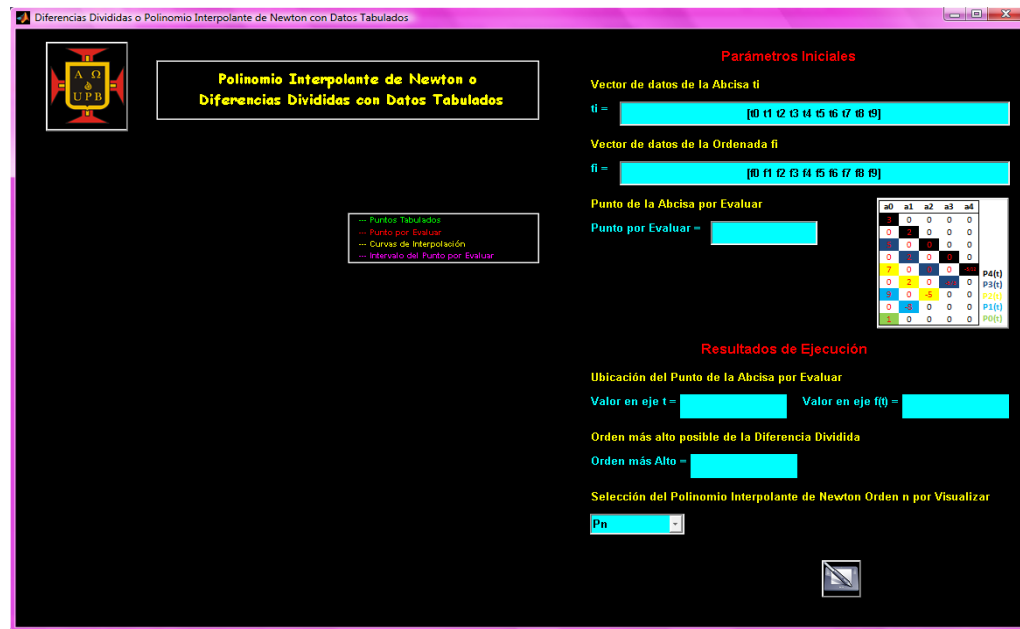
La selección del Polinomio Interpolante de Newton por visualizar se efectúa mediante un menú desplegable que construye el número de opciones seleccionables de acuerdo al número de puntos bidimensionales ingresados. Por ejemplo, si se ingresan nueve puntos bidimensionales, la aplicación construye diez opciones seleccionables, nueve corresponden a los nueve polinomios generados (desde orden cero hasta orden nueve) y una opción adicional que permite graficar todos los polinomios interpolantes simultáneamente. La confirmación de la selección se realiza mediante un botón denominado Graficar Polinomio Interpolante de Newton de Orden  $n$ , ubicado al lado derecho del menú desplegable.

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción del polinomio de Newton que interpola todos los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La visualización de los polinomios interpolantes de Newton adicionales requiere refrescar el eje coordenado, volver a graficar los puntos discretos ingresados y finalmente visualizar el o los polinomios interpolantes según la selección.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 86. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Tabulados



Fuente: Autor

Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 87. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 88. GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

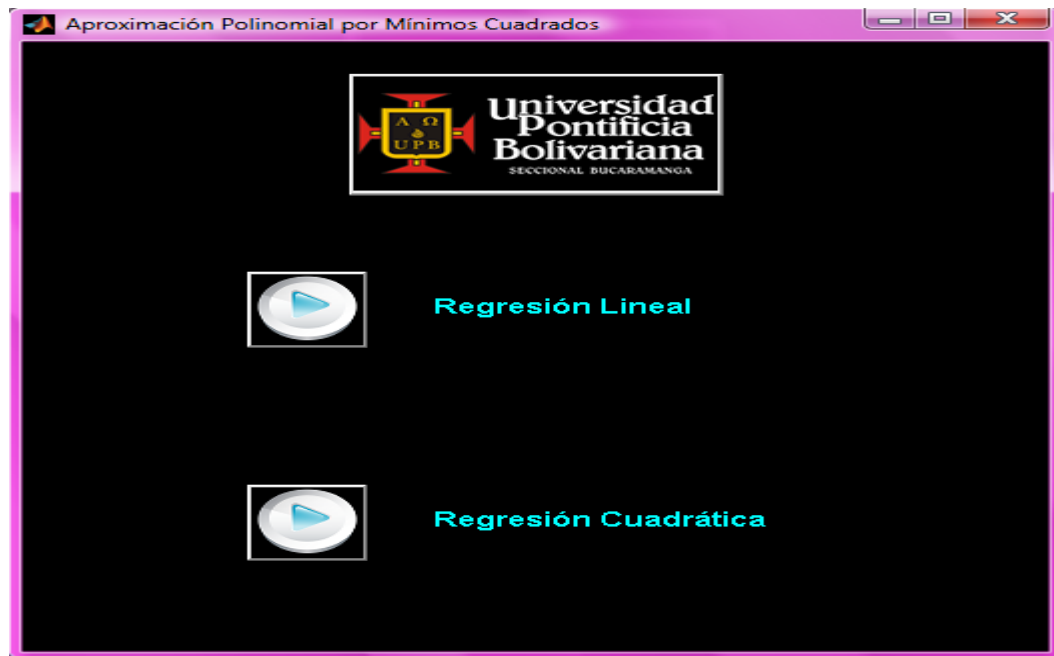


Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo III y se selecciona la opción Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Regresión Lineal
- Regresión Cuadrática

Figura 89. Menú de Acceso de Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados



Fuente: Autor

Si se selecciona la opción Regresión Lineal oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Regresión Lineal con Datos Tabulados
- Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Figura 90. Menú de Acceso de Regresión Lineal



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Regresión Lineal con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio de primer orden, mediante la técnica descrita en el Anexo C. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

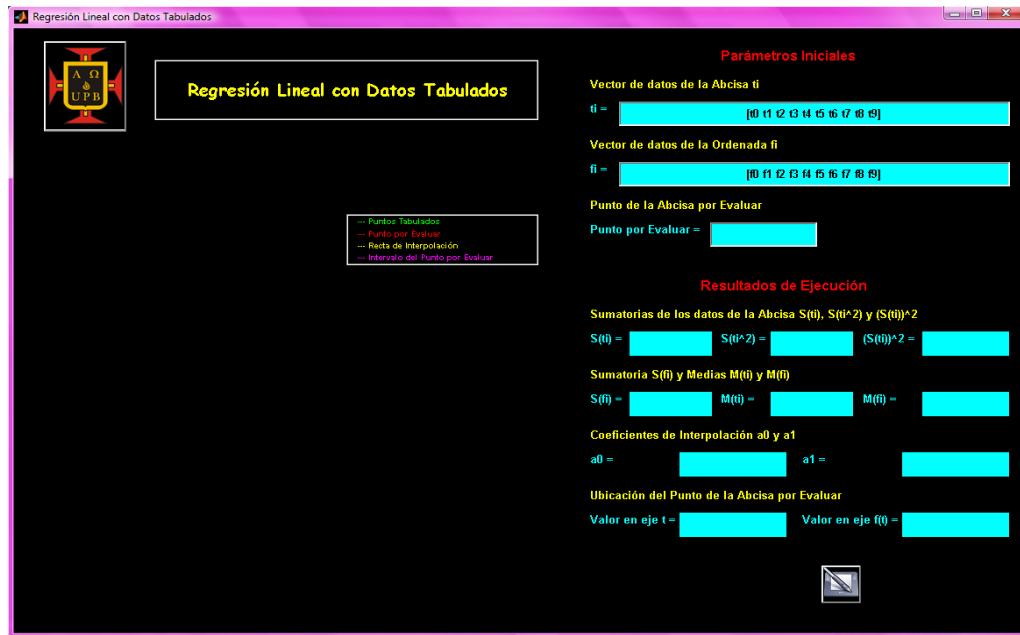
Como resultados de ejecución ofrece:

- Sumatorias de los datos de la abcisa ( $S(t_i)$ ,  $S(t_i^2)$ ,  $(S(t_i))^2$ )
- Sumatoria de los datos de la ordenada ( $S(f_i)$ )
- Medias de los datos ( $M(t_i)$ ,  $M(f_i)$ )
- Coeficientes de Interpolación ( $a_0$ ,  $a_1$ )
- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción del polinomio de primer orden que se aproxima a los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 91. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Tabulados



Fuente: Autor

Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 92. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 93. GUI de la aplicación Regresión Lineal con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



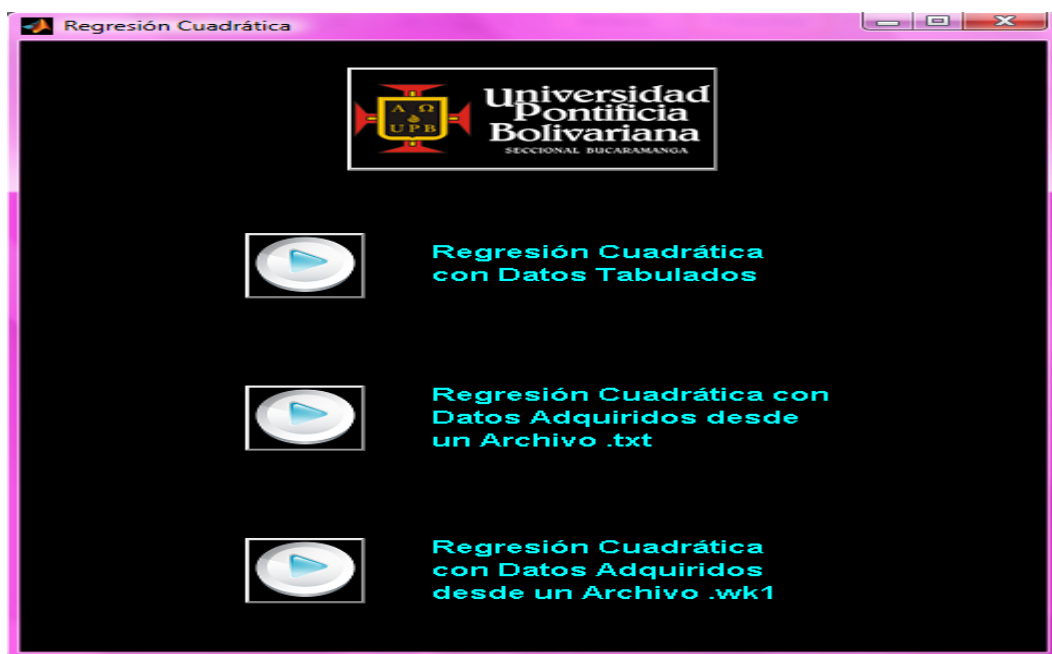
Fuente: Autor



Si se retorna al menú de acceso de Aproximación Polinomial por Mínimos Cuadrados y se selecciona la opción Regresión Cuadrática oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Regresión Cuadrática con Datos Tabulados
- Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Figura 94. Menú de Acceso de Regresión Cuadrática



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Regresión Cuadrática con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar datos bidimensionales discretos y se construye un polinomio de segundo orden, mediante la técnica descrita en el Anexo C. Además, se puede ingresar un valor de la abcisa para evaluar su valor en la ordenada. Dicho valor de la abcisa debe estar dentro del intervalo que establece el menor y el mayor valor en la abcisa, por restricciones del método.

La GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Punto de la abcisa por evaluar

Como resultados de ejecución ofrece:

- Sumatorias de los datos de la abcisa ( $S(t_i)$ ,  $S(t_i^2)$ ,  $S(t_i^3)$ ,  $S(t_i^4)$ )
- Sumatoria de los datos de la ordenada ( $S(f_i)$ )
- Sumatoria del producto de los datos ( $S(t_i \cdot f_i)$ )
- Coeficientes de Interpolación ( $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ )
- Ubicación del punto de la abcisa por evaluar en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

En cuanto al eje bidimensional, es posible visualizar de forma discreta los puntos representados por los vectores ingresados, muestra la construcción del polinomio de segundo orden que se aproxima a los puntos ingresados y marca de forma discreta el punto de la abcisa por evaluar. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

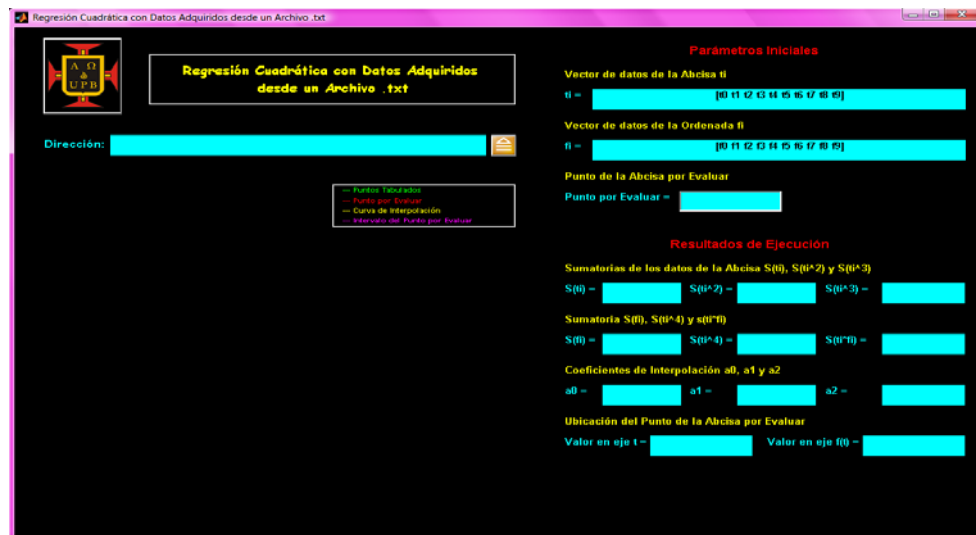
Figura 95. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Tabulados



Fuente: Autor

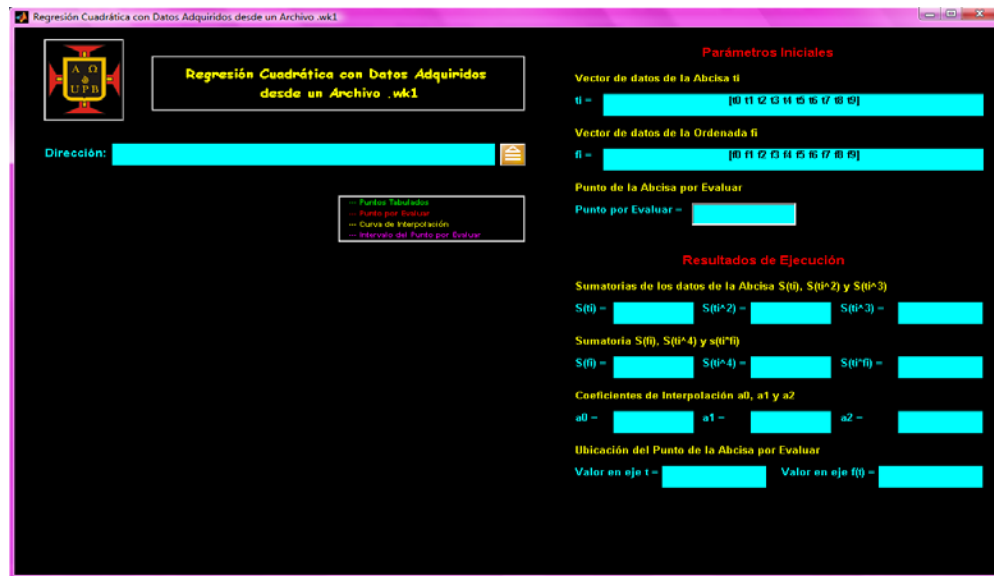
Las GUI's de las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1 tienen el mismo tratamiento que las aplicaciones con estas características, descritas para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal.

Figura 96. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 97. GUI de la aplicación Regresión Cuadrática con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



Fuente: Autor

## 7.2.5. CAPÍTULO IV – DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Este módulo, denominado Diferenciación e Integración Numérica, abarca los temas contenidos en el capítulo IV del programa de la asignatura de Cálculo Numérico y se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 98.

Figura 98. Ventana de Presentación del Módulo IV

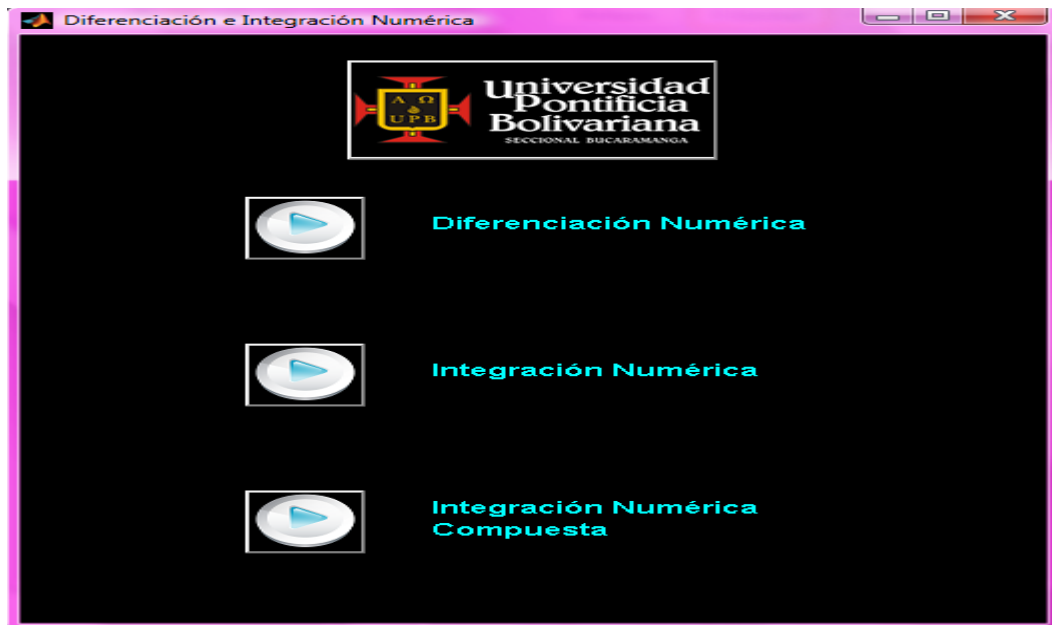


Fuente: Autor

Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Diferenciación Numérica
- Integración Numérica
- Integración Numérica Compuesta

Figura 99. Menú de Acceso Principal del Capítulo IV



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Diferenciación Numérica oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Diferenciación Numérica de una Función Ingresada
- Diferenciación Numérica de Datos Bidimensionales

Figura 100. Menú de Acceso de Diferenciación Numérica



Fuente: Autor

Si se selecciona la opción Diferenciación Numérica de una Función Ingresada oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  y derivarla mediante tres técnicas diferentes:

- Diferencias hacia Adelante
- Diferencias hacia Atrás
- Diferencias Centrales

Este es el funcionamiento básico de las aplicaciones que implican diferenciación numérica.

La GUI de la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$

- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de búsqueda
- Selección del Método de Diferenciación Numérica

La selección del método de diferenciación numérica se efectúa mediante un menú desplegable. Si se selecciona la opción Diferencias hacia Adelante, en los resultados de ejecución sólo se emplean los espacios correspondientes a la ubicación bidimensional de los puntos posteriores. Si se selecciona la opción Diferencias hacia Atrás, se emplean los espacios de los puntos posteriores. Finalmente, si se selecciona la opción Diferencias Centrales, se emplean todos los espacios de la aplicación.

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe ingresarse la función  $f(t)$ .

Figura 101. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



Fuente: Autor

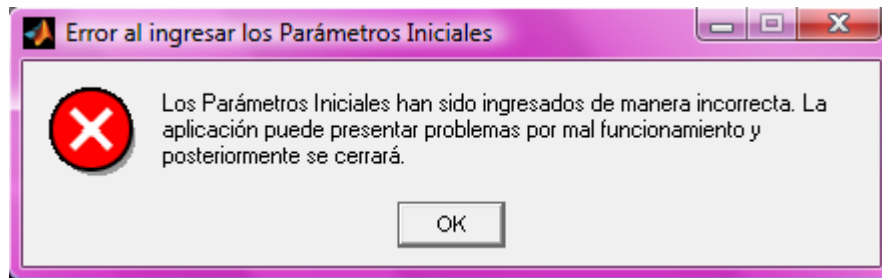
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto por derivar en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación de los punto posteriores en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación de los punto anteriores en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje  $f(t)$ )
- Valor de la derivada en el punto  $t_i$  ( $df(t_i)$ )



Si el intervalo de diferenciación no se encuentra dentro del intervalo de visualización, se abre una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 102. Ventana de Error de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



Fuente: Autor

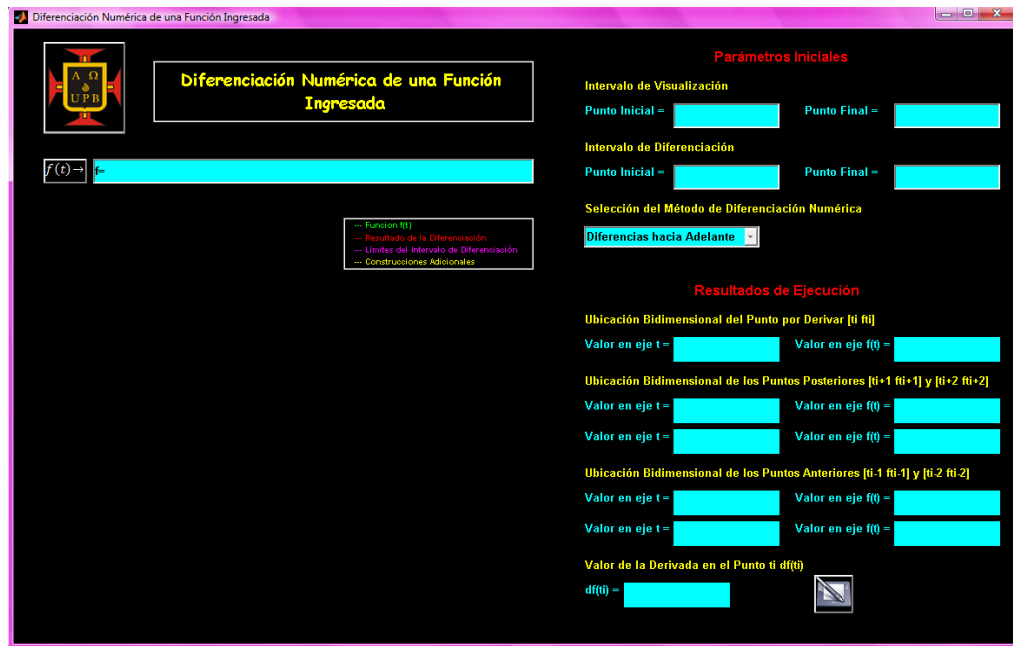
Este evento se considera un error porque la aplicación asume que la función es continua solamente en el intervalo de visualización.

La ventana de error que muestra la Figura 102 es común para las aplicaciones que implican diferenciación numérica.

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de diferenciación y muestra además, el progreso de la diferenciación numérica desde el punto inicial hasta el punto final del intervalo de diferenciación. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 103. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Diferenciación Numérica y se selecciona la opción Diferenciación Numérica de Datos Bidimensionales oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Diferenciación Numérica con Datos Tabulados
- Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt
- Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1

Figura 104. Menú de Acceso de Diferenciación Numérica de Datos Bidimensionales



Fuente: Autor

La diferencia entre estas aplicaciones y la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada es la forma en la que se ingresan los parámetros iniciales, el funcionamiento en general es el mismo.

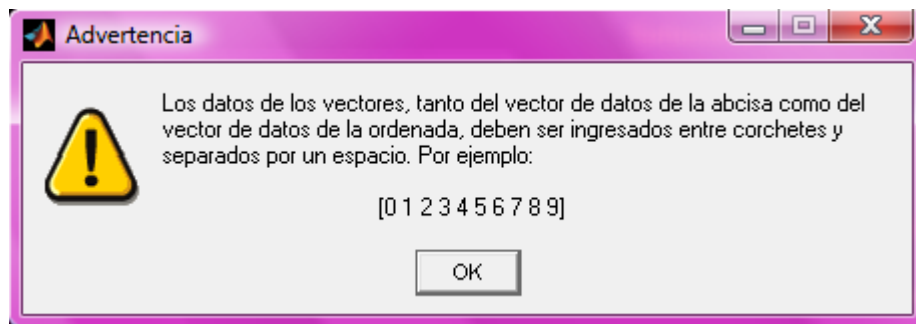
Al seleccionar la opción en la cual el ingreso de los datos se efectúa desde el teclado por parte del usuario, denominada Diferenciación Numérica con Datos Tabulados, oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que se muestra la Figura 18.

La GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Tabulados permite el ingreso de parámetros tales como:

- Vector de datos de la abcisa
- Vector de datos de la ordenada
- Selección del Método de Diferenciación

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual deben ingresarse los datos.

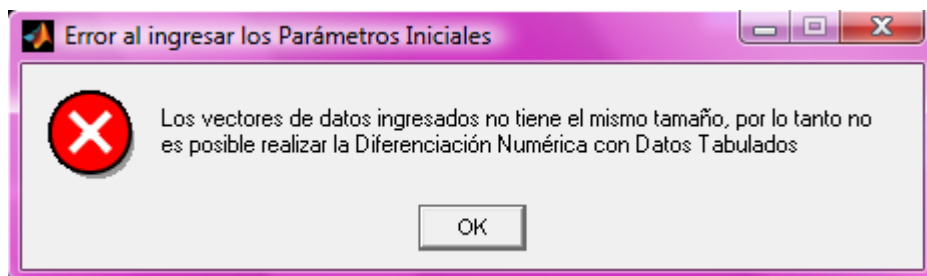
Figura 105. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Tabulados



Fuente: Autor

Si los tamaños de los vectores ingresados no son iguales, la aplicación cuenta con una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, que notifica el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

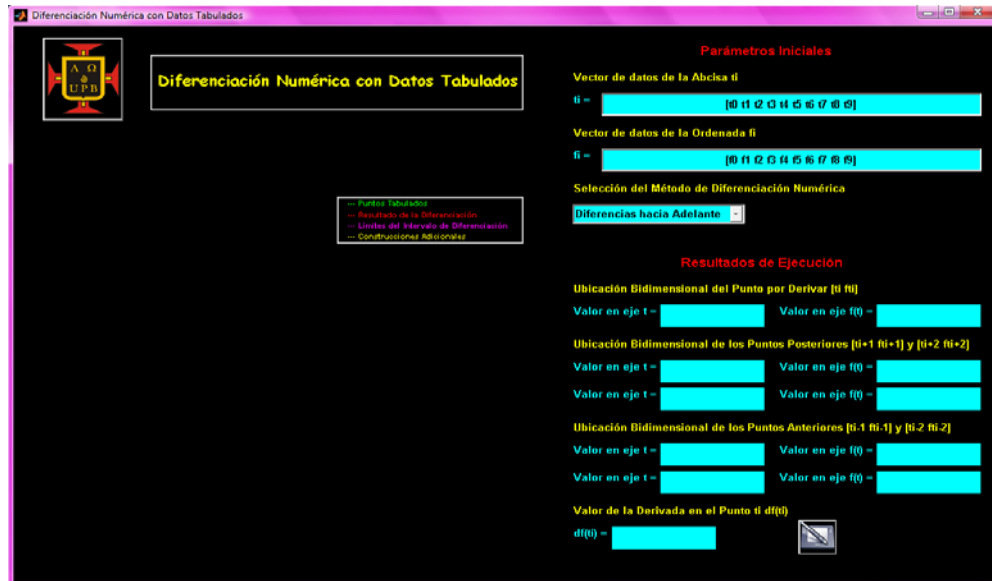
Figura 106. Ventana de Error de Diferenciación Numérica con Datos Tabulados



Fuente: Autor

La ventana de error que muestra la Figuras 106 es común para todas las aplicaciones que implican Diferenciación Numérica de Datos Bidimensionales, modificando el nombre de la aplicación dentro del mensaje, según sea el caso.

Figura 107. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Tabulados

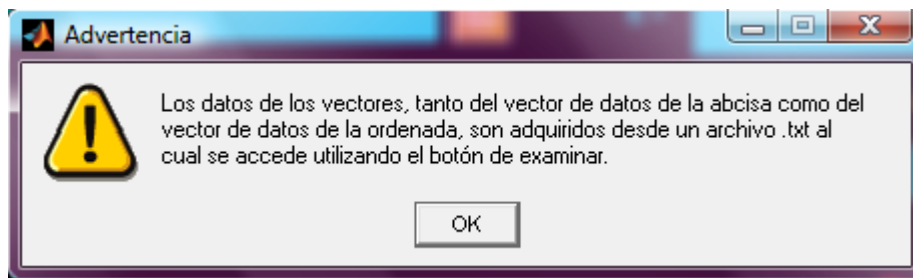


Fuente: Autor

Para las aplicaciones en las cuales los datos son adquiridos desde archivos sea .txt o .wk1, las GUI's solo se diferencian de la GUI con datos tabulados en que poseen un botón denominado Examinar, el cuál al ser pulsado abre una ventana creada por la función uigetfile de MATLAB para la selección del archivo haciendo un filtro que muestra únicamente archivos.txt o archivos .wk1 dependiendo de la aplicación. Otra diferencia radica en una sección en la cual se muestra toda la ruta del archivo seleccionado en la ventana mencionada anteriormente.

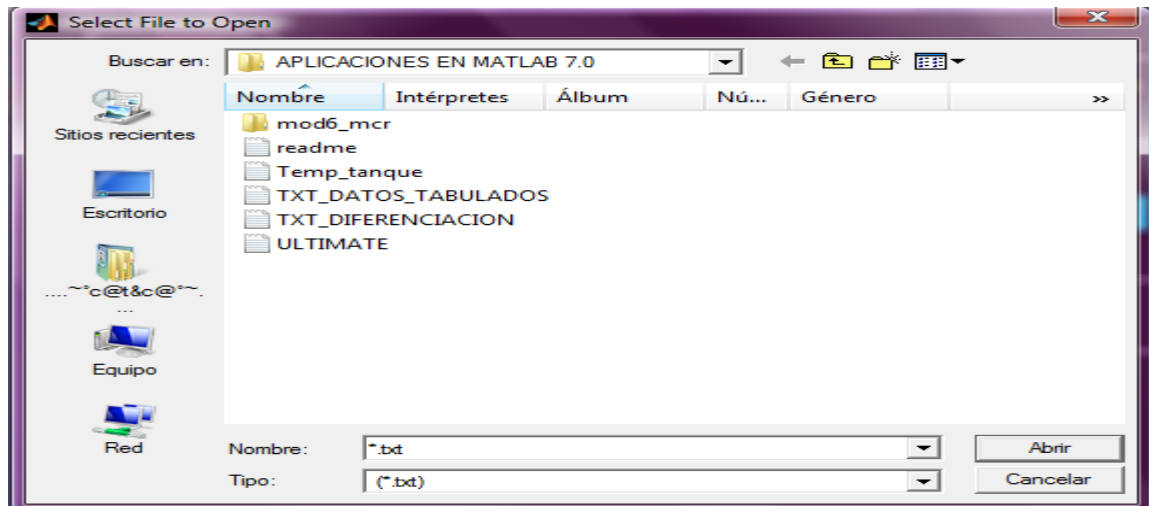
Dichas aplicaciones poseen también una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, que notifica la forma de seleccionar el archivo.

Figura 108. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



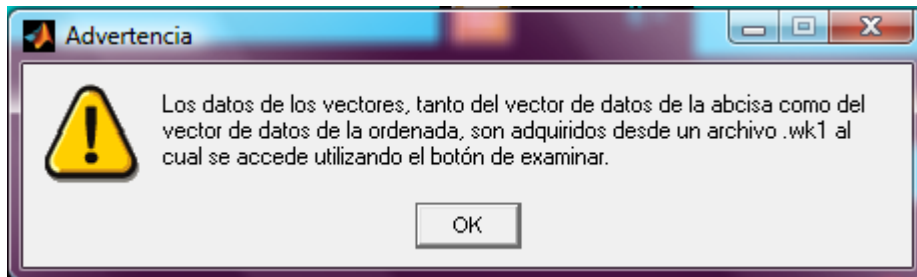
Fuente: Autor

Figura 109. Ventana de selección de archivo .txt generada con la función uigetfile de MATLAB



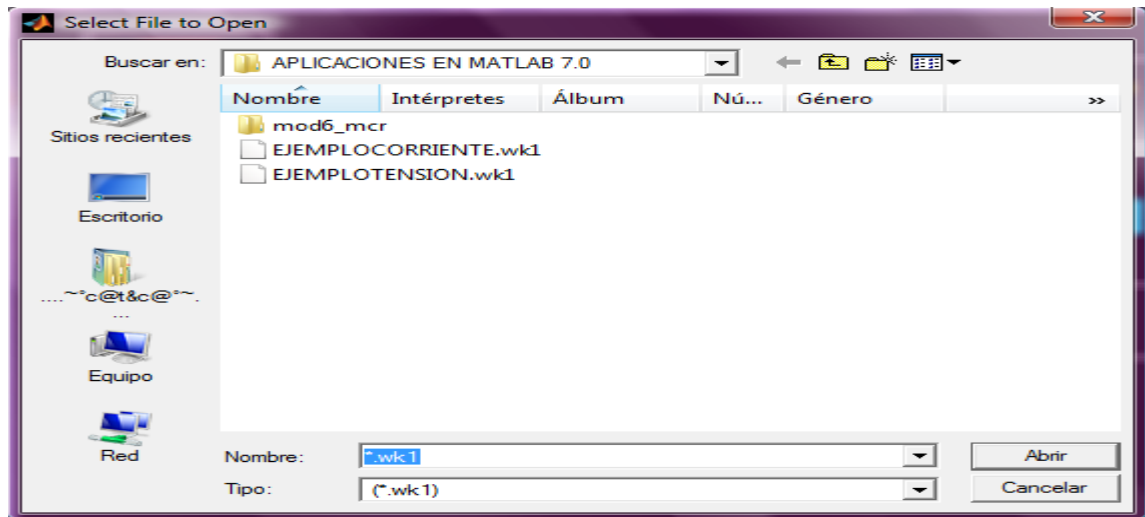
Fuente: Autor

Figura 110. Ventana de Advertencia de Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



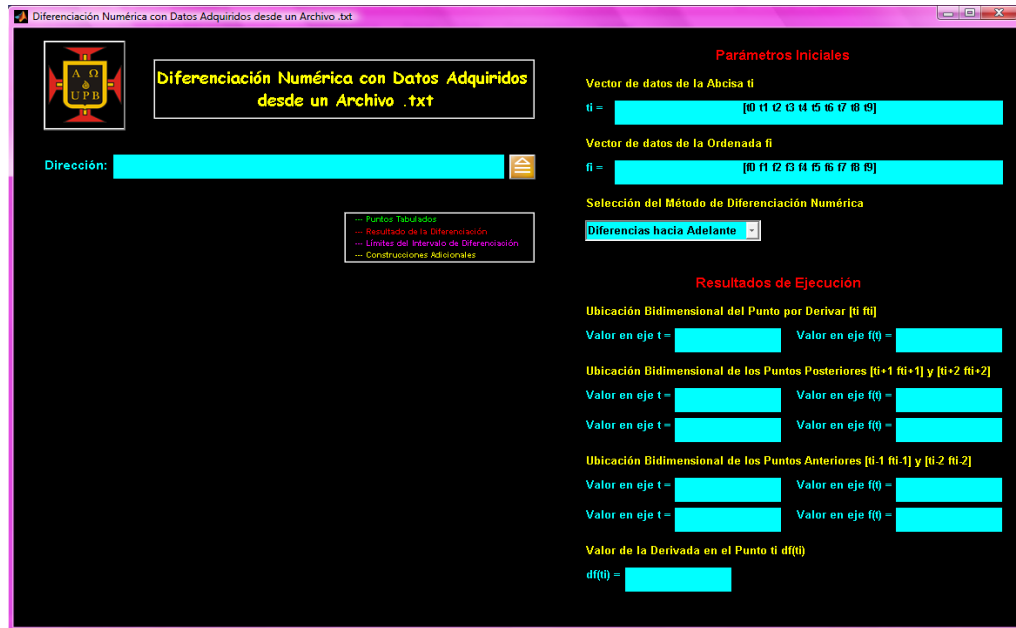
Fuente: Autor

Figura 111. Ventana de selección de archivo .wk1 generada con la función uigetfile de MATLAB



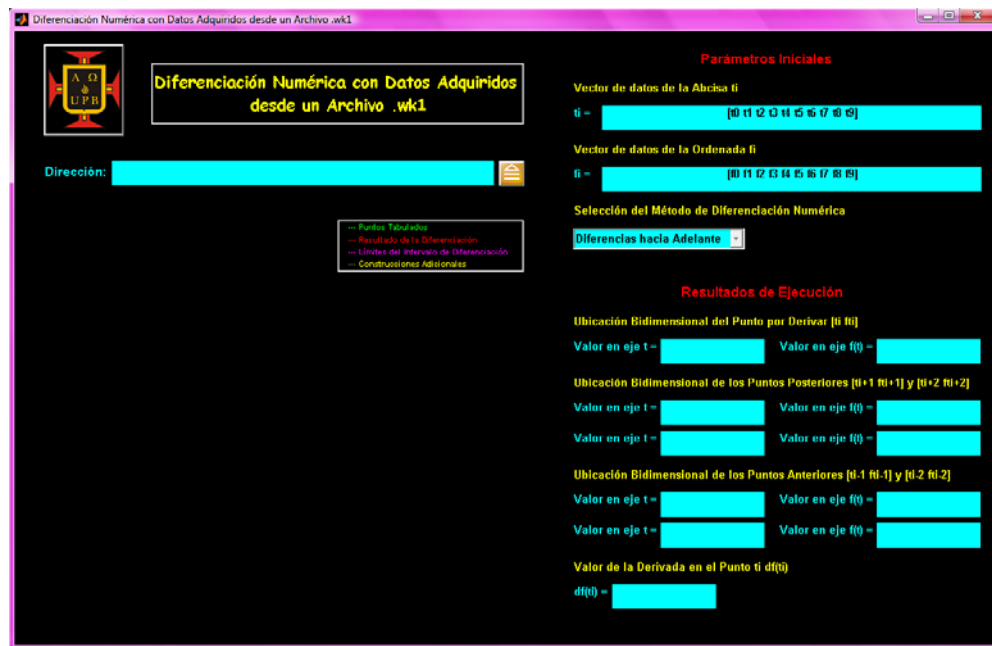
Fuente: Autor

Figura 112. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .txt



Fuente: Autor

Figura 113. GUI de la aplicación Diferenciación Numérica con Datos Adquiridos desde un Archivo .wk1



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo IV y se selecciona la opción Integración Numérica oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método de Newton - Cotes
- Método de Cuadratura de Gauss



Figura 114. Menú de Acceso de Integración Numérica



Fuente: Autor

Si se selecciona la opción Método de Newton - Cotes oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método Trapezoidal
- Método de Simpson

Figura 115. Menú de Acceso de Método de Newton - Cotes



Fuente: Autor

Si se selecciona la opción Método Trapezoidal oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  e integrarla mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo D.

La GUI de la aplicación Método Trapezoidal permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de integración

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe ingresarse la función  $f(t)$ .

Figura 116. Ventana de Advertencia de Método Trapezoidal



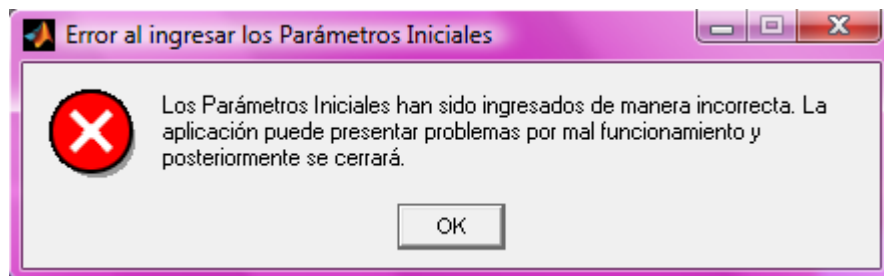
Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto inicial de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Ubicación del punto final de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Diferencial de tiempo
- Coeficientes polinomiales (a0, a1)
- Valor aproximado de la integral definida de la función

Si el intervalo de integración no se encuentra dentro del intervalo de visualización, se abre una ventana de error similar a la que se muestra en la Figura 21, notificando el evento, se otorga un tiempo de espera para que el usuario lea la información y posteriormente cierra la aplicación.

Figura 117. Ventana de Error de Método Trapezoidal



Fuente: Autor

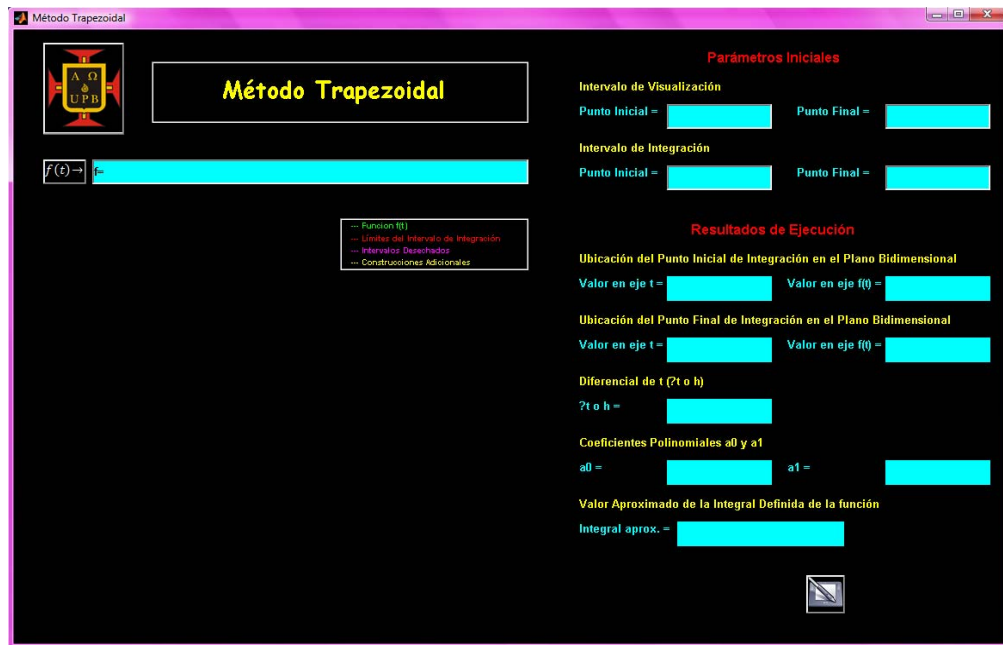
Este evento se considera un error porque la aplicación asume que la función está definida solamente en el intervalo de visualización.

Las ventanas de advertencia y de error que se muestran en las Figuras 116 y 117 respectivamente, son comunes para las aplicaciones que implican integración numérica o integración numérica compuesta, modificando el nombre de la aplicación según sea el caso.

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de integración y muestra además, la construcción adicional que describe la técnica del Anexo D. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 118. GUI de la aplicación Método Trapezoidal



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Método de Newton - Cotes y se selecciona la opción Método de Simpson oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige

por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  e integrarla mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo D.

La GUI de la aplicación Método de Simpson permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de integración

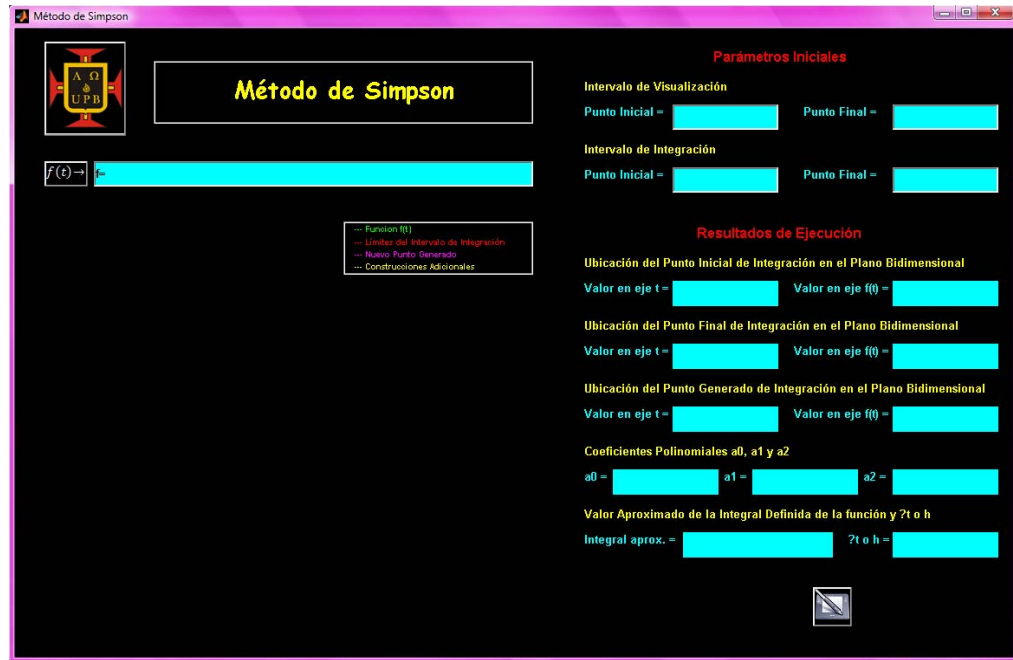
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto inicial de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación del punto final de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación del punto generado de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Coeficientes polinomiales ( $a_0, a_1, a_2$ )
- Valor aproximado de la integral definida de la función
- Diferencial de tiempo

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de integración y muestra además, la construcción del punto adicional que describe la técnica del Anexo D. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 119. GUI de la aplicación Método de Simpson



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Integración Numérica y se selecciona la opción Método de Cuadratura de Gauss oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  e integrarla mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo D.

La GUI de la aplicación Método de Cuadratura de Gauss permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de integración

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto inicial de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )

- Ubicación del punto final de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Ubicación del primer punto generado de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Ubicación del segundo punto generado de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje f(t))
- Valor aproximado de la integral definida de la función

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada y la función modificada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de integración y los límites del nuevo intervalo de integración, y muestra además, la construcción de los puntos adicionales que describe la técnica del Anexo D. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 120. GUI de la aplicación Método de Cuadratura de Gauss



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo IV y se selecciona la opción Integración Numérica Compuesta oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método Trapezoidal Compuesto
- Método de Simpson Compuesto

Figura 121. Menú de Acceso de Integración Numérica Compuesta



Fuente: Autor

Si se selecciona la opción Método Trapezoidal Compuesto oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  e integrarla mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo D.

La GUI de la aplicación Método Trapezoidal Compuesto permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización



- Punto inicial y final del intervalo de integración
- Número de subintervalos de integración

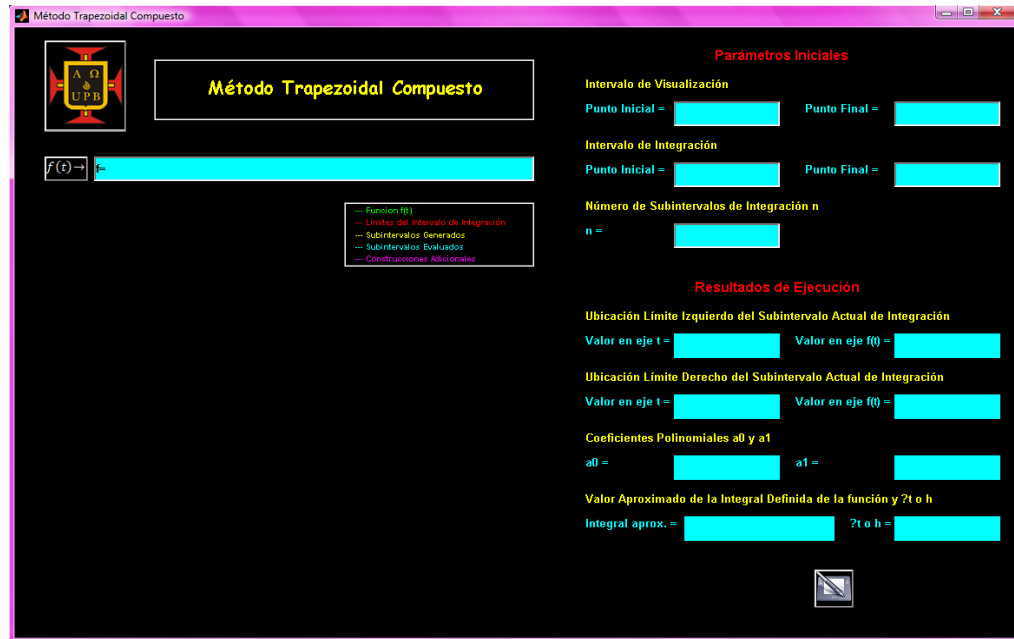
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del límite izquierdo del subintervalo actual de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación del límite derecho del subintervalo actual de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Coeficientes polinomiales ( $a_0$ ,  $a_1$ )
- Valor aproximado de la integral definida de la función
- Diferencial de tiempo

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de integración y muestra además, la construcción de los subintervalos adicionales de integración que describe la técnica del Anexo D, diferenciando visualmente los subintervalos evaluados de los no evaluados. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 122. GUI de la aplicación Método Trapezoidal Compuesto



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso de Integración Numérica Compuesta y se selecciona la opción Método de Simpson Compuesto oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una función que posee una variable independiente  $t$  y una variable dependiente  $f$  e integrarla mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo D.

La GUI de la aplicación Método de Simpson Compuesto permite el ingreso de parámetros tales como:

- Cualquier función  $f(t)$  siempre y cuando la única variable independiente sea  $t$  y la única variable dependiente sea  $f$
- Punto inicial y final del intervalo de visualización
- Punto inicial y final del intervalo de integración
- Número de subintervalos de integración

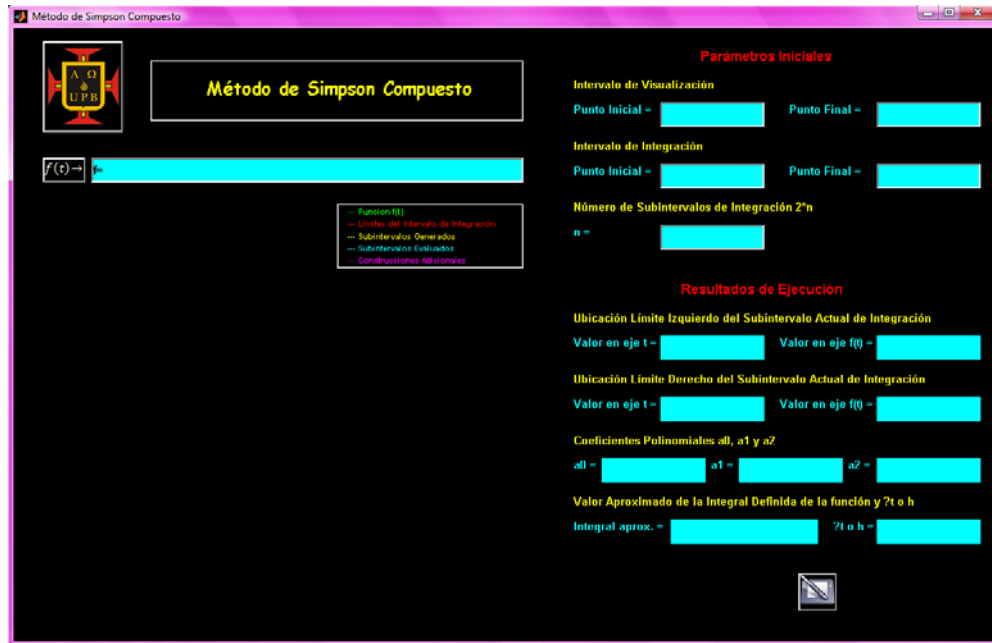
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del límite izquierdo del subintervalo actual de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Ubicación del límite derecho del subintervalo actual de integración en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $f(t)$ )
- Coeficientes polinomiales ( $a_0, a_1, a_2$ )
- Valor aproximado de la integral definida de la función
- Diferencial de tiempo

Adicionalmente, la aplicación genera una gráfica en un eje coordenado bidimensional que muestra la función ingresada desde el punto inicial de visualización hasta el punto final, marca de forma discreta los límites del intervalo de integración y muestra además, la construcción de los subintervalos adicionales de integración que describe la técnica del Anexo D, diferenciando visualmente los subintervalos evaluados de los no evaluados. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 123. GUI de la aplicación Método de Simpson Compuesto



Fuente: Autor

## 7.2.6. CAPÍTULO V – SOLUCIÓN NUMÉRICA A SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Este módulo, denominado Solución Numérica a Sistemas de Ecuaciones No Lineales, abarca los temas contenidos en el capítulo V del programa de la asignatura de Cálculo Numérico y se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 124.

Figura 124. Ventana de Presentación del Módulo V

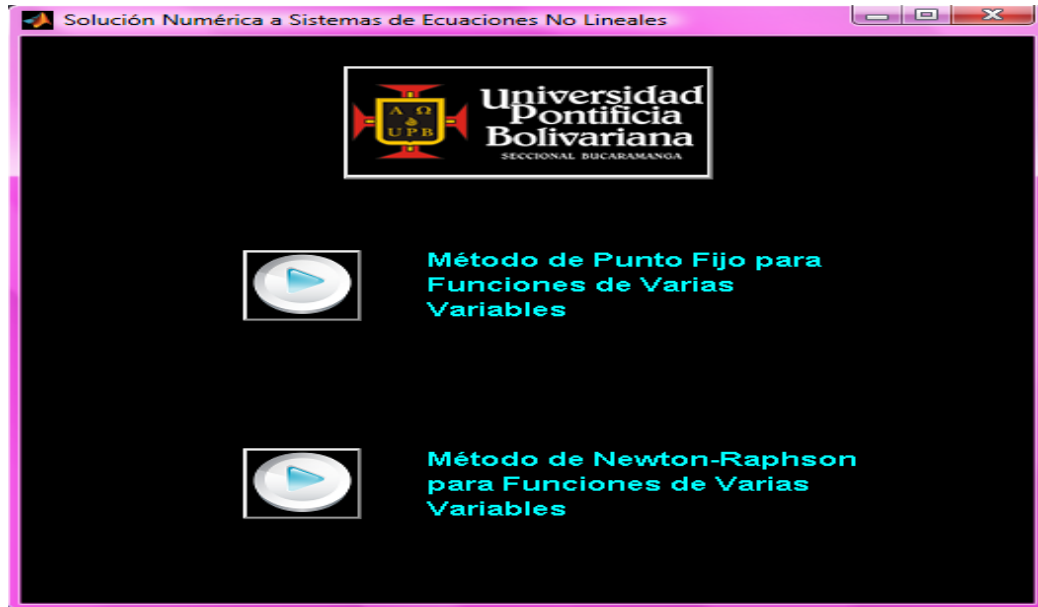


Fuente: Autor

Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables
- Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables

Figura 125. Menú de Acceso Principal del Capítulo V



Fuente: Autor

Al seleccionar la opción Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible escoger entre un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos variables independientes y un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres variables independientes y encontrar los valores de las variables que solucionan el sistema seleccionado mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo E.

La GUI de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables permite el ingreso de parámetros tales como:

- Selección del sistema
- Ecuaciones no lineales del sistema
- Valores iniciales de las variables independientes
- Despeje de las variables independientes
- Criterio de parada mediante un valor porcentual respecto al error relativo o respecto a la distancia vectorial de las variables independientes. La selección del criterio se efectúa a través de un menú desplegable.

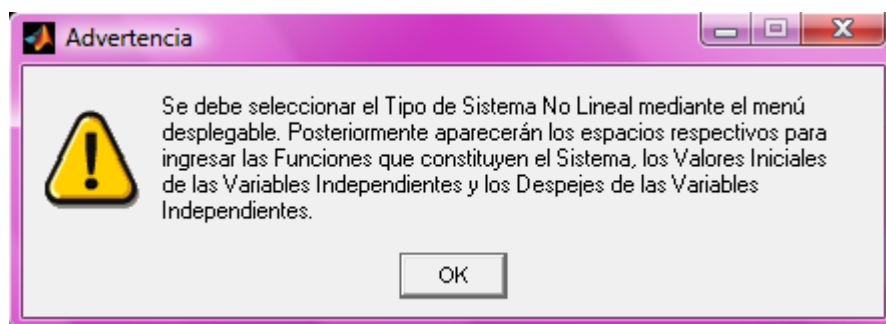
La selección del sistema se realiza mediante un menú desplegable y se confirma a través de un botón denominado Confirmar Selección del Sistema, ubicado al lado derecho del menú desplegable.

Las variables independientes de un sistema de dos ecuaciones son  $t$  y  $y$ , las variables dependientes son  $f_1$  y  $f_2$ , y los despejes  $g_1$  y  $g_2$ .

Para un sistema de tres ecuaciones, las variables independientes son  $t$ ,  $y$  y  $z$ , las variables dependientes son  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , y los despejes  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ .

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe realizarse la selección del sistema y notifica los eventos posteriores a la confirmación de la selección del sistema.

Figura 126. Ventana de Advertencia de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

- Valores anteriores de las variables independientes
- Valores actuales de las variables independientes
- Distancia vectorial
- Iteración actual de ejecución

Adicionalmente, la aplicación cuenta con dos ejes coordenados bidimensionales, el primero, muestra las gráficas de los errores relativos de las variables independientes, la distancia vectorial y el valor del criterio de parada establecido; y el segundo eje, muestra el progreso de las variables independientes hacia los valores que solucionan el sistema. Las gráficas descritas se muestran de forma

simultánea. Los ejes cuentan, cada uno con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

Se dispone también de un botón denominado Parar que permite al usuario interrumpir el progreso de búsqueda de los valores de las variables independientes y adelanta la aplicación hasta el punto en el cuál aparecen los botones de otras prestaciones. Esta característica del botón Parar lo hace útil cuando la solución del sistema es divergente o cuando los parámetros iniciales ingresados como los despejes de las variables independientes no permiten encontrar la solución aunque el sistema sea convergente.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 127. GUI de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Si el sistema seleccionado es un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos variables independientes, la solución de dicho sistema puede mostrarse en un eje tridimensional, graficando cada superficie y permitiendo ver de forma clara el punto en el que se soluciona el sistema.

Este eje tridimensional está dispuesto en una ventana adicional a la cual se accede oprimiendo con el botón izquierdo del ratón en el botón denominado



Graficar Superficie. Esta ventana ofrece las dos ecuaciones que constituyen el sistema y permiten establecer los límites de las variables independientes para generar las superficies. Posteriormente, se oprime el botón denominado Graficar Superficie de esta ventana y la aplicación genera primero una superficie, refresca el eje tridimensional, genera la otra superficie, refresca el eje y genera simultáneamente las dos superficies.

Esta ventana dispone también de un botón denominado Rotar Superficie que permite hacer giros del eje tridimensional para obtener mejores vistas de las superficies.

Figura 128. GUI adicional de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

La GUI que se muestra en la Figura 128 es común para la aplicación Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables; su comportamiento y condiciones son idénticos para dicha aplicación.

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo V y se selecciona la opción Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible escoger entre un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos variables independientes y

un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres variables independientes y encontrar los valores de las variables que solucionan el sistema seleccionado mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo E.

La GUI de la aplicación Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables permite el ingreso de parámetros tales como:

- Selección del sistema
- Ecuaciones no lineales del sistema
- Valores iniciales de las variables independientes
- Derivadas parciales de las funciones
- Criterio de parada mediante un valor porcentual respecto al error relativo o respecto a la distancia vectorial de las variables independientes. La selección del criterio se efectúa a través de un menú desplegable.

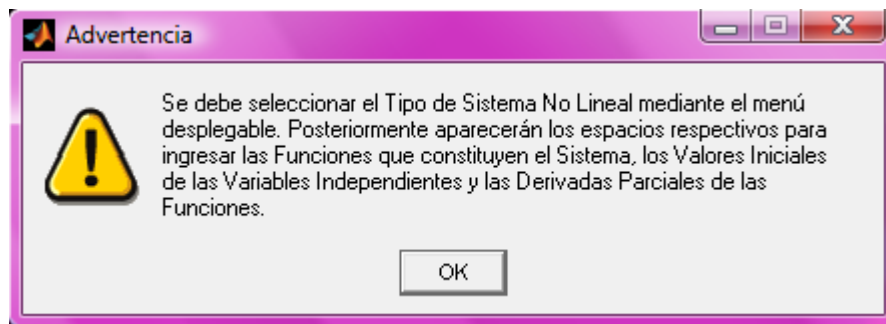
La selección del sistema y la confirmación de la selección se realiza de la misma forma que en la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables.

Las variables independientes de un sistema de dos ecuaciones son  $t$  y  $y$ , las variables dependientes son  $f_1$  y  $f_2$ , y las derivadas parciales de las funciones son  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  y  $g_4$ .

Para un sistema de tres ecuaciones, las variables independientes son  $t$ ,  $y$  y  $z$ , las variables dependientes son  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , y las derivadas parciales de las funciones son  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_4$ ,  $g_5$ ,  $g_6$ ,  $g_7$ ,  $g_8$  y  $g_9$ .

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe realizarse la selección del sistema y notifica los eventos posteriores a la confirmación de la selección del sistema.

Figura 129. Ventana de Advertencia de Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Como resultados de ejecución ofrece:

- Valores anteriores de las variables independientes
- Valores actuales de las variables independientes
- Distancia vectorial
- Iteración actual de ejecución

Adicionalmente, la aplicación cuenta con dos ejes coordenados bidimensionales, el primero, muestra las gráficas de los errores relativos de las variables independientes, la distancia vectorial y el valor del criterio de parada establecido; y el segundo eje, muestra el progreso de las variables independientes hacia los valores que solucionan el sistema. Las gráficas descritas se muestran de forma simultánea. Los ejes cuentan, cada uno con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre, más el botón Parar descrito para la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables.

Figura 130. GUI de la aplicación Método de Newton – Raphson para Funciones de Varias Variables

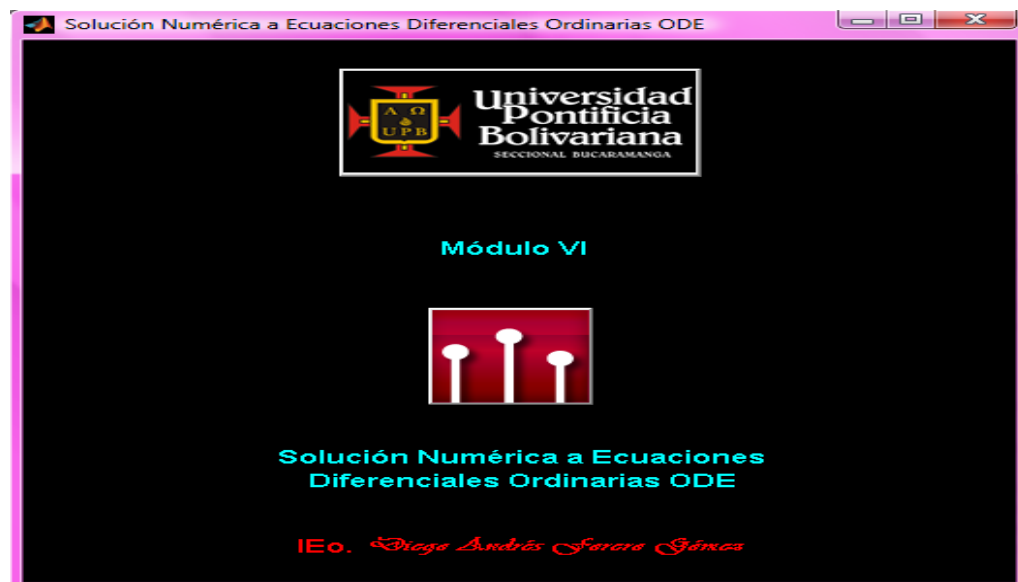


Fuente: Autor

## 7.2.7. CAPÍTULO VI – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Este módulo, denominado Solución Numérica a Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, abarca los temas contenidos en el capítulo VI del programa de la asignatura de Cálculo Numérico y se compone en primera instancia de una ventana de inicio igual a la que muestra la Figura 131.

Figura 131. Ventana de Presentación del Módulo VI

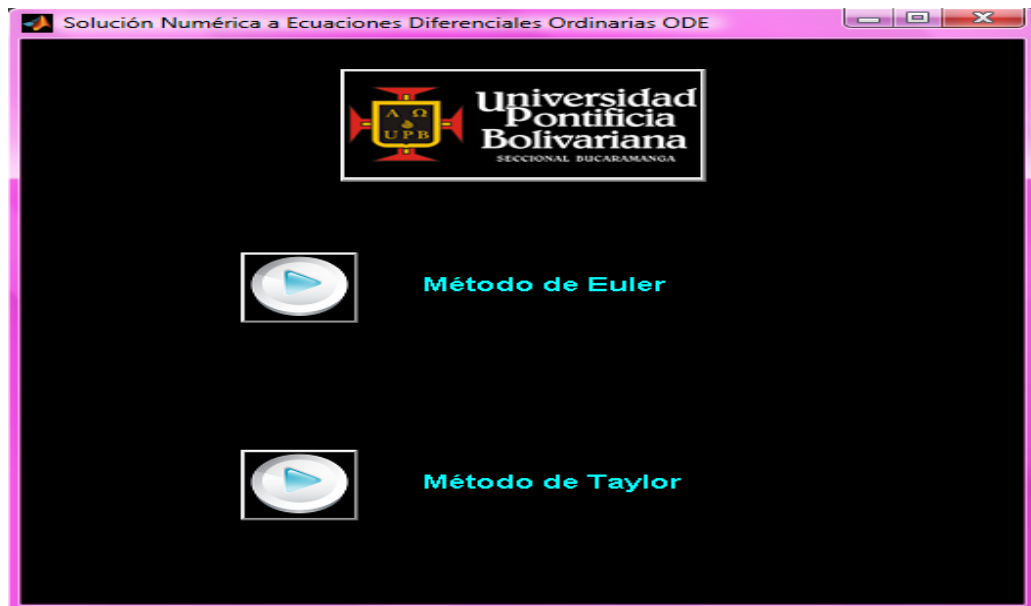


Fuente: Autor

Al presionar el botón izquierdo del ratón sobre el logo de la herramienta, se abre un menú de acceso en el cuál se muestran las opciones:

- Método de Euler
- Método de Taylor

Figura 132. Menú de Acceso Principal del Capítulo VI



Fuente: Autor

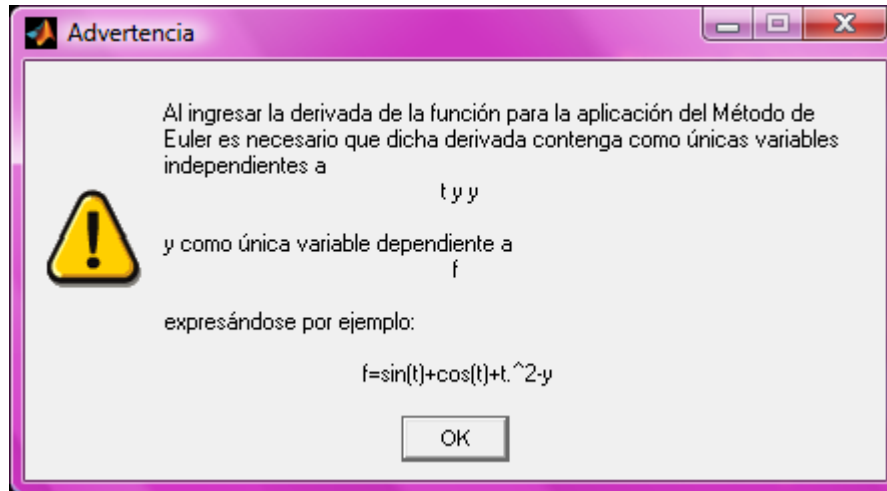
Al seleccionar la opción Método de Euler oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una ecuación diferencial de primer orden y encontrar gráficamente el comportamiento de la función mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo F.

La GUI de la aplicación Método de Euler permite el ingreso de parámetros tales como:

- Derivada de la función expresada en forma de ecuación diferencial de primer orden, con variables independientes  $t$  y  $y$ , y variable dependiente  $f$
- Ubicación del punto inicial en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $y(t)$ )
- Valor en el eje  $t$  del punto final
- Número de intervalos por generar

La aplicación dispone de una ventana de advertencia similar a la que se muestra en la Figura 20, la cual indica la forma en la cual debe ingresarse la derivada de la función.

Figura 133. Ventana de Advertencia de Método de Euler



Fuente: Autor

La ventana que muestra la Figura 133 es común para la aplicación Método de Taylor.

Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto anterior en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $y(t)$ )
- Derivada de  $y$  en función de  $t$
- Ubicación del punto actual en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $y(t)$ )
- Tamaño de paso

Adicionalmente, la aplicación cuenta con un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso en la determinación del comportamiento de la función  $y(t)$ . El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

Figura 134. GUI de la aplicación Método de Euler



Fuente: Autor

Si se retorna al menú de acceso principal del Capítulo VI y se selecciona la opción Método de Taylor oprimiendo el botón izquierdo del ratón en el botón respectivo, se abre la ventana de la aplicación. El diseño de esta ventana se rige por el bosquejo general a mano alzada de GUI's que muestra la Figura 18. En esta aplicación es posible ingresar una ecuación diferencial de primer orden y encontrar gráficamente el comportamiento de la función mediante la técnica descrita en el contenido teórico disponible en el Anexo F.

La GUI de la aplicación Método de Taylor permite el ingreso de parámetros tales como:

- Derivada de la función expresada en forma de ecuación diferencial de primer orden, con variables independientes  $t$  y  $y$ , y variable dependiente  $f$
- Ubicación del punto inicial en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje  $t$  y valor en eje  $y(t)$ )
- Valor en el eje  $t$  del punto final
- Número de intervalos por generar
- Derivadas parciales de  $f$  respecto a  $t$  y de  $f$  respecto a  $y$



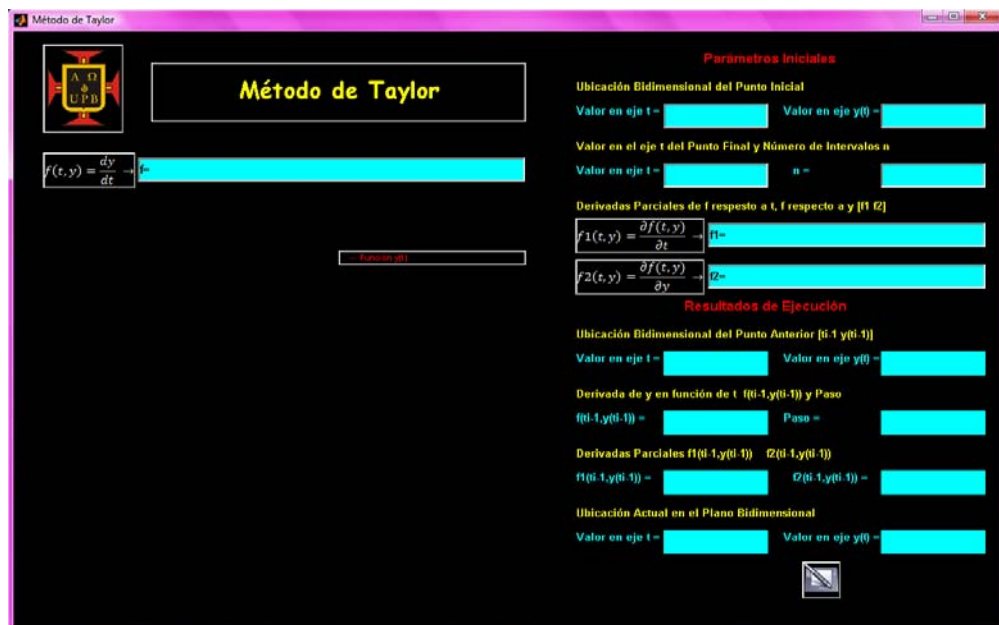
Como resultados de ejecución ofrece:

- Ubicación del punto anterior en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje y(t))
- Derivada de y en función de t
- Tamaño de paso
- Derivadas parciales
- Ubicación del punto actual en el plano bidimensional con los valores en ambos ejes (valor en eje t y valor en eje y(t))

Adicionalmente, la aplicación cuenta con un eje coordenado bidimensional que muestra el progreso en la determinación del comportamiento de la función y(t). El eje cuenta con un cuadro de leyenda que explica claramente cada una de las convenciones usadas.

La aplicación posee la sección de botones de acceso a otras prestaciones descrita para la aplicación Cuerpos en Caída Libre.

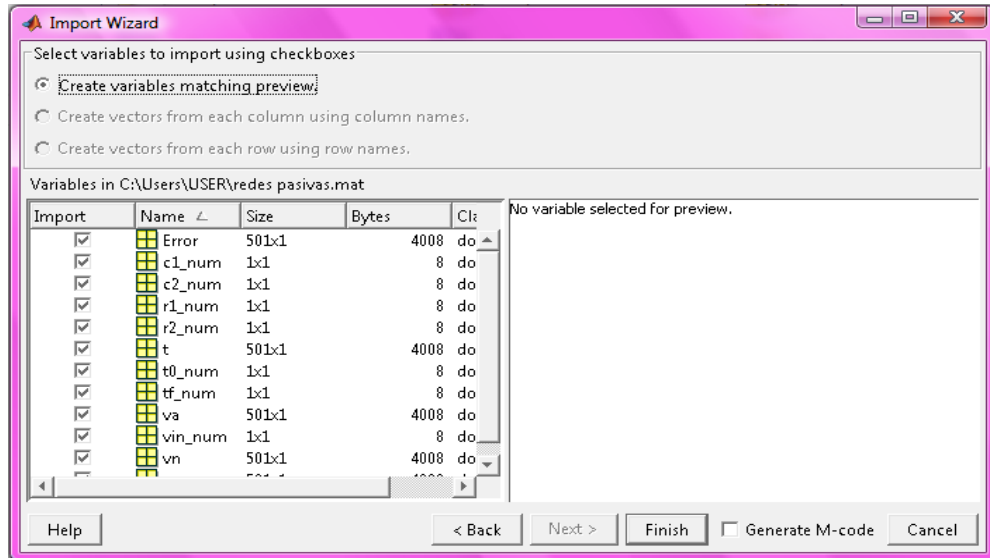
Figura 135. GUI de la aplicación Método de Taylor



Fuente: Autor

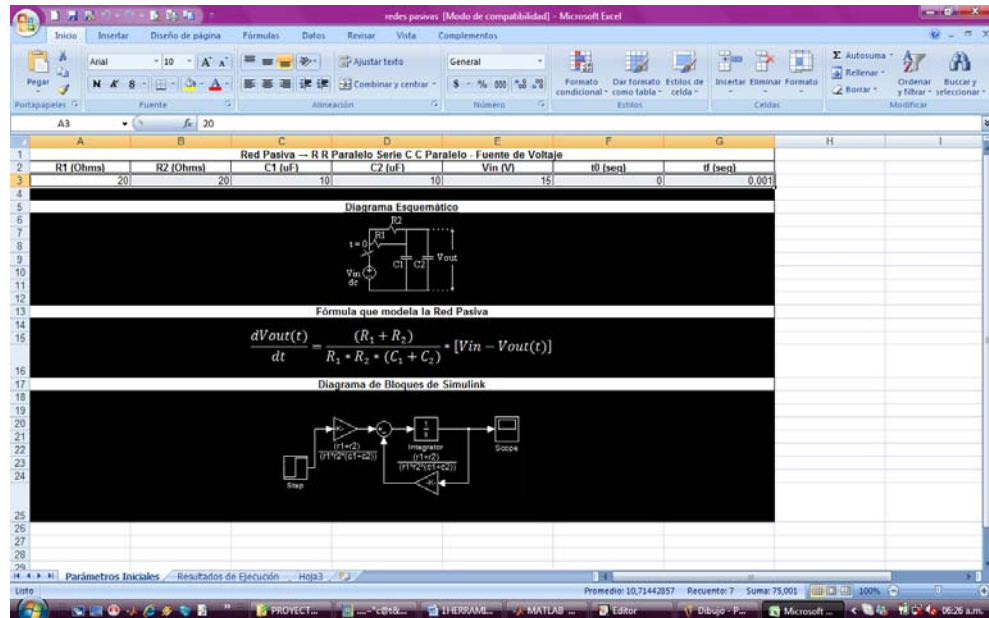
Las Figuras 136, 137 y 138 muestran una idea más clara de la información que permite guardar la herramienta y la forma en que la presenta tanto el archivo .mat como el archivo .xls.

Figura 136. Archivo .mat de Redes Pasivas



Fuente: Autor

Figura 137. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Redes Pasivas



Fuente: Autor

Figura 138. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Redes Pasivas

t (seg)	Vout(t) analítico (V)	Vout(t) numérico (V)	Vout(t) simulink (V)	Error (%)
0	0	0	0	0
0.000002	0.149252494	0.148514851	0.149252494	0.494224424
0.000004	0.2970199	0.295559259	0.2970199	0.491765535
0.000006	0.443316997	0.441147781	0.443316997	0.489314802
0.000008	0.588158413	0.585294833	0.588158413	0.486872226
0.00001	0.731558632	0.728014686	0.731558632	0.484437806
0.000012	0.873531996	0.869321471	0.873531996	0.482011543
0.000014	1.014092701	1.009229179	1.014092701	0.479593436
0.000016	1.153254804	1.147751663	1.153254804	0.477183462
0.000018	1.291032221	1.284902636	1.291032221	0.474781685
0.00002	1.427438729	1.420655689	1.427438729	0.472388041
0.000022	1.562487971	1.555144237	1.562487971	0.470002561
0.000024	1.696193449	1.688261621	1.696193449	0.467625212
0.000026	1.828568536	1.820061011	1.828568536	0.465256025
0.000028	1.959626469	1.950565466	1.959626469	0.462894986
0.00003	2.089380354	2.079757878	2.089380354	0.460542095
0.000032	2.217843166	2.207681067	2.217843166	0.458197335
0.000034	2.345027751	2.33433769	2.345027751	0.455860748
0.000036	2.470946829	2.459740287	2.470946829	0.453532288
0.000038	2.595612991	2.583901274	2.595612991	0.451211958
0.00004	2.719038704	2.706832945	2.719038704	0.448899785
0.000042	2.84123631	2.82864747	2.84123631	0.446596738
0.000044	2.962218031	2.949056901	2.962218031	0.444299819
0.000046	3.081995962	3.06837317	3.081995962	0.44201203
0.000048	3.200582084	3.186508089	3.200582084	0.439732367
0.00005	3.317988254	3.303473355	3.317988254	0.437460826
0.000052	3.434226213	3.41928055	3.434226213	0.435197405
0.000054	3.549307585	3.533941138	3.549307585	0.432942098
0.000056	3.663243878	3.647486473	3.663243878	0.430694903
0.000058	3.776046486	3.759967796	3.776046486	0.428455916

Fuente: Autor

## **8. PRUEBAS**

La intención de este capítulo es ofrecer muestras de la funcionalidad de la herramienta contrastando las respuestas de ejemplos tomados de libros con las respuestas que arroja cada aplicación.

La forma en la que se contrastan dichos resultados se rige por la presentación del planteamiento y la solución del problema según el libro, luego, se muestran los resultados en la GUI de la aplicación y finalmente, se presentan los resultados generados por la aplicación en un archivo .xls que permite comparar de una forma más clara los resultados, ya que, por lo general los ejemplos de los libros muestran la solución de los problemas mediante tablas.

### **8.1. CAPÍTULO I – INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO NUMÉRICO**

#### **8.1.1. MODELADO Y SIMULACIÓN DE PROBLEMAS EN INGENIERÍA**

##### **8.1.1.1. PLANTEAMIENTOS FÍSICOS**

###### **8.1.1.1.1. CUERPOS EN CAÍDA LIBRE**

Para la aplicación Cuerpos en Caída Libre se plantea un problema de velocidad terminal o velocidad límite del descenso de un paracaidista, la solución ofrecida por el libro muestra una respuesta analítica de la velocidad del paracaidista a diferentes tiempos. La aplicación muestra en su GUI, el valor analítico y el valor numérico de dicha velocidad, el error relativo porcentual y el tiempo de progreso hasta hallar la velocidad terminal. En el eje coordenado bidimensional, muestra la velocidad tanto numérica como analítica. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los diferentes tiempos de evaluación, la velocidad de forma analítica y de forma numérica, y el error relativo porcentual.

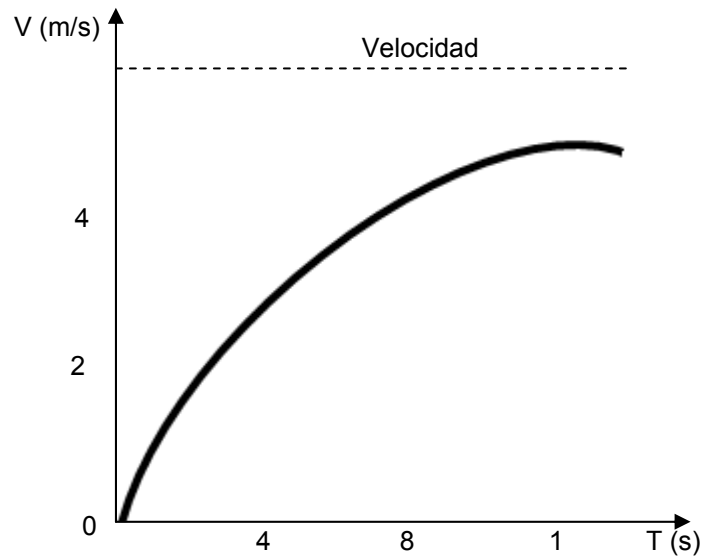
Figura 139. Planteamiento y resultados del problema para Cuerpos en Caída Libre según el libro

Un paracaidista con una masa de 68.1 kg salta de un globo aerostático fijo. Calcular la velocidad antes de que se abra el paracaídas. Considerar el coeficiente de resistencia igual a 12.5 kg/s.

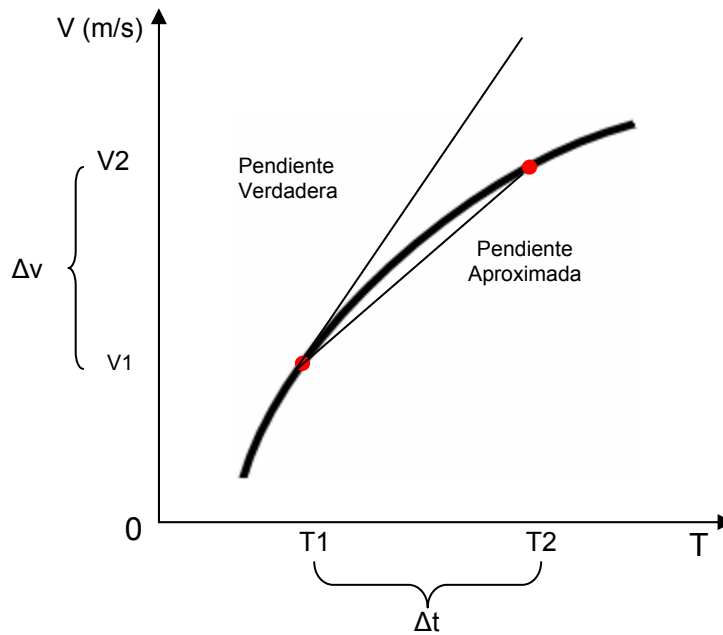
$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5} \left(1 - e^{-(12.5/68.1)t}\right) = 53.39 \left(1 - e^{-0.18355t}\right)$$

Que sirve para calcular la velocidad del paracaídas a diferentes tiempos, tabulando se tiene

t (s)	v (m/s)
0	0.00
2	16.4
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
	53.39

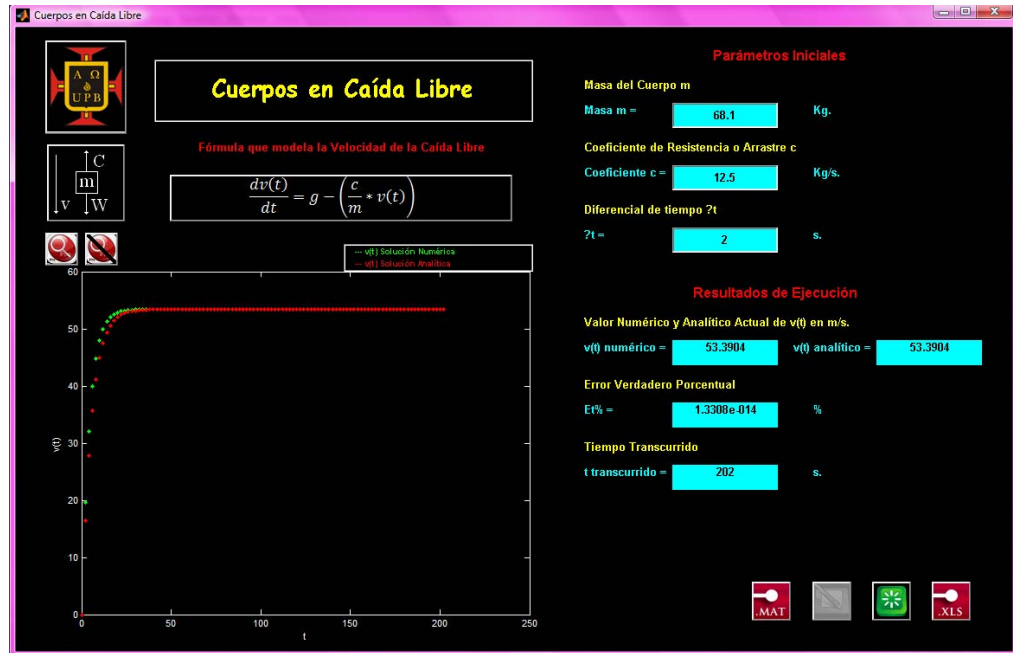


**Uso de una diferencia finita para aproximar la primera derivada de  $v$  con respecto a  $t$**



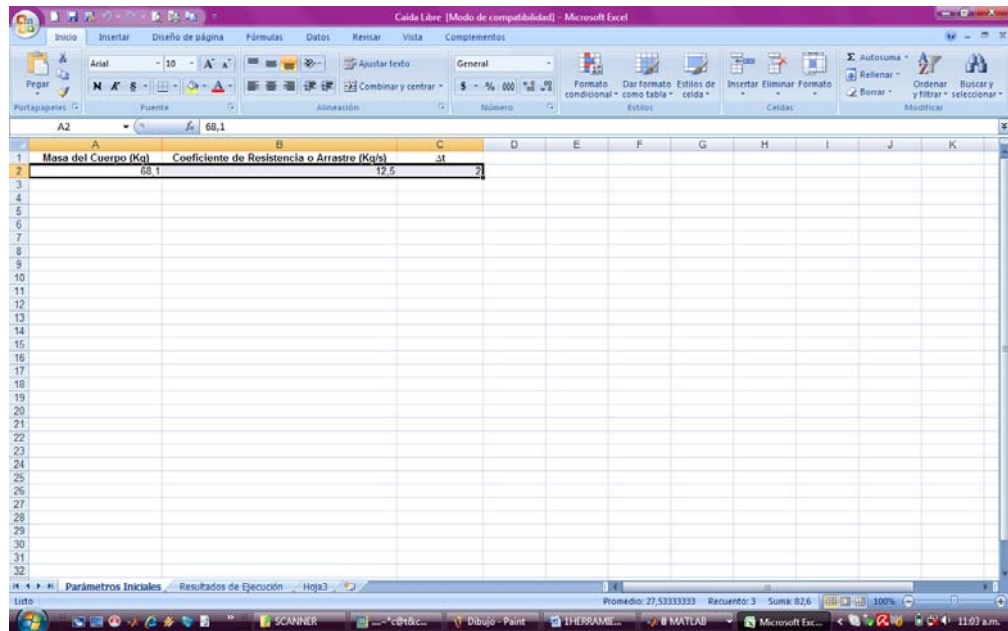
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte I, Modelos, Computadoras y Análisis del Error. Capítulo 1, Modelos Matemáticos y Solución de Problemas en Ingeniería, Página 15.

Figura 140. Resultados en GUI de la aplicación Cuerpos en Caída Libre



Fuente: Autor

Figura 141. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Cuerpos en Caída Libre



Fuente: Autor

Figura 142. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Cuerpos en Caída Libre

t	V(t) numérica	V(t) analítica	Error (%)
0	0	0	100
2	19.6	16.4049008	19.4759094
4	32.00469997	27.76929146	15.2521267
6	39.855437	35.64175156	11.8226292
8	44.82428683	41.09628323	9.07404284
10	47.96896661	44.87313757	6.89907416
12	49.95921508	47.49019095	5.19901918
14	51.21882775	49.30311642	3.88657858
16	52.01602755	50.55899405	2.88184829
18	52.52056957	51.42698491	2.12250865
20	52.83989058	52.03165837	1.55334701
22	53.04198655	52.44915159	1.13030418
24	53.16989183	52.73836383	0.8182425
26	53.25084184	52.93871154	0.58960691
28	53.30207465	53.07749942	0.42310815
30	53.33449952	53.1736427	0.30251232
32	53.35502099	53.24024455	0.2158211
34	53.36800888	53.286382	0.15318524
36	53.37622882	53.31834305	0.10856632
38	53.38143116	53.3404836	0.07676638
40	53.38472369	53.35682116	0.05416942
42	53.3869075	53.366416	0.03815412
44	53.38812633	53.37380622	0.02682986
46	53.38896101	53.3789049	0.01883911
48	53.38948928	53.38243694	0.01321097
50	53.38982361	53.38488371	0.00925338
52	53.39003521	53.38657867	0.00647455
54	53.39016912	53.38775283	0.00452594
56	53.39026388	53.38856621	0.00316111
58	53.39030752	53.38912967	0.00220617
60	53.39034147	53.38952	0.00153864

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la tabla de la Figura 139 muestran una velocidad de 53.39 m/s en un  $t = \infty$ . La Figura 142 muestra una velocidad de 53.39034147 m/s de forma numérica y 53.38952 m/s de forma analítica, con un error de 0.00153864 % en 60 seg, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.1.1.1.2. MOVIMIENTO PARABÓLICO

Para la aplicación Movimiento Parabólico se plantea un problema de lanzamiento de una bola de béisbol, la solución ofrecida por el libro muestra solamente la trayectoria que se supone debe tener la bola. La aplicación muestra en su GUI, el valor analítico y el valor numérico del desplazamiento vertical de la bola, el valor actual del desplazamiento horizontal y el error relativo porcentual. En el eje coordenado bidimensional, muestra el desplazamiento bidimensional tanto numérico como analítico. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los diferentes desplazamientos horizontales de evaluación, el



desplazamiento vertical de forma analítica y de forma numérica, y el error relativo porcentual.

Figura 143. Planteamiento y resultados del problema para Movimiento Parabólico según el libro

En ciertas ocasiones los ingenieros aeroespaciales deben calcular las trayectorias de proyectiles como cohetes. Un problema parecido tiene que ver con la trayectoria de una pelota que se lanza. Dicha trayectoria está definida por las coordenadas (x, y), como se ilustra en la figura.

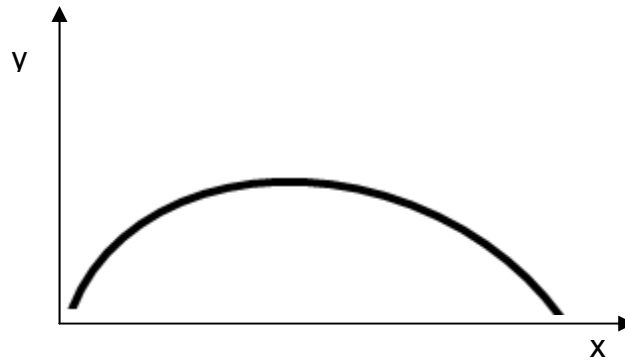
La trayectoria se modela en la ecuación:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2 + 1.8$$

Calcule el ángulo inicial  $\theta$  apropiado si la velocidad inicial  $V_0 = 20$  m/s y la distancia del catcher es de 35 m.

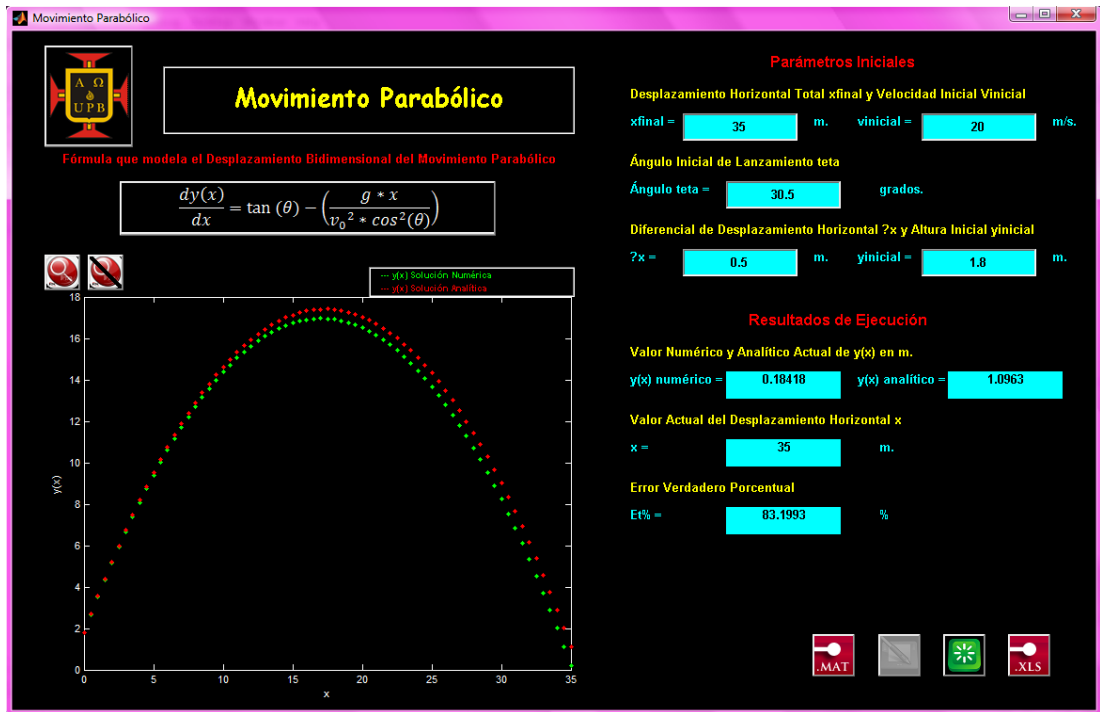
Se observa que la pelota sale de la mano del lanzador con una elevación  $y=2$ m y el catcher la recibe a 1m.

$g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>



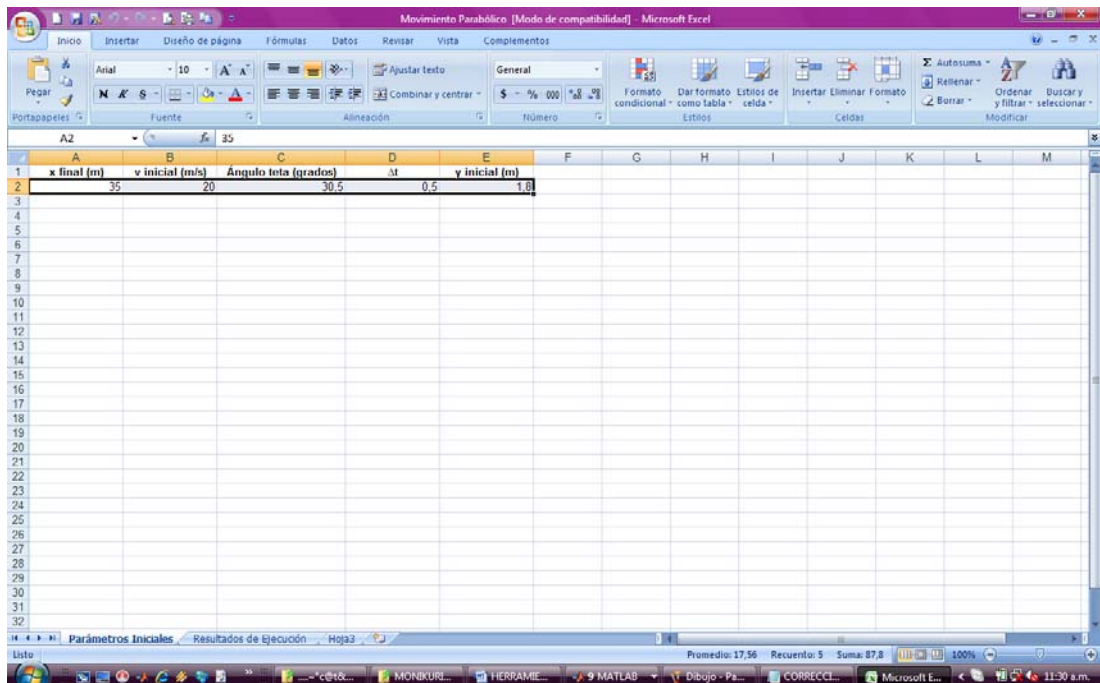
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte II, Raíces de Ecuaciones. Capítulo 8, Estudio de casos: Raíces de ecuaciones, Página 223.

Figura 144. Resultados en GUI de la aplicación Movimiento Parabólico



Fuente: Autor

Figura 145. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Movimiento Parabólico



Fuente: Autor

Figura 146. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Movimiento Parabólico

x	y(x) numérica	y(x) analítica	Error (%)
0	1.8	1.8	100
0.5	2.675964524	2.688994201	0.48455577
1	3.525869695	3.551929049	0.7336762
1.5	4.349715513	4.38804543	0.89065324
2	5.147501977	5.199620684	1.00235594
2.5	5.919229088	5.984377471	1.08864094
3	6.664896845	6.743074905	1.15938294
3.5	7.384505249	7.475712986	1.22005402
4	8.0780543	8.182291714	1.2739391
4.5	8.74543998	8.862811088	1.32313652
5	9.386974342	9.517271108	1.36905396
5.5	10.00234533	10.14567178	1.41268559
6	10.59165697	10.74801309	1.45474441
6.5	11.15490925	11.32429505	1.49577343
7	11.69210218	11.87451766	1.5361927
7.5	12.20323576	12.39868091	1.57633825
8	12.68830999	12.89678481	1.61648682
8.5	13.14732486	13.36882936	1.65687285
9	13.58028037	13.81481455	1.69770053
9.5	13.98717654	14.23474039	1.73915259
10	14.36801335	14.62860688	1.78139679
10.5	14.7227908	14.99641401	1.82459093
11	15.05150891	15.3381618	1.86889894
11.5	15.35416766	15.65385022	1.91443357
12	15.63076706	15.9434793	1.96138016
12.5	15.8813071	16.20704902	2.00987803
13	16.10578779	16.44455938	2.06008313
13.5	16.30420913	16.6560104	2.11215809
14	16.47657111	16.84140206	2.1662742
14.5	16.62287374	17.00073436	2.22261354
15	16.74311702	17.13400732	2.28137115

Fuente: Autor

Se puede observar que la trayectoria de la Figura 143 y la de la Figura 144 son similares. La Figura 147 muestra un desplazamiento vertical de 1.8 m de forma numérica y 1.8 m de forma analítica para un desplazamiento horizontal de 0 m, y muestra un desplazamiento vertical de 16.74311702 m. y 17.13400732 m. con un error de 2.28137115 % en 15 m de desplazamiento horizontal, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.1.1.1.3. SISTEMAS MASA - RESORTE

Para la aplicación Sistemas Masa- Resorte se plantea un problema de diseño de un sistema de suspensión de un automóvil, la solución ofrecida por el libro muestra los valores de los coeficientes de la ecuación solución (A, B) para una condición de vibración libre subamortiguada del automóvil y muestra el valor de la constante de elasticidad del resorte del amortiguador (k) hallado mediante el método de bisección. La aplicación muestra en su GUI, los valores de los coeficientes (A, B) y la ubicación bidimensional actual de búsqueda del valor de la

constante de elasticidad ( $k$ ), es decir, muestra el valor actual de la respuesta del sistema en función de la constante  $k$  para el tiempo en el que ocurre el primer cruce por la condición de equilibrio. En el primer eje coordenado bidimensional, muestra el progreso en la búsqueda del valor de la constante  $k$  que satisface las condiciones de comodidad y estabilidad seleccionadas, progreso que incluye todo el andamiaje visual pertinente al método numérico seleccionado. El segundo eje coordenado bidimensional, muestra la respuesta del sistema en función del tiempo desde la condición inicial  $t = 0$ . Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los puntos de búsqueda generados y el error para cada iteración del método empleado, los valores de las constantes  $\mu$ ,  $\lambda$ , el coeficiente de amortiguamiento crítico, el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural de la vibración libre no amortiguada.

Figura 147. Planteamiento y resultados del problema para Sistemas Masa - Resorte según el libro

El diseño del sistema de suspensión de un automóvil comprende una solución intermedia entre comodidad y estabilidad para todas las condiciones de manejo y velocidad. Se pide determinar la estabilidad del carro para cierto diseño propuesto que ofrezca comodidad sobre caminos irregulares.

Si la masa del carro es  $m = 1.2 \times 10^6$

y tiene un sistema de amortiguadores con un coeficiente de amortiguamiento  $c = 1 \times 10^2 \text{ g/s}$

Suponiendo que la expectativa del público en cuanto a la comodidad se satisface si la vibración libre del automóvil es subamortiguada y el primer cruce por la posición de equilibrio tiene lugar en 0.05 s. Si en  $t=0$ , el carro súbitamente se desplaza una distancia  $X_0$ , desde el equilibrio y la velocidad es cero ( $dx/dt=0$ ), la solución de la ecuación de movimiento está dada por la ecuación

$$A = X_0, B = X_0 \lambda / \omega$$

Por lo tanto,

$$A = X_0 e^{-\mu} \left( \cos \omega + \frac{\lambda}{\mu} \operatorname{sen} \omega \right)$$

Las condiciones de diseño se cumplen si

$$x(t) = 0 = \cos(0.05\mu) + \frac{\lambda}{\mu} \operatorname{sen}(0.05\mu)$$

O bien,

$$0 = \cos \left( 0.05 \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \right) + \frac{c}{\sqrt{4km - c^2}} \operatorname{sen} \left( 0.05 \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} \right)$$

Dado que se conoce  $c$  y  $m$ , el problema de diseño consiste ahora en encontrar valores apropiados de  $k$  que satisfagan la ecuación.

**SOLUCIÓN:** Se pueden utilizar los métodos de la bisección, de la falsa posición o de la secante, ya que esos métodos no requieren la evaluación de la derivada de la ecuación.

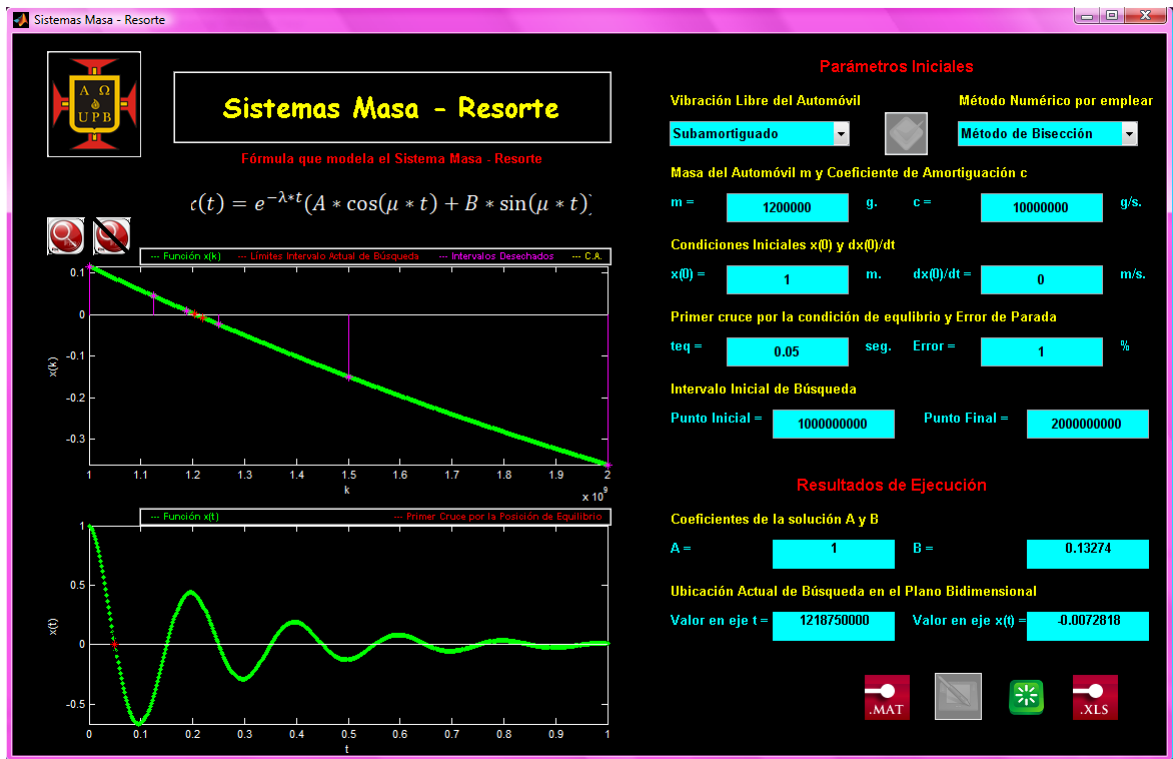
La solución  $k = 1.397 \times 10^9$

Con las 12 iteraciones, utilizando el método de bisección. Con un intervalo que va desde

$$k = 1 \times 10^9 \text{ a } 2 \times 10^9$$

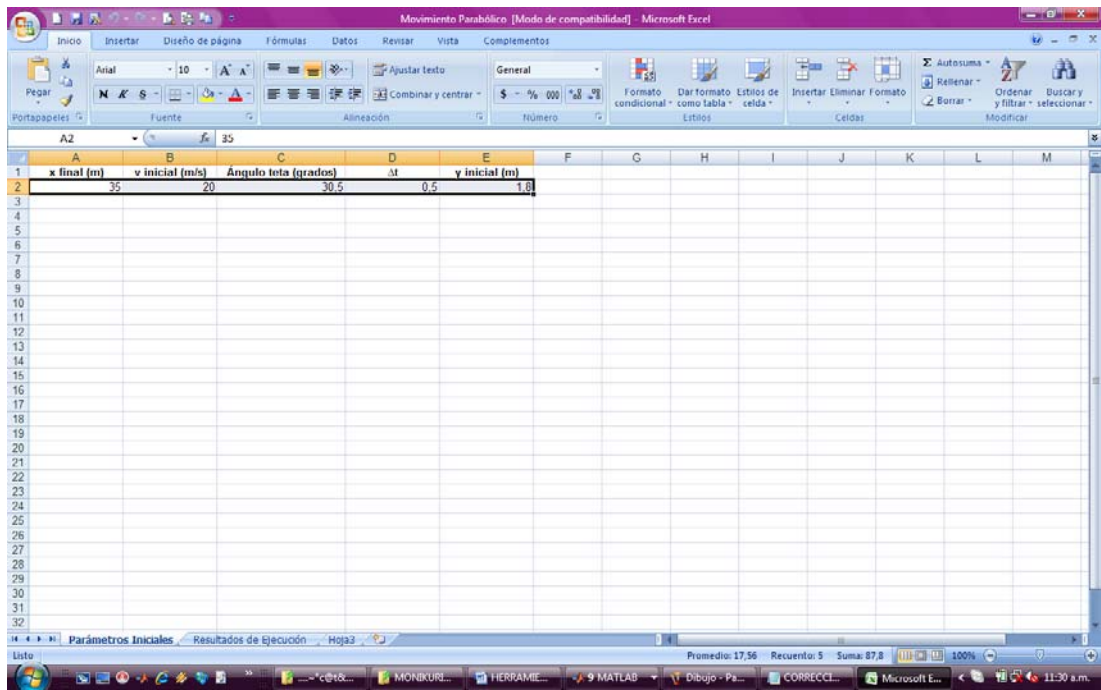
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte II, Raíces de Ecuaciones. Capítulo 8, Estudio de casos: Raíces de ecuaciones, Página 213.

Figura 148. Resultados en GUI de la aplicación Sistemas Masa - Resorte



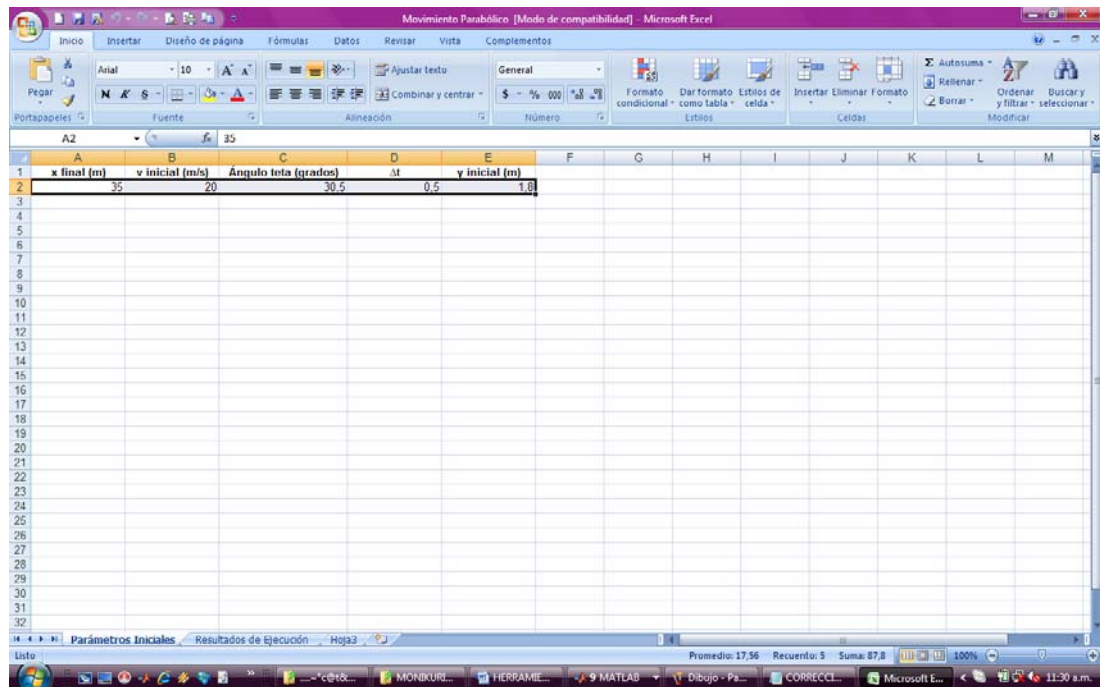
Fuente: Autor

Figura 149. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Sistemas Masa - Resorte



Fuente: Autor

Figura 150. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Sistemas Masa - Resorte



Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 147 muestran un valor de  $1.397 \times 10^9$  con un error de 0.07305 % para la constante k. La Figura 150 muestra una velocidad de 53.39034147 m/s de forma numérica y 53.38952 m/s de forma analítica, con un error de 0.00153864 % en 60 seg, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## 8.1.1.2. PLANTEAMIENTOS ELECTRÓNICOS

### 8.1.1.2.1. REDES PASIVAS

Para la aplicación Redes Paivas se plantea un problema de una red con una fuente de voltaje dc y una conexión serie de una resistencia y una inductancia. Tomando la solución particular del voltaje en la inductancia para un tiempo de 3 milisegundos, la solución ofrecida por el libro es 22 V. La aplicación muestra en su GUI, el valor analítico, el valor numérico y el valor en simulink del voltaje en la inductancia para cada t y muestra el error ente el valor analítico y el valor numérico. En el eje coordenado tridimensional, muestra el progreso de los tres valores anteriormente mencionados desde el punto inicial de ejecución hasta el punto final. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja



de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores analítico, numérico y de simulink del voltaje de salida en la inductancia, los valores analítico y numérico de la corriente de salida en la inductancia y se muestra el error para cada valor de tiempo.

Figura 151. Planteamiento y resultados del problema para Redes Pasivas según el libro

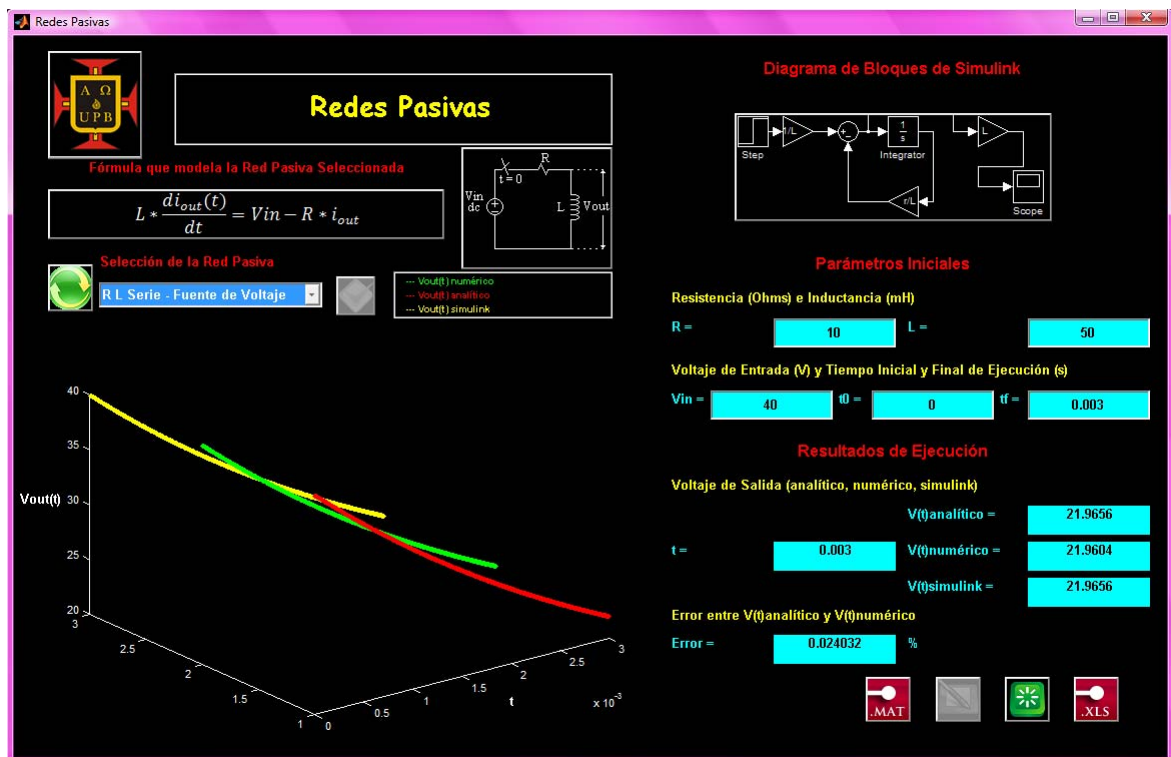
La fuente de voltaje de  $60-40u(t)$  V está en serie con un resistor de  $10\Omega$  y un inductor de 50 mH. Utilice la superposición para encontrar las magnitudes de la corriente del inductor en

T = a)  $0^-$     b)  $0^+$     c)  $\infty$     d)  $3ms$

Solución: 6 A, 0 V; 6 A, 40 V; 2 A, 0 V; 4,2 A, 22 V

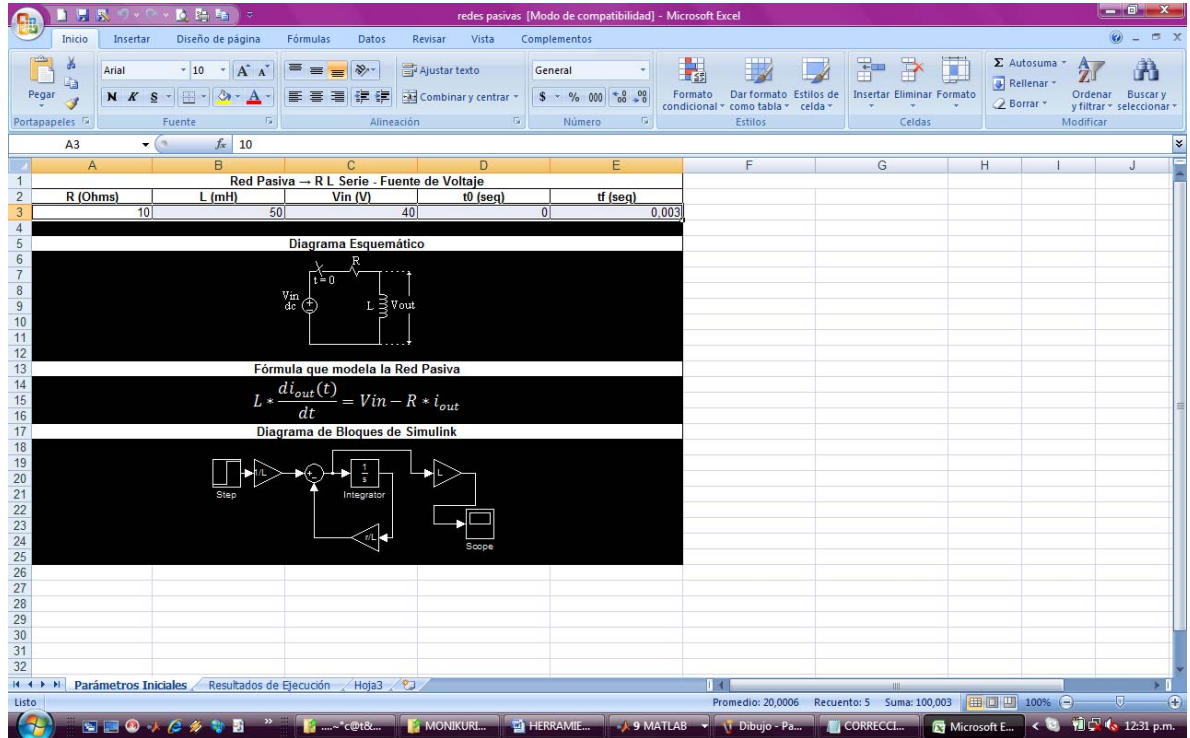
Fuente: KEMMERLY, Jack E., HAYT, William H., Análisis de Circuitos en Ingeniería. Quinta Edición. Tercera Edición en Español. McGraw Hill. México. 1995. Segunda Parte, El Circuito Transitorio. Capítulo 5, La aplicación de la función de excitación escalón unitario, Página 176.

Figura 152. Resultados en GUI de la aplicación Redes Pasivas



Fuente: Autor

Figura 153. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Redes Pasivas



Fuente: Autor

Figura 154. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Redes Pasivas

Red Pasiva → R L Serie - Fuente de Voltaje						
t (seg)	Vout(t) analítico (V)	Vout(t) numérico (V)	Vout(t) simúlink (V)	Iout(t) analítica (A)	Iout(t) numérica (A)	Error (%)
0	40	40	40	0	0	0
0.000006	39.9760096	39.95205753	39.9760096	0.004797121	0.004794247	0.059916101
0.000012	39.92806716	39.90417252	39.92806716	0.009598489	0.009582748	0.059844201
0.000018	39.88018221	39.85634491	39.88018221	0.014374111	0.014365509	0.059772302
0.000024	39.8323547	39.80857462	39.8323547	0.019153994	0.0191442538	0.059700402
0.00003	39.78458454	39.76086159	39.78458454	0.023928144	0.023913841	0.059628503
0.000036	39.73687167	39.71320574	39.73687167	0.028696568	0.028679426	0.059556603
0.000042	39.68921602	39.66560701	39.68921602	0.033459274	0.033439299	0.059484704
0.000048	39.64161753	39.61806533	39.64161753	0.038216268	0.038193467	0.059412804
0.000054	39.59407612	39.57058064	39.59407612	0.042967558	0.042941936	0.059340904
0.00006	39.54659172	39.52315285	39.54659172	0.047713149	0.047684715	0.059269004
0.000066	39.49916428	39.47578191	39.49916428	0.052463048	0.052421809	0.059197105
0.000072	39.45179371	39.42846775	39.45179371	0.057187264	0.057153225	0.059125205
0.000078	39.40447995	39.3812103	39.40447995	0.061915801	0.06187897	0.059053305
0.000084	39.35722293	39.33400949	39.35722293	0.066638668	0.066599051	0.058981405
0.00009	39.31002259	39.28686525	39.31002259	0.071355871	0.071313475	0.058909505
0.000096	39.26287886	39.23977752	39.26287886	0.076067416	0.076022248	0.058837605
0.000102	39.21579166	39.19274622	39.21579166	0.080773311	0.080725378	0.058765705
0.000108	39.16876093	39.1457713	39.16876093	0.085473562	0.08542287	0.058693804
0.000114	39.12178661	39.09885267	39.12178661	0.090168177	0.090114733	0.058621904
0.00012	39.07486862	39.05199029	39.07486862	0.094857161	0.094800971	0.058550004
0.000126	39.0280069	39.00518406	39.0280069	0.099545022	0.099481594	0.058478103
0.000132	38.98120138	38.95843394	38.98120138	0.104218266	0.104156606	0.058406203
0.000138	38.934452	38.91173986	38.934452	0.10889904	0.108826014	0.058334303
0.000144	38.88775868	38.86510173	38.88775868	0.113556931	0.113489827	0.058262402
0.00015	38.84112135	38.81851951	38.84112135	0.118217866	0.118148049	0.058190501
0.000156	38.79453996	38.7719312	38.79453996	0.122873211	0.122800688	0.058118601
0.000162	38.74801444	38.72552249	38.74801444	0.127522972	0.127447751	0.0580467
0.000168	38.70154471	38.67910756	38.70154471	0.132167158	0.132089244	0.057974799
0.000174	38.65513071	38.63274826	38.65513071	0.136805773	0.136725174	0.057902899

	A	B	C	D	E	F	G	H
471	0.002608	22.82552698	22.81951623	22.82552698	1.71881656	1.718048377	0.026333465	
472	0.002614	22.79815278	22.79216563	22.79815278	1.721552338	1.720783437	0.026261541	
473	0.00262	22.7708114	22.76484781	22.7708114	1.724284835	1.723515219	0.026189618	
474	0.002626	22.74350282	22.73755274	22.74350282	1.727014056	1.726243726	0.026117694	
475	0.002632	22.71622698	22.71031037	22.71622698	1.729740003	1.728968963	0.02604577	
476	0.002638	22.68898386	22.68309066	22.68898386	1.732462681	1.731690934	0.025973846	
477	0.002644	22.66177341	22.65590357	22.66177341	1.735182094	1.734409643	0.025901923	
478	0.00265	22.63459559	22.62874907	22.63459559	1.737898245	1.737125093	0.025829999	
479	0.002656	22.60745036	22.60162712	22.60745036	1.740611139	1.739837288	0.025758075	
480	0.002662	22.5803377	22.57453768	22.5803377	1.74332078	1.742546232	0.025686151	
481	0.002668	22.55325754	22.5474807	22.55325754	1.746027171	1.74525193	0.025614227	
482	0.002674	22.52620986	22.52045615	22.52620986	1.748730316	1.747954385	0.025542303	
483	0.00268	22.49919462	22.49346399	22.49919462	1.751430219	1.750653601	0.025470379	
484	0.002686	22.47221178	22.46650419	22.47221178	1.754126885	1.753349581	0.025398455	
485	0.002692	22.4452613	22.4395767	22.4452613	1.756820316	1.75604233	0.025326531	
486	0.002698	22.41834314	22.41268148	22.41834314	1.759510517	1.758731852	0.025254606	
487	0.002904	22.39145727	22.3858185	22.39145727	1.762197492	1.76141815	0.025182682	
488	0.00291	22.36460363	22.35898771	22.36460363	1.764881244	1.764101229	0.025110758	
489	0.002916	22.33778221	22.33218909	22.33778221	1.767561778	1.766781091	0.025038833	
490	0.002922	22.31099294	22.30542258	22.31099294	1.770239097	1.769457742	0.024966909	
491	0.002928	22.28423581	22.27868815	22.28423581	1.772913206	1.772131185	0.024894984	
492	0.002934	22.25751076	22.25198577	22.25751076	1.775584107	1.774801423	0.02482306	
493	0.00294	22.23081777	22.22531539	22.23081777	1.778251805	1.777468461	0.024751135	
494	0.002946	22.20415679	22.19867698	22.20415679	1.780916304	1.780132302	0.02467921	
495	0.002952	22.17752778	22.17207049	22.17752778	1.783577607	1.782792951	0.024607286	
496	0.002958	22.15093071	22.1454959	22.15093071	1.786235719	1.78545041	0.024535361	
497	0.002964	22.12436554	22.11895316	22.12436554	1.788890643	1.788104684	0.024463436	
498	0.00297	22.09783222	22.09244222	22.09783222	1.791542383	1.790755778	0.024391511	
499	0.002976	22.07133073	22.06596307	22.07133073	1.794190942	1.793403693	0.024319586	
500	0.002982	22.04486101	22.03951585	22.04486101	1.796836326	1.796048435	0.024247661	
501	0.002988	22.01842305	22.01309993	22.01842305	1.799478537	1.798690007	0.024175736	
502	0.002994	21.99201679	21.98671587	21.99201679	1.802117579	1.801328413	0.024103811	
503	0.003	21.96564219	21.96036344	21.96564219	1.804753456	1.803963656	0.024031886	

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 151 muestra un valor de 22.0 V para el voltaje en la inductancia en un tiempo de 3 ms. La Figura 154 muestra un valor analítico de 21.96564219 V, un valor numérico de 21.96036344 V y un valor de simulink de 21.96564219 V para 0.003 seg, con un error de 0.024031886 %, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.1.1.2.2. CONTROLADORES DE TENSIÓN ALTERNA

Para la aplicación Controladores de Tensión Alterna se plantea un problema de un convertidor monofásico con carga RL, la solución ofrecida por el libro muestra las gráficas de voltaje de alimentación, los disparos de los tiristores, la corriente de salida y el voltaje de salida. La aplicación muestra en su GUI, los valores del ángulo beta, del ángulo teta y de la impedancia. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso en la búsqueda del valor del ángulo beta. En el eje coordenado tridimensional, muestra las gráficas de voltaje de alimentación, voltaje de salida y voltaje en los tiristores. Además muestra, tras oprimir con el

botón izquierdo del ratón el botón denominado Graficar Corriente, la corriente de salida. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores de voltaje de alimentación, voltaje de salida, voltaje en los SCR y corriente de salida para cada valor de tiempo. Además, muestra los valores de la frecuencia angular, voltaje pico, impedancia, ángulo beta, ángulo teta, constante tao, corriente media de salida, corriente eficaz de salida, corriente media de los SCR, corriente eficaz de los SCR, potencia aparente, potencia activa y factor de potencia.

Figura 155. Planteamiento y resultados del problema para Controladores de Tensión Alterna según el libro

### SINGLE-PHASE FULL WAVE CONTROLLER

Shows the circuit of a controller supplying a load network possessing resistance and inductance. Only one of the two thyristors can be conducting at any instant. If an interval is considered for which Qi is conducting then from equation

$$i_{A1} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} (\sin(\omega t - \phi) - \sin(\alpha - \phi)e^{-(R/L)(\alpha - \omega t)})$$

where

$$Z = [R^2 + (\omega L)^2]^{1/2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

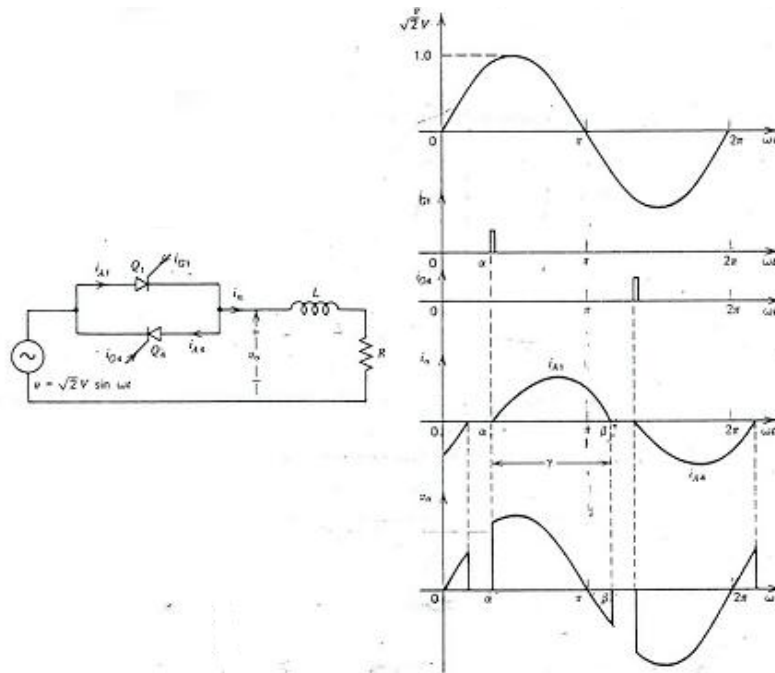
Each thyristor may now be visualized as acting firing one half cycle like the thyristor in the single-phase center-tapped rectifier described, with the important constraint that the conduction angle  $\gamma$  cannot exceed  $180^\circ$  if the gating control circuit is properly designed. On the basis of the waveforms. It will therefore be seen that the waveforms for the circuit. From these it may clearly be seen that as  $\infty$  is reduced until  $\gamma=180^\circ$ , the waveforms of  $i_o$  and  $V_o$  approach the pure sinusoidal form for which  $\infty=\Phi$ .

This may be confirmed from the relationships between  $\infty$ ,  $\gamma$ ,  $\Phi$  and

$$\sin(\beta - \phi) = \sin(\alpha - \phi)e^{-(R/L)[(\alpha - \beta)/\gamma]}$$

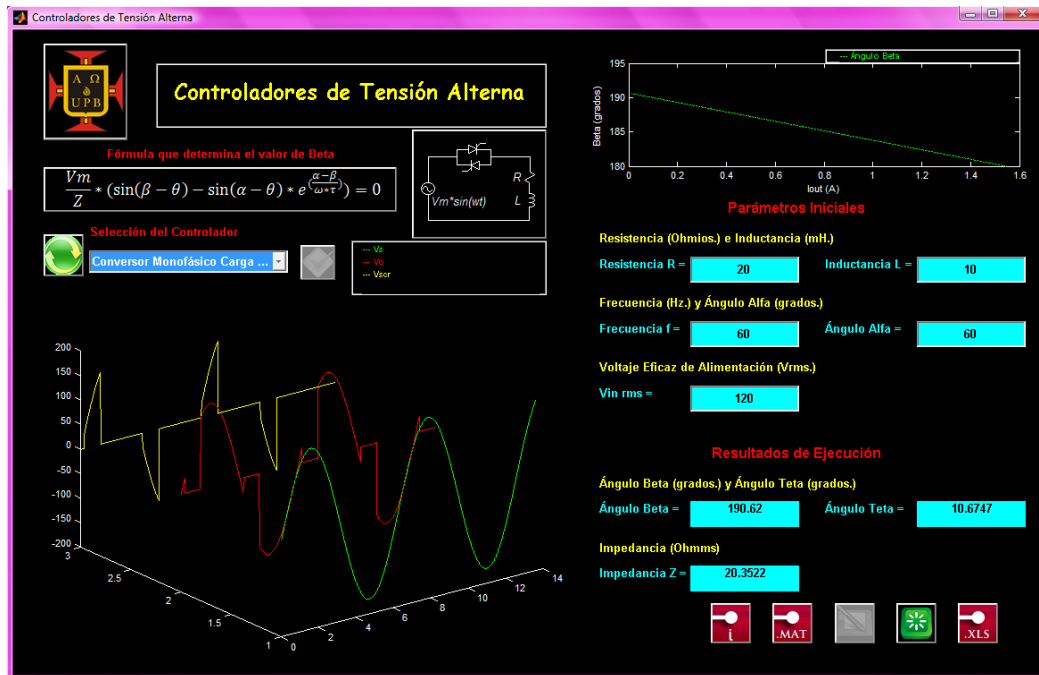
$$\gamma = \beta - \alpha$$

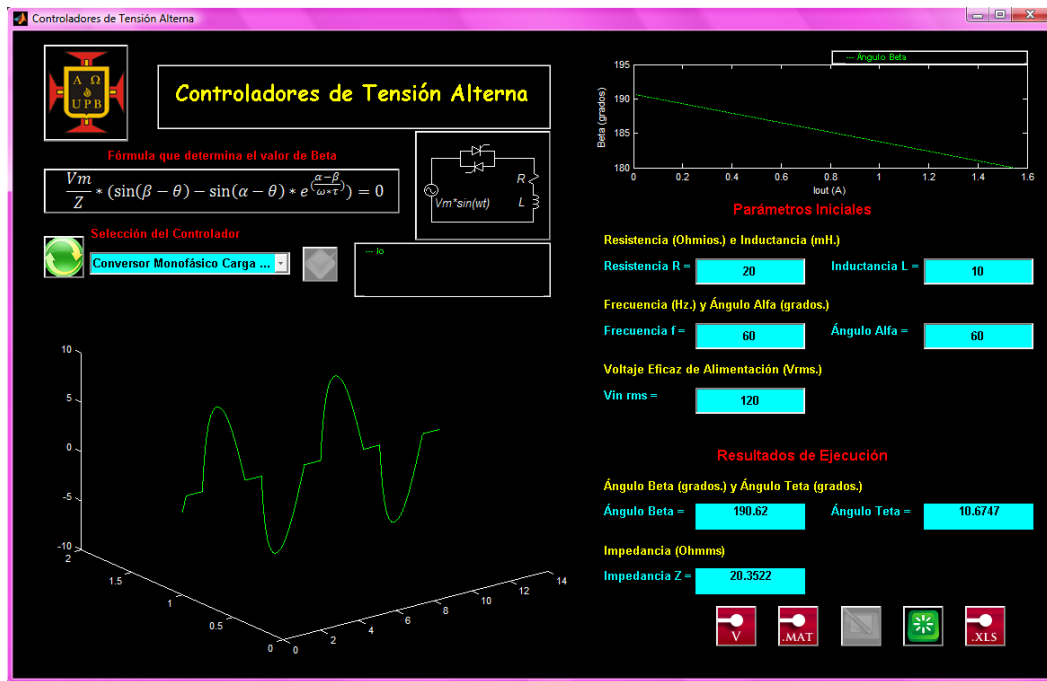




Fuente: DEWAN, S.B., STRAUGHEN, A., Power Semiconductor Circuits. Primera Edición. Wiley – Interscience Publication, John Wiley & Sons. Canadá. 1975. Chapter 4, AC Voltage Controllers, Página 160.

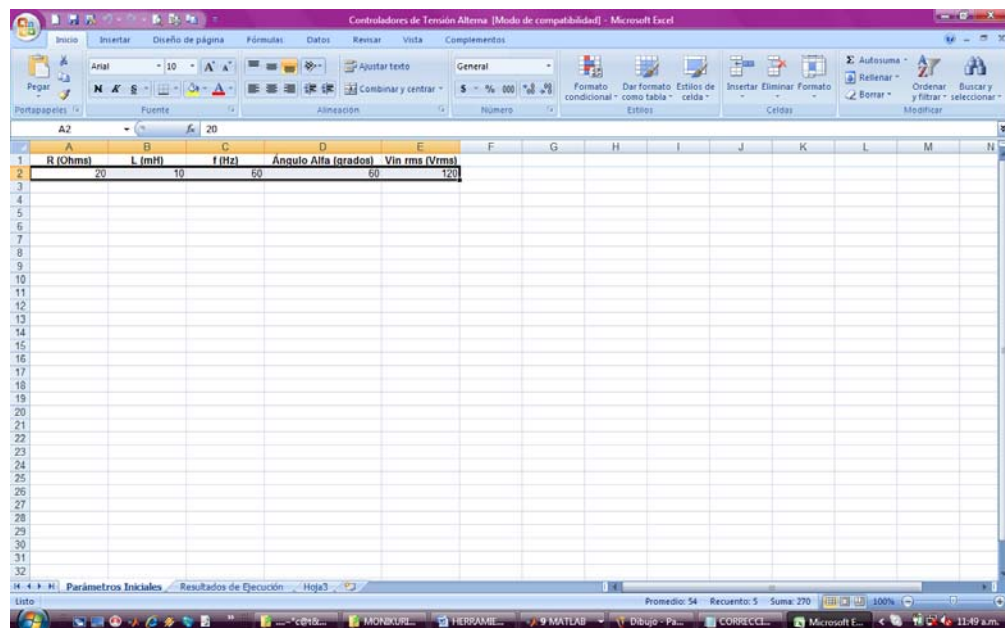
Figura 156. Resultados en GUI de la aplicación Controladores de Tensión Alterna





Fuente: Autor

Figura 157. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Controladores de Tensión Alterna



Fuente: Autor

Figura 158. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Controladores de Tensión Alterna

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Frecuencia Angular (rad)	wt (rad)	Vs (V)	Vo (V)	Vecr (V)	Io (A)							
2	376,9911184	0	0	0	0	-1,544464279							
3	Voltaje Pico (V)	0,006283185	1,066284889	1,066284889	0	-1,492951935							
4	169,7056275	0,012566371	2,132527683	2,132527683	0	-1,441380547							
5	Impedancia (Ohms)	0,018849656	3,198686289	3,198686289	0	-1,389752163							
6	20,35220456	0,025132741	4,264718616	4,264718616	0	-1,338068796							
7	Ángulo Beta (grados)	0,031415927	5,339582679	5,339582679	0	-1,286132552							
8	190,62	0,037699112	6,3962361	6,3962361	0	-1,234545369							
9	Ángulo Teta (grados)	0,043982297	7,461637108	7,461637108	0	-1,182709391							
10	10,67474941	0,050265482	8,526743544	8,526743544	0	-1,130826636							
11	Tao (mH/Ohms)	0,056548668	9,591513359	9,591513359	0	-1,078899154							
12	0,0005	0,062831853	10,65590452	10,65590452	0	-1,026928999							
13	Corriente Media (A)	0,068115038	11,719875	11,719875	0	-0,974918224							
14	4,004683129	0,075398224	12,7833828	12,7833828	0	-0,922868886							
15	Corriente Eficaz (Arms)	0,081681409	13,84638593	13,84638593	0	-0,870783042							
16	5,150025234	0,087964594	14,90884244	14,90884244	0	-0,818662775							
17	Corriente Media SCR (A)	0,094244778	15,97071036	15,97071036	0	-0,76651007							
18	2,002341566	0,100530965	17,03194779	17,03194779	0	-0,714327065							
19	Corriente Eficaz SCR (Arms)	0,106891415	18,09251283	18,09251283	0	-0,662115794							
20	3,641617767	0,113097336	19,15236361	19,15236361	0	-0,609878323							
21	Potencia Aparente (VA)	0,119380521	20,21145829	20,21145829	0	-0,557616716							
22	618,0030281	0,125663706	21,26975505	21,26975505	0	-0,505333037							
23	Potencia Activa (Watts)	0,131946891	22,32721211	22,32721211	0	-0,453029352							
24	530,4551983	0,138220077	23,38378774	23,38378774	0	-0,400707726							
25	Factor de Potencia	0,144513262	24,43944022	24,43944022	0	-0,348370233							
26	0,858337539	0,150796447	25,49412787	25,49412787	0	-0,296018935							
27		0,157079633	26,54780905	26,54780905	0	-0,243655901							
28		0,163362818	27,60044217	27,60044217	0	-0,191283201							
29		0,169645003	28,65198568	28,65198568	0	-0,138929204							
30		0,175929189	29,70239805	29,70239805	0	-0,086517078							
31		0,182212374	30,75163782	30,75163782	0	-0,034127795							
32		0,188353967	31,27580504	31,27580504	0	0							

Fuente: Autor

Se puede observar que las gráficas de las Figuras 155 y 156 son similares, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.1.2. APROXIMACIONES Y ERRORES DE REDONDEO

Para la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo se plantea un problema de aproximación de la función coseno mediante la Serie de Taylor, la solución ofrecida por el libro muestra la aproximación con el primer término de la serie hasta la aproximación tomando los siete primeros términos de la serie. La aplicación muestra en su GUI, los valores exacto, aproximado y redondeado con cinco cifras significativas de la función mediante la utilización de los cinco primeros términos de la Serie de Taylor, y muestra los errores relativos porcentuales del valor aproximado y del valor redondeado. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de los valores aproximado y redondeado desde el primer término hasta el quinto término de la serie, comparados en cada iteración con el valor exacto. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran el número de términos de la serie empleados, el valor de la constante h, los valores exacto, aproximado y redondeado de la función, y los errores relativos respectivos.



Figura 159. Planteamiento y resultados del problema para Aproximaciones y Errores de Redondeo según el libro

**Planteamiento del problema. Utilizar expansiones de la serie de Taylor con n desde 0 hasta 6 para aproximar**

en  $f(x) = \cos x$   $x_{i+1} = \frac{\pi}{3}$

Con base en el valor de  $f(x)$  y sus derivadas en  $X_i = \frac{\pi}{4}$

Observe que esto significa que  $h = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

**Solución. Como el conocimiento de la función original implica que se puede determinar el valor exacto de  $f(\pi/3) = 0.5$**

La aproximación de orden 0 es  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.707106781$

que representa un error relativo porcentual de

$$\varepsilon = \frac{0.5 - 0.707106781}{0.5} 100\% = -4.14\%$$

Para la aproximación de primer orden, se agrega el término de la primera derivada donde  $f'(x) = -\sin x$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0.521986659$$

que tiene  $\varepsilon = -4.40$  por ciento.

Para la aproximación de segundo orden, se agrega el término de la segunda derivada donde  $f''(x) = -\cos x$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\cos(\pi/4)}{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 0.497754491$$

con  $\varepsilon=0.449$  por ciento. Entonces, al agregar más términos a la serie se obtiene una mejor aproximación.

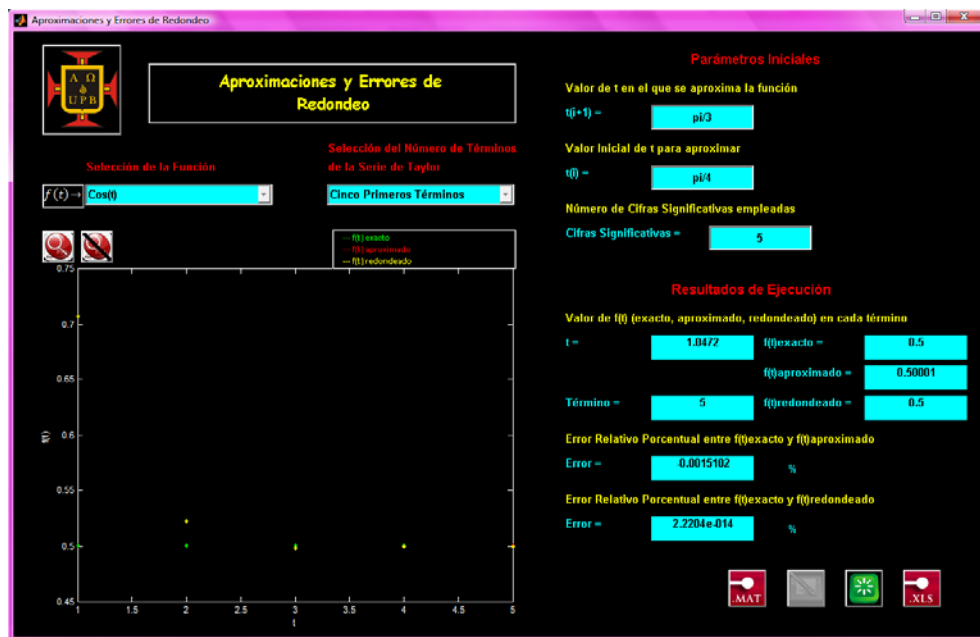
Este proceso continúa y sus resultados se enlistan como en la tabla. Se observa que las derivadas nunca se aproximan a cero, como es el caso con el polinomio del ejemplo. Por lo tanto, cada término que se le agrega a la serie genera una mejor aproximación.

Aproximaciones mediante la serie de Taylor de  $f(x) = \cos x$  en  $x_{i+1} = \pi/3$  usando como punto base  $\pi/4$ . Los valores se presentan para varios órdenes ( $n$ ) de aproximación.

Orden $n$	$f^{(n)}(x)$	$f(\pi/3)$	$\epsilon_n$
0	$\cos x$	0.707106781	-41.4
1	$-\text{sen } x$	0.521986659	-4.4
2	$-\cos x$	0.497754491	0.449
3	$\text{sen } x$	0.499869147	$2.62 \times 10^{-2}$
4	$\cos x$	0.500007551	$-1.51 \times 10^{-3}$
5	$-\text{sen } x$	0.500000304	$-6.08 \times 10^{-5}$
6	$-\cos x$	0.499999988	$2.40 \times 10^{-6}$

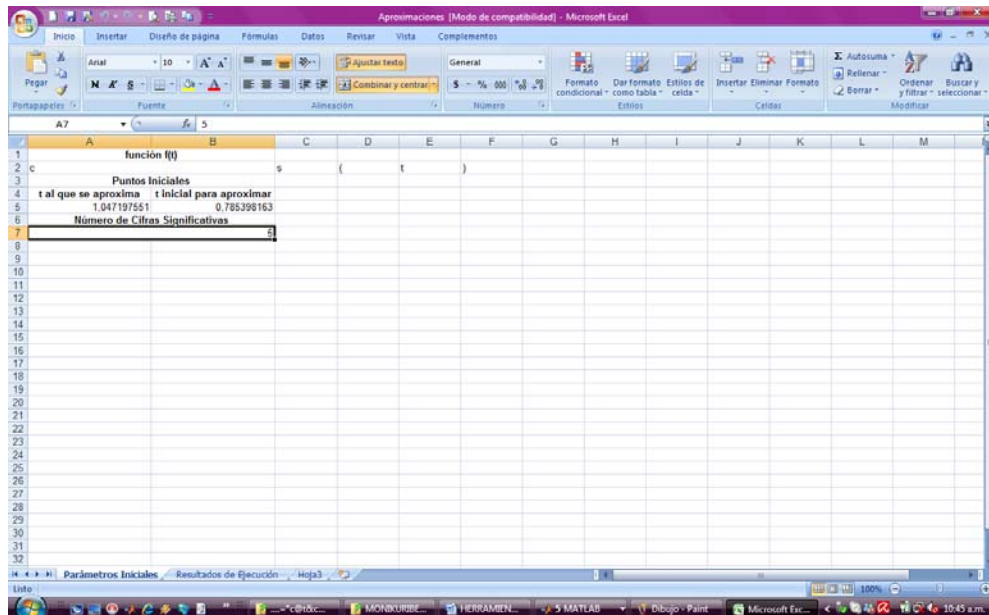
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte I, Modelos, Computadoras y Análisis del Error. Capitulo 4, Errores de Truncamiento y la Serie de Taylor, Página 83.

Figura 160. Resultados en GUI de la aplicación Aproximaciones y Errores de Redondeo



Fuente: Autor

Figura 161. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Aproximaciones y Errores de Redondeo



Fuente: Autor

Figura 162. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Aproximaciones y Errores de Redondeo

	A	B	C	D	E	F	G
1	Número de Términos empleados	5					
2	h	0.26179939					
3	f(t) exacto		0.707106781				
4	f(t) aprox		0.521986659				
5	f(t) redondeado			0.522			
6	Error Relativo Porcentual de f(t) aproximado (%)					-4.42135624	
7	Error Relativo Porcentual de f(t) redondeado (%)						-4.42135624

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de orden cuatro de la Figura 159, que corresponde a una aproximación con los cinco primeros términos de la Serie de Taylor, muestra un valor de 0.500007551 con un error de  $-1.51 \times 10^{-3} \%$  para la función coseno. La Figura 162 muestra un valor aproximado de la función de 0.500007551 con un error de  $-0.001510162 \%$ , comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## **8.2. CAPÍTULO II – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES NO LINEALES**

### **8.2.1. MÉTODO DE BÚSQUEDA PROGRESIVA**

Para la aplicación Método de Búsqueda Progresiva se plantea un problema de búsqueda de la raíz de un polinomio de orden cuatro, la solución ofrecida por el libro es la respuesta aplicando el método de bisección, debido a la nula existencia de ejemplos para el método de búsqueda progresiva en bibliografía. Se puede comparar la solución de la aplicación con esta solución ya que da una idea del valor de la raíz. La aplicación muestra en su GUI, la confirmación del intervalo de búsqueda como apropiado, el valor de la raíz del polinomio con el valor evaluado de la función teniendo en cuenta el error de parada ingresado, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores de tiempo, de la función y el error para cada iteración.

Figura 163. Planteamiento y resultados del problema para Método de Búsqueda Progresiva según el libro

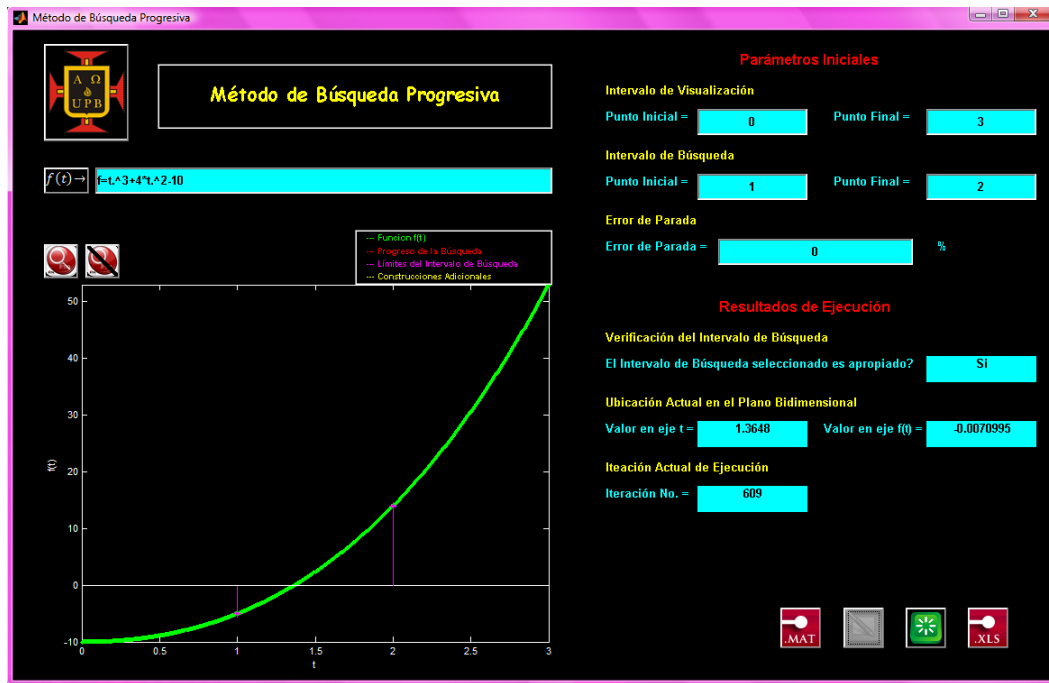
La ecuación  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ , tiene una raíz en (1, 2), ya que  $F(1) = -5$  y  $f(2) = 14$ .

En la tabla a continuación se encuentran los valores que da el algoritmo de Bisección

n	$a_n$	$b_n$	$p_n$	$f(p_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2375
2	1.0	1.5	1.25	-1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
4	1.25	1.375	1.3125	-0.84839
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.35098
6	1.34375	1.375	1.359475	-0.09641
7	1.359375	1.375	1.3671875	0.03236
8	1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.03215
9	1.36328125	1.3671875	1.365234375	0.000072
10	1.36328125	1.365234375	1.364257813	-0.01605
11	1.364257813	1.365234375	1.364746094	-0.00799
12	1.364746094	1.365234375	1.364990235	-0.00396
13	1.364990235	1.365234375	1.365112305	-0.00194

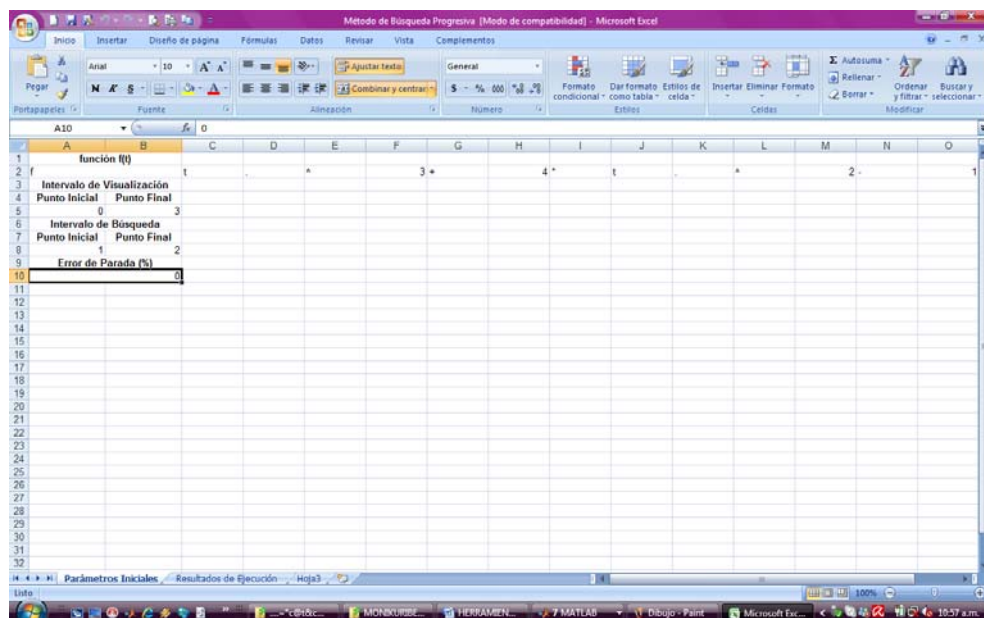
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 2, Soluciones de Ecuaciones de una Variable. Página 51.

Figura 164. Resultados en GUI de la aplicación Método de Búsqueda Progresiva



Fuente: Autor

Figura 165. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Búsqueda Progresiva



Fuente: Autor

Figura 166. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Búsqueda Progresiva

Iteración	t	f(t)	Error (%)
1	1	1	-5
2	1.0006	-4.99339748	-0.13222501
3	1.0012	-4.98678992	-0.1325013
4	1.0018	-4.98017731	-0.13277849
5	1.0024	-4.97355967	-0.13305657
6	1.003	-4.96693697	-0.13333566
7	1.0036	-4.96030923	-0.13361545
8	1.0042	-4.95367645	-0.13389626
9	1.0048	-4.94703861	-0.13417798
10	1.0054	-4.94039572	-0.13446062
11	1.006	-4.93374778	-0.13474419
12	1.0066	-4.92709479	-0.13502869
13	1.0072	-4.92043676	-0.13531412
14	1.0078	-4.91377365	-0.13560049
15	1.0084	-4.90710549	-0.13588781
16	1.009	-4.90043227	-0.13617607
17	1.0096	-4.893754	-0.13646529
18	1.0102	-4.88707066	-0.13675547
19	1.0108	-4.88038226	-0.13704661
20	1.0114	-4.8736888	-0.13733872
21	1.012	-4.86699027	-0.1376318
22	1.0126	-4.86028668	-0.13792586
23	1.0132	-4.85357802	-0.13822091
24	1.0138	-4.84686429	-0.13851694
25	1.0144	-4.84014549	-0.13881397
26	1.015	-4.83342163	-0.13911199
27	1.0156	-4.82669268	-0.13941102
28	1.0162	-4.81995867	-0.13971106
29	1.0168	-4.81321958	-0.14001211
30	1.0174	-4.80647541	-0.14031418
31	1.018	-4.79972617	-0.14061727
32			

Iteración	t	f(t)	Error (%)
579	578	1.3462	-0.31132531
580	579	1.3468	-0.3015986
581	580	1.3474	-0.2918661
582	581	1.348	-0.28212781
583	582	1.3486	-0.27238372
584	583	1.3492	-0.26263385
585	584	1.3498	-0.25287818
586	585	1.3504	-0.24311671
587	586	1.351	-0.23334945
588	587	1.3516	-0.22357639
589	588	1.3522	-0.21379753
590	589	1.3528	-0.20401287
591	590	1.3534	-0.1942224
592	591	1.354	-0.18442614
593	592	1.3546	-0.17462406
594	593	1.3552	-0.16481619
595	594	1.3558	-0.1550025
596	595	1.3564	-0.14518301
597	596	1.357	-0.13535771
598	597	1.3576	-0.12552659
599	598	1.3582	-0.11568967
600	599	1.3588	-0.10584693
601	600	1.3594	-0.09599837
602	601	1.36	-0.086144
603	602	1.3606	-0.07626381
604	603	1.3612	-0.0664178
605	604	1.3618	-0.05654597
606	605	1.3624	-0.04666833
607	606	1.363	-0.03678485
608	607	1.3636	-0.02689556
609	608	1.3642	-0.01700043
610	609	1.3648	-0.00709949
611	610	1.3654	0.00280729

Fuente: Autor

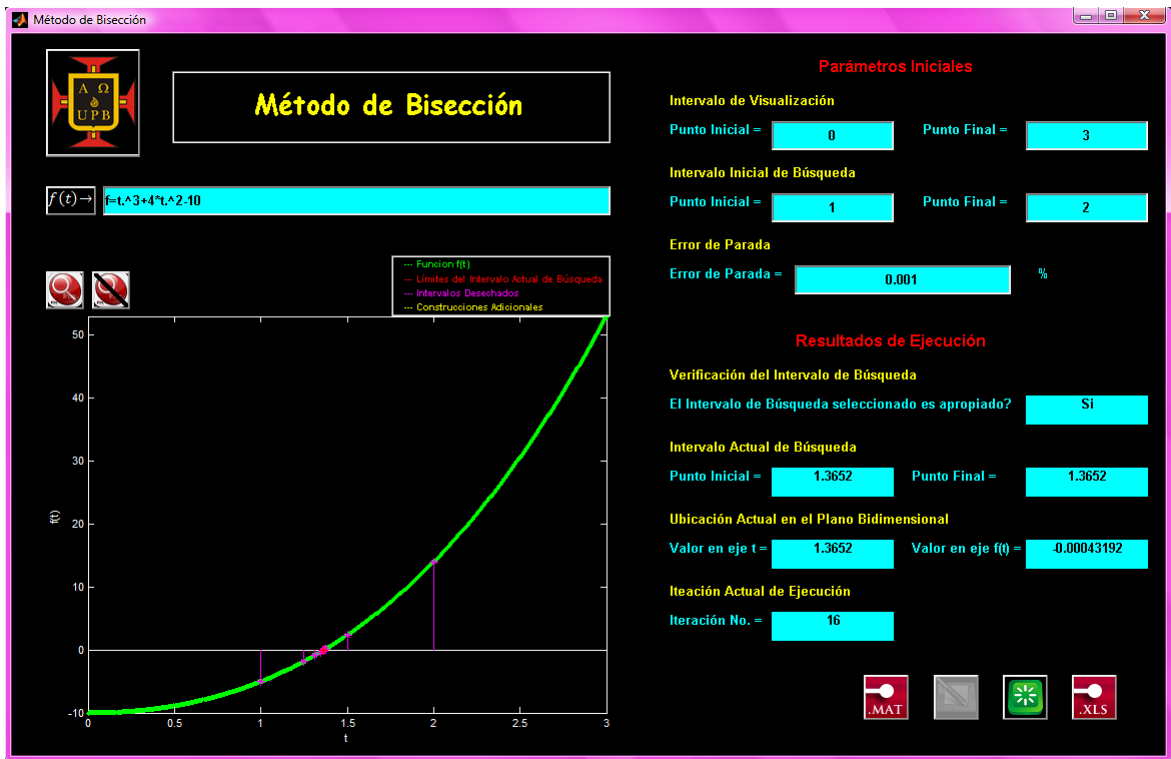
Se puede observar que el resultado de la Figura 163 muestra un valor para la raíz de la función de 1.365112305 y un valor de la función de -0.00194. La Figura 166 muestra un valor para la raíz de la función de 1.3654 y un valor de la función de 0.00280729, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### **8.2.2. MÉTODO DE BISECCIÓN**

Para la aplicación Método de Bisección se plantea un problema de búsqueda de la raíz de un polinomio de orden cuatro, planteamiento disponible en la Figura 163. La aplicación muestra en su GUI, la confirmación del intervalo de búsqueda como apropiado, el intervalo actual de búsqueda, el valor de la raíz del polinomio con el valor evaluado de la función teniendo en cuenta el error de parada ingresado, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del intervalo de búsqueda con su respectivo valor en la función, el punto medio del intervalo de búsqueda con su valor en la función y el error para cada iteración.

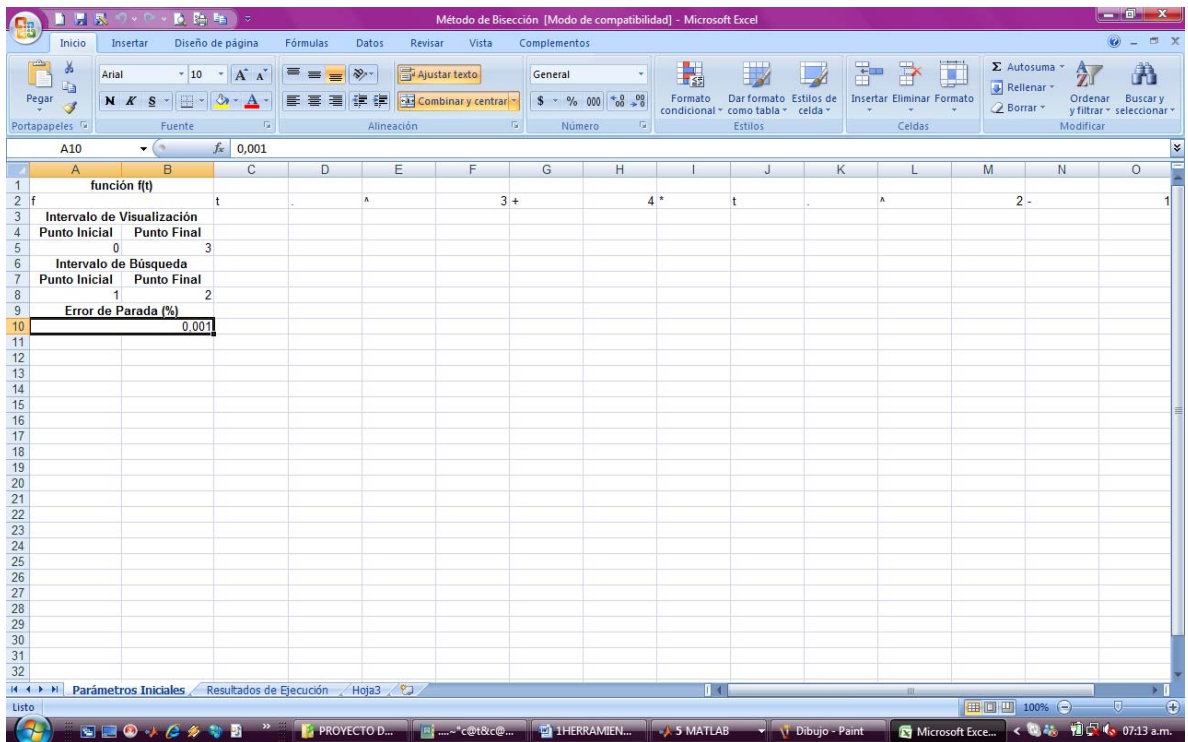
Figura 167. Resultados en GUI de la aplicación Método de Bisección





Fuente: Autor

Figura 168. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Bisección



Fuente: Autor

Figura 169. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Bisección

Iteración	Limite Izquierdo del Intervalo (ta, f(ta))	Limite Derecho del Intervalo (tb, f(tb))	Punto Medio del Intervalo (tc, f(tc))	Error (%)
1	1	-5	14	2.375
2	1	-5	1.25	-1.796875
3	1.25	-1.796875	1.375	0.162109375
4	1.25	-1.796875	1.3125	-0.848388672
5	1.3125	-0.848388672	1.34375	-0.350982666
6	1.34375	-0.350982666	1.359375	-0.096408844
7	1.359375	-0.096408844	1.3671875	0.032355785
8	1.3671875	0.032355785	1.36328125	-0.032149971
9	1.36328125	-0.032149971	1.365234375	7.20248E-05
10	1.365234375	7.20248E-05	1.364257813	-0.016046691
11	1.364257813	-0.016046691	1.364746094	-0.007989263
12	1.364746094	-0.007989263	1.364990234	-0.003959102
13	1.364990234	-0.003959102	1.36512305	-0.001943659
14	1.36512305	-0.001943659	1.36517334	-0.000935847
15	1.36517334	-0.000935847	1.365203857	-0.000431919
16	1.365203857	-0.000431919	1.365219116	-0.000179949
17	1.365219116	-0.000179949	1.365226746	-5.39625E-05

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 163 muestra un valor para la raíz de la función de 1.365112305 y un valor de la función de -0.00194. La Figura 169 muestra en la iteración trece un valor para la raíz de la función de 1.365112305 y un valor de la función de -0.001943659, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.2.3. MÉTODO DE FALSA POSICIÓN

Para la aplicación Método de Falsa Posición se plantea un problema de búsqueda de la raíz de la función  $\cos(x) - x$ , la solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el número de iteraciones empleadas para determinar la raíz y el valor de la raíz en cada iteración. La aplicación muestra en su GUI, la confirmación del intervalo de búsqueda como apropiado, el intervalo actual de búsqueda, el valor de la raíz de la función con el valor evaluado de la función teniendo en cuenta el error de parada ingresado, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los

límites del intervalo de búsqueda con su respectivo valor en la función, el punto generado de búsqueda con su valor en la función y el error para cada iteración.

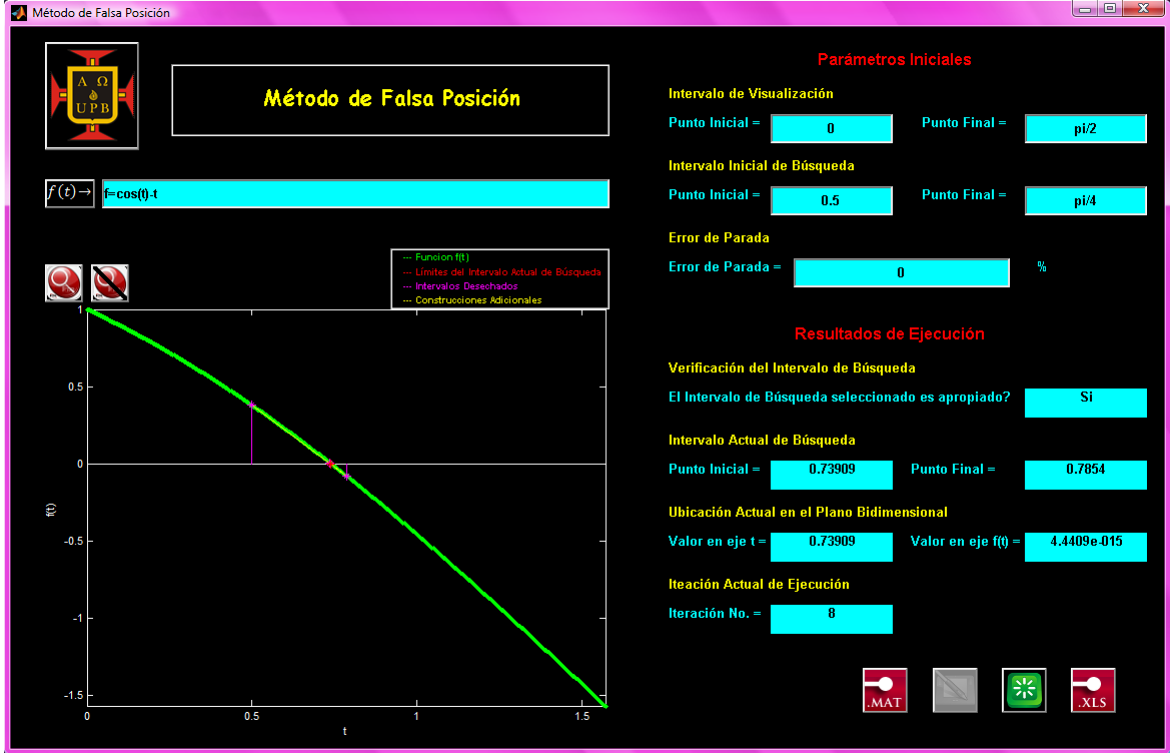
Figura 170. Planteamiento y resultados del problema para Método de Falsa Posición según el libro

La tabla contiene los resultados del método de la posición falsa aplicado a  $f(x) = \cos x - x$  con las mismas aproximaciones iniciales que utilizamos para el método de la secante en el ejemplo 2. Nótese que las aproximaciones son iguales hasta  $p_3$  y que el método de la posición falsa requiere una iteración más para alcanzar la misma exactitud que el de la secante.

$n$	$P_n$
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0.7390851332

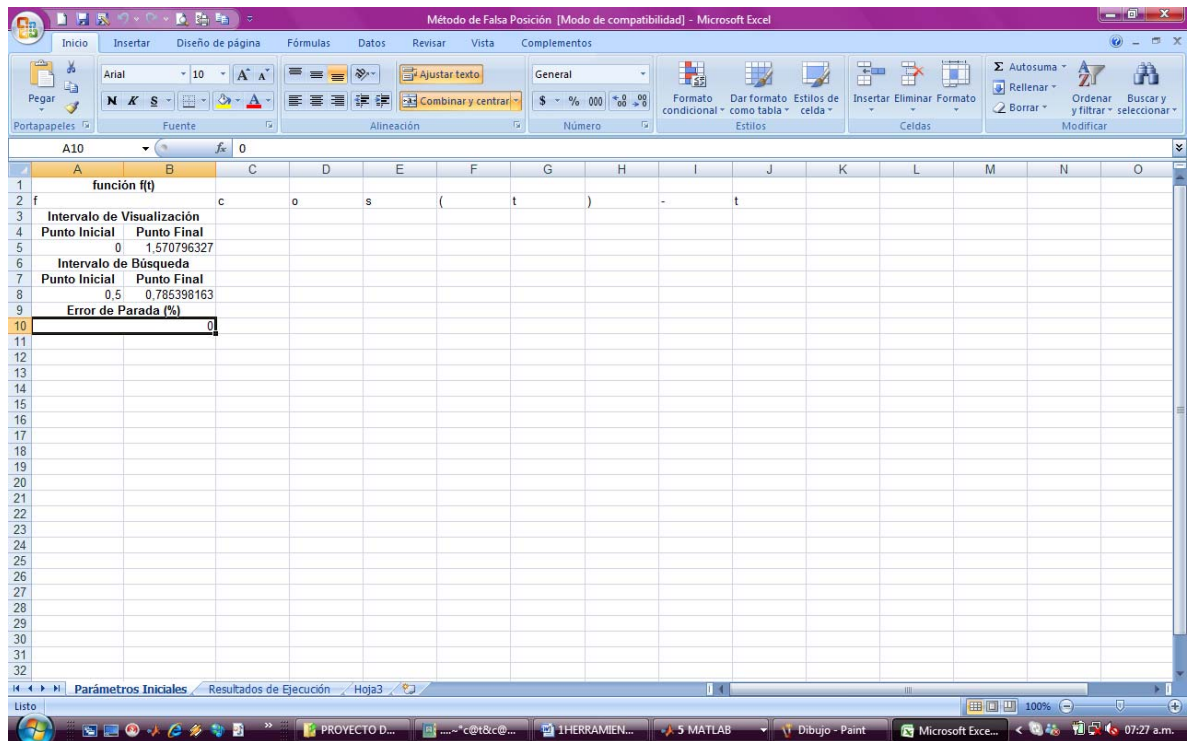
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 2, Soluciones de Ecuaciones de una Variable. Página 74.

Figura 171. Resultados en GUI de la aplicación Método de Falsa Posición



Fuente: Autor

Figura 172. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Falsa Posición



Fuente: Autor

Figura 173. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Falsa Posición

Iteración	Límite Izquierdo del Intervalo ( $t_a$ , $f_{t_a}$ )	Límite Derecho del Intervalo ( $t_b$ , $f_{t_b}$ )	Punto Generado del Intervalo ( $t_c$ , $f_{t_c}$ )	Error (%)		
1	0.5	0.377582562	0.785398163	0.004517719	100	
2	0.736384139	0.004517719	0.785398163	0.736384139	4.51772E-05	0.36181191
3	0.739058139	4.51772E-05	0.785398163	0.739058139	4.50872E-07	0.0036159
4	0.739084864	4.50872E-07	0.785398163	0.739084864	4.49964E-09	3.6087E-05
5	0.739085131	4.49964E-09	0.785398163	0.739085131	4.4906E-11	3.6014E-07
6	0.739085133	4.4906E-11	0.785398163	0.739085133	4.48086E-13	3.5942E-09
7	0.739085133	4.48086E-13	0.785398163	0.739085133	4.44089E-15	3.5872E-11
8	0.739085133	4.44089E-15	0.785398163	0.739085133	0	3.6052E-13
9	0.739085133	4.44089E-15	0.739085133	0	0	0
10	0.739085133	4.44089E-15	0.739085133	0	0	0

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 170 muestran un valor para la raíz de la función de 0.7390851332 en la iteración 6. La Figura 173 muestra un valor para la raíz de la función de 0.739085133 en la iteración 6, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.2.4. MÉTODO DE PUNTO FIJO

Para la aplicación Método de Punto Fijo se plantea un problema de búsqueda de la raíz de una función de naturaleza exponencial, la solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el número de iteraciones empleadas para determinar la raíz y el valor de la raíz en cada iteración. La aplicación muestra en su GUI, el valor anterior de búsqueda utilizado, el valor de la raíz de la función con el valor evaluado de la función teniendo en cuenta el error de parada ingresado, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo

dentro del mismo archivo se muestran la ubicación actual de búsqueda y el error para cada iteración.

Figura 174. Planteamiento y resultados del problema para Método de Punto Fijo según el libro

**Planteamiento del problema. Usar una iteración simple de punto fijo para localizar la raíz de**

$$f(x) = e^{-x} - x$$

**Solución. La función se puede separar directamente y expresarse en la forma de la ecuación, como**

$$x_{i+1} = e^{-x}$$

**Empezando por un valor inicial  $X_0 = 0$ , se aplica esta ecuación iterativa para:**

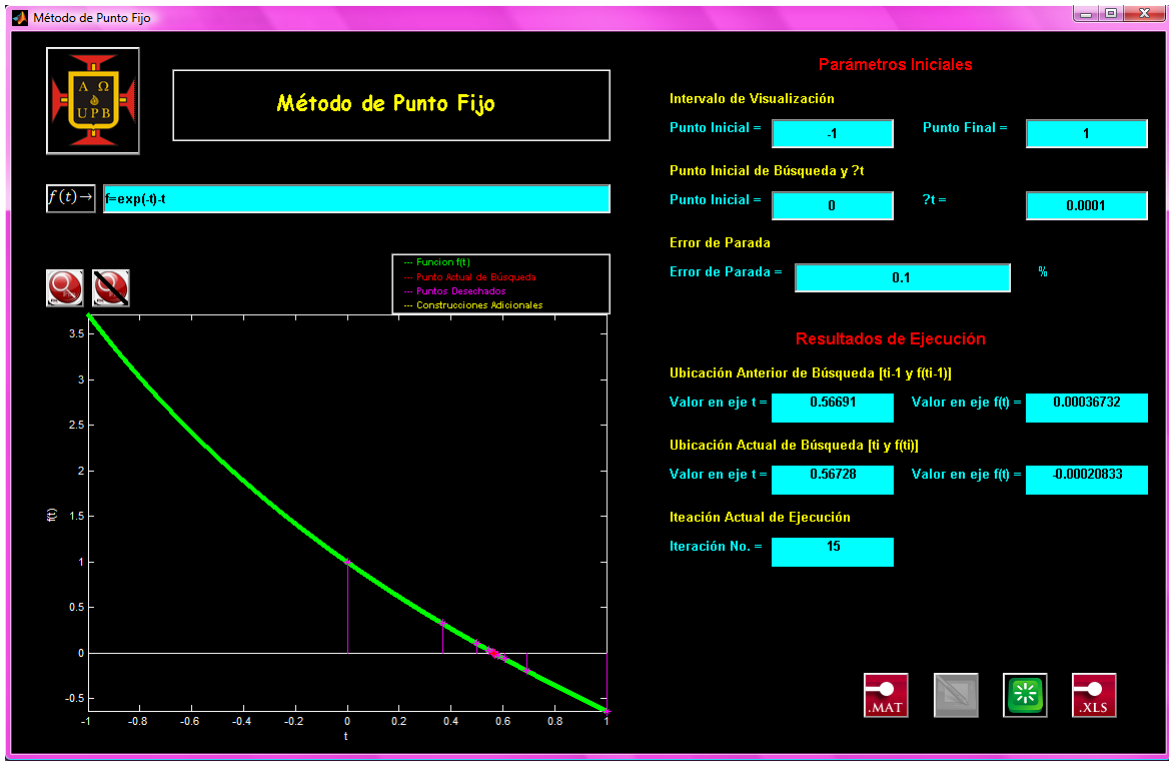
i	X	%	%
0	0		100.0
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

**De esta manera, se puede observa que cada iteración se acerca cada vez más aproximado al valor verdadero de la raíz 0.56714329**

Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte II, Raíces de Ecuaciones. Capítulo 6, Métodos Abiertos, Página 143.

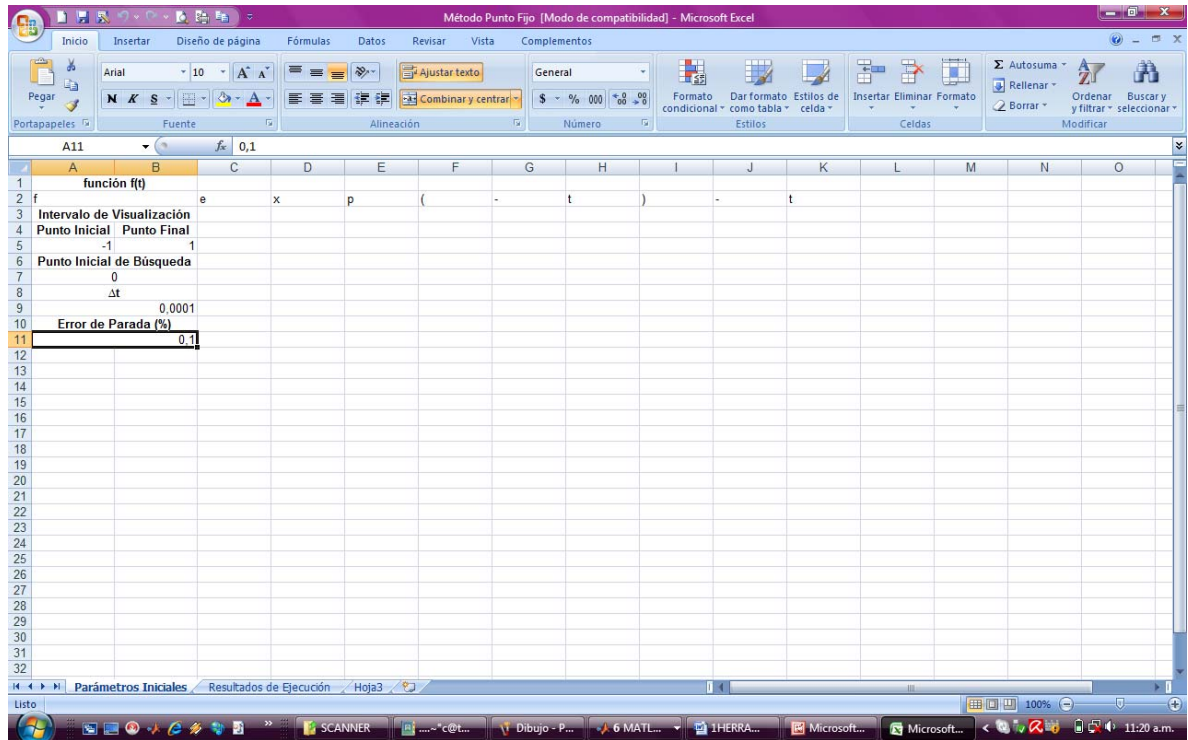


Figura 175. Resultados en GUI de la aplicación Método de Punto Fijo



Fuente: Autor

Figura 176. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Punto Fijo



Fuente: Autor

Figura 177. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Punto Fijo

Iteración	Ubicación Actual de Búsqueda ( $t_i$ , $f(t_i)$ )	Error (%)
1	0	100
2	1	100
3	0.367879441	0.324321186
4	0.692200620	-0.191727127
5	0.500473501	0.105770035
6	0.606243535	-0.060847749
7	0.545395786	0.034216555
8	0.579612336	-0.019496874
9	0.560115461	0.011027654
10	0.571143115	-0.006263768
11	0.564879347	0.003549378
12	0.568428725	-0.002013992
13	0.566414733	0.001141904
14	0.567556637	-0.000647725
15	0.566908912	0.00036732
16	0.567276232	-0.000208334

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 174 muestra un valor para la raíz de la función de 0.564879 en la iteración 10. La Figura 177 muestra un valor para la raíz de la función de 0.564879347 en la misma iteración, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.2.5. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

Para la aplicación Método de Newton – Raphson se plantea un problema de búsqueda de la raíz de una función de naturaleza exponencial, la solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el número de iteraciones empleadas para determinar la raíz y el valor de la raíz en cada iteración. La aplicación muestra en su GUI, la derivada del punto actual de búsqueda, el punto actual de búsqueda, el valor posterior de búsqueda a utilizar, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo

se muestran la ubicación actual de búsqueda, el punto actual más el diferencial de tiempo con su respectivo valor de la función, la derivada del punto actual de búsqueda, el punto posterior de búsqueda y el error para cada iteración.

Figura 178. Planteamiento y resultados del problema para Método de Newton - Raphson según el libro

**Planteamiento del problema. Utilizar el método de Newton-Raphson para calcular la raíz  $f(x) = e^x - x$**

**empleando como valor inicial  $X_0 = 0$**

**Solución. La primera derivada es:**  $f'(x) = e^x - 1$

**que se constituye junto con la función original de la ecuación para tener**

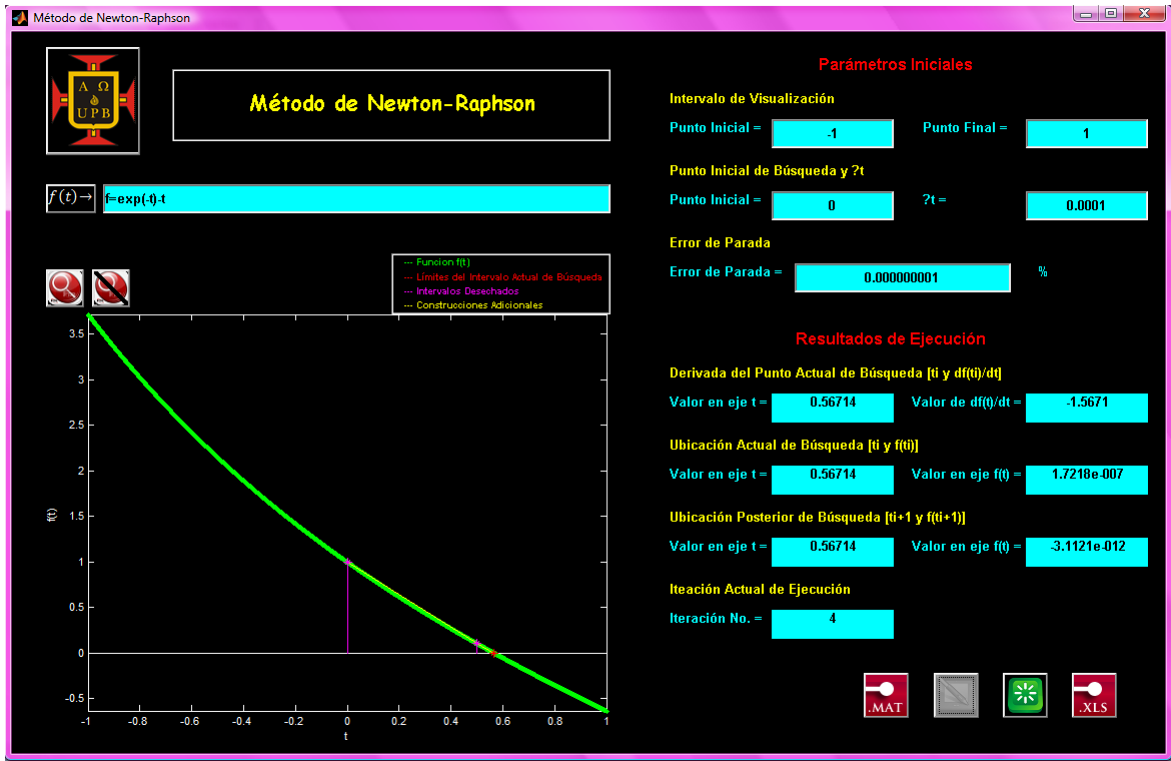
$$X_{i+1} = X_i - \frac{e^{X_i} - X_i}{e^{X_i} - 1}$$

**Empezando con un valor inicial  $X_0 = 0$ , se aplica esta ecuación iterativa para calcular**

i	X	%
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	<10 <sup>8</sup>

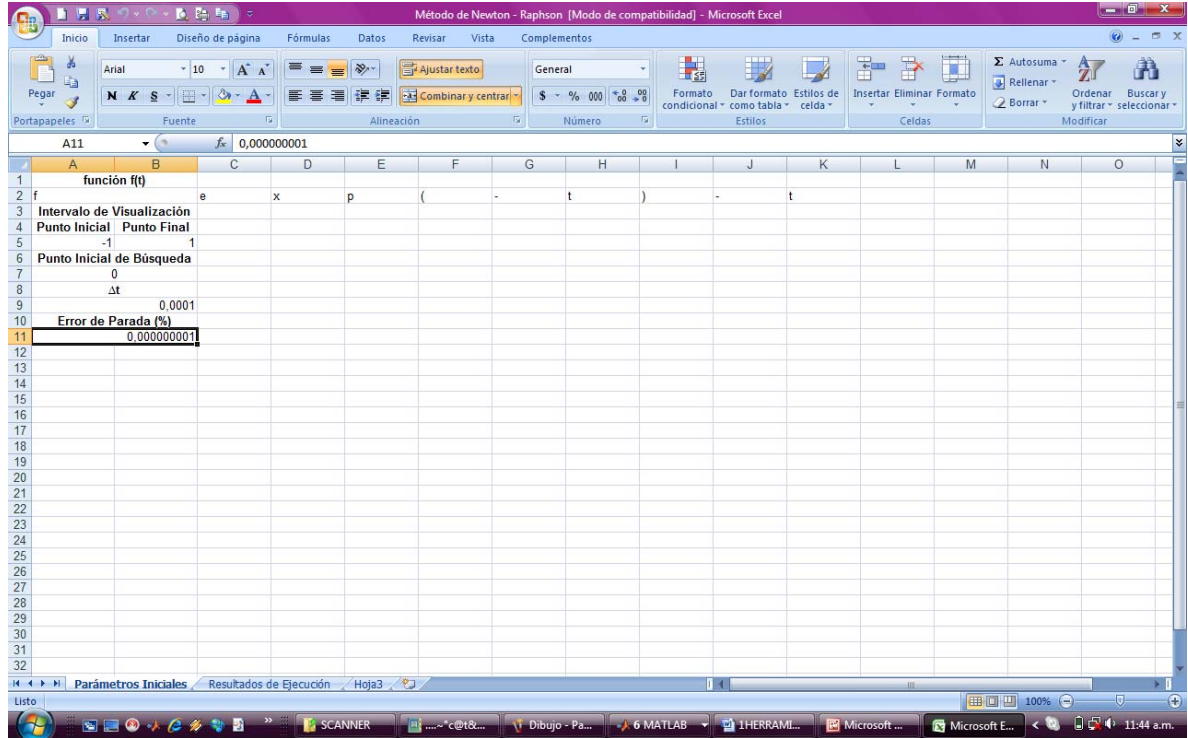
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte II, Raíces de Ecuaciones. Capitulo 6, Métodos Abiertos, Página 149.

Figura 179. Resultados en GUI de la aplicación Método de Newton - Raphson



Fuente: Autor

Figura 180. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Newton - Raphson



Fuente: Autor

Figura 181. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Newton - Raphson

Iteración	Ubicación Actual de Búsqueda ( $t_i, f(t_i)$ )	$t_i + \Delta t$	$f(t_i + \Delta t)$	$df(t_i)$	Ubicación Posterior de Búsqueda ( $t_{i+1}, f(t_{i+1})$ )	Error (%)
1	0	0.0001	0.999800005	-1.999950002	0.5000125	100
2	0.5000125	0.5001125	0.106510578	-1.606492753	0.106510578	11.7073276
3	0.566312568	0.566412568	0.001302057	-1.567586245	0.567143181	0.1464556
4	0.567143181	0.567243181	1.72177E-07	-1.567114996	0.56714329	-3.11207E-12
5	0.56714329	0.56724329	-0.000156711	-1.567114934	0.56714329	1.11022E-16

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 178 muestra un valor para la raíz de la función de 0.567143290 en la iteración 5. La Figura 181 muestra un valor para la raíz de la función de 0.56714329 en la misma iteración, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.2.6. MÉTODO DE LA SECANTE

Para la aplicación Método de la Secante se plantea un problema de búsqueda de la raíz de la función  $\cos(x) - x$ , la solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el número de iteraciones empleadas para determinar la raíz y el valor de la raíz en cada iteración. La aplicación muestra en su GUI, la ubicación anterior, actual y posterior de búsqueda, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran las ubicaciones anterior, actual y posterior de búsqueda y el error para cada iteración.

Figura 182. Planteamiento y resultados del problema para Método de la Secante según el libro

Aplique el método de la secante para encontrar una solución de  $x = \cos x$ . Si se compara la iteración funcional y el método de Newton con la aproximación inicial  $P_0 = 0.5$ ,  $P_t = \pi/4$  y la formula:

$$P_n = P_{n-1} - \frac{(P_{n-1} - P_{n-2})(\cos P_{n-1} - P_{n-1})}{(\cos P_{n-1} - P_{n-1}) - (\cos P_{n-2} - P_{n-2})} \text{ para } n \geq 2$$

$n$	$P_n$
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851493
6	0.7390851332

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capitulo 2, Soluciones de Ecuaciones de una Variable. Página 72.

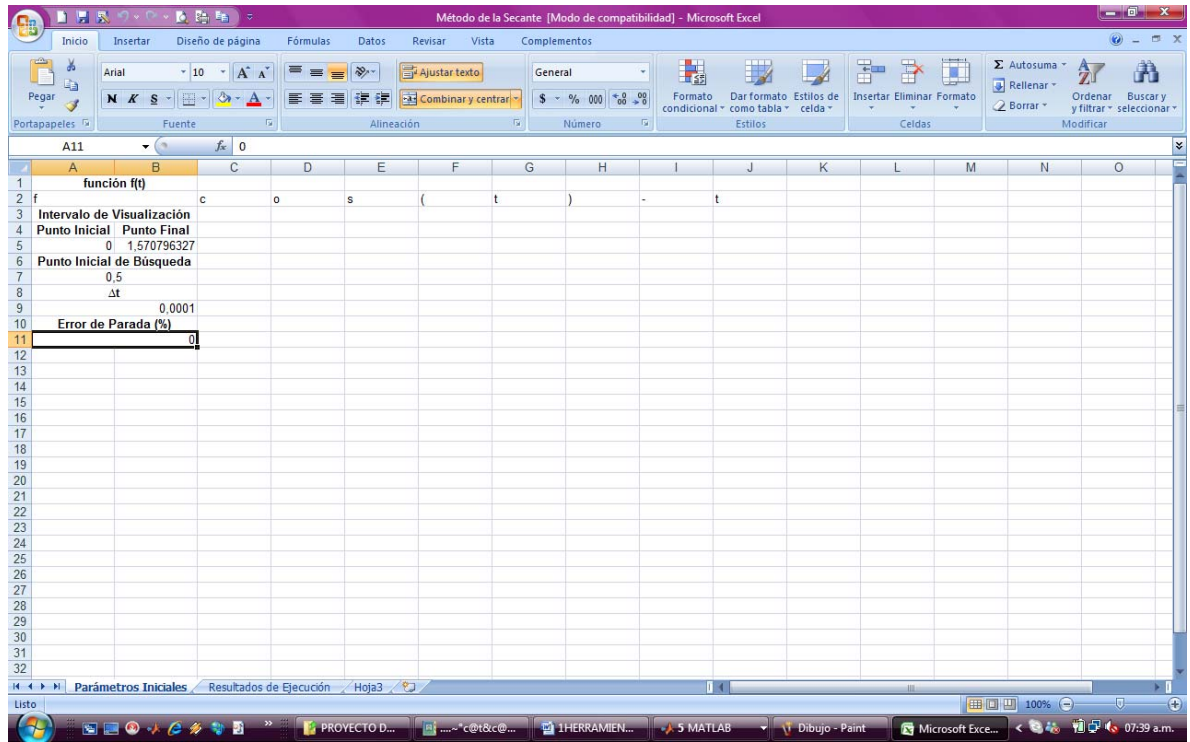
Figura 183. Resultados en GUI de la aplicación Método de la Secante





Fuente: Autor

Figura 184. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de la Secante



Fuente: Autor

Figura 185. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de la Secante

Iteración	Ubicación Actual de Búsqueda ( $t_i, f(t_i)$ )	$t_{i-\Delta t}$	$f(t_{i-\Delta t})$	Ubicación Posterior de Búsqueda ( $t_{i+1}, f(t_{i+1})$ )	Error (%)
1	0.5	0.377582562	0.4999	0.3777305	100
2	0.755229987	-0.027116071	0.5	0.37758256	2.31683222
3	0.738128782	0.001600223	0.75522999	-0.02711607	0.12893962
4	0.739081751	5.66045E-06	0.73812878	0.00160022	0.00045771
5	0.739085134	-1.19591E-09	0.73908175	5.6605E-06	9.6683E-08
6	0.739085133	8.88178E-16	0.73908513	-1.1959E-09	7.5108E-14
7	0.739085133	0	0.73908513	8.8818E-16	0

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 182 muestran un valor para la raíz de la función de 0.7390851332 en la séptima iteración. La Figura 185 muestra un valor para la raíz de la función de 0.739085133 en la misma iteración, comprobando así la funcionalidad de la aplicación.

### 8.2.7. MÉTODO DE MÜLLER

Para la aplicación Método de Müller se plantea un problema de búsqueda de la raíz de un polinomio de orden cuatro, la solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el número de puntos empleados para determinar la raíz y el valor de la raíz en cada iteración. La aplicación muestra en su GUI, coeficientes del polinomio de aproximación parabólica, posibilidades para el siguiente punto de aproximación, siguiente punto de aproximación, y muestra el número de iteraciones empleadas para hallar dicha raíz. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la búsqueda. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los

parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los tres puntos de búsqueda empleados, los tres coeficientes del polinomio de aproximación parabólica, las dos posibilidades para el siguiente punto de aproximación, el siguiente punto de aproximación y el error para cada iteración.

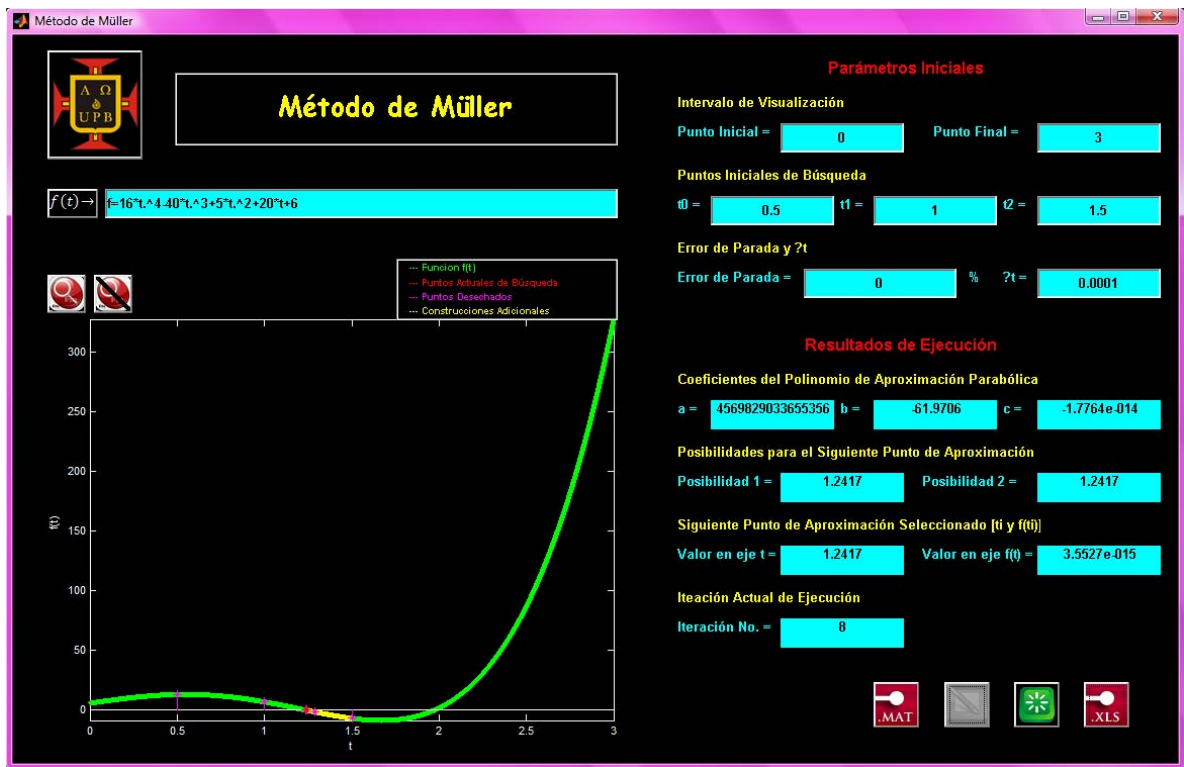
Figura 186. Planteamiento y resultados del problema para Método de Müller según el libro

Considere el polinomio  $f(x) = 16x^4 - 40x^3 + 5x^2 + 20x + 6$ , Al utilizar el algoritmo con  $TOL = 10^{-5}$  y diversos valores de  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ , se obtienen los resultados que se proporcionan en la tabla

$i$	$x_0 = 0.5,$ $x_i$	$x_1 = 1.0,$ $f(x_i)$	$x_2 = 1.5$
3	1.28785	-1.37624	
4	1.23746	0.126941	
5	1.24160	$0.219440 \times 10^{-2}$	
6	1.24168	$0.257492 \times 10^{-4}$	
7	1.24168	$0.257492 \times 10^{-4}$	

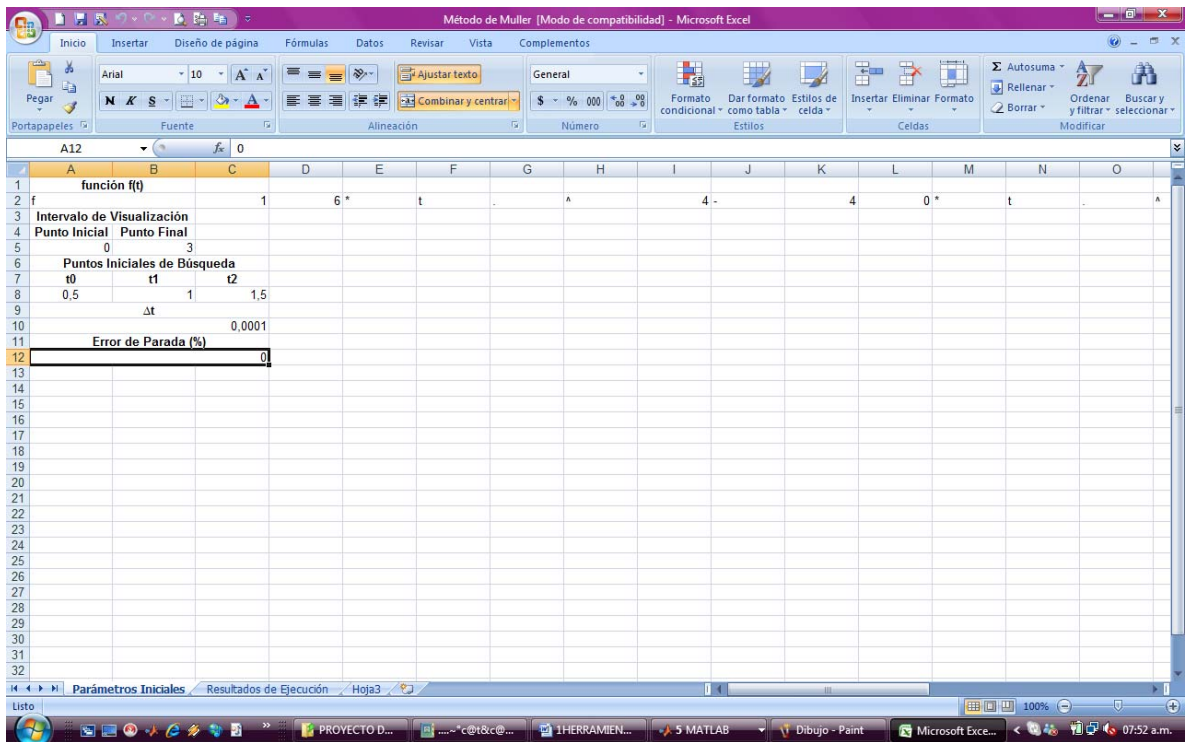
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 2, Soluciones de Ecuaciones de una Variable. Página 98.

Figura 187. Resultados en GUI de la aplicación Método de Müller



Fuente: Autor

Figura 188. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Müller



Fuente: Autor

Figura 189. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Müller

Iteración	Punto de Búsqueda ( t0 , ft0 )	Punto de Búsqueda ( t1 , ft1 )	Punto de Búsqueda ( t2 , ft2 )	Coeficiente a	Coeficiente b	Coeficiente c
1	0,5	13,25	1	1,5	-6,75	-15
2	1	7	1,5	-6,75	1,287854738	-1,376274561
3	1,5	-6,75	1,287854738	-1,376274561	1,23745875	0,126945399
4	1,287854738	-1,376274561	1,23745875	0,126945399	1,241604514	5,692295815
5	1,23745875	0,126945399	1,241604514	5,692295815	1,241677464	-5,70404E-07
6	1,241604514	0,002193409	1,241677464	-5,70404E-07	1,241677445	-2,27374E-13
7	1,241677464	-5,70404E-07	1,241677445	-2,27374E-13	1,241677445	1,06581E-14
8	1,241677445	-2,27374E-13	1,241677445	1,06581E-14	1,241677445	-1,77636E-14
9	1,241677445	1,06581E-14	1,241677445	-1,77636E-14	1,241677445	3,55271E-15
10	1,241677445	1,06581E-14	1,241677445	-1,77636E-14	1,241677445	3,55271E-15

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 186 muestran un valor para la raíz de la función de 1.24168 y un valor de la función de  $0.257492 \times 10^{-4}$  en la iteración 7. La Figura 189 muestra un valor para la raíz de la función de 1.241677445 y un valor de la función de  $-2.27374 \times 10^{-13}$ , comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3. CAPÍTULO III – INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL

#### 8.3.1. INTERPOLACIÓN

##### 8.3.1.1. INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA LINEAL

Para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal se plantea un problema de ajuste de cuatro puntos y la evaluación de un punto adicional, la solución ofrecida por el libro muestra una gráfica con la interpolación respectiva y el valor para el punto por evaluar. La aplicación muestra en su GUI, el límite izquierdo del subintervalo de hallazgo, el límite derecho del subintervalo de hallazgo, el número y la pendiente de la recta de interpolación del subintervalo de hallazgo y el valor

para el punto por evaluar. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, las rectas de interpolación y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del subintervalo de interpolación, la pendiente y el punto por evaluar en el subintervalo correcto.

Figura 190. Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Lineal según el libro

**Planteamiento del problema. Ajustar los datos de la tabla con trazadores de primer grado. Evaluar la función  $x = 5$**

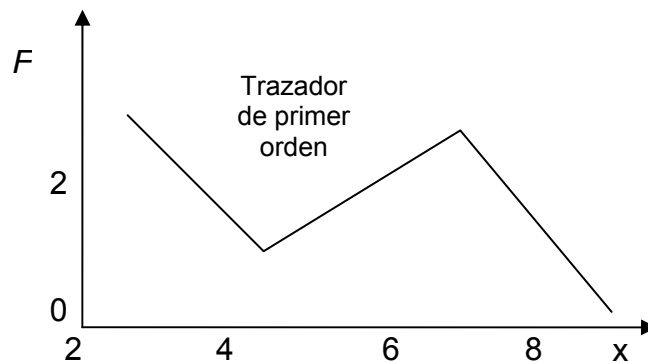
**Solución.** Se utilizan los datos para determinar las pendientes entre los puntos. Por ejemplo, en el intervalo de  $x = 4,5$  a  $x = 7$  la pendiente se calcula con la ecuación

$$m = \frac{2.5 - 1}{7 - 4.5} = 0.60$$

Se calculan las pendientes en los otros intervalos y los trazadores de primer grado obtenidos, se grafican en la figura. El valor  $x = 5$  es 1:3.

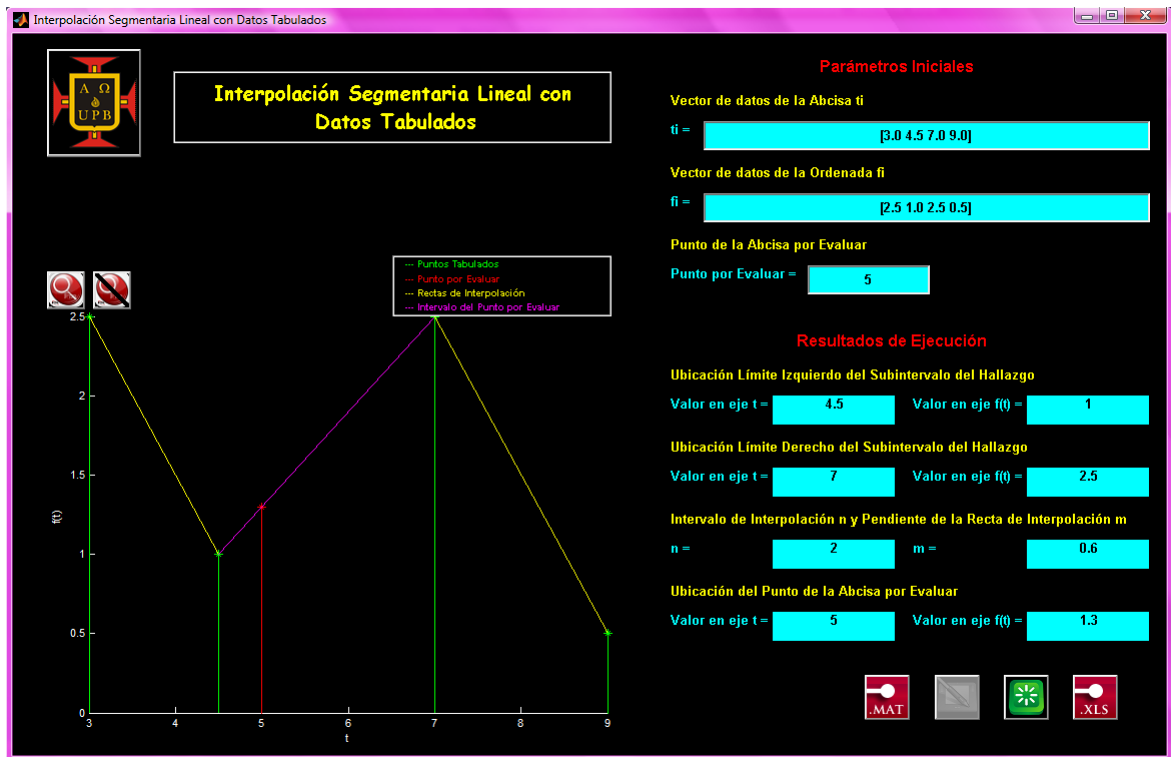
**Datos para ajustar los trazadores:**

X	f(x)
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5



Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte V, Ajuste de Curvas. Capítulo 18, Interpolación, Página 527.

Figura 191. Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal



Fuente: Autor



Figura 192. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Lineal

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Segmentaria Lineal [Modo de compatibilidad] - Microsoft Excel". The spreadsheet has three columns: "t" (time), "f(t)" (function value), and "Punto por Evaluar" (evaluation point). The data is as follows:

t	f(t)	Punto por Evaluar
3	2.5	5
4.5	1	
7	2.5	
9	0.5	

The cell C2 is selected and contains the value 5. The spreadsheet is part of a workbook named "Parámetros Iniciales" and is the third sheet ("Hoja3").

Fuente: Autor

Figura 193. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Lineal

Intervalo	Limite Izquierdo del Intervalo ( $t_a$ , $f(t_a)$ )	Limite Derecho del Intervalo ( $t_b$ , $f(t_b)$ )	Pendiente de la Recta de Interpolación $m$	Ubicación del Punto por Evaluar ( $t_c$ , $f(t_c)$ )				
1	1	3	2,5	4,5	1	-1	0	0
2	2	4,5	1	7	2,5	0,6	5	1,3
4	3	7	2,5	9	0,5	-1	0	0
5	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	-	-

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 190 muestran un valor de 1.3 para un valor de la abcisa igual a 5. La Figura 193 muestra los mismos resultados en el intervalo 2 que la Figura 190. Adicionalmente las gráficas de interpolación de las Figuras 190 y 191 son idénticas, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3.1.2. APROXIMACIÓN CON EL POLINOMIO DE LAGRANGE

Para la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange se plantea un problema de ajuste de cinco puntos y la evaluación de un punto adicional, la solución ofrecida por el libro muestra el valor para el punto por evaluar. La aplicación muestra en su GUI, el valor para el punto por evaluar, el número de operadores de Lagrange determinados y un menú desplegable con cada uno de

los operadores determinados con la opción de dibujar cada uno de ellos. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, el polinomio de interpolación de orden cuatro y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo, en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los puntos discretos ingresados, el punto por evaluar y los cinco coeficientes del polinomio de interpolación y en otra hoja de cálculo se encuentra la matriz que se construye para hallar los coeficientes del polinomio de interpolación.

Figura 194. Planteamiento y resultados del problema para Aproximación con el Polinomio de Lagrange según el libro

La tabla muestra los valores de una función en diversos puntos. Se puede comparar las aproximaciones a  $f(1.5)$  obtenidas con varios polinomios de Lagrange.

x	f(x)
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

El polinomio de Lagrange de cuarto grado utiliza todas las entradas o valores de la tabla.

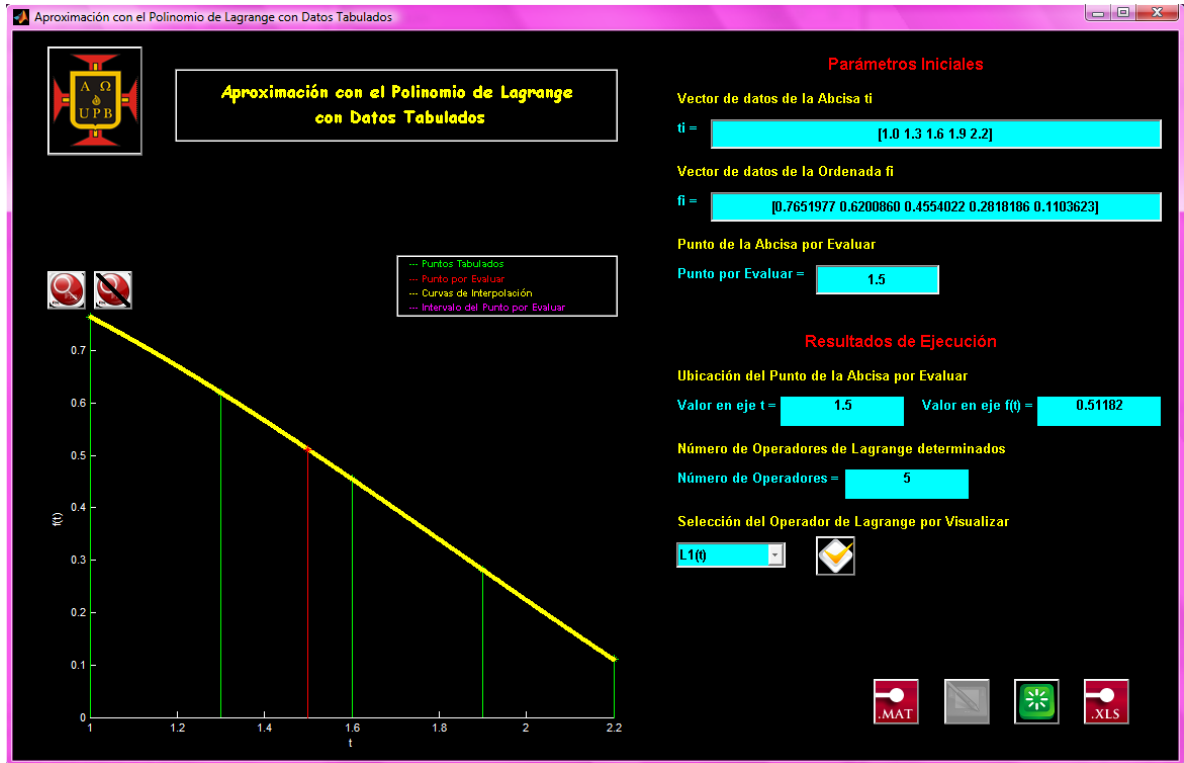
Cuando  $x_0 = 1.0$   $x_1 = 1.3$   $x_2 = 1.6$   $x_3 = 1.9$  y cuando  $x_4 = 2.2$

la aproximación es  $P_4(1.5) = 0.5118200$

$$\begin{aligned}
 |p_1(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.53 \times 10^{-3} \\
 |p_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 5.42 \times 10^{-4} \\
 |\hat{p}_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 6.44 \times 10^{-4} \\
 |p_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 2.5 \times 10^{-6} \\
 |\hat{p}_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.50 \times 10^{-5} \\
 |p_4(1.5) - f(1.5)| &\approx 7.7 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 3, Interpolación y Aproximación Polinomial. Página 113.

Figura 195. Resultados en GUI de la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange



Fuente: Autor

Figura 196. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	t	f(t)	Punto por Evaluar											
2		1	0.7651977											
3		1.3	0.620086											
4		1.6	0.4554022											
5		1.9	0.2818186											
6		2.2	0.1103623											
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														

Fuente: Autor

Figura 197. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	t	f(t)	Ubicación del Punto por Evaluar ( t <sub>b</sub> , f(t <sub>b</sub> ) )		P <sub>n</sub> (t)									
2	1	0.7651977	0	0	0.0018251									
3	1.3	0.620086	0	0	0.052928									
4	1.6	0.4554022	1.5	0.511819994	-0.3430466									
5	1.9	0.2818186	0	0	0.07339135									
6	2.2	0.1103623	0	0	0.97773506									
7	-	-	-	-	-									
8	-	-	-	-	-									
9	-	-	-	-	-									
10	-	-	-	-	-									
11	-	-	-	-	-									
12	-	-	-	-	-									
13	-	-	-	-	-									
14	-	-	-	-	-									
15	-	-	-	-	-									
16	-	-	-	-	-									
17	-	-	-	-	-									
18	-	-	-	-	-									
19	-	-	-	-	-									
20	-	-	-	-	-									
21	-	-	-	-	-									
22	-	-	-	-	-									
23	-	-	-	-	-									
24	-	-	-	-	-									
25	-	-	-	-	-									
26	-	-	-	-	-									
27	-	-	-	-	-									
28	-	-	-	-	-									
29	-	-	-	-	-									
30	-	-	-	-	-									
31	-	-	-	-	-									
32	-	-	-	-	-									

Fuente: Autor

Figura 198. Hoja de Matriz Construida del archivo .xls de Aproximación con el Polinomio de Lagrange

	A	B	C	D	E
2	5,14403292	-20,5761317	30,8641975	-20,5761317	5,14403292
3	-36,0082305	137,860082	-197,530864	125,514403	-29,8353909
4	93,3641975	-338,271605	460,185185	-279,012346	63,7345679
5	-106,22428	358,600823	-461,234568	268,230453	-59,372428
6	44,7242798	-137,613169	167,716049	-94,1563786	20,3292181

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 194 muestra un valor de 0.5118200 para un valor en la abcisa de 1.5. La Figura 197 muestra un valor de 0.511819994 para el mismo valor en la abcisa, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3.1.3. INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA CUADRÁTICA

Para la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática se plantea el mismo problema que para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal. La solución ofrecida por el libro muestra una gráfica con la interpolación respectiva y el valor para el punto por evaluar. La aplicación muestra en su GUI, el valor para el punto por evaluar, el número de intervalos determinados, un menú desplegable con cada

uno de los intervalos con la opción de poder graficar cada uno de ellos, y muestra también los tres coeficientes determinados para cada segmentaria cuadrática. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, las curvas de interpolación cuadrática y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del subintervalo de interpolación, los coeficientes del polinomio de segundo orden que interpolan cada intervalo y el punto por evaluar en el subintervalo correcto.

Figura 199. Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Cuadrática según el libro



**Planteamiento del problema. Ajustar trazadores cuadráticos a los mismos datos utilizados. Estime el valor de la función  $x = 5$**

**Solución. En este problema, se tienen cuatro datos y  $n = 3$  intervalos. Por lo tanto,  $3(3) = 9$  incógnitas que deben determinarse, - 2=4 condiciones:**

$$20.25a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 10$$

$$20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 10$$

$$49a_2 + 7b_2 + c_2 = 25$$

$$49a_3 + 7b_3 + c_3 = 25$$

**Evaluando a la primera y última función con los valores inicial y final, se agregan 2 ecuaciones mas**

$$9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5$$

$$81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

**La continuidad de las derivadas crea adicionalmente de  $3-1=2$ , condiciones ecuación**

$$9a_1 + b_1 \equiv 9a_2 + b_2$$

$$14a_2 + b_2 \equiv 14a_3 + b_3$$

**Por último, la ecuación determina que  $a_1 = 0$ . Como esta ecuación especifica  $a_1$  de manera exacta, el problema se reduce a la solución de ocho ecuaciones simultáneas.**

**Estas condiciones se expresan en forma matricial como**

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Estas ecuaciones se pueden resolver utilizando las técnicas de la parte tres, con los resultados**

$$a_1 = 0 \quad b_1 = -1 \quad c_1 = 5.5$$

$$a_2 = 0.64 \quad b_2 = -6.76 \quad c_2 = 18.46$$

$$a_3 = -16 \quad b_3 = 24.6 \quad c_3 = -81.3$$

**Que se sustituyen en las ecuaciones cuadráticas originales para obtener la siguiente relación para cada intervalo**

$$f_1(x) = -x + 5.5 \quad 3.0 \leq x \leq 4.5$$

$$f_2(x) = 0.64 x^2 - 6.76 x + 18.46 \quad 4.5 \leq x \leq 7.0$$

$$f_3(x) = -1.6 x^2 + 24.6 x - 91.3 \quad 7.0 \leq x \leq 9.0$$

Quando se usa  $f_2$ , la predicción para  $x=5$  es,

El ajuste total de los trazadores se ilustra en la figura. Observe que las desventajas que se alejan del ajuste:

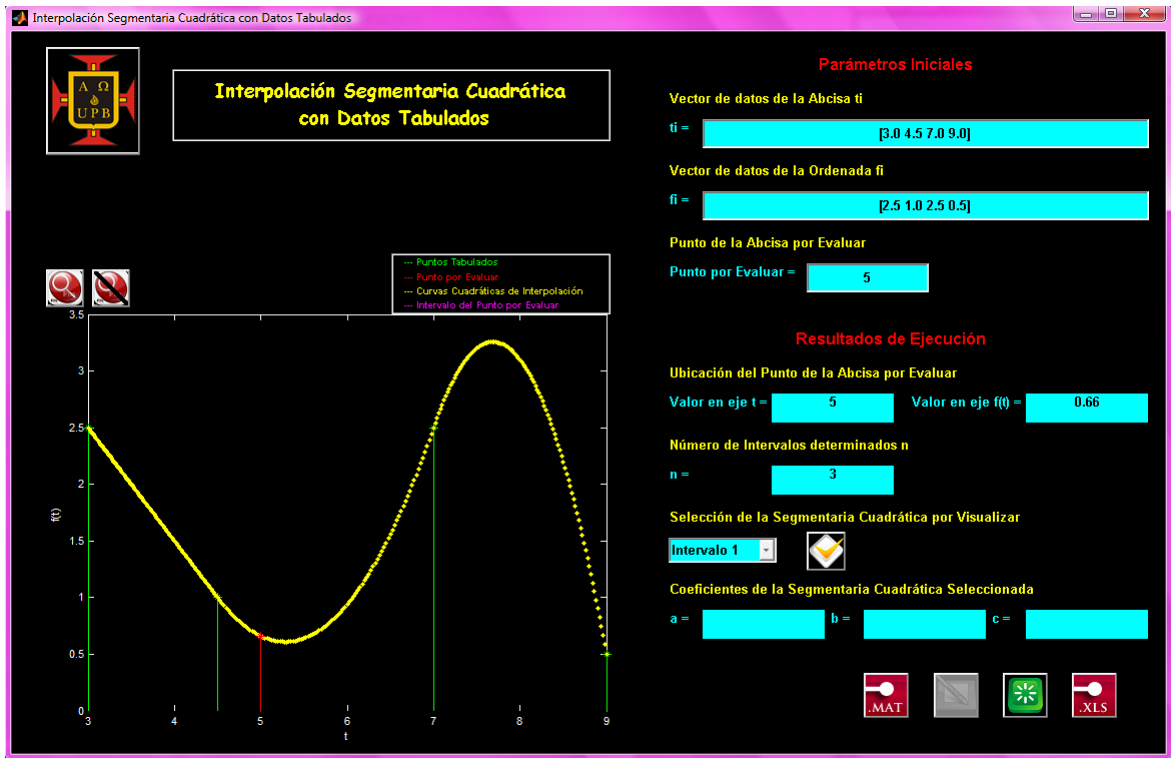
- La línea recta que une los dos primeros
- El trazador para el último intervalo parece oscilar demasiado. Los trazadores de la siguiente sección no presenta estas desventajas y, en consecuencia son mejores métodos para la interpolación mediante trazadores.

$$f_2(5) = 0.64 (5)^2 - 6.76 (5) + 18.46 = 0.66$$



Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte V, Ajuste de Curvas. Capitulo 18, Interpolación, Página 530.

Figura 200. Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cuadrática



Fuente: Autor

Figura 201. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cuadrática

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Segmentaria Cuadrática [Modo de compatibilidad] - Microsoft Excel". The spreadsheet has three columns: "t", "f(t)", and "Punto por Evaluar". The data is as follows:

t	f(t)	Punto por Evaluar
3	2.5	5
4.5	1	
7	2.5	
9	0.5	

Fuente: Autor

Figura 202. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cuadrática

Intervalo	Limite Izquierdo del Intervalo ( $t_a$ , $f(t_a)$ )	Limite Derecho del Intervalo ( $t_b$ , $f(t_b)$ )	Coeficiente a	Coeficiente b	Coeficiente c	Ubicación del Punto por Evaluar ( $t_c$ , $f(t_c)$ )
1	3	4.5	1	0	-1	5, 0
2	4.5	7	2.5	-6.76	18.46	5, 0.66
3	7	9	0.5	-1.6	24.6	0, 0

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 199 muestran un valor de 0.66 para un valor de la abcisa igual a 5. La Figura 202 muestra los mismos resultados en el intervalo 2 que la Figura 199. Adicionalmente las gráficas de interpolación de las Figuras 199 y 200 son idénticas, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3.1.4. INTERPOLACIÓN SEGMENTARIA CÚBICA

Para la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica se plantea el mismo problema que para la aplicación Interpolación Segmentaria Lineal. La solución ofrecida por el libro muestra una gráfica con la interpolación respectiva y el valor para el punto por evaluar. La aplicación muestra en su GUI, el valor para el punto por evaluar, el número de intervalos determinados, un menú desplegable con cada

uno de los intervalos con la opción de poder graficar cada uno de ellos, y muestra también los cuatro coeficientes determinados para cada segmentaria cúbica. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, las curvas de interpolación cúbica y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del subintervalo de interpolación, los coeficientes del polinomio de tercer orden que interpolan cada intervalo y el punto por evaluar en el subintervalo correcto.

Figura 203. Planteamiento y resultados del problema para Interpolación Segmentaria Cúbica según el libro

**Planteamiento del problema. Ajustar trazadores cúbicos a los mismos datos utilizados. Estime el valor de la función  $x = 5$**

**Solución.** El primer paso consiste en usar la ecuación, para generar el sistema de ecuaciones simultáneas que se utilizarán para determinar las segundas derivadas de los nodos. Por ejemplo, para el primer nodo anterior se emplean los siguientes datos:

$$x_0 = 3 \quad f(x_0) = 2.5$$

$$x_1 = 4.5 \quad f(x_1) = 1$$

$$x_2 = 7 \quad f(x_2) = 2.5$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación

$$(4.5 - 3)f''(3) + 2(7 - 3)f''(4.5) + (7 - 4.5)f''(7)$$

$$= \frac{6}{7 - 4.5}(2.5 - 1) + \frac{6}{4.5 - 3}(2.5 - 1)$$

Debido a la condición de trazador natural  $f''(3)=0$  y la ecuación se reduce

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6$$

En una forma similar la ecuación se aplica al segundo punto obteniendo el siguiente resultado

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = 9.6$$

Estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente

$$f''(4.5) = 1.67909$$

$$f''(7) = 1.53308$$

Estos valores se sustituyen después en la ecuación junto con la  $x$  y las  $f(x)$  para dar

$$f_1(x) = \frac{1.67909}{6(4.5 - 3)}(x - 3)^3 + \frac{2.5}{4.5 - 3}(4.5 - x) + \left[ \frac{1}{4.5 - 3} - \frac{1.67909(4.5 - 3)}{6} \right](x - 3)$$

$$\text{O} \quad f_1(x) = 0.186566(x - 3)^3 + 1.666667(4.5 - x) + 0.246894(x - 3)$$

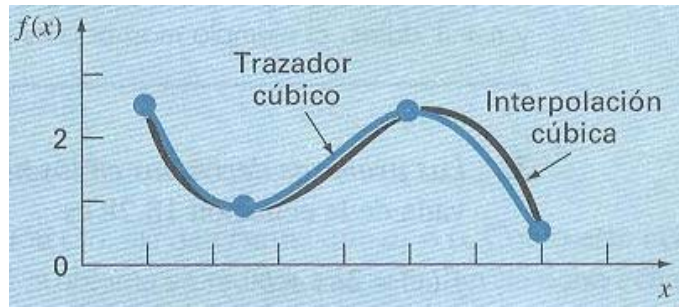
Esta ecuación es el trazado cúbico para el primer intervalo. Se realizan sustituciones similares para tener las ecuaciones para el segundo y tercer intervalo

$$f_2(x) = 0.111939(7 - x)^3 - 0.102205(x - 4.5)^3 - 0.299621(7 - x) + 1.638783(x - 4.5)$$

$$\text{Y} \quad f_3(x) = 0.127757(9 - x)^3 + 1.761027(9 - x) + 0.25(x - 7)$$

Las tres ecuaciones se pueden utilizar para calcular los valores dentro de cada intervalo. Por ejemplo, el valor en  $x=5$ , que está dentro del segundo intervalo, se calcula como sigue.

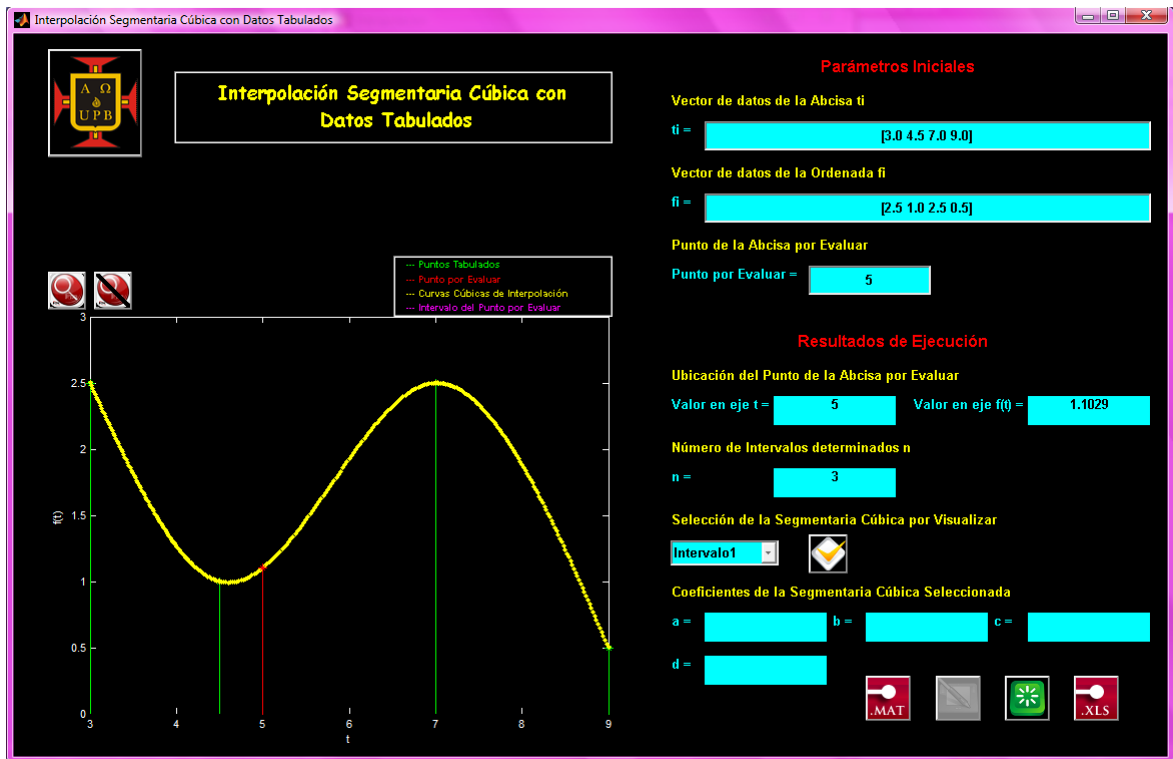
$$f_2(5) = 0.111939(7 - 5)^3 - 0.102205(5 - 4.5)^3 - 0.299621(7 - 5) + 1.638783(5 - 4.5) = 1.102886$$



Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte V, Ajuste de Curvas. Capítulo 18, Interpolación, Página 534.

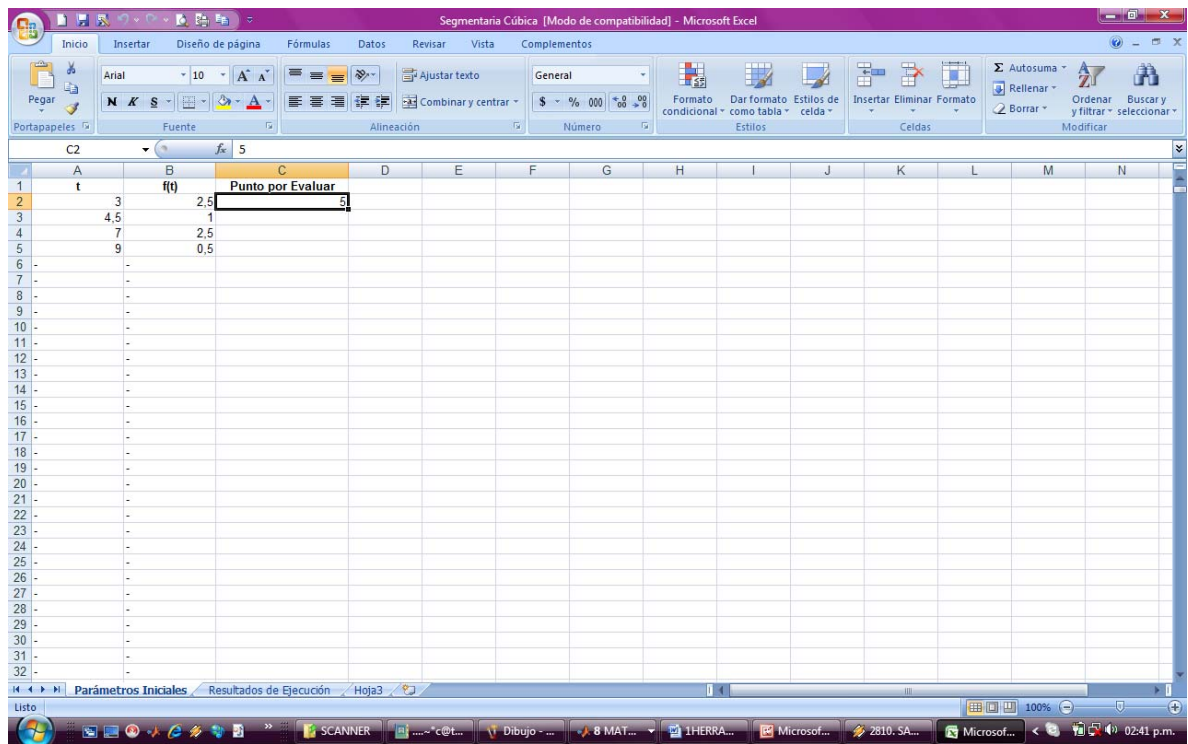
Figura 204. Resultados en GUI de la aplicación Interpolación Segmentaria Cúbica





Fuente: Autor

Figura 205. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cúbica



Fuente: Autor

Figura 206. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Interpolación Segmentaria Cúbica

Segmentaria Cúbica [Modo de compatibilidad] - Microsoft Excel

Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista Complementos

Arial 10 Fuente Ajustar texto General

Portapapeles Pegar Fuente Alineación Número Estilos

Formato condicional Dar formato como tabla Estilos de celdas Insertar Eliminar Formato

Autosuma Rellenar Ordenar y filtrar Buscar y seleccionar Modificar

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Intervalo	Limite Izquierdo del Intervalo ( ta , f(ta) )	Limite Derecho del Intervalo ( tb , f(tb) )			Coefficiente a	Coefficiente b	Coefficiente c	Coefficiente d	Ubicación del Punto por Evaluar
2	1	3	2,5	4,5	1	0,186565272	-1,679087452	3,617490494	1,722053232	0
3	2	4,5	1	7	2,5	-0,214144487	3,730494297	-20,72562738	38,23673004	5
4	3	7	2,5	9	0,5	0,127756654	-3,449429658	29,5338403	-79,03536122	0
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Parámetros Iniciales Resultados de Ejecución / Hoja3

Lista Promedio: 0,883459692 Recuento: 33 Suma: 29,15416984 100%

Microsoft Excel - msc3t

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana

Escriba una pregunta

Arial 10 Fuente Ajustar texto General

D2 4,5

	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Limite Derecho del Intervalo ( tb , f(tb) )		Coefficiente a	Coefficiente b	Coefficiente c	Coefficiente d	Ubicación del Punto por Evaluar ( tc , f(tc) )	
2	4,5	1	0,186565272	-1,679087452	3,617490494	1,722053232	0	0
3	7	2,5	-0,214144487	3,730494297	-20,72562738	38,23673004	5	1,102889734
4	9	0,5	0,127756654	-3,449429658	29,5338403	-79,03536122	0	0
5	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-	-	-	-
23	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-
27	-	-	-	-	-	-	-	-
28	-	-	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	-	-	-	-	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-
32	-	-	-	-	-	-	-	-
33	-	-	-	-	-	-	-	-

Parámetros Iniciales Resultados de Ejecución / Hoja3

Lista Suma=2,654169835 NUM

APLICACIONES EN M... HERRAMIENTA COMP... Dibujo - Paint Microsoft Excel - msc3t 06:53

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 203 muestran un valor de 1.102886 para un valor de la abcisa igual a 5. La Figura 206 muestra un valor de 1.102889734 para un valor de la abcisa igual a 5 en el intervalo 2. Adicionalmente las gráficas de interpolación de las Figuras 203 y 204 son idénticas, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### **8.3.2. DIFERENCIAS DIVIDIDAS O POLINOMIO INTERPOLANTE DE NEWTON**

Para la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton se plantea el mismo problema que para la aplicación Aproximación con el Polinomio de Lagrange. La solución ofrecida por el libro muestra una tabla con la matriz que se construye para hallar los cinco coeficientes del polinomio de orden cuatro de interpolación y el valor para el punto por evaluar. La aplicación muestra en su GUI, el valor para el punto por evaluar, el orden más alto de las diferencias divididas y un menú desplegable con cada uno de los polinomios de interpolación, desde orden cero hasta orden cuatro, con la opción de poder graficar cada uno de ellos. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, el polinomio de orden cuatro que interpola los puntos y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo, en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los puntos discretos ingresados y el punto por evaluar y en otra hoja de cálculo se encuentra la matriz que se construye para hallar los coeficientes del polinomio de interpolación.

Figura 207. Planteamiento y resultados del problema para Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton según el libro

En el ejemplo utilizamos varios polinomios interpolantes para aproximar  $f(1.5)$ , por medio de los datos contenidos en las tres primeras columnas de la tabla. El resto de entradas o datos de la tabla incluyen diferencias divididas que se calcularon mediante el algoritmo

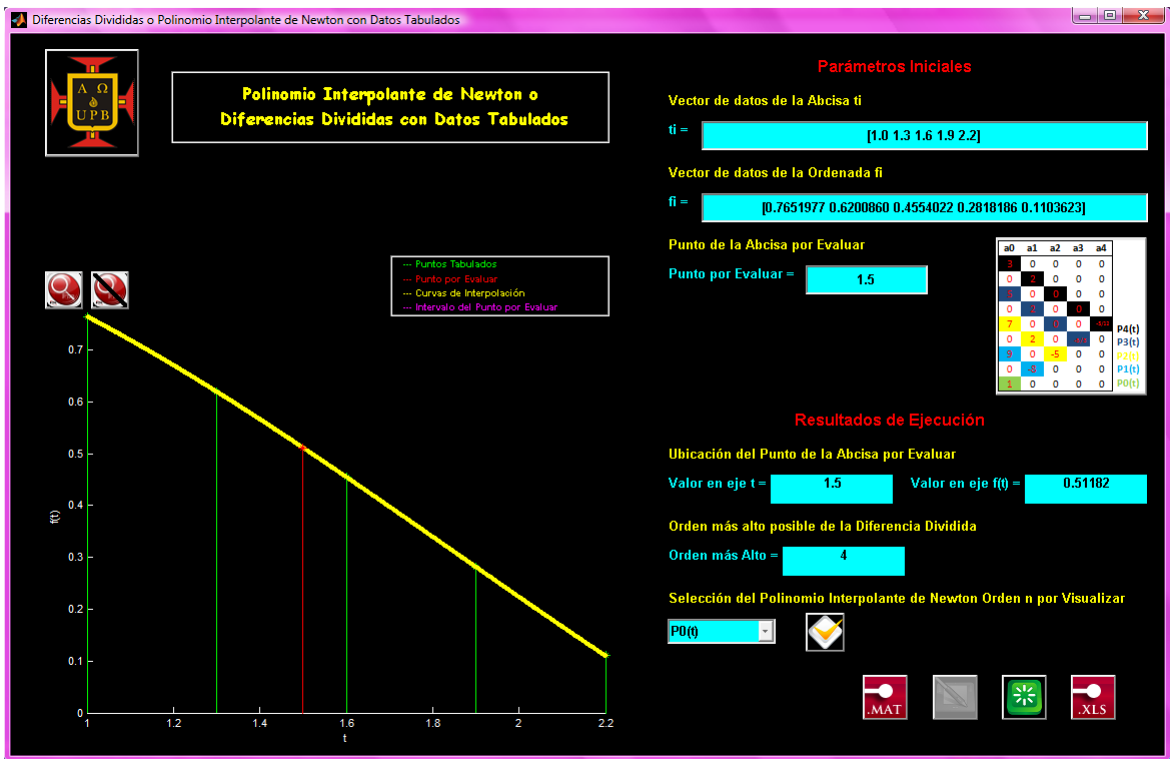
Los coeficientes de la fórmula de las diferencias divididas progresivas del polinomio interpolante de Newton se encuentran a lo largo de la diagonal de la tabla. El polinomio es

$$P_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x - 1.0) - 0.1087339(x - 1.0)(x - 1.3) + 0.0658784(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9).$$

$i$	$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \dots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
1	1.3	0.6200860	-0.4837057			
2	1.6	0.4554022	-0.5489460	-0.1087339		
3	1.9	0.2818186	-0.5786120	-0.0494433	0.0658784	
4	2.2	0.1103623	-0.5715210	0.0118183	0.0680685	0.0018251

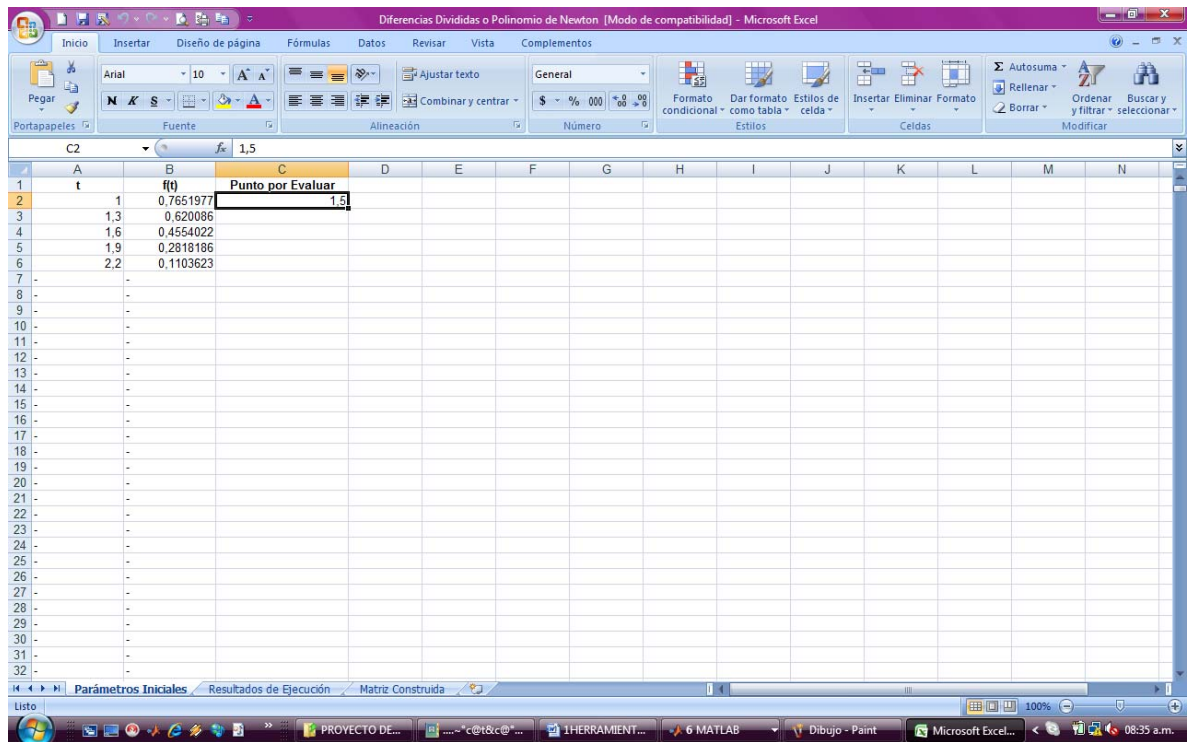
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 3, Interpolación y Aproximación Polinomial. Página 125.

Figura 208. Resultados en GUI de la aplicación Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton



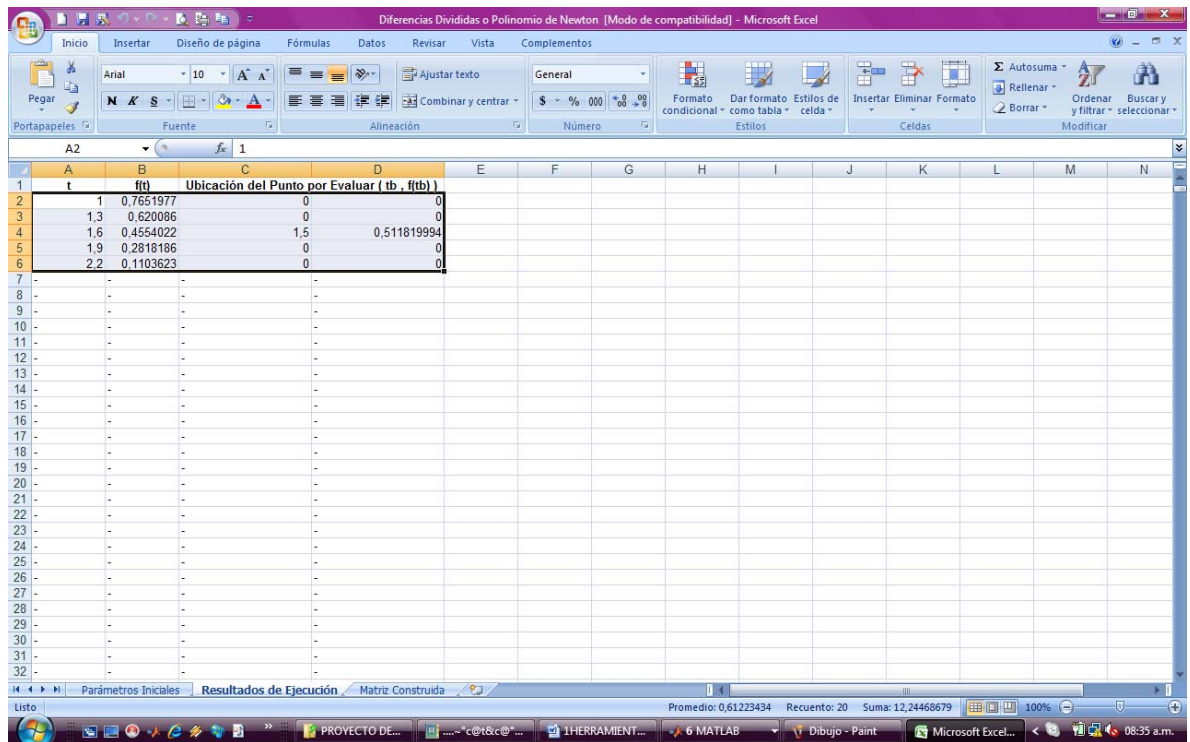
Fuente: Autor

Figura 209. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton



Fuente: Autor

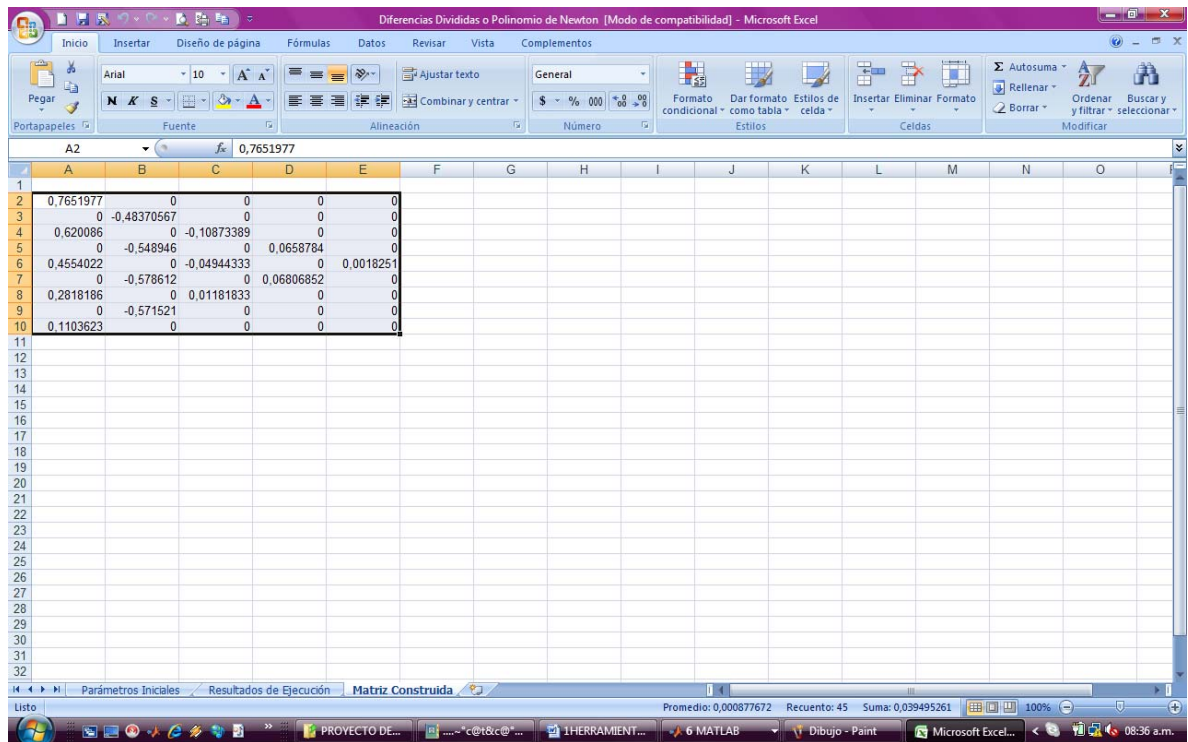
Figura 210. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton



Fuente: Autor

Figura 211. Hoja de Matriz Construida del archivo .xls de Diferencias Divididas o Polinomio Interpolante de Newton





Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 207 muestra un valor de 0.5118200 para un valor en la abcisa de 1.5. La Figura 210 muestra un valor de 0.511819994 para el mismo valor en la abcisa, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3.3. APROXIMACIÓN POLINOMIAL POR MÍNIMOS CUADRADOS

#### 8.3.3.1. REGRESIÓN LINEAL

Para la aplicación Regresión Lineal se plantea un problema con diez puntos bidimensionales. La solución ofrecida por el libro muestra una gráfica con la recta que se aproxima a los diez puntos bidimensionales y muestra los coeficientes del polinomio de primer orden que define la recta. La aplicación muestra en su GUI, las sumatorias de los datos de la abcisa, de los datos de la abcisa al cuadrado, de los datos de la ordenada, el valor de la sumatoria de los datos de la abcisa al cuadrado, las medias de los datos bidimensionales, los coeficientes de la recta de aproximación y el valor para el punto por evaluar. En el eje coordenado bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, el polinomio de primer orden que aproxima los puntos y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la

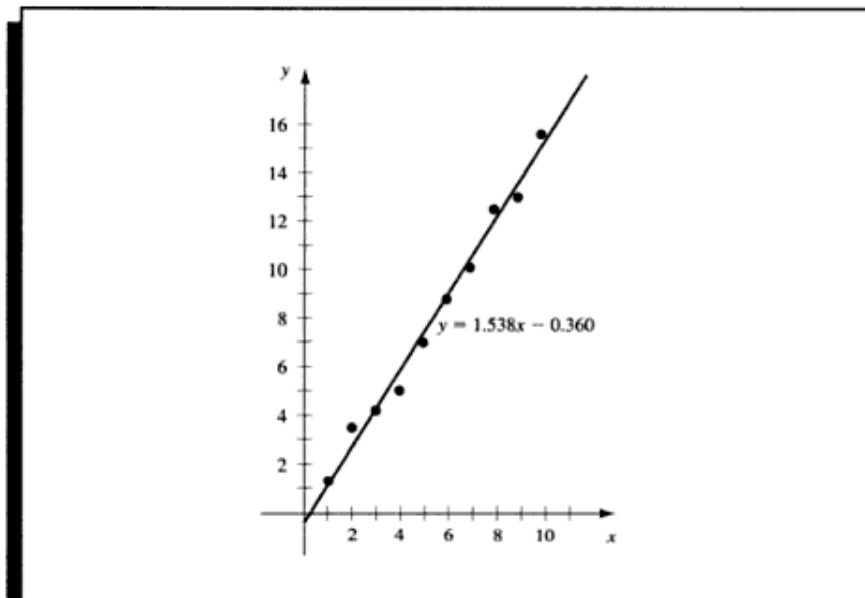
prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los datos que se visualizan en la GUI de la aplicación.

Figura 212. Planteamiento y resultados del problema para Regresión Lineal según el libro

Consideremos el problema de estimar los valores de una función en puntos no tabulados, si contamos con los datos experimentales de la tabla

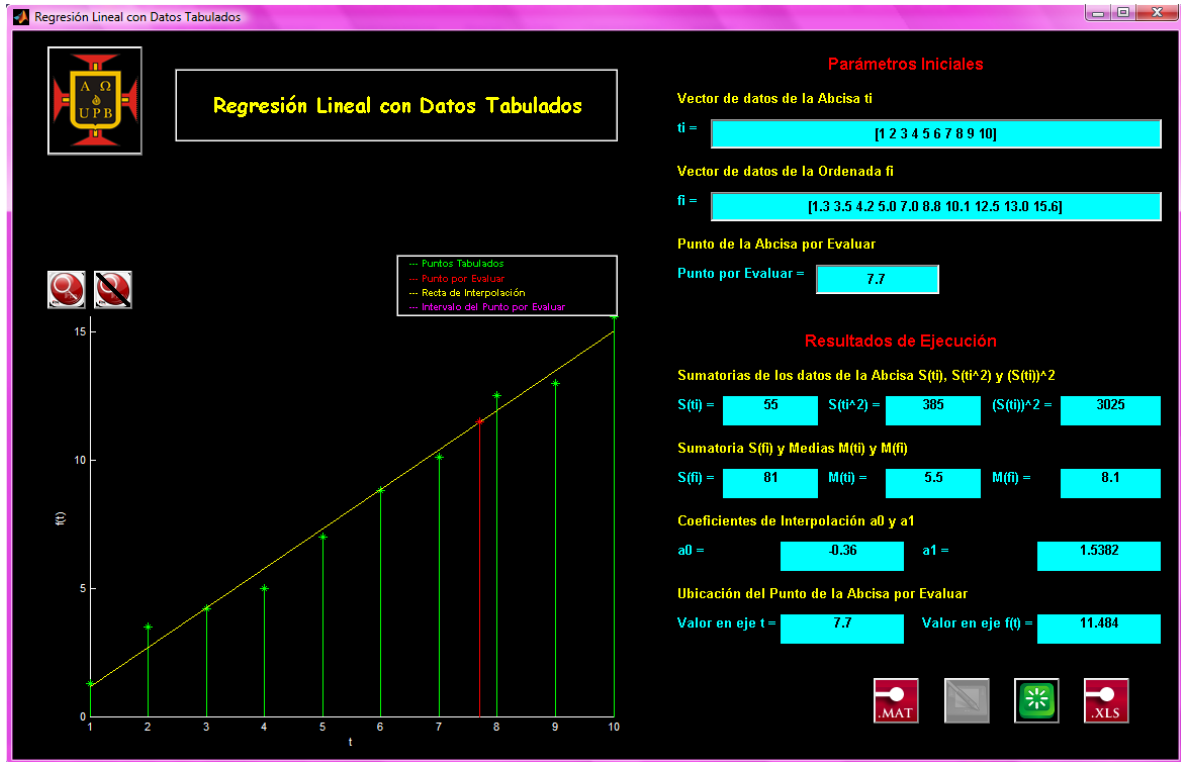
$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
1	1.3	6	8.8
2	3.5	7	10.1
3	4.2	8	12.5
4	5.0	9	13.0
5	7.0	10	15.6

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$
1	1.3	1	1.3	1.18
2	3.5	4	7.0	2.72
3	4.2	9	12.6	4.25
4	5.0	16	20.0	5.79
5	7.0	25	35.0	7.33
6	8.8	36	52.8	8.87
7	10.1	49	70.7	10.41
8	12.5	64	100.0	11.94
9	13.0	81	117.0	13.48
10	15.6	100	156.0	15.02
55	81.0	385	572.4	$E = \sum_{i=1}^{10} (y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$



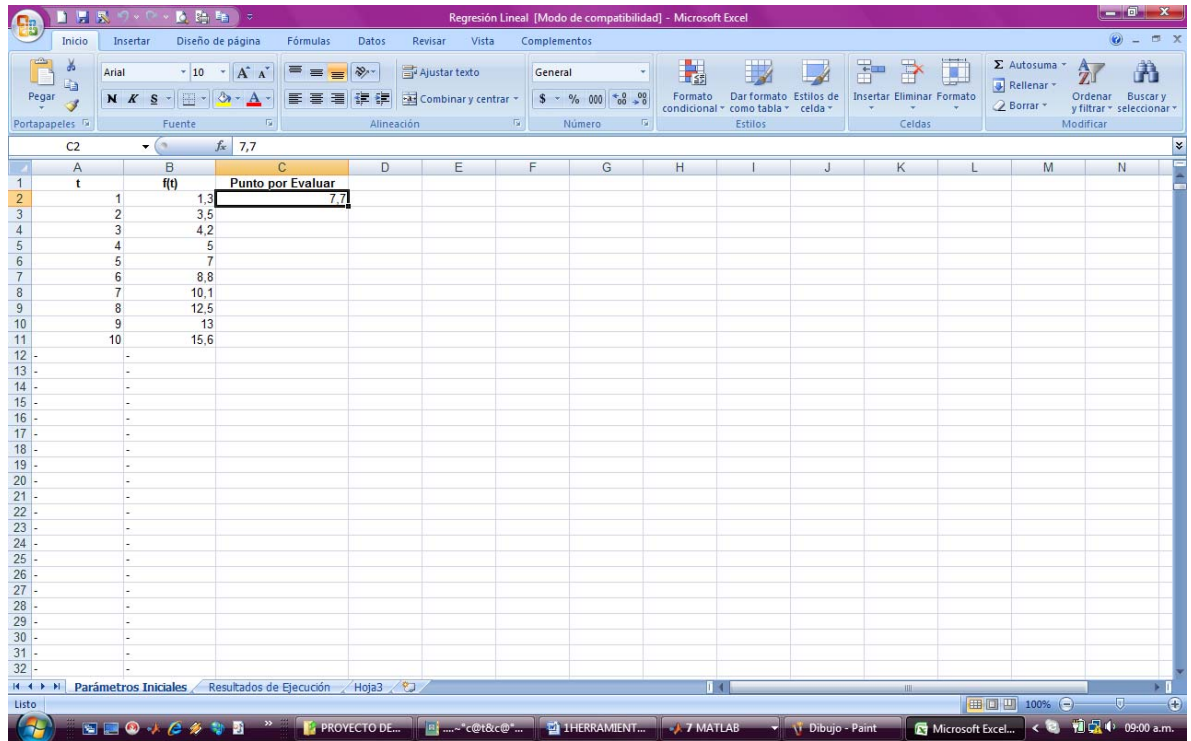
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 8, Teoría de la Aproximación. Página 487.

Figura 213. Resultados en GUI de la aplicación Regresión Lineal



Fuente: Autor

Figura 214. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Regresión Lineal



Fuente: Autor

Figura 215. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Regresión Lineal

t	f(t)	Sum(t)	Sum(t <sup>2</sup> )	(Sum(t)) <sup>2</sup>	Sum(f(t))	Media de t	Media de f(t)	Coefficiente a1	Coefficiente a0	Ubicación del Punto por Evaluar (tc, f(tc))
1	1,3	1	1	3025	1,3	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
2	3,5	3	5	3025	4,8	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
3	4,2	6	14	3025	9	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
4	5	10	30	3025	14	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
5	7	15	55	3025	21	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
6	8,8	21	91	3025	29,8	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
7	10,1	28	140	3025	39,9	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
8	12,5	36	204	3025	52,4	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	7,7
9	13	45	285	3025	65,4	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0
10	15,6	55	385	3025	81	5,5	8,1	1,538181818	-0,36	0

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 212 muestran valores de coeficientes del polinomio de primer orden de 1.538 y -0.360. La Figura 215 muestra valores de coeficientes del polinomio de primer orden de 1.538181818 y -0.36 respectivamente. Adicionalmente, las gráficas de las Figuras 212 y 213 son idénticas, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.3.3.2. REGRESIÓN CUADRÁTICA

Para la aplicación Regresión Cuadrática se plantea un problema con cinco puntos bidimensionales. La solución ofrecida por el libro muestra una gráfica con el polinomio de orden dos que se aproxima a los cinco puntos bidimensionales y muestra los coeficientes del polinomio de segundo orden que define la curva. La aplicación muestra en su GUI, las sumatorias de los datos de la abcisa, de los datos de la abcisa al cuadrado, de los datos de la abcisa al cubo, de los datos de abcisa a la cuatro, de los datos de la ordenada, de los datos de la abcisa por los datos de la ordenada, los coeficientes del polinomio de segundo orden de aproximación y el valor para el punto por evaluar. En el eje coordenado

bidimensional, muestra los puntos discretos ingresados, el polinomio de segundo orden que aproxima los puntos y el punto por evaluar interpolado. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los datos que se visualizan en la GUI de la aplicación.

Figura 216. Planteamiento y resultados del problema para Regresión Cuadrática según el libro

Ajuste los datos de la tabla con el polinomio discreto de mínimos cuadrados de segundo grado. En este problema,  $n = 2$ ,  $m = 5$ , y las tres ecuaciones normales son

$$\begin{aligned} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 &= 8.7680, \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 &= 5.4514, \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 &= 4.4015. \end{aligned}$$

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$y_i$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

Podemos resolver este sistema con un programa de álgebra por computadora. En Maple, primero definimos las ecuaciones

```
>eq1:=5*a0+2.5*a1+1.875*a2=8.7680;
>eq2:=2.5*a0+1.875*a1+1.5625*a2=5.4514;
>eq3:=1.875*a0+1.5625*a1+1.3828*a2=4.4015;
```

Para resolver el sistema hacemos

`>solve((eq1,eq3),(a0,a1,a2));`

lo que implica, con Digits:-5

$$a_0 = 1.0051 \quad a_1 = 0.86468 \quad a_2 = 0.84316$$

Así pues, el polinomio de mínimos cuadrados de segundo grado que ajusta los datos anteriores es

$$P_2(x) = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2$$

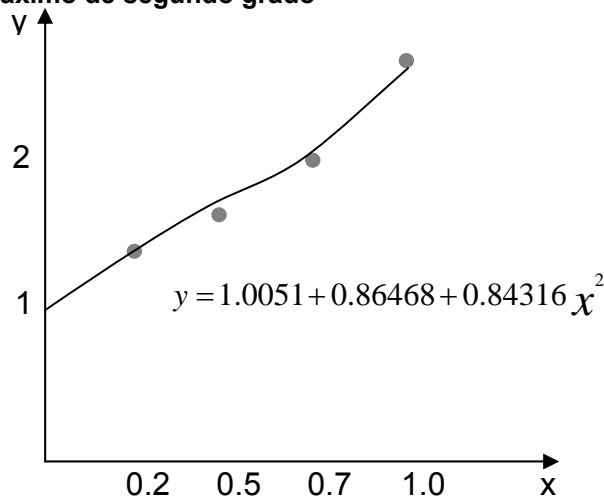
Cuya gráfica aparece a continuación

En los valores dados de X1 tenemos las aproximaciones que se dan en la tabla.

El error total,

$$F_2 = \sum_{i=1}^5 (y_i - P(x_i))^2 = 2.74 \times 10^{-4}$$

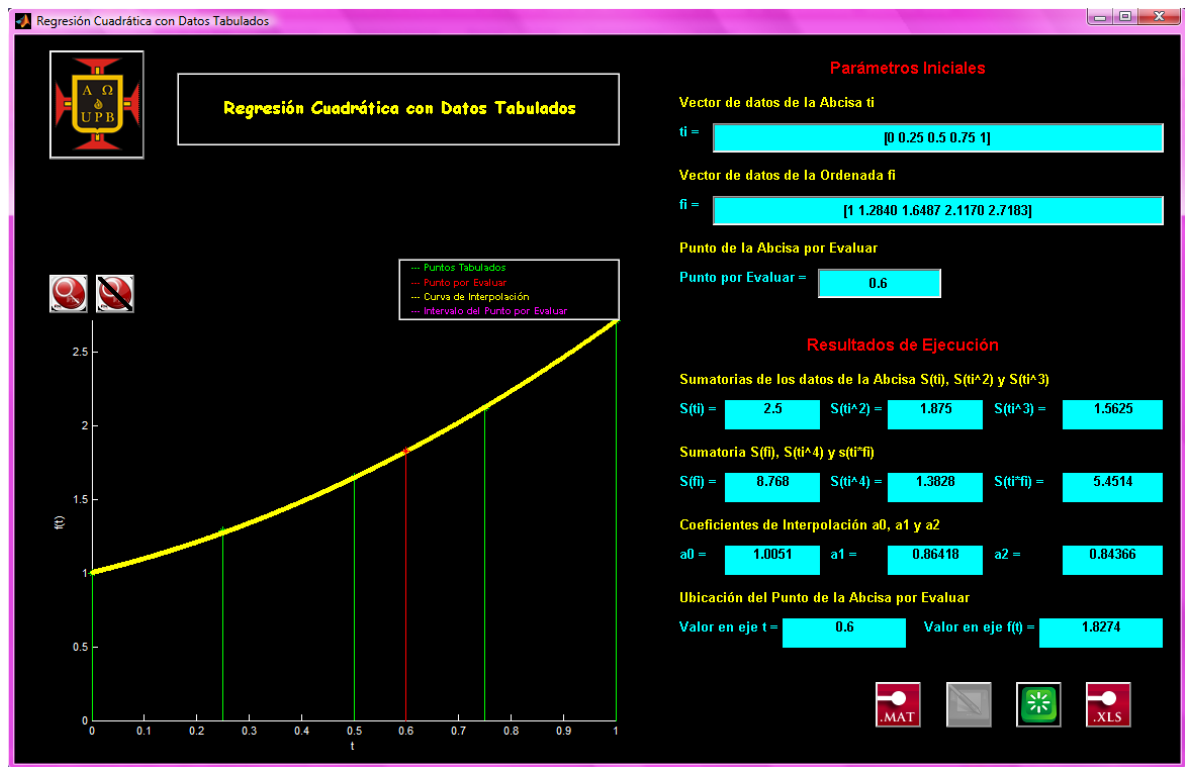
es el menor que puede obtenerse usando un polinomio que sea como máximo de segundo grado



i	1	2	3	4	5
$X_i$	0	0.25	0.5	0.75	1.00
$Y_i$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183
$P(x)$	1.0051	1.2740	1.6482	2.1279	2.7129
$Y_i - P(x)$	-0.0051	0.0100	0.0004	-0.0109	0.0054

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 8, Teoría de la Aproximación. Página 489.

Figura 217. Resultados en GUI de la aplicación Regresión Cuadrática



Fuente: Autor



Figura 218. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Regresión Cuadrática

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	t	f(t)	Punto por Evaluar											
2	0	1	0,6											
3	0,25	1,284												
4	0,5	1,6487												
5	0,75	2,117												
6	1	2,7183												
7	-	-												
8	-	-												
9	-	-												
10	-	-												
11	-	-												
12	-	-												
13	-	-												
14	-	-												
15	-	-												
16	-	-												
17	-	-												
18	-	-												
19	-	-												
20	-	-												
21	-	-												
22	-	-												
23	-	-												
24	-	-												
25	-	-												
26	-	-												
27	-	-												
28	-	-												
29	-	-												
30	-	-												
31	-	-												
32	-	-												

Fuente: Autor

Figura 219. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Regresión Cuadrática

t	f(t)	Sum(t)	Sum(t <sup>2</sup> )	Sum(t <sup>3</sup> )	Sum(f(t))	Sum(t <sup>4</sup> )	Sum(t <sup>5</sup> * f(t))	Coefficiente a2	Coefficiente a1	Coefficiente a0	Ubicación del Punto por Evaluar ( tc , f(tc) )
0	1	0	0	0	1	0	0	0.843657143	0.864182857	1.005137143	0
0.25	1.284	0.25	0.0625	0.015625	2.284	0.00390625	0.321	0.843657143	0.864182857	1.005137143	0
0.5	1.6487	0.75	0.3125	0.140625	3.9327	0.06640625	1.14535	0.843657143	0.864182857	1.005137143	0
0.75	2.117	1.5	0.875	0.5625	6.0497	0.3828125	2.7331	0.843657143	0.864182857	1.005137143	0.6
1	2.7183	2.5	1.875	1.5625	8.768	1.3828125	5.4514	0.843657143	0.864182857	1.005137143	0

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 216 muestran valores de coeficientes del polinomio de segundo orden de 0.84316, 0.86468 y 1.0051. La Figura 219 muestra valores de coeficientes del polinomio de segundo orden de 0.843657143, 0.864182857 y 1.005137143 respectivamente. Adicionalmente, las gráficas de las Figuras 216 y 217 son idénticas, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## 8.4. CAPÍTULO IV – DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

### 8.4.1. DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

Para la aplicación Diferenciación Numérica se plantea un problema de un polinomio de orden cuatro. La solución ofrecida por el libro muestra los valores de la derivada de dicho polinomio evaluada en un punto determinado mediante diferencias hacia atrás, diferencias hacia delante y diferencias centrales empleando 5 puntos con un tamaño de paso de 0.25. La aplicación halla la

derivada empleando diferencias centrales, el método que ofrece el error más bajo, configurando la GUI Diferenciación Numérica de una Función Ingresada para un tamaño de paso de 0.25 y muestra en su GUI, la derivada en el punto actual, los puntos anteriores y posteriores y el valor de la derivada en el punto actual. En el eje coordenado bidimensional, muestra la función ingresada y la derivada de la misma. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores de la función y su derivada para cada tiempo.

Figura 220. Planteamiento y resultados del problema para Diferenciación Numérica según el libro

Planteamiento del problema. Teniendo la derivada de

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 12$$

en  $x=0.5$ , usando diferencias divididas finitas y un tamaño de paso  $h=0.25$

	Hacia adelante	Hacia atrás	Centrada
	O(h)	O(h)	O(h)
Estimación	-1.155	-0.714	-0.934
%	-26.5	21.7	-2.4

donde los errores fueron calculados basándose en el valor verdadero - 0.9125.

Solución. Los datos necesarios para este ejemplo son:

$$\begin{aligned} x_{i-2} &= 0 & f(x_{i-2}) &= 1.2 \\ x_{i-1} &= 0.25 & f(x_{i-1}) &= 1.103516 \\ x_i &= 0.5 & f(x_i) &= 0.925 \\ x_{i+1} &= 0.75 & f(x_{i+1}) &= 0.6363281 \\ x_{i+2} &= 1 & f(x_{i+2}) &= 0.2 \end{aligned}$$

La diferencia hacia adelante de exactitud O(h) se calcula como sigue

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375$$

$$\varepsilon = 5.82\%$$

La diferencia hacia atrás de exactitud O(h) se calcula como sigue

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125$$

$$\varepsilon = 3.77\%$$

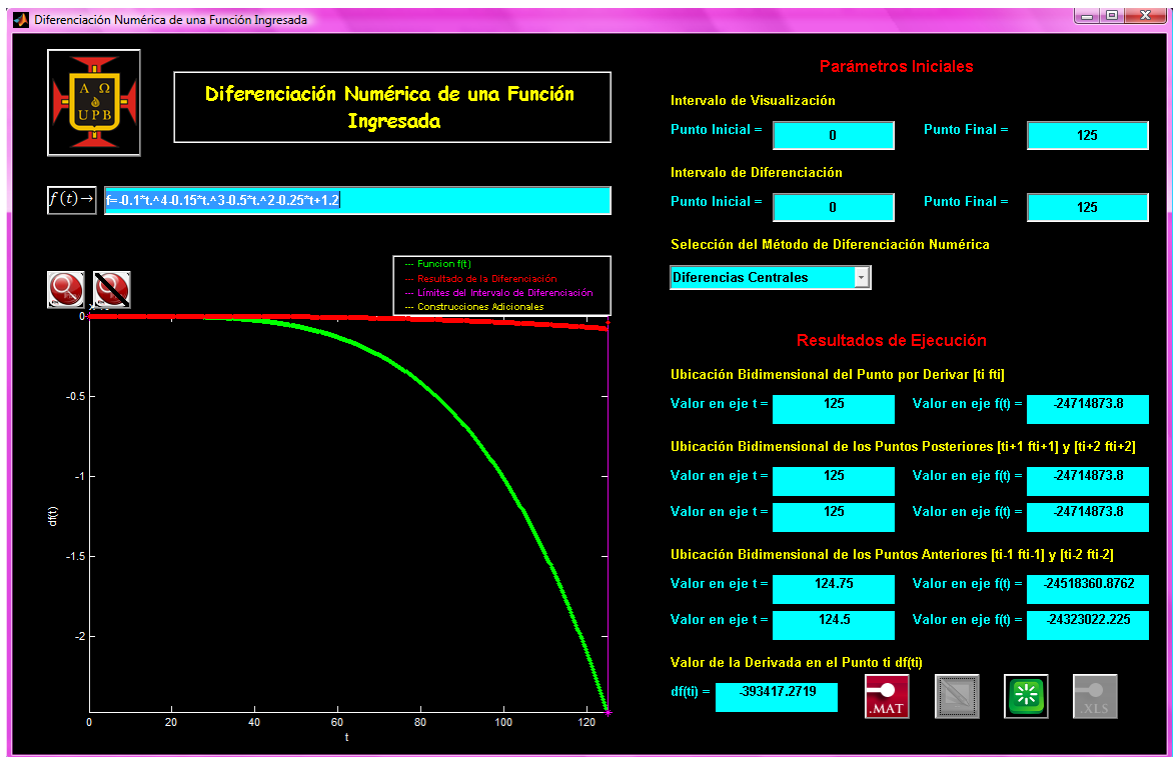
La diferencia centrada de exactitud O(h) se calcula como sigue

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125$$

$$\varepsilon = 0\%$$

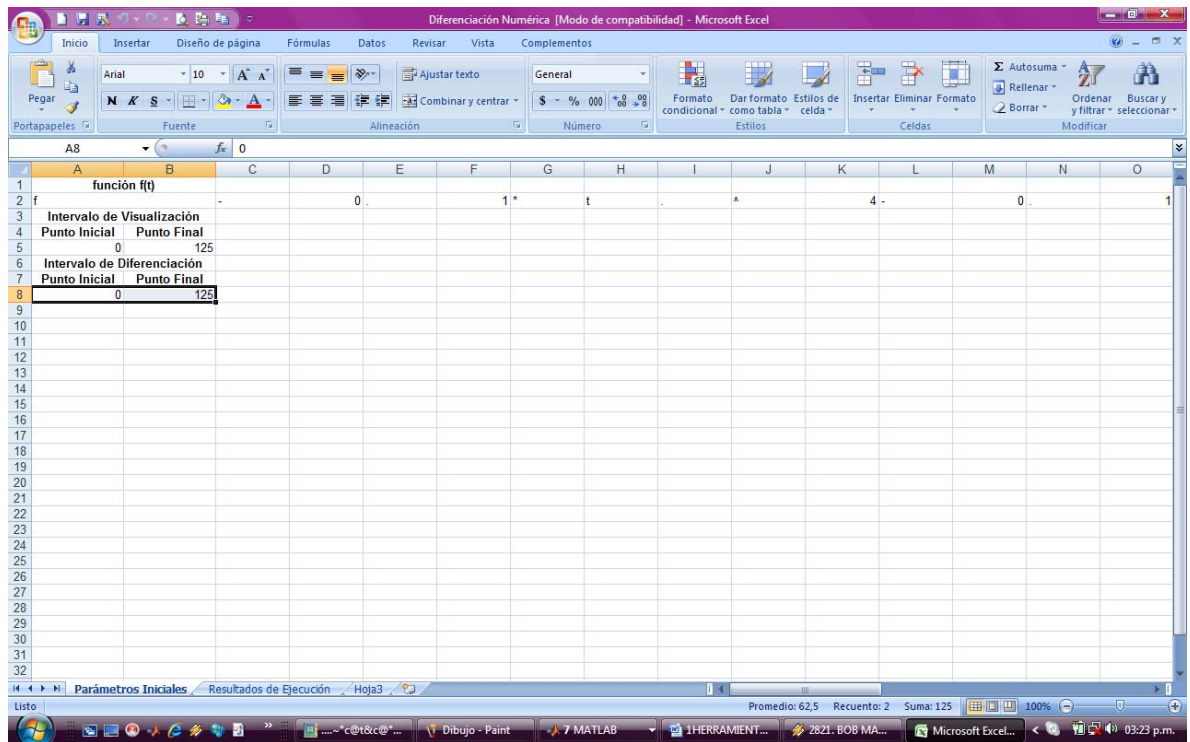
Fuente: CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. Mc GrawGill. México. 2007. Parte VII, Ajuste de Curvas. Capitulo 23, Diferenciación Numérica, Página 671.

Figura 221. Resultados en GUI de la aplicación Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



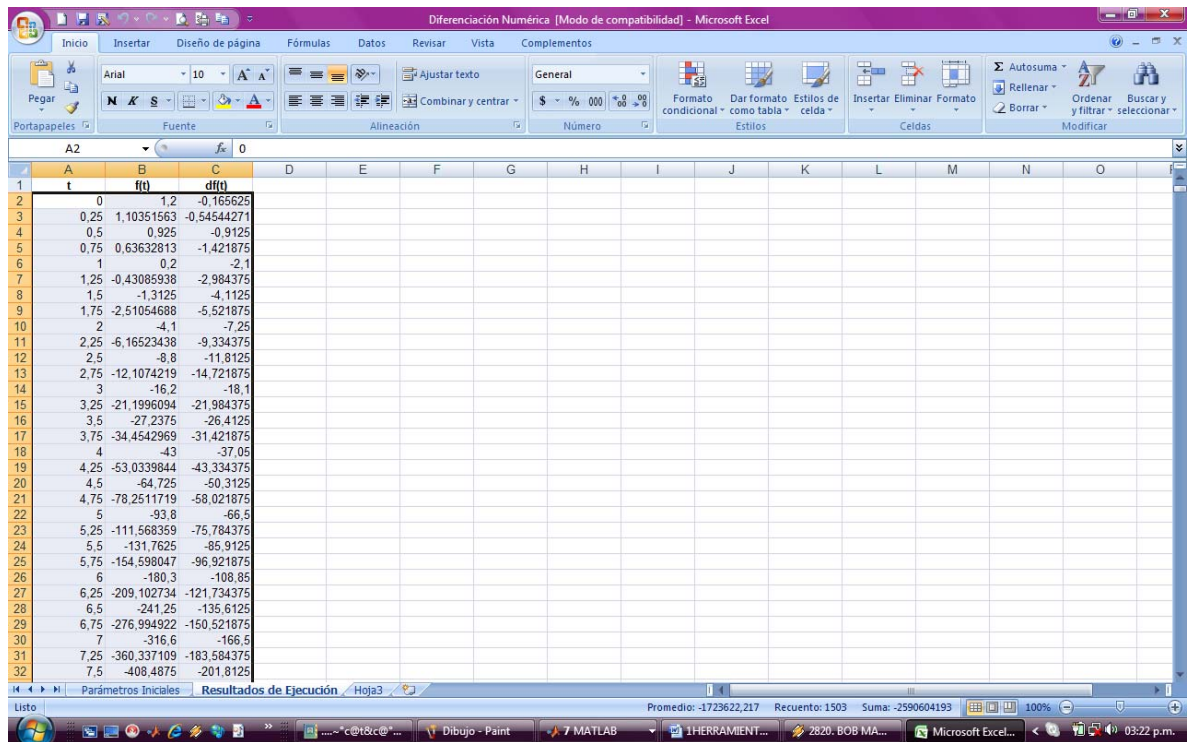
Fuente: Autor

Figura 222. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



Fuente: Autor

Figura 223. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Diferenciación Numérica de una Función Ingresada



Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 220 muestran un valor de  $-0.9125$  para la derivada del polinomio de cuarto orden, evaluada en  $0.5$ , empleando diferencias centrales. La Figura 223 muestra el mismo valor de  $-0.915$  para un  $t = 0.5$ , comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## 8.4.2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

### 8.4.2.1. MÉTODO TRAPEZOIDAL

Para la aplicación Método Trapezoidal se plantea un problema con una función que incluye una raíz cuadrada. La solución ofrecida por el libro muestra el valor de la integral de la función en un intervalo de  $[0, 2]$  empleando el método trapezoidal. La aplicación muestra en su GUI, el punto inicial y final del intervalo de integración, el diferencial de tiempo, los coeficientes que definen el polinomio de primer orden que interpola los límites del intervalo de integración y la integral aproximada de la función. En el eje coordenado bidimensional, muestra la función ingresada, el intervalo de integración y el polinomio de primer orden que construye el trapecio. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y

en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del intervalo de integración, el diferencial de tiempo, los coeficientes polinomiales y el valor aproximado de la integral.

Figura 224. Planteamiento y resultados del problema para Método Trapezoidal según el libro

La regla del trapecio para una función  $f$  en el intervalo  $(0, 2)$  es

$$\int_0^2 f(x)dx \approx f(0) + f(2)$$

y la regla de Simpson para  $f$  en  $(0, 2)$  es

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(t) + f(2)]$$

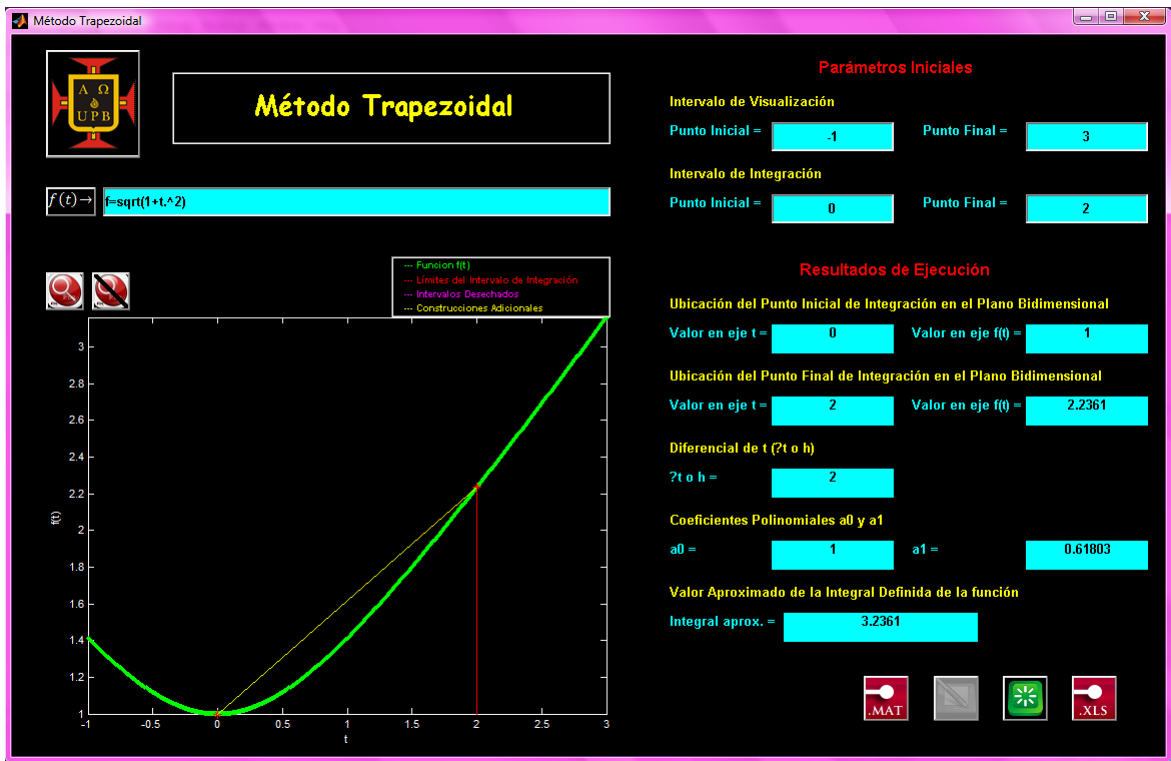
Se resumen los resultados con tres decimales para algunas funciones elementales.

$f(x)$	$x^2$	$x^4$	$t/(x+1)$	$\sqrt{1+x^2}$	$senx$	$e^x$
Valores exactos	2.667	6.400	1.099	2.958	1.416	6.389
Trapezoidal	4.000	16.000	1.333	3.326	0.909	8.389
De Simpson	2.667	6.667	1.111	2.964	1.425	6.421

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 4, Diferenciación e Integración Numérica. Página 190.

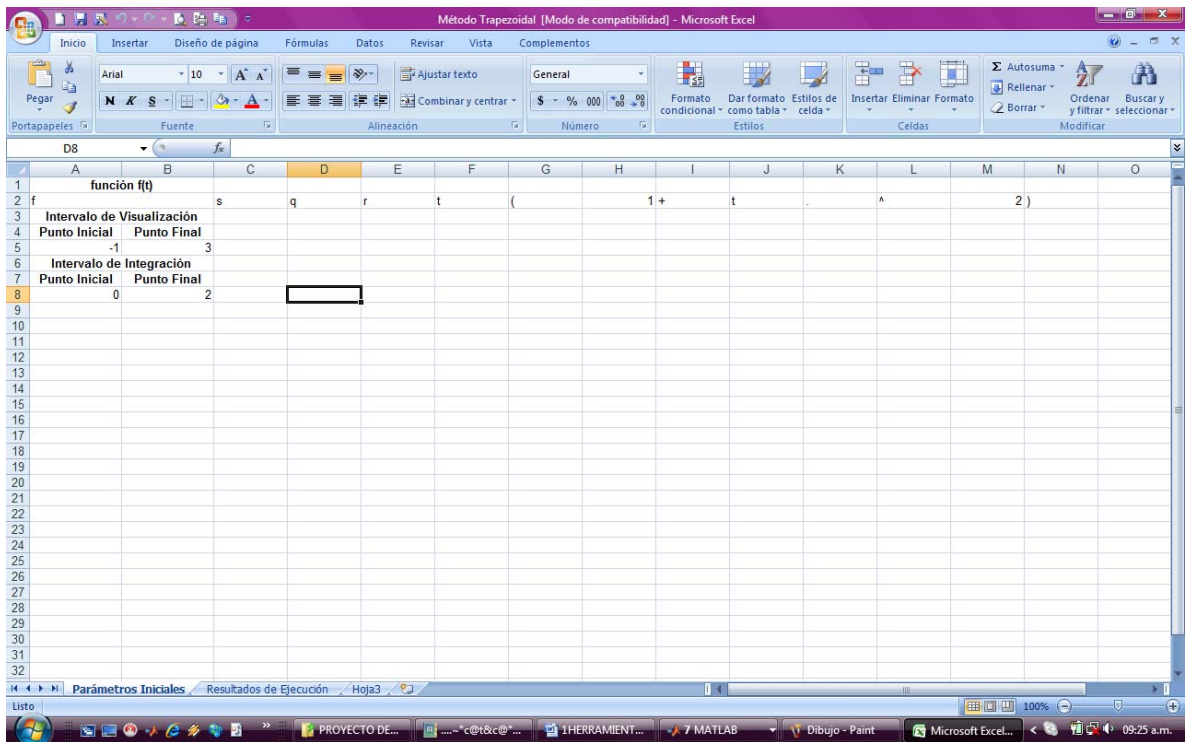
Figura 225. Resultados en GUI de la aplicación Método Trapezoidal





Fuente: Autor

Figura 226. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método Trapezoidal



Fuente: Autor

Figura 227. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método Trapezoidal

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ta	f(ta)	tb	f(tb)	Valor de la Integral	$\Delta t$	Coeficiente a0	Coeficiente a1
2	0	1	2	2.23606798	3.236067977	2	1	0.618033989

Fuente: Autor

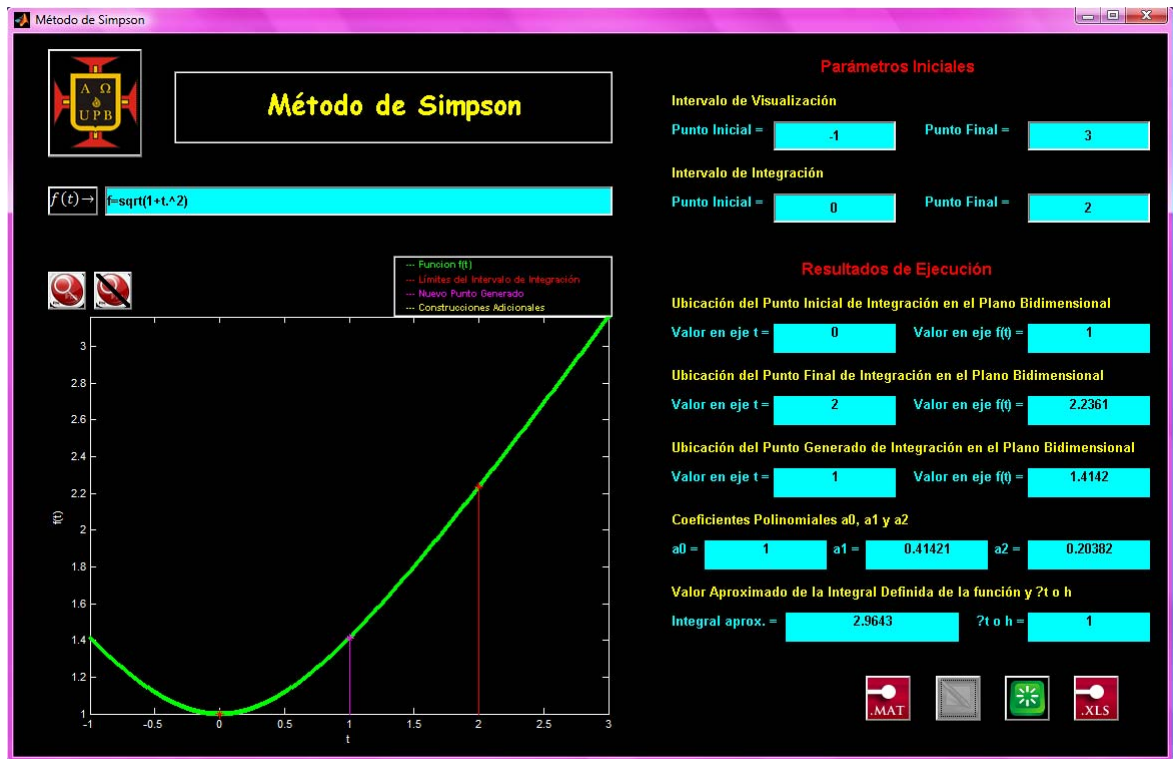
Se puede observar que el resultado de la Figura 224 muestra un valor para la integral de la función de 3.326. La Figura 227 muestra un valor para la integral de la función de 3.236067977, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

#### 8.4.2.2. MÉTODO DE SIMPSON

Para la aplicación Método de Simpson se plantea el mismo problema que para la aplicación Método Trapezoidal, planteamiento disponible en la Figura 224. La solución ofrecida por el libro muestra el valor de la integral de la función en un intervalo de  $[0, 2]$  empleando el método de Simpson. La aplicación muestra en su GUI, el punto inicial y final del intervalo de integración, el punto generado de integración, los coeficientes que definen el polinomio de segundo orden que interpola los puntos de integración, la integral aproximada de la función y el diferencial de tiempo. En el eje coordenado bidimensional, muestra la función ingresada, el intervalo de integración, el punto generado y el polinomio de segundo orden. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los

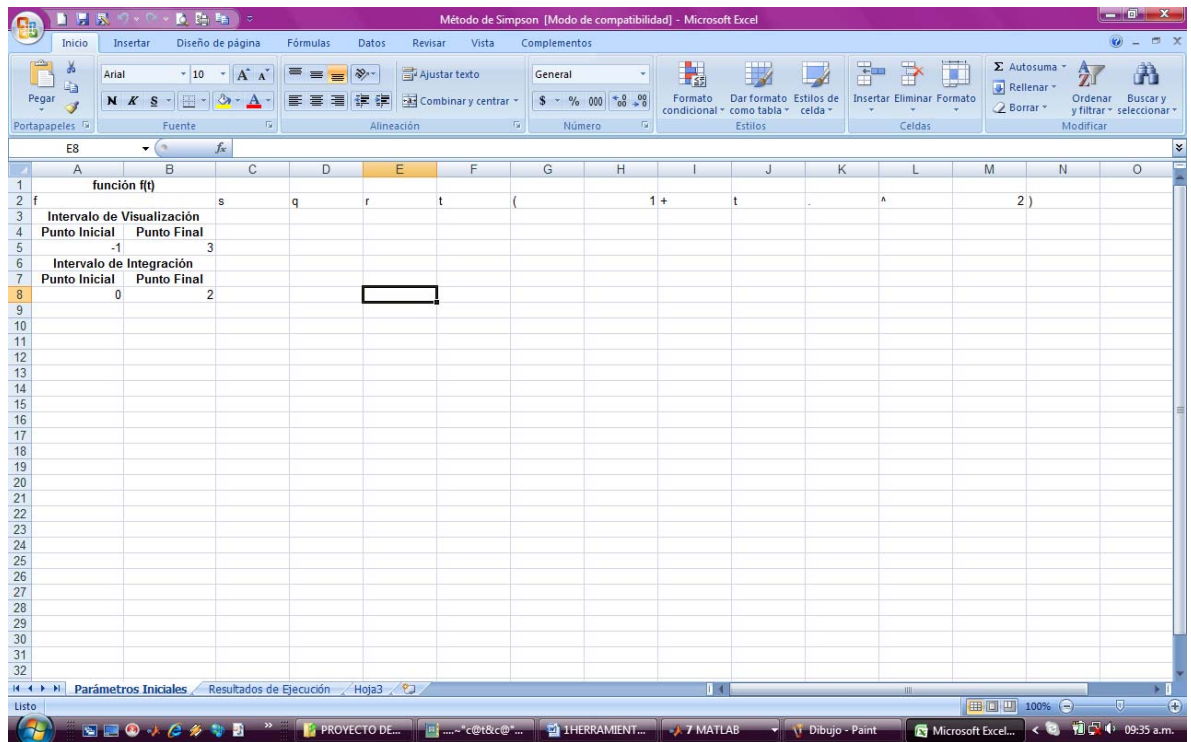
límites del intervalo de integración, el punto generado, el diferencial de tiempo, los coeficientes polinomiales y el valor aproximado de la integral.

Figura 228. Resultados en GUI de la aplicación Método de Simpson



Fuente: Autor

Figura 229. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Simpson



Fuente: Autor

Figura 230. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Simpson

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	ta	f(ta)	tb	f(tb)	tc	f(tc)	Valor de la Integral	$\Delta t$	Coeficiente a0	Coeficiente a1	Coeficiente a2
2	0	1	2	2.23606798	1	1.41421356	2.964307409	1	1	0.414213562	0.203820426

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 224 muestra un valor para la integral de la función de 2.964. La Figura 230 muestra un valor para la integral de la función de 2.964307409, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.4.2.3. MÉTODO DE CUADRATURA DE GAUSS

Para la aplicación Método de Cuadratura de Gauss se plantea un problema de naturaleza exponencial. La solución ofrecida por el libro muestra el valor de la integral de la función en un intervalo de  $[1, 1.5]$  empleando el método de Cuadratura de Gauss con dos puntos adicionales. La aplicación muestra en su GUI, el punto inicial y final del intervalo de integración, los puntos generados de integración y la integral aproximada de la función. En el eje coordenado bidimensional, muestra la función ingresada, el intervalo de integración, la nueva función, los puntos generados, los límites del nuevo intervalo de integración y la recta adicional que incluye el método. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del intervalo de integración, los límites del

nuevo intervalo de integración, los puntos generados y el valor aproximado de la integral.

Figura 231. Planteamiento y resultados del problema para Método de Cuadratura de Gauss según el libro

Consideremos el problema de obtener aproximaciones a

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$$

La tabla contiene los valores de las formulas de Newton-cotes.  
EL valor exacto de la integral con siete decimales es 0.1093643

n	0	1	2	3	4
Fórmulas cerradas		0.1183197	0.1093104	0.1093404	-0.1093643
Fórmulas abiertas	0.1048057	0.1063473	0.1094116	0.1093971	

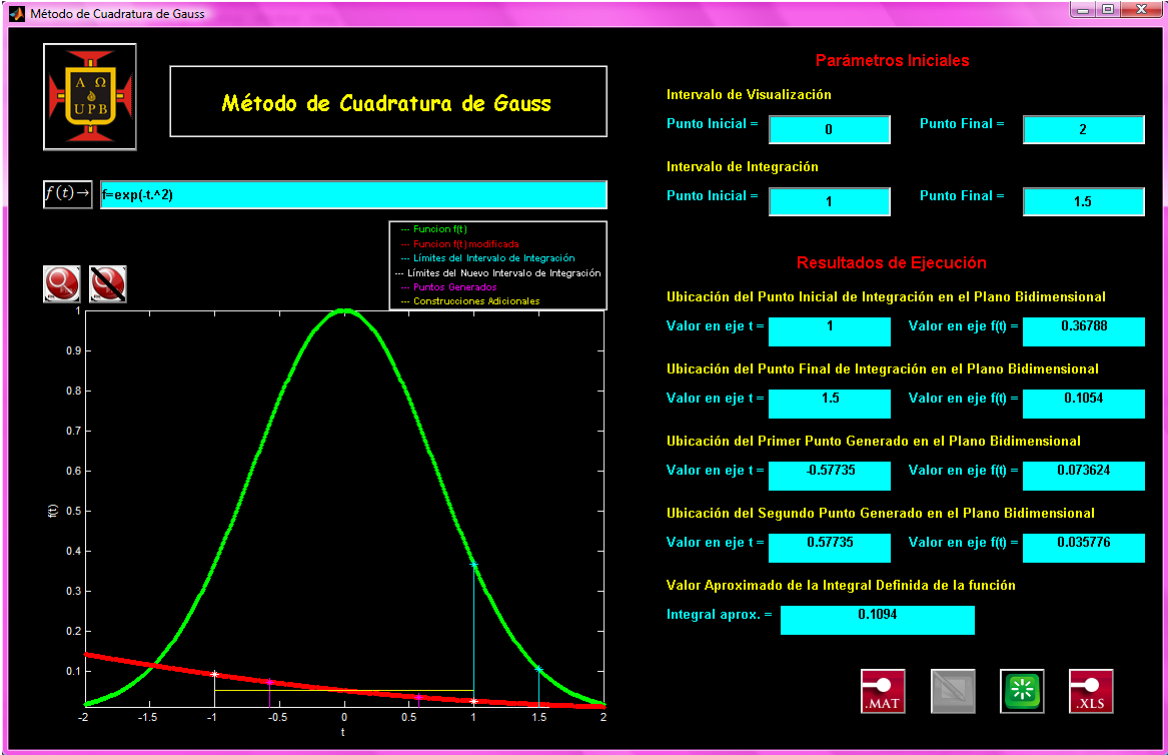
Al utilizar los valores de la tabla obtenemos mejores aproximaciones de la cuadratura gaussiana en este problema

**N=2**

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \left[ e^{-(5+0.5773502692)^3/16} + e^{-(5-0.5773502692)^7/16} \right] = 0.1094003$$

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capitulo 4, Diferenciación e Integración Numérica. Página 225.

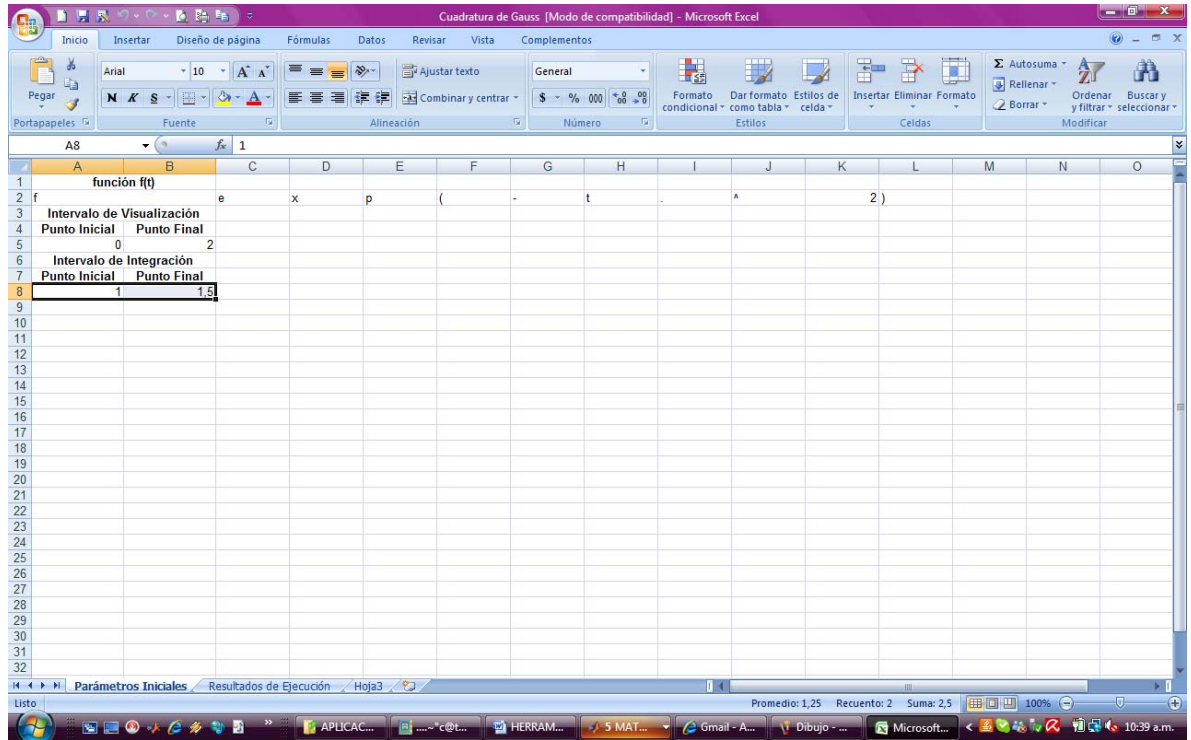
Figura 232. Resultados en GUI de la aplicación Método de Cuadratura de Gauss



Fuente: Autor



Figura 233. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Cuadratura de Gauss



Fuente: Autor

Figura 234. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Cuadratura de Gauss

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Punto Inicial de Integración ta	f(ta)	Punto Final de Integración tb	f(tb)	Nuevo Punto Inicial de Integración tp1	Nueva f(tp1)	Nuevo Punto Final de Integración tp2	Nueva f(tp2)
2	1	0,36787944	1,5	0,10539922	-1	0,09196986	1	0,02634981
3								
4								
5	Punto Generado 1 tz1	Nueva f(tz1)	Punto Generado tz2	Nueva f(tz2)	Valor de la Integral			
6	-0,577350269	0,07362403	0,577350269	0,03577623	0,109400261			
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								
29								
30								
31								
32								

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 231 muestra un valor para la integral de la función de 0.1094003. La Figura 234 muestra un valor para la integral de la función de 0.109400261, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.4.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA COMPUESTA

#### 8.4.3.1. MÉTODO TRAPEZOIDAL COMPUESTO

Para la aplicación Método Trapezoidal Compuesto se plantea un problema con la función seno. La solución ofrecida por el libro muestra el valor de la integral de la función en un intervalo de  $[0, \pi]$  empleando el método trapezoidal compuesto con 20 subintervalos. La aplicación muestra en su GUI, el límite izquierdo del

subintervalo actual de integración, el límite derecho del subintervalo actual de integración, coeficientes polinomiales del subintervalo actual de integración, la integral aproximada de la función y el diferencial de tiempo. En el eje coordenado bidimensional, muestra la función ingresada, el intervalo de integración, los subintervalos de integración y las rectas que interpolan los límites de cada subintervalo. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del subintervalo de integración, el valor aproximado de la integral acumulado hasta ese subintervalo, el diferencial de tiempo y los coeficientes polinomiales de las rectas de interpolación.

Figura 235. Planteamiento y resultados del problema para Método Trapezoidal Compuesto según el libro

Con la regla compuesta de Simpson considere el

$$\int_0^{\pi} \text{sen} x dx \quad \text{con un error absoluto menor de } 0.00002.$$

Esta regla nos da para un  $\mu$  en  $(0, \pi)$

$$\int_0^{\pi} \text{sen} x dx = \frac{h}{3} \left[ 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} \text{sen} x_{2j-1} \right] - \frac{\pi h^4}{180} \text{sen} \mu$$

Dado que el error absoluto debe ser menor que

$$\left| \frac{\pi h^4}{180} \text{sen} \mu \right| \leq \frac{\pi h^4}{180} = \frac{\pi^5}{180 n^4} < 0.00002$$

Sirve para determinar  $n$  y  $h$ . Al completar estos

$$\int_0^{\pi} \text{sen} x dx = \frac{\pi}{60} \left[ 2 \sum_{j=1}^9 \text{sen} \left( \frac{j\pi}{10} \right) + 4 \sum_{j=1}^{10} \text{sen} \left( \frac{(2j-1)\pi}{20} \right) \right] = 2.000006$$

Para asegurarse del grado de exactitud al usar la regla

$$\left| \frac{\pi h^2}{12} \text{sen} \mu \right| \leq \frac{\pi h^2}{12} = \frac{\pi^3}{12 n^2} < 0.00002$$

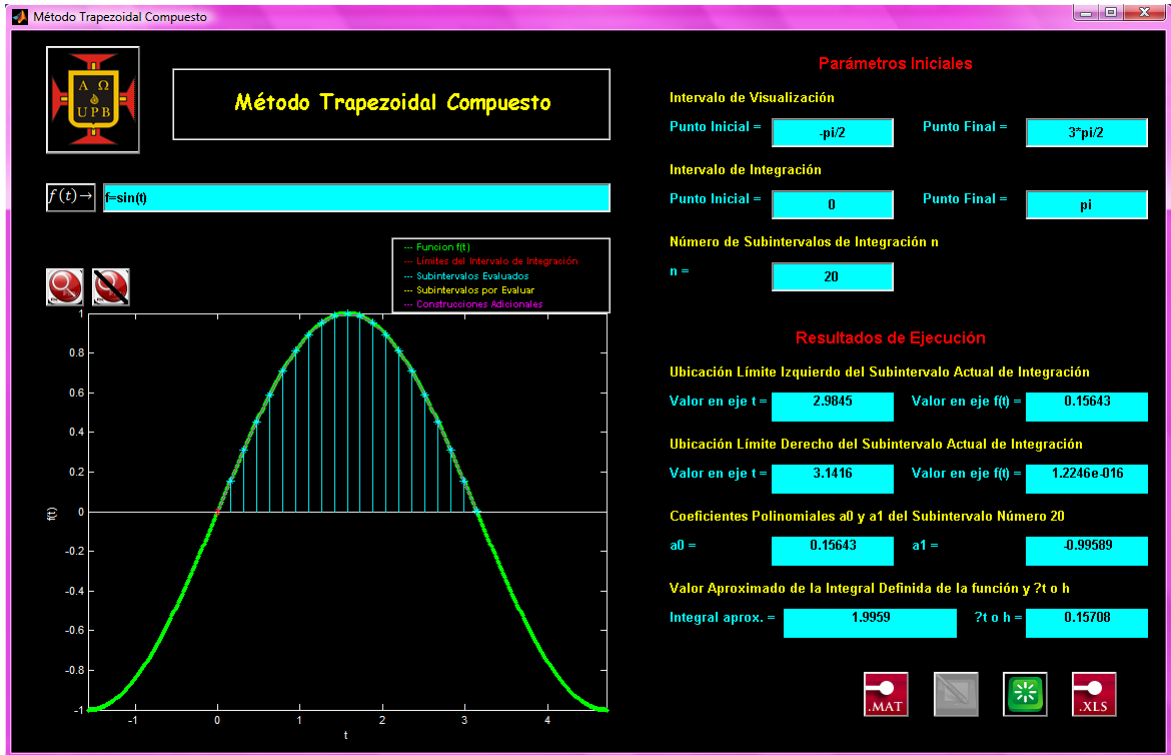
o que  $n \geq 360$ . esto implica realizar un número de cálculos mucho mayor que los que se requiere al aplicar la regla compuesta de Simpson, por lo cual prescindiremos de usar la regla compuesta del trapecio en este problema. Para facilitar la comparación, la regla compuesta del trapecio con  $n=20$  y con  $h=\pi/20$  da

$$\int_0^{\pi} \text{sen} x dx = \frac{\pi}{40} \left[ 2 \sum_{j=1}^{19} \text{sen} \left( \frac{j\pi}{20} \right) + \text{sen} 0 + \text{sen} \pi \right] = \frac{\pi}{40} \left[ 2 \sum_{j=1}^{19} \text{sen} \left( \frac{j\pi}{20} \right) \right] = 1.9958860$$

La respuesta exacta es 2, de manera que la regla de Simpson con  $n=20$  proporciona una respuesta dentro de la cota de error requerida, lo cual evidentemente no sucede en el caso de la regla del trapecio con  $n=20$

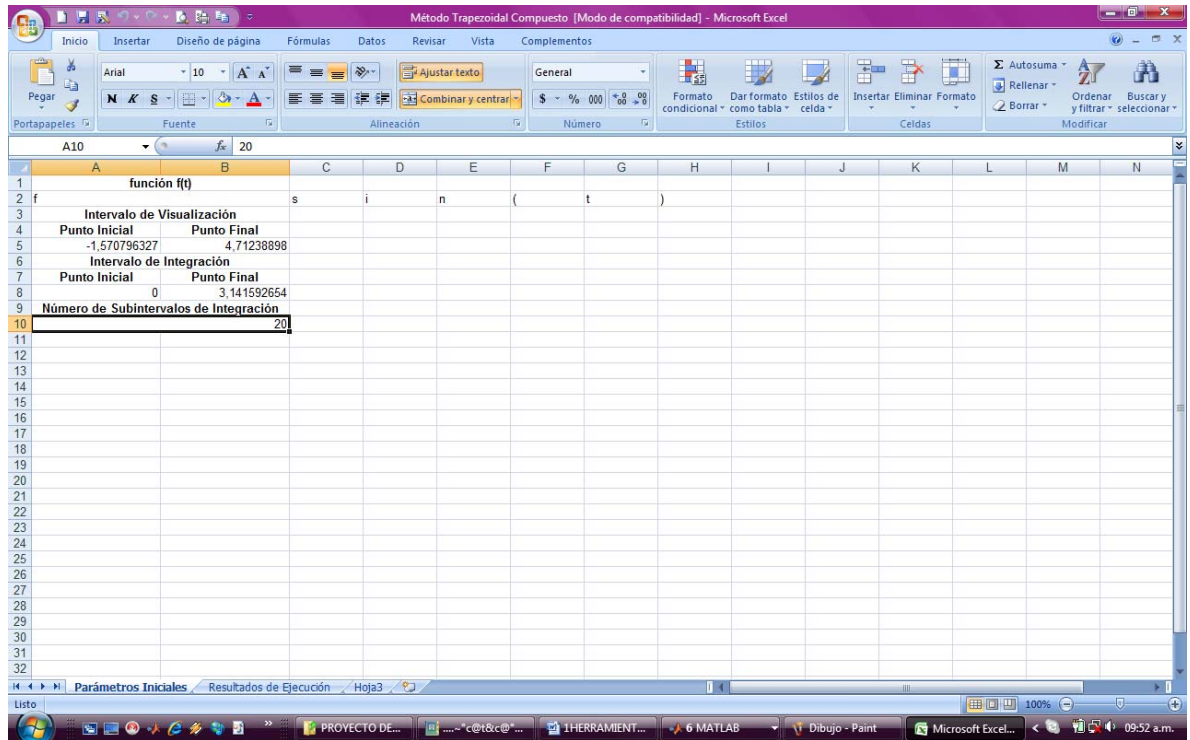
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 4, Diferenciación e Integración Numérica. Página 201.

Figura 236. Resultados en GUI de la aplicación Método Trapezoidal Compuesto



Fuente: Autor

Figura 237. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método Trapezoidal Compuesto



Fuente: Autor

Figura 238. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método Trapezoidal Compuesto

Intervalo de Integración	Limite Izquierdo del Intervalo ( $t_a$ , $f(t_a)$ )	Limite Derecho del Intervalo ( $t_b$ , $f(t_b)$ )	Valor de la Integral	$\Delta t$	Coficiente $a_0$	Coficiente $a_1$
1	0	0.157079633	0.012286334	0.15707963	0	0.995892735
2	0.157079633	0.314159265	0.048842806	0.15707963	0.156434465	0.971370551
3	0.314159265	0.471238898	0.108769275	0.15707963	0.309016994	0.92293
4	0.471238898	0.628318531	0.190590151	0.15707963	0.4539905	0.851763849
5	0.628318531	0.785398163	0.292290733	0.15707963	0.587785252	0.759624446
6	0.785398163	0.942477796	0.411366816	0.15707963	0.707106781	0.648780567
7	0.942477796	1.099557429	0.548886351	0.15707963	0.809016994	0.521961558
8	1.099557429	1.256637061	0.689561644	0.15707963	0.891006524	0.382290123
9	1.256637061	1.413716694	0.841830309	0.15707963	0.951056516	0.23205436
10	1.413716694	1.570796327	0.997942986	0.15707963	0.987688341	0.078378458
11	1.570796327	1.727875959	1.154055664	0.15707963	1	-0.078378458
12	1.727875959	1.884955592	1.306324329	0.15707963	0.987688341	-0.23205436
13	1.884955592	2.042035225	1.45099621	0.15707963	0.951056516	-0.382290123
14	2.042035225	2.199114858	1.584519156	0.15707963	0.891006524	-0.521961558
15	2.199114858	2.35619449	1.703595239	0.15707963	0.809016994	-0.648780567
16	2.35619449	2.513274123	1.805295822	0.15707963	0.707106781	-0.759624446
17	2.513274123	2.670353756	1.887116698	0.15707963	0.587785252	-0.851763849
18	2.670353756	2.827433388	1.947043166	0.15707963	0.4539905	-0.92293
19	2.827433388	2.984513021	1.983599639	0.15707963	0.309016994	-0.971370551
20	2.984513021	3.141592654	1.995885973	0.15707963	0.156434465	-0.995892735

Fuente: Autor

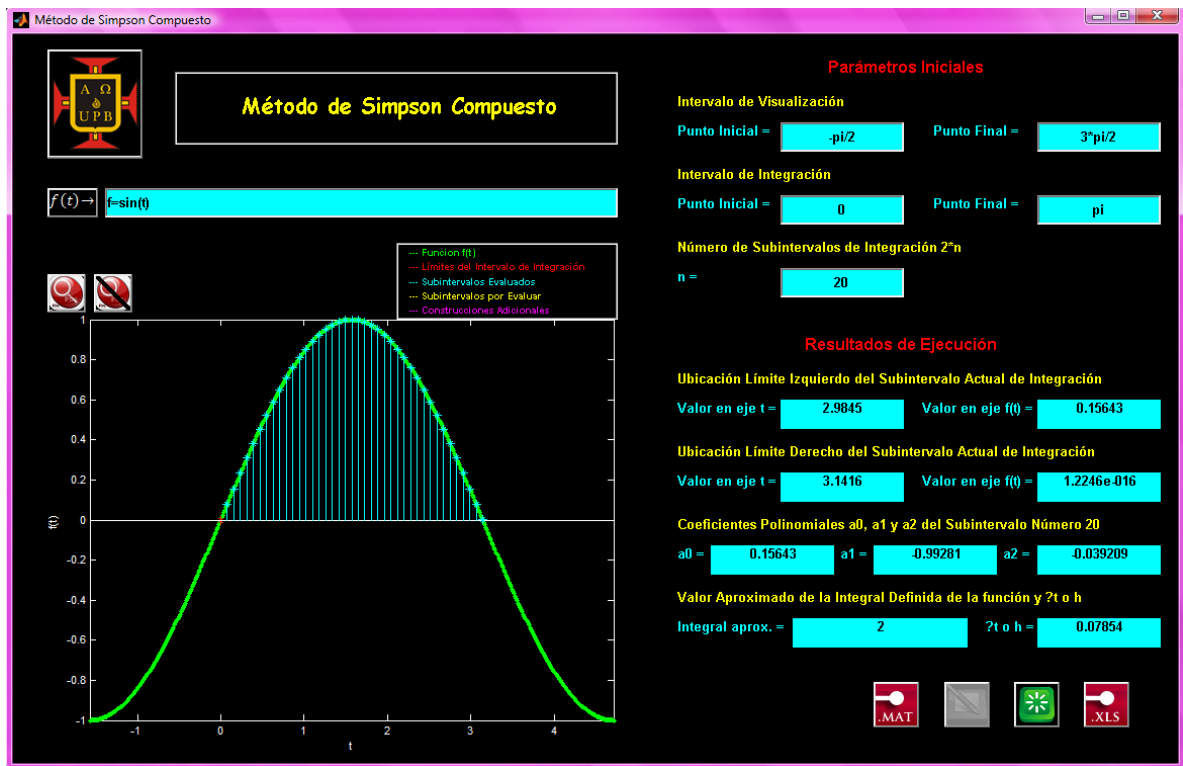
Se puede observar que el resultado de la Figura 235 muestra un valor para la integral de la función de 1.9958860 para 20 subintervalos. La Figura 238 muestra un valor para la integral de la función de 1.995885973 en el subintervalo número 20, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.4.3.2. MÉTODO DE SIMPSON COMPUESTO

Para la aplicación Método de Simpson Compuesto se plantea el mismo problema que para la aplicación Método Trapezoidal Compuesto, planteamiento disponible en la Figura 235. La solución ofrecida por el libro muestra el valor de la integral de la función en un intervalo de  $[0, \pi]$  empleando el método de Simpson compuesto con 20 subintervalos. La aplicación muestra en su GUI, el límite izquierdo del subintervalo actual de integración, el límite derecho del subintervalo actual de integración, coeficientes polinomiales del subintervalo actual de integración, la integral aproximada de la función y el diferencial de tiempo. En el eje coordenado

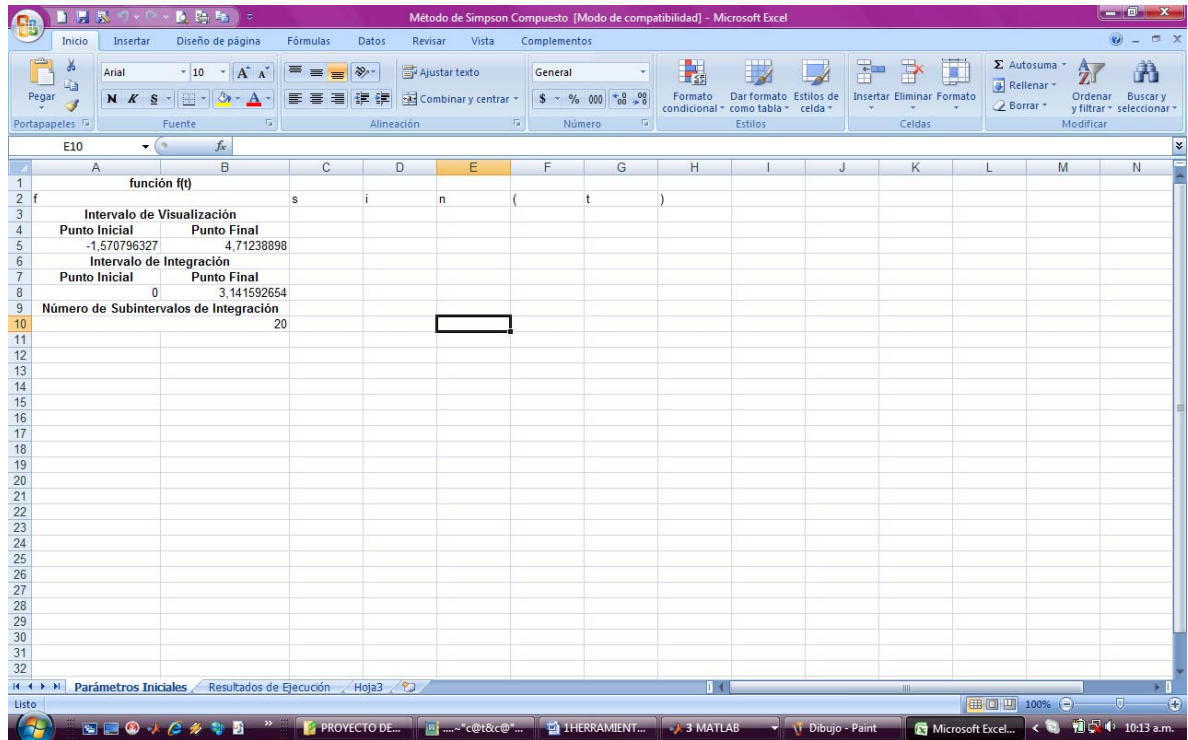
bidimensional, muestra la función ingresada, el intervalo de integración y los subintervalos de integración. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los límites del subintervalo de integración, el punto medio del subintervalo de integración, el valor aproximado de la integral acumulado hasta ese subintervalo, el diferencial de tiempo y los coeficientes polinomiales.

Figura 239. Resultados en GUI de la aplicación Método de Simpson Compuesto



Fuente: Autor

Figura 240. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Simpson Compuesto



Fuente: Autor



Figura 241. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Simpson Compuesto

Intervalo de Integración	Limite Izquierdo del Intervalo ( $t_a$ , $f(t_a)$ )	Limite Derecho del Intervalo ( $t_b$ , $f(t_b)$ )	Punto Medio del Intervalo ( $t_c$ , $f(t_c)$ )	Valor de la Integral	$\Delta t$
1	0	0.157079633	0.156434465	0.078539816	0.012311662
2	0.157079633	0.314159265	0.314159265	0.235619449	0.048943494
3	0.314159265	0.471238898	0.471238898	0.392699082	0.108993499
4	0.471238898	0.628318531	0.628318531	0.549778714	0.190983046
5	0.628318531	0.785398163	0.785398163	0.706858347	0.292893281
6	0.785398163	0.942477796	0.942477796	0.86393798	0.412214835
7	0.942477796	1.099557429	1.099557429	1.021017612	0.546009616
8	1.099557429	1.256637061	1.256637061	1.178097245	0.690983152
9	1.256637061	1.413716694	1.413716694	1.335176878	0.843565713
10	1.413716694	1.570796327	1.570796327	1.49225651	1.000000212
11	1.570796327	1.727875959	1.727875959	1.649336143	1.15643471
12	1.727875959	1.884955592	1.884955592	1.806415776	1.309017271
13	1.884955592	2.042035225	2.042035225	1.963495408	1.453990807
14	2.042035225	2.199114858	2.199114858	2.120575041	1.587785588
15	2.199114858	2.35619449	2.35619449	2.277654674	1.707107142
16	2.35619449	2.513274123	2.513274123	2.434734307	1.809017377
17	2.513274123	2.670353756	2.670353756	2.591813939	1.891006924
18	2.670353756	2.827433388	2.827433388	2.748893572	1.951056929
19	2.827433388	2.984513021	2.984513021	2.905973205	1.987688761
20	2.984513021	3.141592654	3.141592654	3.063052837	2.000000423

Fuente: Autor

Se puede observar que el resultado de la Figura 235 muestra un valor para la integral de la función de 2.000006 para 20 subintervalos. La Figura 241 muestra un valor para la integral de la función de 2.000000423 en el subintervalo número 20, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## 8.5. CAPÍTULO V – SOLUCIÓN NUMÉRICA A SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

### 8.5.1. MÉTODO DE PUNTO FIJO PARA VARIAS VARIABLES

Para la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables se plantea un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres variables independientes. La solución ofrecida por el libro muestra una tabla con los progresos de los valores de las variables y las distancias vectoriales. La aplicación muestra en su GUI, los

valores anteriores y actuales de las variables independientes, la distancia vectorial y la iteración actual de ejecución. En el primer eje coordenado bidimensional, muestra los errores relativos de las variables independientes, las distancias vectoriales y el error de parada con respecto a la distancia vectorial. En el segundo eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de las variables independientes en cada iteración. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores para cada una de las tres variables, los errores relativos de cada una de las variables y la distancia vectorial, todo para cada iteración.

Figura 242. Planteamiento y resultados del problema para Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables según el libro

Considere el sistema no lineal dado por

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}x_3 + 1.06 = 0$$

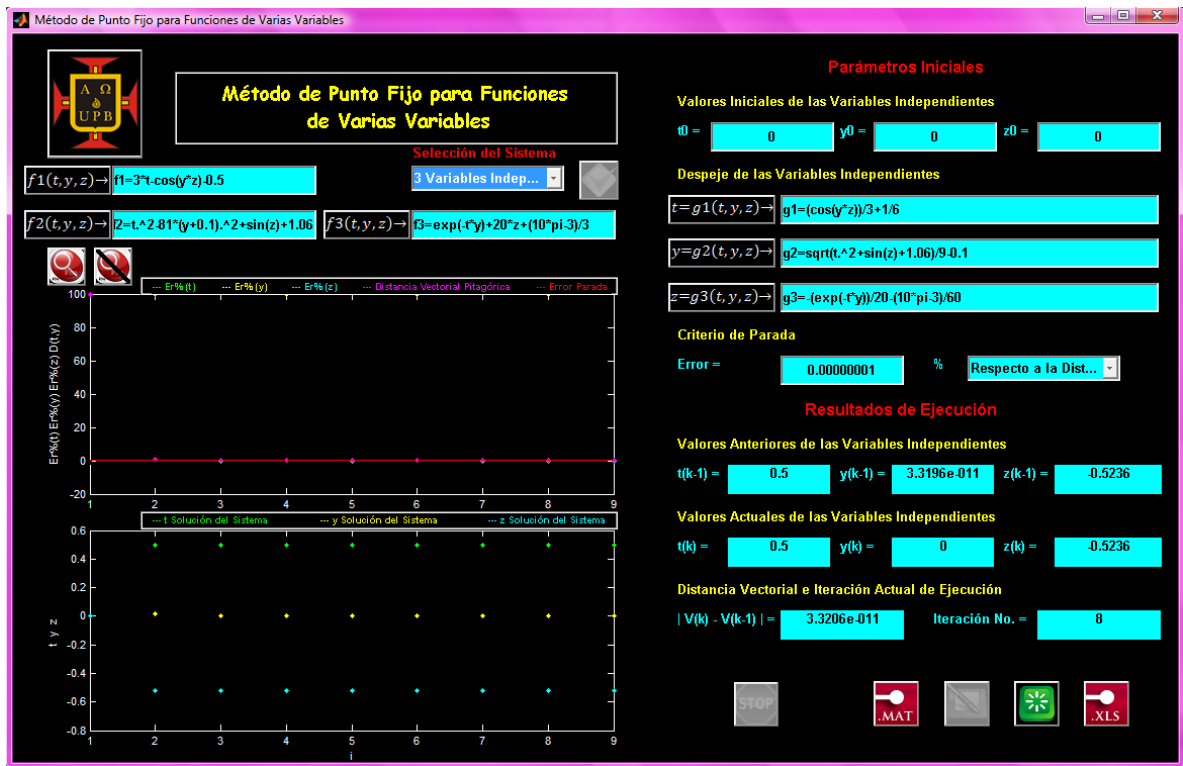
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Los resultados se incluyen en la tabla

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	-0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	-0.52336331	$9.4 \times 10^{-3}$
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	$2.3 \times 10^{-4}$
4	0.50000000	0.00000003	-0.52359847	$1.2 \times 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00000002	-0.52359877	$3.4 \times 10^{-7}$

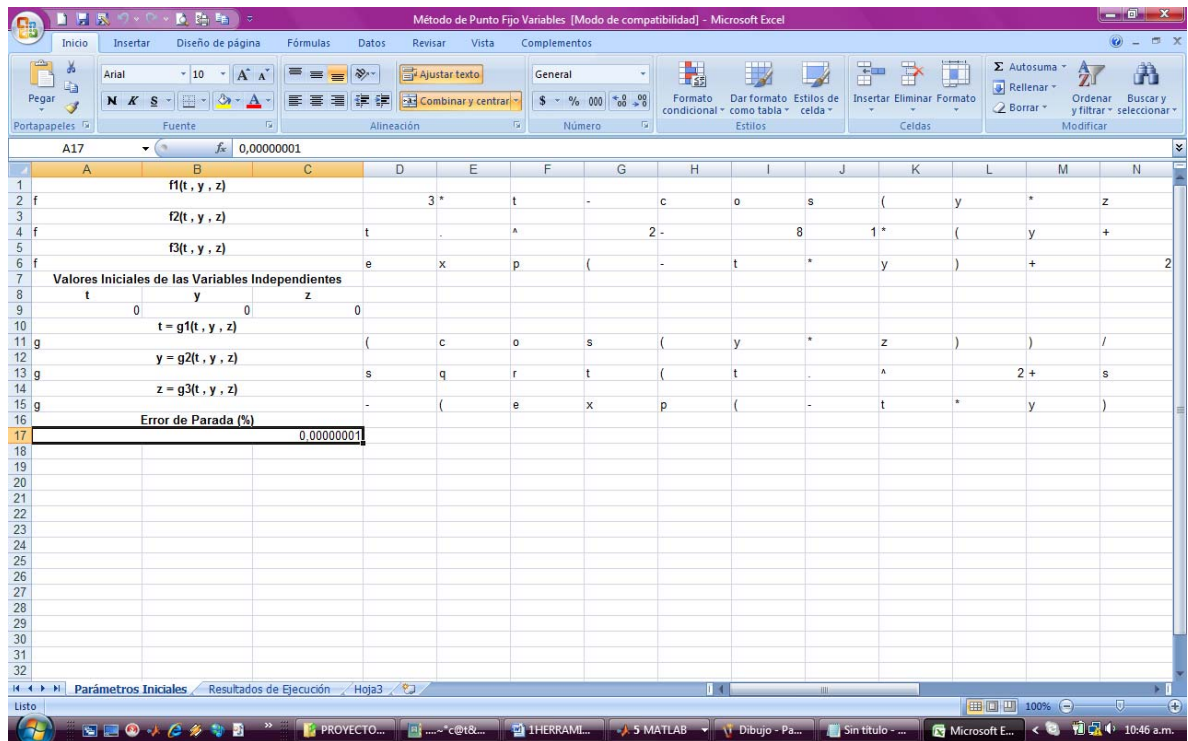
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 10, Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones No Lineales. Página 605.

Figura 243. Resultados en GUI de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Figura 244. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Figura 245. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables

Iteración	tk	yk	zk	Ert (%)	Ery (%)	Erz (%)	Distancia entre Vectores
0	0	0	0	100	100	100	100
1	0,5	0,01439509	-0,52359878	100	100	100	0,724129077
2	0,49999053	0	-0,52324017	-0,00189391	65535	-0,068535469	0,014400359
3	0,5	1,8506E-05	-0,52359878	0,001893874	100	0,06848853	0,000359211
4	0,5	0	-0,52359831	-3,15687E-09	65535	-8,8742E-05	1,8592E-05
5	0,5	2,4839E-08	-0,52359878	3,15687E-09	100	8,8742E-05	4,65316E-07
6	0,5	0	-0,52359877	0	65535	-1,1859E-07	2,48463E-08
7	0,5	3,3196E-11	-0,52359878	0	100	1,1859E-07	6,21851E-10
8	0,5	0	-0,52359878	0	65535	-1,58498E-10	3,32061E-11

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 242 muestran valores para las variables independientes de 0.50000000, 0.00000002 y -0.52359877 respectivamente, y un valor de distancia vectorial de  $3.1 \times 10^{-7}$  en la iteración 6. La Figura 245 muestra valores para las variables independientes de 0.5,  $2.4839 \times 10^{-8}$  y -0.52359878 y un valor de distancia vectorial de  $4.65316 \times 10^{-7}$  en la iteración 6, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.5.2. MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON PARA VARIAS VARIABLES

Para la aplicación Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables se plantea el mismo sistema no lineal de tres ecuaciones con tres variables independientes de la aplicación Método de Punto Fijo para Funciones de Varias Variables. La solución ofrecida por el libro muestra una tabla con los progresos de los valores de las variables y las distancias vectoriales. La aplicación muestra en su GUI, los valores anteriores y actuales de las variables independientes, la distancia vectorial y la iteración actual de ejecución. En el primer eje coordenado bidimensional, muestra los errores relativos de las variables

independientes, las distancias vectoriales y el error de parada con respecto a la distancia vectorial. En el segundo eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de las variables independientes en cada iteración. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran los valores para cada una de las tres variables, los valores de las derivadas parciales, los incrementos para cada variable, los errores relativos de cada una de las variables y la distancia vectorial, todo para cada iteración.

Figura 246. Planteamiento y resultados del problema para Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables según el libro

Considere el sistema no lineal dado por

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06 = 0$$

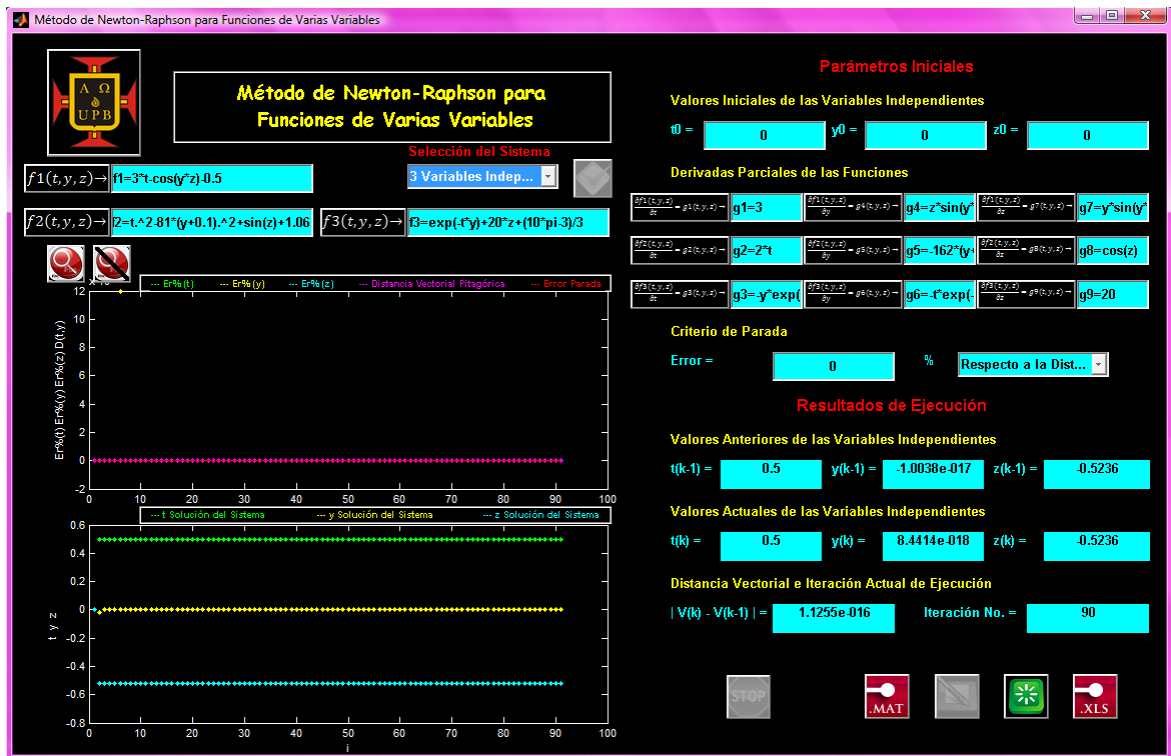
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

En la tabla se proporcionan los resultados que se obtienen al utilizar este procedimiento iterativo

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.50003702	0.01946686	-0.52152047	0.423
2	0.50004593	0.00158859	-0.52355711	$1.79 \times 10^{-2}$
3	0.50000034	0.00001244	-0.52359845	$1.58 \times 10^{-3}$
4	0.50000000	0.00000000	-0.52359877	$1.24 \times 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00000000	-0.52359877	0

Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 10, Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones No Lineales. Página 614.

Figura 247. Resultados en GUI de la aplicación Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables



Fuente: Autor

Figura 248. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		$f_1(t, y, z)$												
2	f			3	*	t	-	c	o	s	(	y	*	z
3		$f_2(t, y, z)$												
4	f			t	.	*	2	-	8	1	*	(	y	+
5		$f_3(t, y, z)$												
6	f			e	x	p	(	-	t	*	y	)	+	2
7		Valores Iniciales de las Variables Independientes												
8		t	y	z										
9		0	0	0										
10		$\partial f_1(t, y, z)/\partial t = g_1(t, y, z)$												
11	g			3	*	t	-	8						
12		$\partial f_2(t, y, z)/\partial t = g_2(t, y, z)$												
13	g			2	*	t	*	y	+	1				
14		$\partial f_3(t, y, z)/\partial t = g_3(t, y, z)$												
15	g			-	y	*	e	x	p	(	-	t	*	y
16		$\partial f_1(t, y, z)/\partial y = g_4(t, y, z)$												
17	g			z	*	s	i	n	(	y	*	z	)	
18		$\partial f_2(t, y, z)/\partial y = g_5(t, y, z)$												
19	g			-		1	6	2	*	(	y	+	0	1
20		$\partial f_3(t, y, z)/\partial y = g_6(t, y, z)$												
21	g			-	t	*	e	x	p	(	-	t	*	y
22		$\partial f_1(t, y, z)/\partial z = g_7(t, y, z)$												
23	g			y	*	s	i	n	(	y	*	z	)	
24		$\partial f_2(t, y, z)/\partial z = g_8(t, y, z)$												
25	g			c	o	s	(	z	)					
26		$\partial f_3(t, y, z)/\partial z = g_9(t, y, z)$												
27	g			2	0	z	-	9						
28		Error de Parada (%)												
29														
30														
31														
32														

Fuente: Autor



Figura 249. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Newton - Raphson para Funciones de Varias Variables

Iteración	tk	yk	zk	$\frac{\partial f}{\partial x}(t, v, z)$	$\frac{\partial f}{\partial y}(t, v, z)$	$\frac{\partial f}{\partial z}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(t, v, z)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, v, z)$	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0.5	-0.01688881	-0.52359878	3	1	0.017032033	-0.004630104	-13.46401224	-0.504240081	-0.000149345	0.866025404	20	
2	0.50001569	0.00172004	-0.52355363	3	1	-0.001718557	0.000471476	-16.47864576	-0.499585839	-1.54894E-06	0.866047975	20	
3	0.50000013	1.4571E-05	-0.52359839	3	1	1.000031379	-1.45704E-05	3.99459E-06	-16.20236042	-0.49999649	-1.1116E-10	0.866025594	20
4	0.5	1.0634E-09	-0.52359878	3	1	-1.06343E-09	2.91545E-10	-16.20000017	-0.5	-5.92127E-19	0.866025404	20	
5	0.5	-8.879E-19	-0.52359878	3	1	8.87897E-19	-2.43422E-19	-16.2	-0.5	-4.12785E-37	0.866025404	20	
6	0.5	-5.2834E-18	-0.52359878	3	1	5.28335E-18	-1.44846E-18	-16.2	-0.5	-1.46156E-35	0.866025404	20	
7	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
8	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
9	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
10	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
11	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
12	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
13	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
14	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
15	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
16	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
17	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
18	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
19	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
20	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
21	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
22	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
23	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
24	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
25	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
26	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
27	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
28	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
29	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
30	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	
31	0.5	-1.0038E-17	-0.52359878	3	1	1.00378E-17	-2.75191E-18	-16.2	-0.5	-5.27561E-35	0.866025404	20	
32	0.5	8.4414E-18	-0.52359878	3	1	-8.44145E-18	2.31427E-18	-16.2	-0.5	-3.73106E-35	0.866025404	20	

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
	B1(t, v, z)	B2(t, v, z)	B3(t, v, z)	h	i	m	Ert (%)	Ery (%)	Erz (%)	Distancia entre Vectores
1	1.5	-0.25	-10.4719755	0.5	-0.01688881	-0.52359878	100	100	100	100
2	-3.9099E-05	-0.25049498	-0.00848016	1.569E-05	0.01860885	4.5145E-05	100	100	100	0.724182926
3	-4.7474E-05	0.02804943	-4.3224E-05	-1.5557E-05	-0.00170547	-4.4764E-05	0.003137829	1081.887464	-0.008622794	0.01860891
4	-3.9857E-07	0.0002356	-3.3688E-07	-1.3284E-07	-1.4569E-05	-3.8108E-07	-0.003111357	-11704.90077	0.008549271	0.001706123
5	-2.9097E-11	1.7194E-08	-2.4601E-11	-9.6991E-12	-1.0634E-09	-2.7816E-11	-2.65673E-05	-1370046.696	7.27805E-05	1.4575E-05
6	2.2204E-16	2.2204E-16	1.7764E-15	7.4015E-17	-4.3955E-18	8.8708E-17	-1.93981E-09	1.19769E+11	5.31242E-09	1.06384E-09
7	0	0	-1.7764E-15	-2.2955E-36	-4.7544E-18	-8.8937E-17	1.11022E-14	83.19444052	-2.12037E-14	1.24205E-16
8	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	47.36523272	2.12037E-14	1.11124E-16
9	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
10	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
11	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
12	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
13	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
14	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
15	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
16	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
17	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
18	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
19	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
20	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
21	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
22	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
23	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
24	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
25	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
26	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
27	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
28	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
29	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
30	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
31	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16
32	0	-2.2204E-16	1.7764E-15	1.6951E-35	1.8479E-17	8.928E-17	0	184.096882	2.12037E-14	1.1255E-16
33	0	2.2204E-16	-1.7764E-15	1.4255E-35	-1.8479E-17	-8.928E-17	0	218.9104728	-2.12037E-14	1.1255E-16

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 246 muestran valores para las variables independientes de 0.5000000, 0.0000000 y -0.52359877 respectivamente, y un valor de distancia vectorial de 0 en la iteración 6. La Figura 249 muestra valores para las variables independientes de 0.5,  $-8.879 \times 10^{-19}$  y  $-0.52359878$  y un valor de distancia vectorial de  $1.06384 \times 10^{-9}$  en la iteración 6, comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## 8.6. CAPÍTULO VI – SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### 8.6.1. MÉTODO DE EULER

Para la aplicación Método de Euler se plantea un problema de valor inicial. La solución ofrecida por el libro muestra una tabla con el progreso del valor de la función para cada tiempo. La aplicación muestra en su GUI, el punto anterior, la

derivada de  $y$  en función de  $t$ , el punto actual y el tamaño de paso. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la función para cada valor de tiempo. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran el valor de  $y(t)$ , de la derivada de  $y$  en función de  $t$  y el tamaño de paso para cada uno de los valores de tiempo.

Figura 250. Planteamiento y resultados del problema para Método de Euler según el libro

Suponiendo que se emplea el método de Euler para aproximar la solución al problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1 \quad 0 \leq t \leq 2 \quad y(0) = 0.5$$

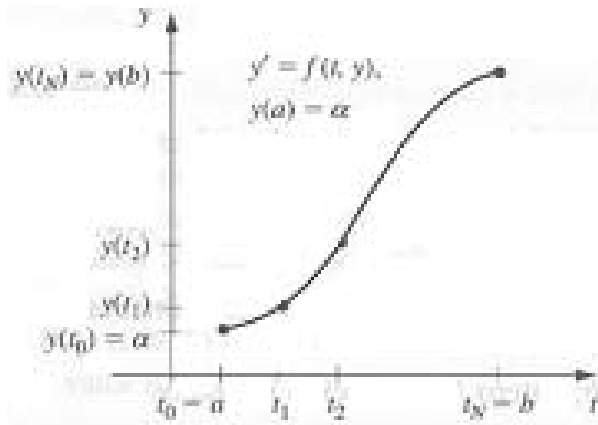
con  $N=10$ . Entonces  $h = 0.2, t_i = 0.2i, w_0 = 0.5$

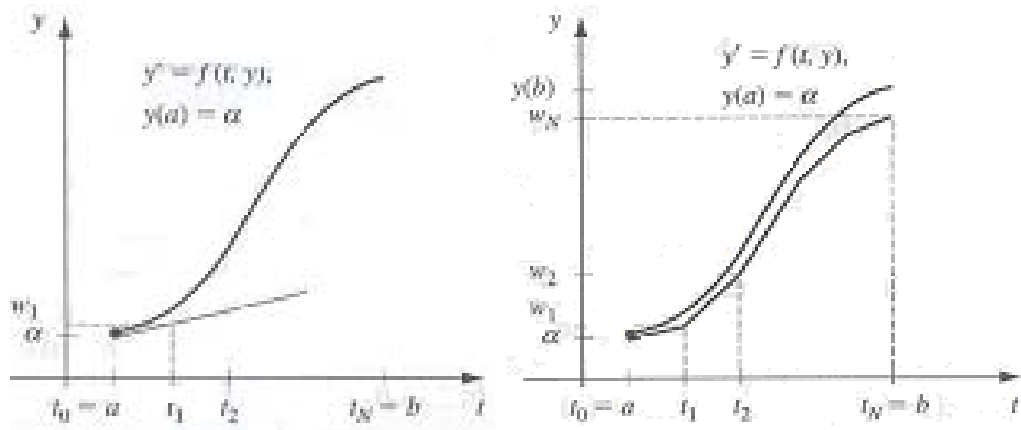
$$w_{i+1} = w_i + h(w_i - t_i^2 + 1) = w_i + 0.2(w_i - 0.04i^2 + 1) = 1.2w_i - 0.008i^2 + 0.2$$

Para  $i=0.1 \dots 9$ . La solución exacta es  $y(t) = (t+1)^2 - 0.5e$

En la tabla se muestra la comparación entre los valores aproximados en  $T_i$  y los valores reales.

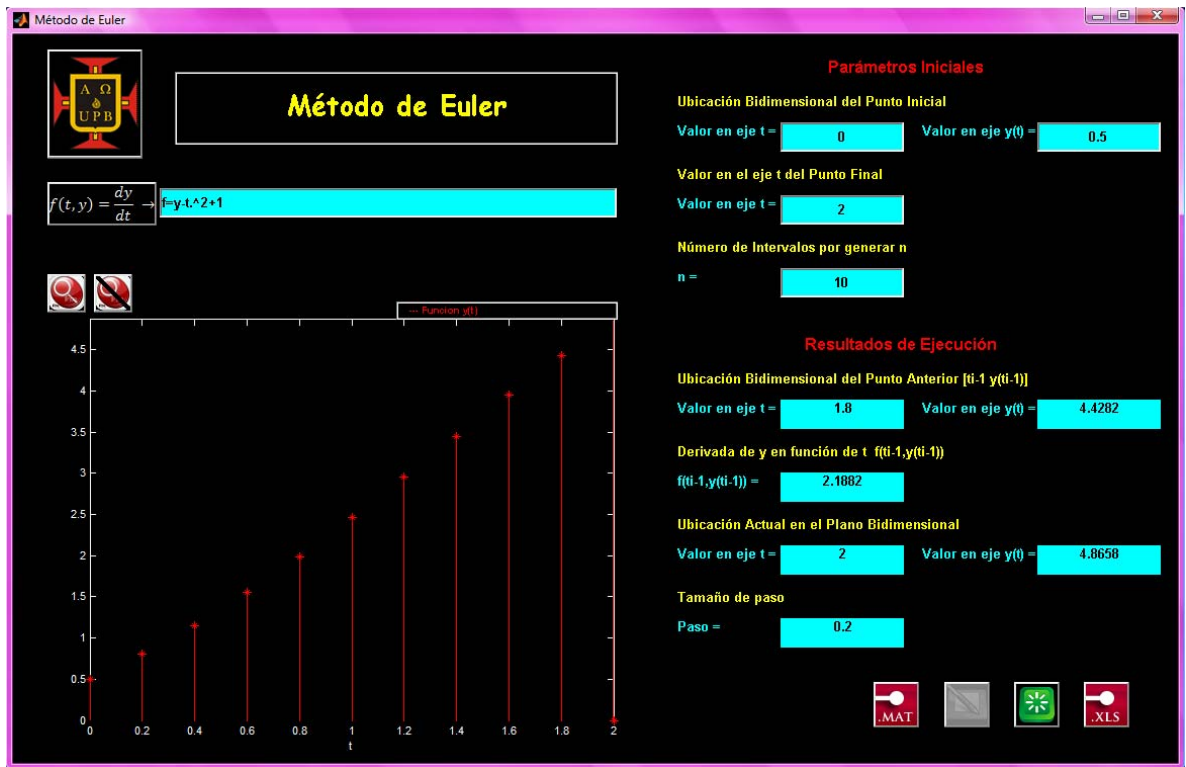
$t_i$	$w_i$	$y_i = y(t_i)$	$ y_i - w_i $
0.0	0.5000000	0.5000000	0.0000000
0.2	0.8000000	0.8292986	0.0292986
0.4	1.1520000	1.2140877	0.0620877
0.6	1.5504000	1.6489406	0.0985406
0.8	1.9884800	2.1272295	0.1387495
1.0	2.4581760	2.6408591	0.1826831
1.2	2.9498112	3.1799415	0.2301303
1.4	3.4517734	3.7324000	0.2806266
1.6	3.9501281	4.2834838	0.3333557
1.8	4.4281538	4.8151763	0.3870225
2.0	4.8657845	5.3054720	0.4396874





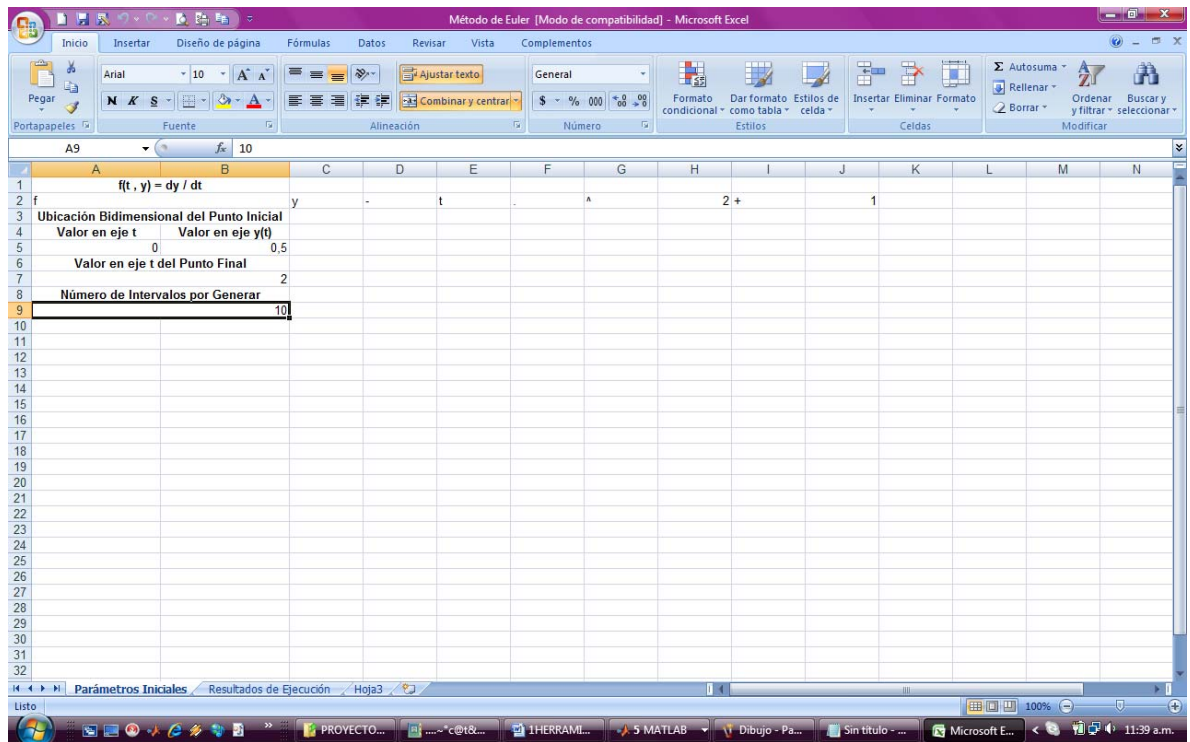
Fuente: BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Séptima Edición. International Thomson Editores. México. 2002. Capítulo 5, Problemas de Valor Inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Página 258.

Figura 251. Resultados en GUI de la aplicación Método de Euler



Fuente: Autor

Figura 252. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Euler



Fuente: Autor

Figura 253. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Euler



Punto	t	y(t)	f(t, y) = dy / dt	Tamaño de Paso w
1	0	0,5	1,5	0,2
2	0,2	0,8	1,76	0,2
3	0,4	1,152	1,992	0,2
4	0,6	1,5504	2,1904	0,2
5	0,8	1,98848	2,34848	0,2
6	1	2,458176	2,458176	0,2
7	1,2	2,9498112	2,5098112	0,2
8	1,4	3,45177344	2,49177344	0,2
9	1,6	3,95012813	2,390128128	0,2
10	1,8	4,42815375	2,188153754	0,2
11	2	4,8657845	1,865784504	0,2

Fuente: Autor

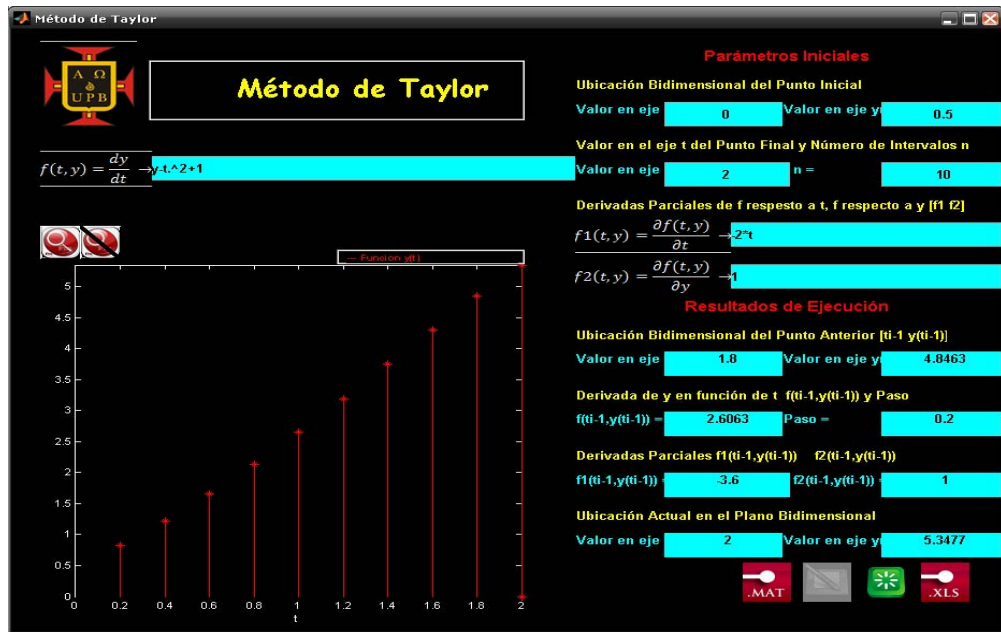
Se puede observar que los resultados de la Figura 250 muestran un valor de la función de 4.8657845 para  $t = 2$ . La Figura 253 muestra un valor de la función exactamente igual para  $t = 2$ , comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

### 8.6.2. MÉTODO DE TAYLOR

Para la aplicación Método de Taylor se plantea el mismo problema de valor inicial de la aplicación Método de Euler y se compara con las respuestas ofrecidas para dicho método. En el eje coordenado bidimensional, muestra el progreso de la función para cada valor de tiempo. Si se emplea la prestación adicional que permite guardar los datos en un archivo .xls, el usuario puede contar con los parámetros iniciales en una hoja de cálculo y en otra hoja de cálculo dentro del mismo archivo se muestran el valor de  $y(t)$ , de la derivada de  $y$  en función de  $t$  y el tamaño de paso y las derivadas parciales de la derivada de  $y$  para cada uno de los valores de tiempo.

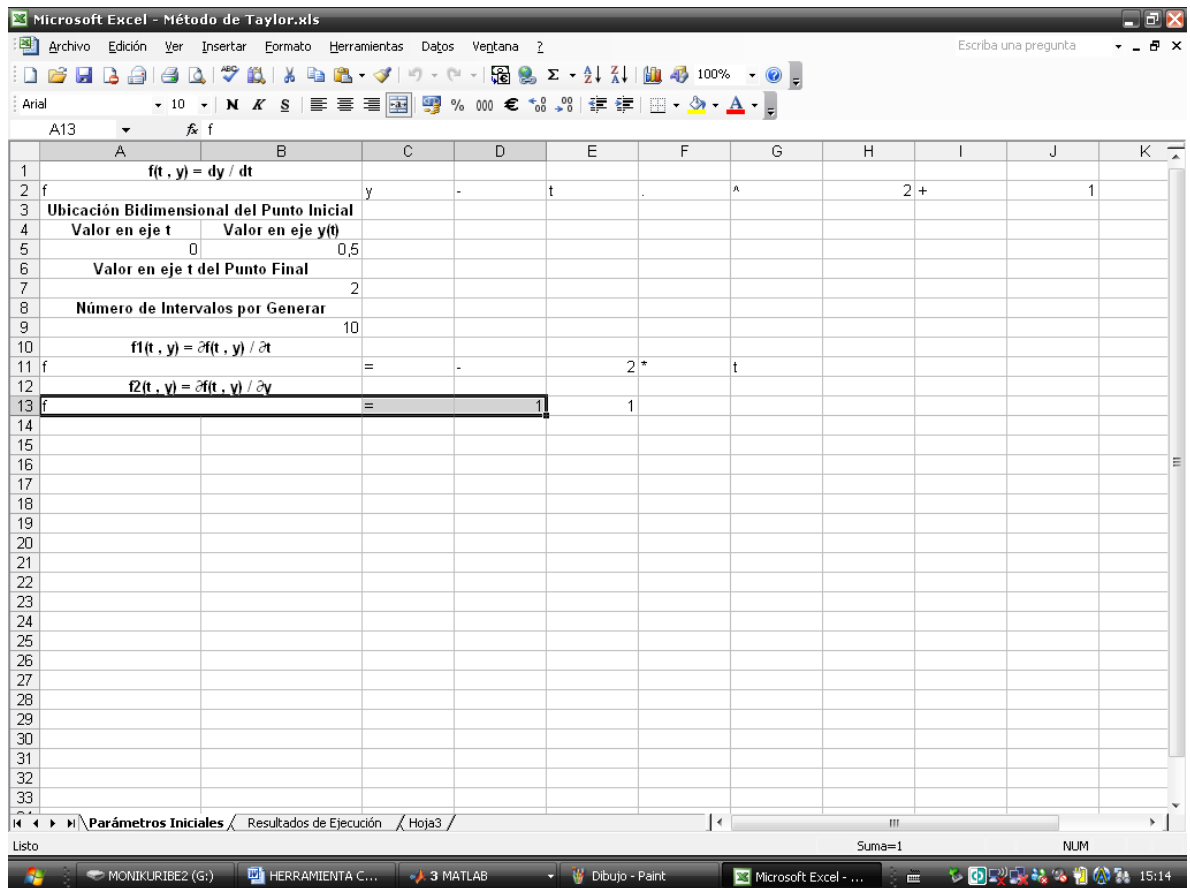
Figura 254. Resultados en GUI de la aplicación Método de Taylor





Fuente: Autor

Figura 255. Hoja de Parámetros Iniciales del archivo .xls de Método de Taylor



Fuente: Autor

Figura 256. Hoja de Resultados de Ejecución del archivo .xls de Método de Taylor

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Punto	t	y(t)	$f(t, y) = dy / dt$	Tamaño de Paso w	$f_1(t, y) = \partial f(t, y) / \partial t$	$f_2(t, y) = \partial f(t, y) / \partial y$			
2	1	0	0,5	1,5	0,2	0	1			
3	2	0,2	0,83	1,79	0,2	-0,4	1			
4	3	0,4	1,2158	2,0558	0,2	-0,8	1			
5	4	0,6	1,652076	2,292076	0,2	-1,2	1			
6	5	0,8	2,13233272	2,49233272	0,2	-1,6	1			
7	6	1	2,64864592	2,648645918	0,2	-2	1			
8	7	1,2	3,19134802	2,75134802	0,2	-2,4	1			
9	8	1,4	3,74864458	2,788644585	0,2	-2,8	1			
10	9	1,6	4,30614639	2,746146394	0,2	-3,2	1			
11	10	1,8	4,8462986	2,6062986	0,2	-3,6	1			
12	11	2	5,34768429	2,347684292	0,2	-4	1			
13	-	-	-	-	-	-	-			
14	-	-	-	-	-	-	-			
15	-	-	-	-	-	-	-			
16	-	-	-	-	-	-	-			
17	-	-	-	-	-	-	-			
18	-	-	-	-	-	-	-			
19	-	-	-	-	-	-	-			
20	-	-	-	-	-	-	-			
21	-	-	-	-	-	-	-			
22	-	-	-	-	-	-	-			
23	-	-	-	-	-	-	-			
24	-	-	-	-	-	-	-			
25	-	-	-	-	-	-	-			
26	-	-	-	-	-	-	-			
27	-	-	-	-	-	-	-			
28	-	-	-	-	-	-	-			
29	-	-	-	-	-	-	-			
30	-	-	-	-	-	-	-			
31	-	-	-	-	-	-	-			
32	-	-	-	-	-	-	-			
33	-	-	-	-	-	-	-			

Fuente: Autor

Se puede observar que los resultados de la Figura 250 muestran un valor de la función de 4.8657845 para  $t = 2$ . La Figura 256 muestra un valor de la función exactamente igual para  $t = 2$ , comprobando de esta forma la funcionalidad de la aplicación.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- La recopilación de información realizada sobre análisis numérico da origen a un contenido teórico bien fundamentado, con una trazabilidad que permite la comprensión de cada uno de los conceptos empleados en este tipo de análisis y que sirve como respaldo para la asignatura Cálculo Numérico de la estructura programática de la Facultad de Ingeniería Electrónica de la Universidad.
- La herramienta desarrollada en MATLAB complementa de manera práctica el contenido teórico disponible, mediante aplicaciones modulares que ofrecen soluciones altamente didácticas de los conceptos, empleando interfaces gráficas funcionales, fomentando el entendimiento por parte del usuario.
- La disponibilidad de la herramienta en la plataforma Lotus Learning Space de la Universidad permite la divulgación del conocimiento contenido en ella, considerado como fundamental en la formación de profesionales, en especial de ingenieros, y aprovecha un diseño web de navegación visualmente agradable, altamente funcional y facilita el acceso a la herramienta.
- Se recomienda consultar tanto el contenido teórico como el manual de usuario de la herramienta antes de usarla, ya que es necesario contar con un conocimiento previo a la utilización de la misma.

## BIBLIOGRAFÍA

- CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P., Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta Edición. McGraw Hill. México. 2007.
- BURDEN, Richard L., FAIRES, Douglas J., Análisis Numérico. Sexta Edición. International Thomson Editores. México. 1998.
- NAKAMURA, Shoichiro, Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB. Primera Edición. Prentice Hall. México. 1997.
- DEWAN, S. B., STRAUGHEN, A., Power Semiconductor Circuits. Primera Edición. A Wiley – Interscience Publication. John Wiley & Sons. Canadá. 1975.
- KEMMERLY, Jack E., HAYT, William H., Análisis de Circuitos en Ingeniería. Quinta Edición. Tercera Edición en Español. McGraw Hill. México. 1995.
- UNIVERSIDAD DE MARGARITA, [en línea] Apuntes de Cálculo Numérico, publicado en 2004, [citado en 2008] disponible en la página de internet:  
<http://www.unimar.edu.ve/torrealbak/Calculo/Apuntes.pdf>
- UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA, [en línea] Tutorial de MATLAB, publicado en 2002, [citado en 2008] disponible en la página de internet:  
[http://www.usc.es/gir/tutorial\\_matlab.pdf](http://www.usc.es/gir/tutorial_matlab.pdf)

- UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID, [en línea] Learning Space, publicado en 2001, [citado en 2008] disponible en la página de internet:

[http://www.gate.upm.es/informe\\_evaluacion/documentos/LearningSpace.p](http://www.gate.upm.es/informe_evaluacion/documentos/LearningSpace.p)

df