

**CONTROL FRACCIONARIO APLICADO AL DISEÑO DE CONTROLADORES**

**JAIRO BERNARDO VIOLA VILLAMIZAR**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
PIEDRECUESTA  
2012**

**CONTROL FRACCIONARIO APLICADO AL DISEÑO DE CONTROLADORES**

**JAIRO BERNARDO VIOLA VILLAMIZAR**

**PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TITULO DE INGENIERO  
ELECTRONICO**

**DIRECTOR  
PHD. LUIS ANGEL SILVA**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
PIEDRECUESTA  
2012**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

---

---

**Firma del director de proyecto**

---

**Firma del jurado**

---

**Firma del jurado**

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios.

A mis padres.

A mi hermana.

A mis maestros.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>0.INTRODUCCIÓN</b> .....	2
<b>1. OBJETIVOS</b> .....	3
1.1 Objetivo general .....	3
1.2 Objetivos específicos .....	3
<b>2. MARCO TEORICO</b> .....	4
2.1 ¿QUE ES EL CONTROL FRACCIONARIO?.....	4
2.2 RESEÑA HISTORICA DEL CONTROL FRACCIONARIO.....	5
2.3 APLICACIONES DEL CONTROL FRACCIONARIO .....	6
<b>3. FUNDAMENTOS DEL CALCULO FRACCIONARIO</b> .....	8
3.1 FUNCIONES ESPECIALES.....	8
3.1.1 FUNCION GAMMA .....	8
3.1.1.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA .....	9
3.2 GENERALIZACION DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL.....	10
3.3 INTEGRAL FRACCIONARIA .....	12
3.4 DERIVADA FRACCIONARIA.....	13
3.5 PROPIEDADES DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL FRACCIONARIA .....	15
3.6 OTRAS DEFINICIONES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA.....	15
3.7 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL FRACCIONARIA .....	17
3.8 ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS.....	19
<b>4. ANALISIS DE SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO</b> .....	20
4.1 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS LTI .....	20
4.2 REPRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO.....	21
4.3 ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO .....	22
4.4 ANALISIS DE RESUPESTA TRANSITORIA DE UN SISTEMA DE ORDEN FRACCIONARIO.....	26
4.5 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA DE CONTROL FRACCIONARIO .....	29

4.6 RESPUESTA EN ESTADO ESTACIONARIO DE UN SISTEMA DE CONTROL FRACCIONARIO .....	30
<b>5. CONTROLADORES FRACCIONARIOS .....</b>	<b>32</b>
5.1 ACCION INTEGRAL.....	32
5.2 ACCION DERIVATIVA.....	34
5.3 CONTROLADOR PID CLASICO .....	35
5.4 CONTROLADOR PID FRACCIONARIO .....	36
<b>6. TECNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS .....</b>	<b>37</b>
6.1 DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.....	38
6.2 DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS POR EL METODO HEURISTICO.....	41
<b>7. IMPLEMENTACION PRACTICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO .....</b>	<b>44</b>
7.1 IMPLEMENTACION ANALOGICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO.....	44
7.2 IMPLEMENTACION DISCRETA DE LOS CONTROLADORES FRACCIONARIOS	46
<b>8. APLICACION PRACTICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO: SISTEMA DE ORDEN 1 CON RETARDO .....</b>	<b>47</b>
8.1 DISEÑO DEL CONTROLADOR FOPI.....	48
8.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR IOPI UTILIZANDO EL METODO SIMC .....	52
8.3 DISEÑO DEL CONTROLADOR IOPID .....	54
8.4. ANALISIS DE RESULTADOS.....	56
8.5 DISCRETIZACION DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO .....	65
<b>9. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>67</b>
<b>10. BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXOS</b>	
<b>ANEXO A</b>	
Esquemas de simulación para un sistema de orden 1 con retardo .....	72
<b>ANEXO B</b>	
Controlador FOPI discreto.....	75

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Error de estado estacionario para los sistemas fraccionarios conmensurados .....	31
Tabla 2: Parámetros de desempeño para el error de estado estacionario. ....	31
Tabla 3: Valores de los mínimos cuadrados para el caso 1 de sintonización por curva de reacción. ....	43
Tabla 4: Valores de los mínimos cuadrados para el caso II de oscilaciones sostenidas. ....	44
Tabla 5: Aproximación discreta del operador fraccionario.....	47

## TABLA DE ECUACIONES

Ecuacion 1 .....	8
Ecuacion 2 .....	9
Ecuacion 3 .....	10
Ecuacion 4 .....	10
Ecuacion 5 .....	10
Ecuacion 6 .....	11
Ecuacion 7 .....	11
Ecuacion 8 .....	11
Ecuacion 9 .....	11
Ecuacion 10 .....	12
Ecuacion 11 .....	12
Ecuacion 12 .....	12
Ecuacion 13 .....	13
Ecuacion 14 .....	13
Ecuacion 15 .....	14
Ecuacion 16 .....	14
Ecuacion 17 .....	14
Ecuacion 18 .....	15
Ecuacion 19 .....	16
Ecuacion 20 .....	16
Ecuacion 21 .....	16
Ecuacion 22 .....	17
Ecuacion 23 .....	17
Ecuacion 24 .....	17
Ecuacion 25a .....	18
Ecuacion 25b .....	18
Ecuacion 26a .....	18
Ecuacion 26b .....	18
Ecuacion 27 .....	19
Ecuacion 28 .....	19
Ecuacion 29 .....	19
Ecuacion 30 .....	19
Ecuacion 31 .....	21
Ecuacion 32 .....	21
Ecuacion 33a .....	21
Ecuacion 33b .....	22
Ecuacion 34 .....	22



Ecuacion 35.....	22
Ecuacion 36.....	23
Ecuacion 37.....	24
Ecuacion 38.....	24
Ecuacion 39a.....	26
Ecuacion 39b.....	26
Ecuacion 39c.....	26
Ecuacion 40.....	27
Ecuacion 41.....	29
Ecuacion 42.....	29
Ecuacion 43.....	31
Ecuacion 44.....	33
Ecuacion 45.....	34
Ecuacion 46.....	35
Ecuacion 47.....	36
Ecuacion 48.....	36
Ecuacion 49.....	38
Ecuacion 50.....	38
Ecuacion 51.....	38
Ecuacion 52.....	39
Ecuacion 53.....	39
Ecuacion 54a.....	39
Ecuacion 54b.....	39
Ecuacion 55.....	41
Ecuacion 56.....	41
Ecuacion 57.....	43
Ecuacion 58.....	45
Ecuacion 59.....	47
Ecuacion 60.....	48
Ecuacion 61.....	49
Ecuacion 62.....	49
Ecuacion 63.....	49
Ecuacion 64.....	49
Ecuacion 65.....	49
Ecuacion 66.....	49
Ecuacion 67.....	50
Ecuacion 68.....	50
Ecuacion 69.....	52
Ecuacion 70.....	52

Ecuacion 71.....54  
Ecuacion 72.....54  
Ecuacion 73.....54  
Ecuacion 74.....54  
Ecuacion 75.....54  
Ecuacion 76.....55  
Ecuacion 77.....55  
Ecuacion 78.....55  
Ecuacion 80.....65

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1: sistema de control de orden 1 con controlador fraccionario .....	4
Figura 2: área de integración para la integral generalizada.....	11
Figura 3: Clasificación de los sistemas LTI .....	20
Figura 4: Superficie de Riemman para la función $s^{13}$ .....	23
Figura 5: Región de estabilidad de un sistema LTI fraccionario conmensurado ....	24
Figura 6: Contorno de evaluación del diagrama de Nyquist .....	26
Figura 7: Respuesta al step según el lugar geométrico de las raíces .....	27
Figura 8: respuesta en frecuencia de la ecuación 40. ....	30
Figura 9: sistema de control con realimentación unitaria negativa .....	32
Figura 10: acción de control para diferentes ordenes fraccionarios .....	33
Figura 12: acción derivativa generalizada para señal trapezoidal .....	34
Figura 13: Respuesta en frecuencia del controlador PID clásico .....	35
Figura 14: Respuesta en frecuencia del PID fraccionario .....	36
Figura 15: Descripción grafica de los controladores PID enteros y fraccionarios ..	37
Figura 16: implementación analógica de un PID entero.....	45
Fig. 17. respuesta en frecuencia de la planta en lazo abierto .....	48
Fig. 18: intersección entre (66) y (67) para obtener $K_i$ y $\alpha$ . ....	51
Fig. 20: Respuesta al escalón del sistema con el controlador PI sintonizado con SIMC .....	53
Fig. 21: Respuesta en frecuencia con controlador PID entero. ....	55
Fig. 22 Respuesta al escalón del sistema para: (a) $k=5$ , (b) $k=10$ y (c) $k=15$ FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). ....	56
Fig. 23 Acción de control para (a) $k=5$ , (b) $k=10$ y (c) $k=15$ FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). ....	58
Fig. 24 Respuesta al escalón del sistema con relación de ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). ....	60
Fig. 25 (a)Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). (b) Zoom de la Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul) y PI SIMC (rojo). ....	61
Fig. 26 respuesta a la señal cuadrada para (a) $k=5$ , (b) $k=10$ y (c) $k=15$ con ruido del 50%, FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). ....	62
Fig. 27 Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo) para (a) $k=5$ , (b) $k=10$ y (c) $K=15$ . ....	63
Figura 28: comportamiento dinámico del sistema con el controlador FOPI.....	65
Figura 29: Acción de control del sistema. ....	65

## RESUMEN GENERAL DEL TRABAJO DE GRADO

**TITULO:** CONTROL FRACCIONARIO APLICADO AL DISEÑO DE CONTROLADORES

**AUTOR:** JAIRO BERNARDO VIOLA VILLAMIZAR

**FACULTAD:** INGENIERIA ELECTRONICA

**DIRECTOR:** PHD. LUIS ANGEL SILVA

### RESUMEN:

En este proyecto se estudio de la teoría del control fraccionario para realizar el diseño de un controlador PI de orden fraccionario. Se estudio la teoría del cálculo fraccionario ya que este es la base matemática que sustenta la estrategia de control fraccionario, donde se redefinen los conceptos como la derivada, la integral o las ecuaciones diferenciales. Se realizo el análisis de sistemas de orden fraccionario, su clasificación, representación, análisis de estabilidad, la respuesta de los sistemas ante el escalón, la respuesta en frecuencia (magnitud y fase) y el error de estado estacionario del sistema. Se estudio la generalización del controlador PID y el efecto de la acción integral y derivativa cuando se aplican operadores de orden fraccionario, dando lugar al controlador fraccionario. Se revisan las diferentes técnicas de diseño de controladores fraccionarios, de la cual se elije el método de diseño en frecuencia para realizar el diseño del controlador. Una vez realizado el diseño del controlador, se realizo la implementación en MATLAB, para la cual se utiliza el filtro de oustalop. Para realizar la comparación con el controlador fraccionario se diseñaron 2 controladores, un PID entero utilizando métodos frecuenciales y un PI empleando la metodología SIMC. Se realiza la implementación de todos los controladores en SIMULINK, donde se someten a pruebas de robustez ante variación de ganancia de la planta, ruido de alta frecuencia y una señal de entrada cuadrada. Finalmente se realiza la implementación discreta del controlador fraccionario utilizando la metodología de tustin, generalizada para orden fraccionario.

**PALABARAS CLAVE:** FOPI, IOPID, PI SIMC, robustez, control fraccionario.

## **GENERAL SUMMARY OF THE THESIS**

**TITLE: FRACTIONAL CONTROL APPLIED TO THE CONTROLLER DESIGN**

**AUTHOR: JAIRO BERNARDO VIOLA VILLAMIZAR**

**FACULTY: ELECTRONIC ENGINEERING**

**DIRECTOR: PHD. LUIS ANGEL SILVA**

### **ABSTRACT:**

In this project Fractional control theory was studied for the design of a fractional order PI controller. Fractional Calculus theory was studied as the mathematical basis of the fractional control strategy, where the concepts as the derivative, the integral or differential equations were redefined. Fractional order systems was analyzed, classification, representation, stability analysis, the system response to the step, the root locus, frequency response (magnitude and phase) and the steady-state error system. Generalization of the PID controller and the effect of the integral and derivative action when applied fractional order operators were analyzed, leading to fractional controller. Various techniques of fractional controller design was revised, which will choose for the controller design the frequency method. Once the controller design, implementation was done in MATLAB, which is used to filter outstap. To contrast the fractional controller, 2 controllers were designed, a integer PID using frequency methods and a PI controller employing the SIMC methodology. Controllers was implemented in SIMULINK, where tested for robustness against variations of plant gain, high frequency noise and a square input signal. Finally a discrete fractional controller implementation was done using Tustin methodology, generalized for fractional order.

**KEY WORDS:** FOPI, IOPID, PI SIMC, robustness, Fractional control.

---

**Seen Good**

## 0.INTRODUCCIÓN

El control fraccionario es una estrategia de control que utiliza como base el cálculo fraccionario para representar y controlar sistemas de orden no entero. Los orígenes del control fraccionario se remontan al año 1695, cuando Leibniz le envía una carta a L'hopital preguntándole qué pasaría si el orden de una derivada fuera 0.5, en lugar de un número entero como 1 o 2. A partir de este momento, muchos eruditos, entre ellos Riemman, Letnikov y Caputo, han realizado importantes aportes al cálculo fraccionario, permitiendo de esta manera consolidar el control fraccionario.

A nivel mundial se han realizado estudios acerca del control fraccionario con aplicaciones, principalmente, en robótica industrial, control industrial, electrónica de potencia, control de reactores de plasma, entre otras.

Sin embargo, en Colombia, el tema ha sido poco estudiado. Por lo tanto, con este trabajo se busca entender los principios del control fraccionario para luego poder aplicarlo en el diseño de controladores fraccionarios.

En la primera parte del libro se encontrará una revisión del cálculo fraccionario, en el cual se incluyen derivadas, integrales, la transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales para órdenes no enteros. Después, se estudiarán los sistemas de control fraccionario, su representación, clasificación, análisis de estabilidad, la respuesta al escalón, la respuesta en frecuencia y el error de estado estable. A continuación se analizará el efecto del orden fraccionario en las acciones de control integral y derivativa. Luego se realizará una revisión de las metodologías existentes para el diseño de controladores fraccionarios, las cuales son el diseño frecuencia y el diseño empírico de los controladores. La segunda parte, consistirá en el diseño del controlador PI fraccionario utilizando la metodología de diseño en frecuencia. Después se presentará el diseño de 2 controladores enteros, un PID diseñado por el método de frecuencia y un PI con la metodología SIMC. A partir de esto, se realizará la simulación de los 3 controladores en SIMULINK, sometidos a pruebas de robustez ante variaciones de ganancia de la planta, de robustez ante ruido de alta frecuencia y de la variación ante una señal cuadrada en la entrada; para finalmente contrastar el controlador fraccionario con los controladores enteros y poder visualizar sus ventajas y desventajas.

# 1. OBJETIVOS

## 1.1 Objetivo general

Estudiar la teoría de control fraccionario mediante una revisión del estado del arte para aplicarlo en el diseño de controladores de orden fraccionario.

## 1.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión del cálculo fraccionario a través de un análisis bibliográfico de libros de cálculo fraccionario.
- Definir los sistemas de orden fraccionario, su clasificación y representación.
- Determinar los criterios de estabilidad para sistemas de orden fraccionario.
- Estudiar las técnicas de diseño de controladores PI fraccionarios.
- Diseñar un controlador proporcional-integral de orden fraccionario para controlar un sistema de orden uno entero.
- Validar mediante simulación en MATLAB el controlador de orden fraccionario y contrastarlo con su contraparte entera para ver las ventajas del control de orden arbitrario.

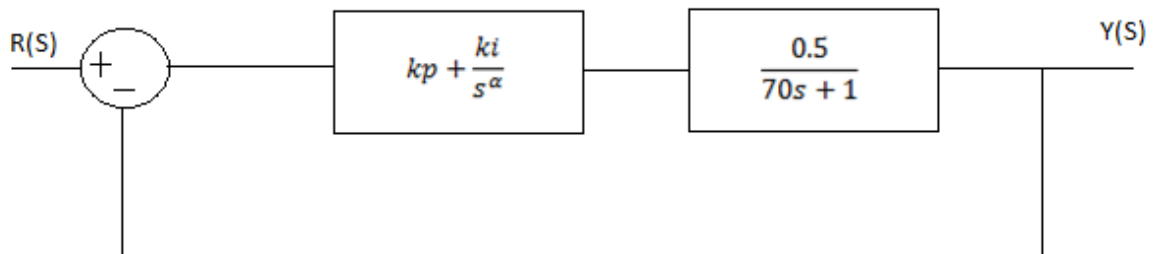
## 2. MARCO TEORICO

### 2.1 ¿QUE ES EL CONTROL FRACCIONARIO?

La teoría de control es una herramienta fundamental para todas las áreas de la ingeniería donde se desee controlar una variable de un proceso. Por ejemplo: posición, velocidad, presión o temperatura, para los cuales existen diversos tipos de estrategias de control como son: el control robusto, adaptativo, analógico, digital, óptimo, entre otros.

Pero hoy, se está desarrollando una nueva estrategia llamada control fraccionario, la cual consiste en utilizar operadores irracionales para definir y controlar diferentes sistemas. Un ejemplo se puede ver en la figura 1.

Figura 1: sistema de control de orden 1 con controlador fraccionario



En la figura 1 se observa un sistema de control clásico con retroalimentación unitaria, donde se tiene una planta que es un sistema de orden 1 tradicional y un controlador PI, con la característica particular que el término integral no está definido para el orden 1 sino para el orden alfa, por lo tanto, aquí se habla de un controlador fraccionario.

Esta denominación de fraccionario se da ya que el orden de los términos del polinomio, que definen la función de transferencia ya sea de un controlador o de un sistema, no son números enteros sino por el contrario son números irracionales o no enteros. Por ejemplo 0.5. Esto implica un cambio en la definición de derivada e integral, pues los términos  $S$ , que describen las funciones de transferencia fraccionaria, al venir de una ecuación integro-diferencial hacen que el orden de las derivadas sea no entero. Sumergiéndose en el cálculo fraccionario, el cual define la derivada y la integral para un orden arbitrario y da las bases del control fraccionario.



## 2.2 RESEÑA HISTORICA DEL CONTROL FRACCIONARIO

Los inicios del control fraccionario se remontan al año 1695, cuando Leibniz le escribió una carta a L'hospital en la cual le hace el siguiente cuestionamiento: ¿Qué pasaría si el orden de la derivada fuese 0.5? A lo cual el interlocutor respondió que era una interesante paradoja, cuyos resultados algún día serían visualizados. Este fue el punto de partida para lo que hoy se conoce como cálculo fraccionario.

Pero no fue sino hasta los siglos XVIII y XIX que se comenzaron a realizar los primeros aportes al cálculo fraccionario. Liouville, en 1832, realizó la expansión en series de la derivada para el  $q$ -esimo orden entero. Después Riemman, en 1854, realizó la expansión en series definiendo la integral para el orden  $n$  no entero. Sin embargo, hasta 1867, Grünwald y Krug unificó los criterios de Riemman y Liouville definiendo los límites para la derivada fraccionaria, utilizando la función integral de Cauchy.

Paralelo a sus trabajos, Abel, en 1823, aplicó por primera vez el cálculo fraccionario resolviendo la ecuación integral de la tautocrona, la cual se resuelve, fácilmente, realizando la transformación de la ecuación integral entera a una semi-integral o fraccionaria. De igual manera, Boole, en 1844, planteó la solución de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes para órdenes arbitrarios, utilizando la expansión en series de potencias.

Durante la primera mitad del siglo XX, algunos exponentes de la teoría del cálculo fraccionario, fue el caso de Heaviside, utilizaron el cálculo fraccionario como elemento para resolver algunos problemas de la teoría electromagnética y de líneas de transmisión.

Pero fue solo hasta 1945, que Bode aplicó por primera vez a la teoría del control la idea general del cálculo fraccionario, al plantear la función de transferencia ideal de lazo abierto, la cual es el punto de partida para todo el control moderno. Después de Bode, Oldham y Spainer continuaron aplicando el cálculo fraccionario a problemas de electroquímica y transporte de materia.

Pero en 1975, A. Oustalop tomó la función de transferencia ideal de Bode y comenzó a desarrollar los primeros controladores fraccionarios conocidos con el nombre de CRONE. Estos, por sus siglas, en francés significan: control robusto de orden no entero. Así se convirtieron en los pioneros de los controladores fraccionarios.

Después, en la década de 1990, Igor Podlubny realizó una generalización del controlador PID. De esta manera, creó el controlador PID fraccionario para un orden integral y derivativo diferente de cero.

Finalmente, durante la primera década del nuevo milenio, con la generalización del controlador PID han venido en aumento las investigaciones realizadas en el campo del control fraccionario y en los diferentes campos. Todas, encabezadas por Blas Vinagre, YangQuan Chen, Concepción Monje y Dingyü Xue.

### 2.3 APLICACIONES DEL CONTROL FRACCIONARIO

El control fraccionario, al ser una estrategia de control, puede aplicarse en diferentes campos de la ingeniería. Por ejemplo, en el campo de control industrial, el control de nivel de un tanque esférico<sup>1</sup>, del cual, como se indica en 1, se realiza un modelamiento del sistema para luego crear el controlador fraccionario.

Otro campo de acción del control fraccionario está en el área de vehículos autónomos, como es el caso del proyecto ISAAC<sup>2</sup> desarrollado en la universidad de Extremadura. Este consiste en un sistema automático de conducción de automóviles, el cual utiliza controladores fraccionarios para controlar la trayectoria que este debe seguir, utilizando un sistema de GPS e información de diferentes sensores ubicados en el vehículo.

Se han realizado implementaciones de controladores fraccionarios para el control de reactores nucleares<sup>3</sup>, utilizando controladores PID fraccionarios con lógica difusa, mostrando un mejor desempeño y una mayor robustez que al utilizar otras técnicas de control. También, se han diseñado e implementado controladores fraccionarios para el control de la posición del plasma en un reactor de plasma Tokamak<sup>4</sup>.

En lo que respecta a la electrónica de potencia se han utilizado controladores fraccionarios para el manejo de inversores trifásicos<sup>5</sup>, y convertidores DC-DC tipo Buck. Para estos se ha implementado el controlador PID y PI fraccionario, los cuales garantizan la robustez y una mejora considerable en la dinámica de los convertidores e inversores.

---

<sup>1</sup> Sundaravadivu K, Arun B. Design of Fractional Order PID Controller for Liquid Level Control of Spherical Tank. IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering. 2011, 5p.

<sup>2</sup> SUAREZ, José. Calculo fraccionario en control y robótica. Aplicaciones en robótica móvil. En: Nuevas tendencias de investigación en ingeniería. (2003: Badajoz).

<sup>3</sup>SAPTARSHI Das, INDRANIL Pan. Control of Nuclear Reactor Power with Thermal-Hydraulic Effects via Fuzzy PI $\lambda$ D $\mu$  Controllers. Kabali, India: 2009, 5p

<sup>4</sup> YANGQUAN, Chen, Fractional Order Plasma Position Control of the STOR-1M Tokamak. 48th IEEE Conference on Decision and control. (2009,china).

<sup>5</sup>HAMZAOU, Mohammed. ARAB Tehrani .Current Control Design with a Fractional-Order PID for a Three-Level Inverter. (2010, Italia).

Dentro del área de la instrumentación y la automatización de procesos se tiene el desarrollo de un sistema SCADA basado en LABVIEW, el cual utiliza controladores fraccionarios para ejecutar las diferentes acciones de control para un sistema de posicionamiento de servomotores, utilizando técnicas de prototipado rápido.<sup>6</sup>

También, en el campo de la robótica se utilizan controladores fraccionarios para mejorar el error de seguimiento. Por ejemplo, en los robots SCARA, los cuales emplean una metodología fraccionaria del tipo  $PDD^{1/2}$ . De igual forma, otras estructuras mecatrónicas -como los brazos robóticos flexibles de 1 grado de libertad<sup>7</sup>, o un conjunto de servomecanismos<sup>8</sup>- emplean controladores fraccionarios del tipo PD para realizar el control de posición de los mismos, con resultados de robustez y dinámica de la planta similares a los descritos anteriormente.

Así mismo, el control fraccionario funciona para el manejo del elemento hidráulico en de los procesos industriales. Es el caso de los cilindros hidráulicos<sup>9</sup> donde al aplicar controladores PI y PID fraccionarios, se mejora el dinamismo de su respuesta y su robustez.

Y entendiendo que el modelado de sistemas es trascendental para cualquier investigador, pues permite obtener una aproximación matemática del comportamiento del sistema, se aplica, también, el cálculo fraccionario en áreas como la electroquímica o en la física newtoniana. De tal suerte, se pueden obtener modelos matemáticos más próximos al comportamiento de un sistema, lo que permite entender con claridad su dinámica. Por tanto, esta herramienta es utilizada para identificar diferentes sistemas<sup>10</sup>, obteniendo funciones de transferencia fraccionaria que aproximan mejor el comportamiento dinámico de los sistemas de control. Además, se logra entender mejor el sistema para poder realizar un control óptimo.

---

<sup>6</sup> YANGQUAN, Chen, LabView Based Experimental Validation of Fractional Order Motion Controllers. Chinese Control and Decision Conference (2009,china).

<sup>7</sup> VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, Fractional order system and controls fundamentals and applications, Nueva York: editorial Springer. 2010. 430 p. ISBN 978-1-84996-334-3.

<sup>8</sup> YANGQUAN, Chen, Fractional Order Proportional and Derivative Controller Synthesis for A Class of Fractional Order Systems: Tuning Rule and Hardware-in-the-loop Experiment. 48th IEEE Conference on Decision and Control (2009,china).

<sup>9</sup> FUENTES, Manuel, Modelado y control robusto de un cilindro neumático, Madrid 2009. 107p. Trabajo de grado (Ingeniero industrial). Universidad Carlos III de Madrid. Facultad de ingeniería industrial, departamento de ingeniería de sistemas y automática.

<sup>10</sup> ibid 7

### 3. FUNDAMENTOS DEL CALCULO FRACCIONARIO

Para poder desarrollar la teoría del control fraccionario es necesario realizar una revisión del cálculo fraccionario: rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la posibilidad de usar números reales o complejos, como el orden del operador de la derivada.

Antes de comenzar con el estudio del control fraccionario se debe definir la notación para representar la integral y la derivada fraccionaria, la cual se muestra a continuación.

$${}_b D_t^\alpha g(t) \qquad {}_b D_t^{-\alpha} g(t)$$

Donde:

- b es la condición inicial de la derivada o la integral.
- t es la variable en función de la cual está la operación.
- $\alpha$  y  $-\alpha$  respectivamente son el orden de la derivada y la integral fraccionaria, los cuales son números no enteros.
- g(t) es la función objetivo que se desea integrar o derivar.

Dentro del análisis realizado, las condiciones iniciales son asumidas cero, por lo que se omite la inclusión del término b en las demostraciones.

#### 3.1 FUNCIONES ESPECIALES

Con el objetivo de estudiar la teoría del control fraccionario, se deben definir 2 funciones básicas del cálculo fraccionario que se encontraran frecuentemente, las cuales son la función Gamma y la función de Mittag-Leffler.

##### 3.1.1 FUNCION GAMMA

La función Euler-Gamma como también es conocida, es la extensión del factorial hacia los números complejos y los reales, su representación integral se muestra en la ecuación 1.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1)$$

Donde:

$z$  = Punto donde se desea evaluar la función gamma

$t$  = variable de la integración.

Esta función tiene la particularidad de que para cualquier número complejo o real, positivo, convergerá absolutamente. Y es utilizada, en cálculo fraccionario, para la definición de la derivada y la integral fraccionaria; y en estadística y probabilidad para realizar cálculos combinatorios.

### 3.1.1.1 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN GAMMA

- $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)}$
- $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(2z) = \frac{4^z \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}$ , Duplicación de la función gamma
- Para  $z \in \mathbb{N}^+$   $\Gamma(z) = k!$
- Para  $z \in \mathbb{N}^-$   $\Gamma(z) = \infty$
- $\Gamma(nz) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\frac{n^z}{\sqrt{2\pi}}\right] \prod_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right]$ , multiplicación de la función gamma para el producto  $n$ .

### 3.1.2 FUNCION DE MITTAG-LEFFLER

Cuando se resuelven ecuaciones diferenciales generalmente se aplica el método de solución homogénea y solución particular, donde, la última, es la función exponencial en la mayoría de los casos.

La función de Mittag-Leffler hace las veces de función exponencial pero generalizada para orden fraccionario. Esta se define en la ecuación 2 como:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2)$$

Donde:

$z$ = Valor donde se desea evaluar la función.

$\alpha$ = Orden fraccionario de la Función.

Para más detalles consultar <sup>11</sup>

### 3.2 GENERALIZACIÓN DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL

Una integral de una función  $f(x)$  puede representarse como se muestra en la ecuación 3:

$$D^{-1}f(x) = \int f(x)dx \quad (3)$$

Sin embargo esta integral puede reescribirse con límites de la siguiente forma:

$$D^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (4)$$

Como se muestra en la parte izquierda de la figura 2, los límites para la ecuación 4 están demarcados por el triangulo rojo. Ahora, se aplica el mismo procedimiento de agregar límites a la integral de orden 2 cuyo resultado es mostrado en la ecuación 5.

$$D^{-2}f(x) = \iint_0^x f(t1) dt1 dt2 \quad (5)$$

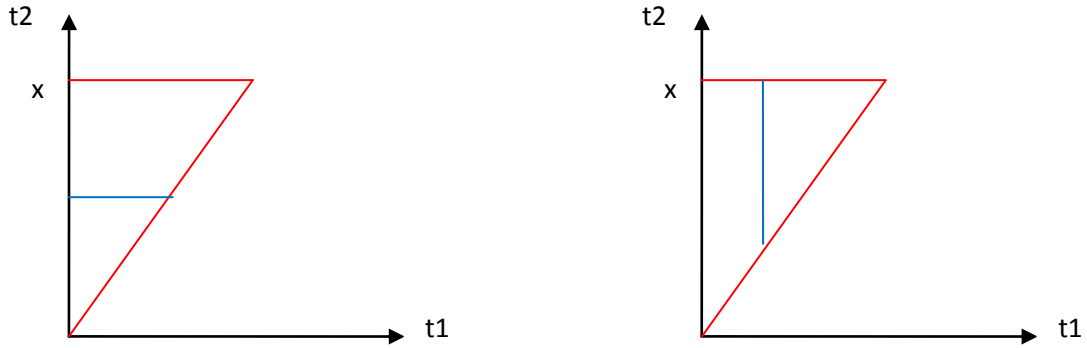
En la figura 5 de la izquierda, los límites de integración de la última ecuación están definidos desde el origen hasta la línea azul. Pero el área de integración puede cambiarse de la forma como se indica en la parte derecha de la figura 5, es decir, desde el eje vertical hasta la línea azul, haciendo que la integral doble se pueda escribir de la siguiente manera:

---

<sup>11</sup> PODLUBNY, Igor, Fractional Differential ecuations, San Diego, California: editorial academic press. 1999. Volumen 198. 366 p. ISBN 0 -1 2 S5H810 -2.

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1) dt_2 dt_1 \quad (6)$$

Figura 2: área de integración para la integral generalizada



De acuerdo con la ecuación 6, la función evaluada en  $F(t_1)$  se puede sacar de la integral a la cual pertenece como constante, obteniendo la siguiente expresión.

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt \quad (7)$$

Ahora, utilizando la misma metodología para las integrales de orden 3 y 4, se obtiene.

$$D^{-3}f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(t)(x-t)^2 dt \quad (8)$$

$$D^{-4}f(x) = \frac{1}{(3*2*1)} \int_0^x f(t)(x-t)^3 dt \quad (9)$$

Partiendo de 7, 8 y 9, es posible establecer una expresión general para el n-esimo orden entero de integración donde:

$$D^{-n}f(x) = \int_0^x \dots \int_0^x f(t) dt \dots dt_n$$

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt \quad (10)$$

Ahora, Si en 10 se reemplaza el orden entero de la derivada por un número real negativo  $-\alpha$  y el factorial se convierte en una función gamma, se obtiene una forma generalizada de la integral para cualquier orden que corresponda a un valor real negativo:

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \quad (11)$$

Tomando 11 como punto de partida, ya es posible generalizar la derivada para el orden fraccionario. Esto es posible gracias a que primero se aplica la integral fraccionaria, y luego se realiza una derivación de orden entero.

$$D^x = D^n D^{\alpha-n} f(x) \quad (12)$$

Donde:

$n =$  parte entera de  $\alpha + 1$ .

Por ejemplo, si se desea obtener la derivada de orden 7.8, primero se calcula el orden de la derivada entera  $n$  el cual para este caso particular es 8, luego se hace la integral fraccionaria de orden  $-0.2$  y por último se hace la derivada de orden entero del resultado de la integral de acuerdo con la ecuación 12.

### 3.3 INTEGRAL FRACCIONARIA

A partir de la ecuación 11, la cual fue determinada por Liouville para el límite de integración inferior cero, se da una versión generalizada para el orden  $\alpha$ -ésimo de la integral, sin embargo esta ecuación no converge para condiciones iniciales mayores de cero, por lo que Riemman redefine la integral de Liouville para un límite inferior que sea un número real positivo o negativo, como se muestra en la ecuación 13, la cual corresponde a la definición de Riemman-Liouville para la integral fraccionaria.



$$D^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \quad (13)$$

Esta definición es la más utilizada en calculo fraccionario para la realización de integrales de orden no entero.

Un ejemplo de la aplicación de este teorema, es por ejemplo para calcular la integral de una constante C para el orden fraccionario  $\alpha=0.5$  con condiciones iniciales iguales a cero.

Reemplazando  $\alpha$  y  $f(t)=C$  en 13

$$D^{-0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x C(x-t)^{0.5-1} dt$$

Utilizando el comando gamma de MATLAB se conoce el valor de  $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ ,

$$D^{-0.5} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x C(x-t)^{-0.5} dt$$

Ahora realizando la sustitución  $x-t=U$  y sacando la constante C

$$D^{-0.5} f(x) = -\frac{C}{\sqrt{\pi}} \int_0^x U^{-0.5} du$$

Realizando la integración, sustituyendo u y evaluando los limites se obtiene la siguiente expresión para la integral de la constante con orden fraccionario 0.5.

$$D^{-0.5}(x) = 2C \sqrt{\frac{x}{\pi}} \quad (14)$$

### 3.4 DERIVADA FRACCIONARIA

Como se mostró en la sección 3.3 la derivada fraccionaria tiene su origen a partir de la integral fraccionaria. Y el procedimiento para obtenerla consiste en realizar, primero, una integración fraccionaria, la cual, en segunda instancia, se deriva de forma entera.

Partiendo de la ecuación 13 y con el procedimiento en 3.3, Riemman define la derivada fraccionaria como se muestra en la ecuación 15.

$$D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{D^m}{D_t^m} \int_0^x f(t)(x-t)^{m+\alpha-1} dt \quad (15)$$

Donde:

- $\alpha$ : orden fraccionario
- $f(x)$ : función objetivo
- $m$ : orden de la derivada entera que se calcula con base en la inecuación  $m-1 < \alpha < m$

A partir de la ecuación 15 y de igual forma que en el numeral 4.3, se hallará la derivada fraccionaria para el orden 0.5 con condiciones iniciales cero de la constante C.

Reemplazando en 15  $\alpha$  y  $f(t)=C$ , para  $m=1$

$$D^{0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-0.5)} \frac{D^m}{D_t^m} \int_0^x C(x-t)^{1+0.5-1} dt$$

$$D^{0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{D^1}{D_t^1} \int_0^x C(x-t)^{0.5} dt \quad (16)$$

De la ecuación 16, el resultado de la parte integral es el mismo obtenido en la ecuación 14, por lo que el paso siguiente consiste en derivar la expresión de la ecuación 14.

$$D^{0.5} f(x) = \frac{D^1}{D_t^1} 2C \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

derivando la expresión anterior:

$$D^{0.5} f(x) = \frac{C}{\sqrt{x\pi}} \quad (17)$$

Hay un factor interesante en esta derivada, y es que cuando se realiza la derivada de orden entero siempre va a dar cero. Mientras que con la derivada fraccionaria no es cero sino una expresión particular, lo que demuestra las diferencias entre realizar cálculo de orden entero con respecto al cálculo fraccionario.

### 3.5 PROPIEDADES DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL FRACCIONARIA

- Cuando en una derivada o integral fraccionaria  ${}_b D_t^{\pm\alpha} g(t)$  el orden fraccionario  $\alpha$  es un numero entero  $n$ , el resultado de la operación es el que se obtiene normalmente para el orden entero.
- La operación  ${}_b D_t^{\alpha} g(t)$ , cuando  $\alpha=0$ , corresponde al operador identidad de la función  $g(t)$ , es decir.

$${}_0 D_t^{\alpha} g(t) = g(t)$$

- La derivada y la integral fraccionaria, son operadores lineales.

$${}_0 D_t^{\alpha} [ag(t) + bf(t)] = a {}_0 D_t^{\alpha} g(t) + b {}_0 D_t^{\alpha} f(t)$$

- La propiedad aditiva de la derivada o la integral, se da cuando la función  $f(t)$  es continua en el rango de evaluación.

$${}_0 D_t^{\alpha} {}_0 D_t^{\beta} g(t) = {}_0 D_t^{\alpha+\beta} g(t)$$

### 3.6 OTRAS DEFINICIONES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

Si bien la derivada y la integral fraccionaria de Riemman-Liouville, son las definiciones más utilizadas dentro del cálculo fraccionario, existen otras formas de entender la derivada y la integral fraccionaria.

Una de estas es la definición de Grünwald-Letnikov, la cual se basa en el concepto que la primera derivada de una función continua está definida por el teorema de la diferencia atrás como se muestra a continuación:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Ecuación 18: derivada de orden 1 por la definición de la diferencia atrás

De igual manera, también se puede aplicar esta definición para la derivada de segundo y tercer orden.

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \quad (18)$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (19)$$

Con las ecuaciones 18 y 19, es posible encontrar una ecuación general que defina la derivada utilizando la diferencia atrás para un orden entero, la cual se define en la ecuación 20.

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{r} f(t - jh) \quad (20)$$

Donde:

- $\binom{n}{r}$  Es una expansión de un producto de binomios.
- n es el orden de la derivada
- h es el tamaño de la diferencia atrás

Pero si se reemplaza el orden n por un número real  $\alpha$ , y se generaliza el producto de binomios, se obtiene la ecuación 21, que es la definición de Grünwald-Letnikov para la derivada fraccionaria.

$$f^\alpha(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{r} f(t - jh) \quad (21)$$

Donde:

- $\binom{\alpha}{r}$  Es una expansión de un producto de binomios generalizada.
- $\alpha$  es el orden de la derivada
- n es el orden entero máximo de la sumatoria, el cual debe cumplir que  $n > \alpha + 1$
- h es el tamaño de la diferencia atrás

Esta expresión, puede representarse alternativamente según<sup>12</sup> en forma integral de acuerdo al siguiente planteamiento.

---

<sup>12</sup> Ibid 11.

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x)x^{k-\alpha}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+k+1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha} f^{(m)}(t) dt \quad (22)$$

Otra definición de la integral fraccionaria es la que da Caputo, la cual está definida de acuerdo a la siguiente ecuación:

$${}_b D^\alpha f(x) = I^{m-\alpha} {}_b D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_b^x \frac{f^{(m)}(t)}{(x-t)^{\alpha-m+1}} dt \quad (23)$$

Donde:

- B es la condición inicial.
- m es el orden de la derivada fraccionaria dado por  $m-1 < \alpha < m$

Esta definición tiene la ventaja que permite considerar condiciones iniciales no nulas, lo cual es útil cuando se desarrollan ecuaciones diferenciales donde las ecuaciones iniciales no son nulas como por ejemplo en el modelamiento de sistemas mecánicos o eléctricos.

### 3.7 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL FRACCIONARIA

La transformada de Laplace es una herramienta fundamental en el análisis de sistemas de control, la cual está definida originalmente por la ecuación:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x) dx \quad (24)$$

Sin embargo, para los operadores fraccionarios existen diferentes transformadas de Laplace. por ejemplo en el caso de Riemman-Liouville y Caputo, la transformada de Laplace para la integral y la derivada se muestran en las ecuaciones 25 y 26.

## Riemman-Liouville

Transformada de Laplace para la integral de Riemman-Liouville con condiciones iniciales cero:

$$\mathfrak{L}(D^{-\alpha}F(x)) = S^{\alpha}F(S) \quad (25a)$$

transformada de Laplace para la derivada de Riemman-Liouville con condiciones iniciales diferentes de cero.

$$\mathfrak{L}(D^{\alpha}F(x)) = S^{\alpha}F(S) - \sum_{k=0}^{m-1} s^m [D^{\alpha-m-k}f(x)]_{x=0} \quad (25b)$$

para  $m+1 < \alpha < m$

## Caputo

Transformada de Laplace para la integral de Caputo con condiciones iniciales cero.

$$\mathfrak{L}(D^{-\alpha}F(x)) = S^{\alpha}F(S) \quad (26a)$$

Transformada de Laplace para la derivada de Caputo con condiciones iniciales diferentes de cero.

$$\mathfrak{L}(D^{\alpha}F(x)) = S^{\alpha}F(S) - \sum_{k=0}^{m-1} [S^{\alpha-m-k}f^{(k)}(x)]_{x=0} \quad (26.b)$$

para  $m+1 < \alpha < m$

Es importante resaltar que la con la transformación de la derivada fraccionaria de Caputo, cuando están presentes las condiciones iniciales, estas tienen un significado físico, ya que estas se pueden reemplazar directamente en la ecuación, a diferencia de las demás transformaciones, donde se debe conocer el valor de la derivada anterior, lo cual es físicamente imposible.

### 3.8 ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS

Las ecuaciones diferenciales, son la base para realizar el modelamiento del comportamiento de diferentes sistemas. En el caso de la teoría de control, los sistemas más comunes son los sistemas de orden 1 los cuales se definen por la ecuación diferencial:

$$aDf(x) + bf(x) = q(x) \quad (27)$$

Sin embargo, esta ecuación puede reescribirse para un orden fraccionario así:

$$aD^\alpha f(x) + bf(x) = q(x) \quad (28)$$

Realizando la transformada de Laplace de la ecuación 28 aplicando la derivada fraccionaria de Caputo y asumiendo las condiciones iniciales cero:

$$Y(s) = \frac{1}{a} \frac{q(s)}{s^\alpha + \frac{b}{a}} \quad (29)$$

Ahora realizando la transformada inversa de 29, se obtiene la solución de la ecuación diferencial:

$$Y(t) = r(t) * \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,1} \left( \frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (30)$$

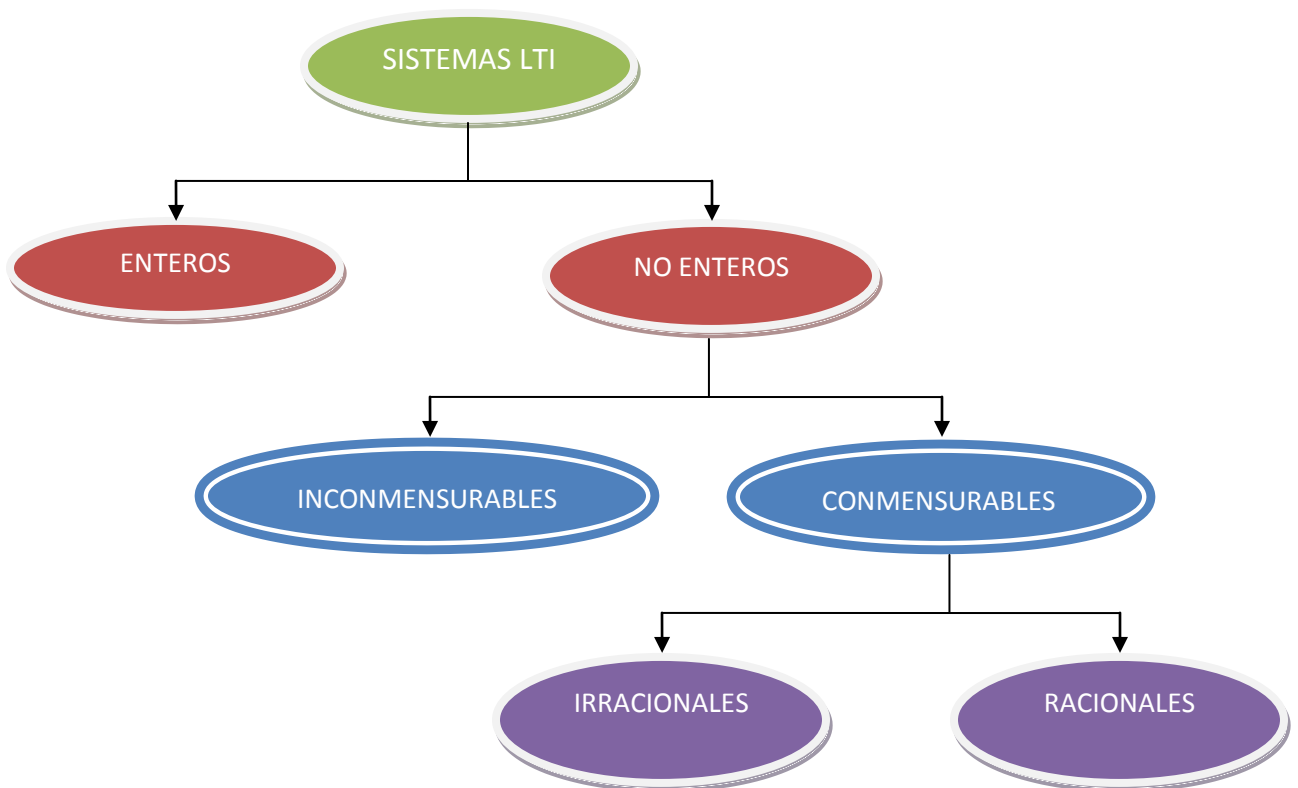
Donde la expresión  $E_{\alpha,1} \left( \frac{b}{a} t^\alpha \right)$ , corresponde a la función de Mittag-leffler de un parametro, la cual se comporta como una función exponencial para  $\alpha < 1$ , de la misma manera que los sistemas de orden 1. Mientras que para  $\alpha > 1$  esta tendrá un comportamiento más oscilatorio, al igual que los sistemas de orden superior.

## 4. ANALISIS DE SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO

### 4.1 CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS LTI

Los sistemas lineales invariantes en el tiempo son los que se presentan con mayor frecuencia dentro de la teoría de control. Su clasificación se muestra en la figura 3.

Figura 3: Clasificación de los sistemas LTI



Como se observa en la figura 3 los sistemas LTI están clasificados en enteros y no enteros. Respectivamente los primeros son los que se manejan en el control clásico, y los no enteros son el centro de estudio del control fraccionario. Dentro de los sistemas de control fraccionarios se observan 2 categorías principales que son los sistemas conmensurables e inconmensurables.



Para explicar mejor esta clase de sistemas, es necesario recordar que para un sistema dinámico, su ecuación diferencial puede escribirse de la siguiente manera:

$$H(D^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n})y(t) = G(D^{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n})u(t) \quad (31)$$

Donde H () y G() representa la agrupación de las derivadas de orden fraccionario de las funciones y(t) y g(t) respectivamente, lo cual puede representarse también de la siguiente manera.

$$K_n D^{\alpha_n} y(t) + K_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + K_0 D^{\alpha_0} y(t) = M_n D^{\beta_n} u(t) + M_{n-1} D^{\beta_{n-1}} u(t) + \dots + M_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (32)$$

En la ecuación 31,  $\alpha_n$  y  $\beta_n$ , corresponden a los órdenes fraccionarios de las derivadas de la ecuación diferencial. Partiendo de esto, si  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  se pueden representar como múltiplos de un mismo número real positivo  $n\theta$ , se hablará de la existencia de un sistema LTI conmensurado. Ahora, si para este sistema conmensurado el orden común  $\theta = \frac{1}{q}$ , y q pertenece a los enteros positivos, el sistema se considerará de tipo conmensurado racional. Por lo tanto, Los sistemas conmensurados irracionales serán aquellos que no cumplan la condición anterior.

Finalmente, los sistemas no conmensurados son aquellos para los cuales los ordenes  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  no sean iguales. Es importante resaltar que el análisis de sistemas de control fraccionario en este trabajo está enfocado para sistemas conmensurados racionales o irracionales.

## 4.2 REPRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO

Para definir un sistema de control se utiliza una función de transferencia, la cual es un modelo matemático de la relación del cociente entre la salida y la entrada del sistema. Esta relación está definida por 2 polinomios; uno representa a la entrada y otro a la salida.

De igual forma, los sistemas de control fraccionarios pueden representarse por medio del uso de funciones de transferencia, y pueden ser del tipo continuo o discreto. Tal como se muestra en la ecuación 31a y 31b.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M_n s^{\beta_n} + M_{n-1} s^{\beta_{n-1}} + \dots + K_0 s^{\beta_0}}{K_n s^{\alpha_n} + K_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + K_0 s^{\alpha_0}} \quad (33.a)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{M_n(wz^{-1})^{\beta_n} + M_{n-1}(wz^{-1})^{\beta_{n-1}} + \dots + K_0(wz^{-1})^{\beta_0}}{K_n(wz^{-1})^{\alpha_n} + K_{n-1}(wz^{-1})^{\alpha_{n-1}} + \dots + K_0(wz^{-1})^{\alpha_0}} \quad (33.b)$$

Para el caso particular de los sistemas de orden conmensurado existe otra forma de representar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\sum_{h=0}^j M_n (S^\alpha)^{k_j}}{\sum_{h=0}^n K_n (S^\alpha)^{k_n}}$$

Donde  $(S^\alpha)^{k_n}$ , puede reemplazarse por  $\lambda^{k_n}$ , creando una función pseudo-racional, ya que existe un orden común  $\alpha$  para el numerador y el denominador, quedando:

$$G(s) = \frac{\sum_{h=0}^j M_n \lambda^{k_j}}{\sum_{h=0}^n K_n \lambda^{k_n}} \quad (34)$$

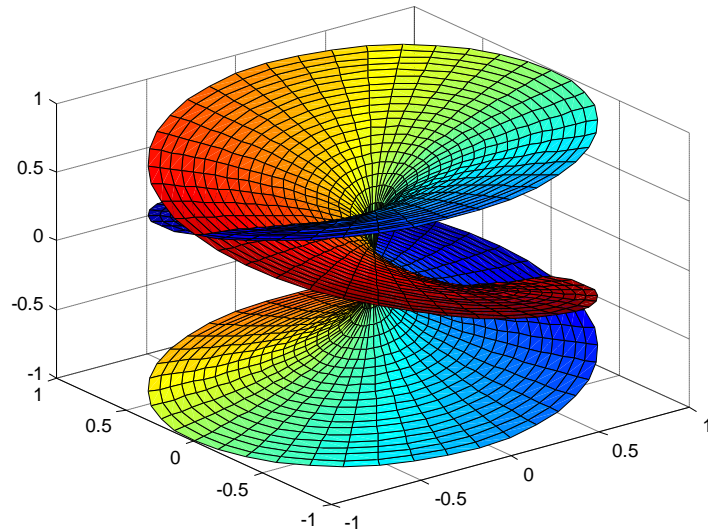
#### 4.3 ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE ORDEN FRACCIONARIO

Para poder estudiar la estabilidad de un sistema de control fraccionario, es necesario estudiar las soluciones de la ecuación diferencial que define el sistema, cuya transformada de Laplace es:

$$K_n s^{\alpha_n} + K_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + K_0 s^{\alpha_0} \quad (35)$$

Donde cada operador del tipo  $s^\alpha$ , corresponde a una función compleja multivaluada, cuyo dominio, al no poder representarse en un plano de 2 dimensiones, es necesario expandirlo tridimensionalmente utilizando la superficie de Riemman. Un ejemplo de esta clase de función es:  $s^{\frac{1}{3}}$ , cuya dominio se muestra en la figura 4.

Figura 4: Superficie de Riemman para la función  $s^{\frac{1}{3}}$ .



En la figura anterior se visualizan 3 hojas dentro de las cuales se encuentra el dominio de la función. El número de hojas de la superficie de Riemman depende del orden  $q$  de la función y esta dado por la expresión  $n = 1/q$ , donde  $n$  es el número de hojas que conforman el dominio de la función, el cual debe ser un número finito.

Por este operador ser complejo tiene una magnitud y una fase, los cuales pueden escribirse de la siguiente manera: donde  $|s|$  corresponde a la magnitud y  $e^{j\mu}$  a la fase del operador fraccionario.

$$w = |s|e^{j\mu}, \quad (2k - 1) < \mu < (2k + 3), \quad k = -1, 0 \dots n - 2 \quad (36)$$

En la figura anterior se visualizan 3 hojas dentro de las cuales se encuentra el dominio de la función. El número de hojas de la superficie de Riemman depende del orden  $q$  de la función y esta dado por la expresión  $n = 1/q$ , donde  $n$  es el número de hojas que conforman el dominio de la función, el cual debe ser un número finito.

Por este operador ser complejo tiene una magnitud y una fase, los cuales pueden escribirse de la siguiente manera: donde  $|s|$  corresponde a la magnitud y  $e^{j\mu}$  a la fase del operador fraccionario.

Sin embargo, solamente las raíces presentes dentro de la hoja principal permitirán alcanzar los diferentes comportamientos de un sistema, es decir, una dinámica oscilatoria, sobre amortiguada, críticamente amortiguada entre otros, convirtiendo estas raíces en las raíces principales o relevantes para el sistema, mientras que con las raíces de las hojas secundarias, solo se obtendrá una dinámica decreciente con tendencia a cero, lo que no determina el comportamiento real del sistema.

Ahora, conociendo que las raíces de la hoja principal son las que determinan el comportamiento del sistema, se necesita un criterio que permita conocer si el sistema es estable o no. Para esto, se aplica el teorema de estabilidad de Matignon que plantea que para una función de transferencia fraccionaria del tipo  $G(s)=X(s)/Q(s)$ , este será estable si se cumple el siguiente parámetro:

$$\exists M |G(s)| \leq M \quad \forall s \Re(s) \geq 0 \quad (37)$$

Basado en 37, un sistema es estable siempre y cuando las raíces de  $Q(s)=0$  se encuentren dentro de la hoja principal de Riemman, no se encuentren repetidas en  $X(s)$  y estas tengan parte real negativa.

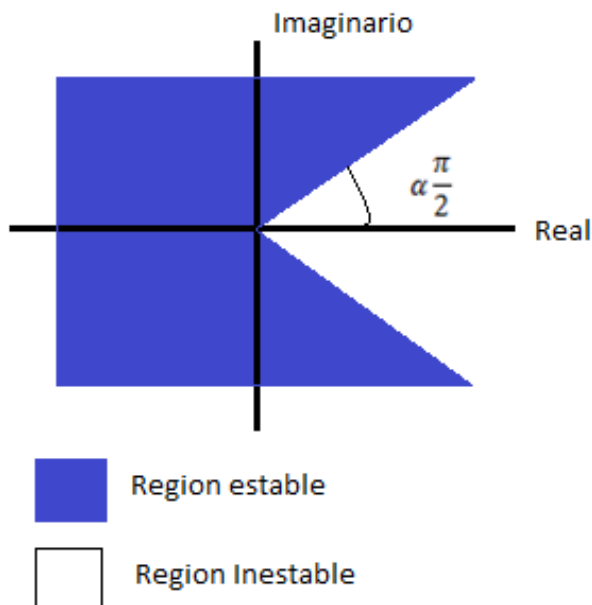
Esta condición en el caso particular de los sistemas LTI fraccionarios conmensurados, puede escribirse de la siguiente manera:

$$|\arg(\lambda_i)| = \alpha \frac{\pi}{2} \quad (38)$$

$$\text{Donde } \lambda = s^\alpha$$

Lo anterior gráficamente en términos del plano complejo, representa un aumento en la región de estabilidad del sistema, como se muestra en la figura 5.

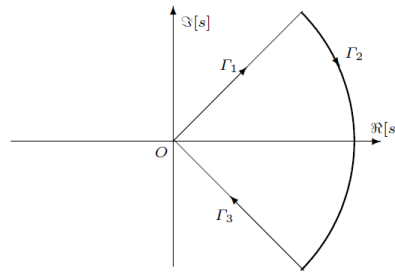
Figura 5: Región de estabilidad de un sistema LTI fraccionario conmensurado



Como se puede observar la región estable definida para los sistemas de orden fraccionario conmensurado, es mucho mayor a la de los sistemas de control enteros ya que alcanza a abarcar una parte del semiplano derecho que normalmente es la zona inestable.

Ya que no existe una técnica polinómica para evaluar la estabilidad de los sistemas de orden fraccionario como Routh-Joule, dado el número infinito de posibles soluciones que tiene el polinomio de la función de transferencia, solamente se puede evaluar la estabilidad por medio del diagrama de Nyquist. El método consisten en graficar la magnitud y la fase a través del contorno que delimita la región inestable del sistema, en este caso como el que está definido para la figura 5 y verificar que el punto  $-1,0j$  esté o no encerrado. Las ecuaciones que definen al contorno de Nyquist para sistemas fraccionarios conmensurados se muestran en la ecuación 39 y en la figura 6 el contorno de evaluación.

Figura 6: Contorno de evaluación del diagrama de Nyquist<sup>13</sup>



$$\Gamma_1: \frac{\lambda}{\arctan(\lambda)} = -\alpha \frac{\pi}{2}, |\lambda| \in [0, \infty) \quad (39a)$$

$$\Gamma_2: \lambda = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{j\varphi}, \varphi \in (-\alpha \frac{\pi}{2}, \alpha \frac{\pi}{2}) \quad (39b)$$

$$\Gamma_3: \frac{\lambda}{\arctan(\lambda)} = \alpha \frac{\pi}{2}, |\lambda| \in (\infty, 0] \quad (39c)$$

#### 4.4 ANALISIS DE RESUESTA TRANSITORIA DE UN SISTEMA DE ORDEN FRACCIONARIO

En general para los sistemas fraccionarios, la respuesta transitoria dependerá de las raíces de la ecuación característica, dando 6 posibilidades de respuesta transitoria.

- Si las raíces no están en la hoja principal de Riemman, serán monóticamente decreciente.
- Si las raíces están en la hoja principal y están en los reales < 0 y los imaginarios = 0, el sistema será monóticamente decreciente.
- Si las raíces están en la hoja principal y están en los reales < 0 y los imaginarios ≠ 0, el sistema funcionara con oscilaciones amortiguadas.
- Si las raíces están en la hoja principal y están en los reales = 0 y los imaginarios ≠ 0, el sistema se comportara como oscilador de amplitud constante.
- Si las raíces están en la hoja principal y están en los reales > 0 y los imaginarios ≠ 0, el sistema será monóticamente creciente.

<sup>13</sup> VINAGRE, Blas, MONJE, concepción, Introducción al control fraccionario. Volumen 3. Numero 3, Julio 2006, p 5-23, ISSN: 1697-7912.

- Si las raíces están en la hoja principal y están en los reales  $>0$  y los imaginarios  $=0$ , el sistema será inestable

Para el caso especial de los sistemas fraccionarios de orden conmensurado, la respuesta transitoria está determinada por la ecuación 40, la cual es la solución de la ecuación diferencial en términos de la función de Mittag-Leffler.

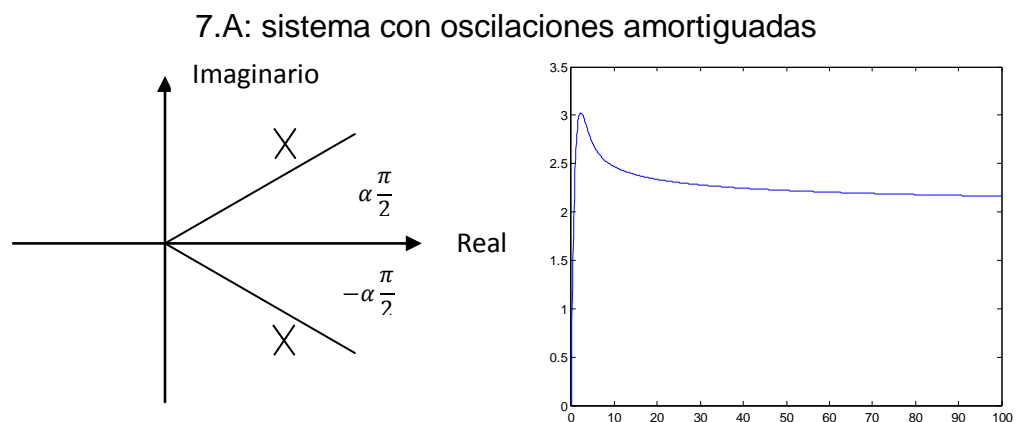
$$y(t) = \sum_{k=0}^n r_k t^\alpha \varepsilon_{\alpha, \alpha+1}(\lambda_k t^\alpha) \quad (40)$$

Igualmente, para los sistemas de orden conmensurado, la respuesta transitoria depende de la posición de las raíces, las cuales se comportan de la siguiente forma:

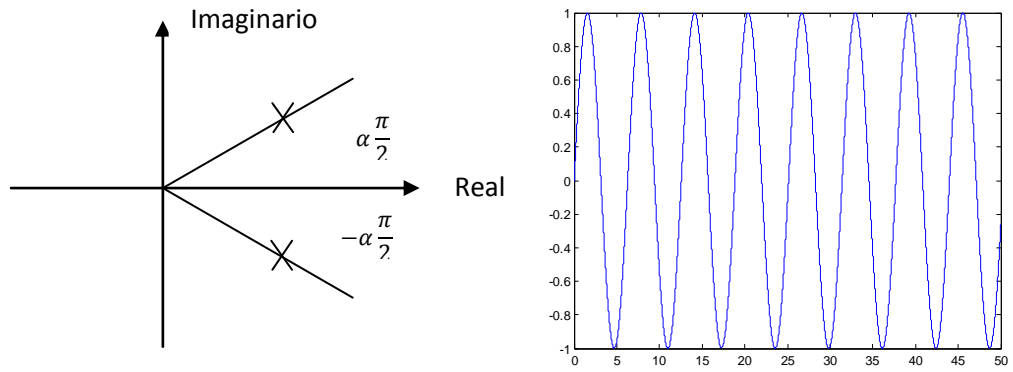
- Oscilatorio con amplitud decreciente para ángulos entre  $\alpha \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha \pi$  rad.
- Oscilatorio para ángulos iguales a  $\alpha \frac{\pi}{2}$  rad.
- inestable para ángulos menores a  $\alpha \frac{\pi}{2}$  rad..
- Monóticamente creciente para ángulos iguales a cero.

En la figura 7 se observa la respuesta al escalón unitario para las ubicaciones de raíces respectivamente.

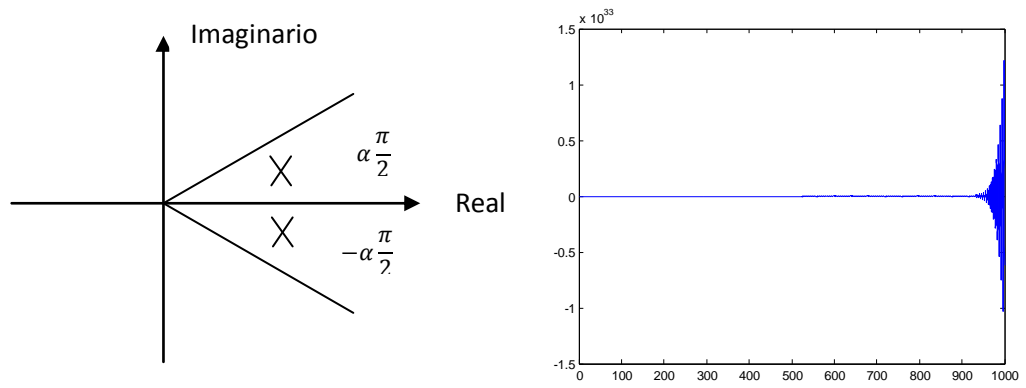
Figura 7: Respuesta al step según el lugar geométrico de las raíces



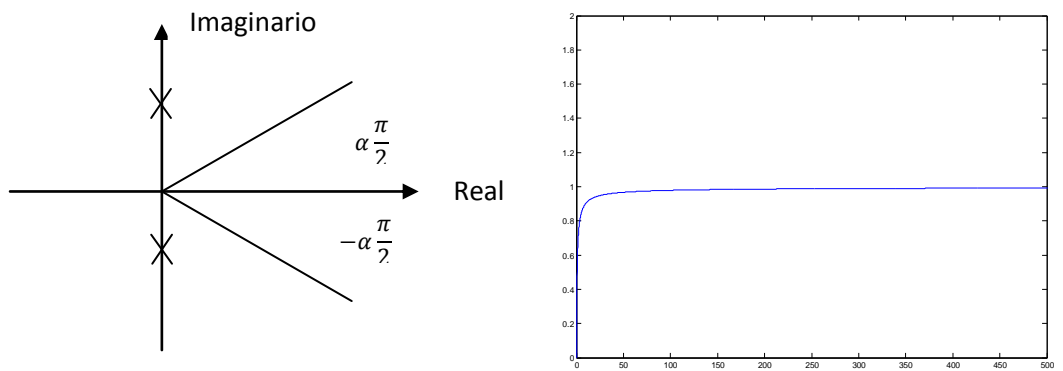
### 7.B: sistema oscilante



### 7.C: sistema inestable

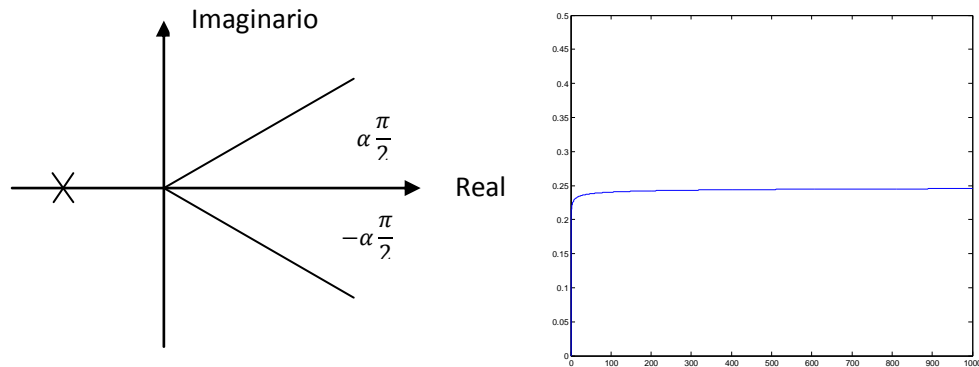


### 7.D: sistema monóticamente creciente





## 7.E: Monólicamente creciente



## 4.5 RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA DE CONTROL FRACCIONARIO

La respuesta en frecuencia de un sistema de control, se basa en la evaluación de este sobre el eje imaginario variando la frecuencia desde cero hasta infinito. Por lo tanto se puede decir que sumando las contribuciones individuales de cada raíz del sistema se puede determinar la respuesta en frecuencia del sistema como se muestra en la ecuación 40.

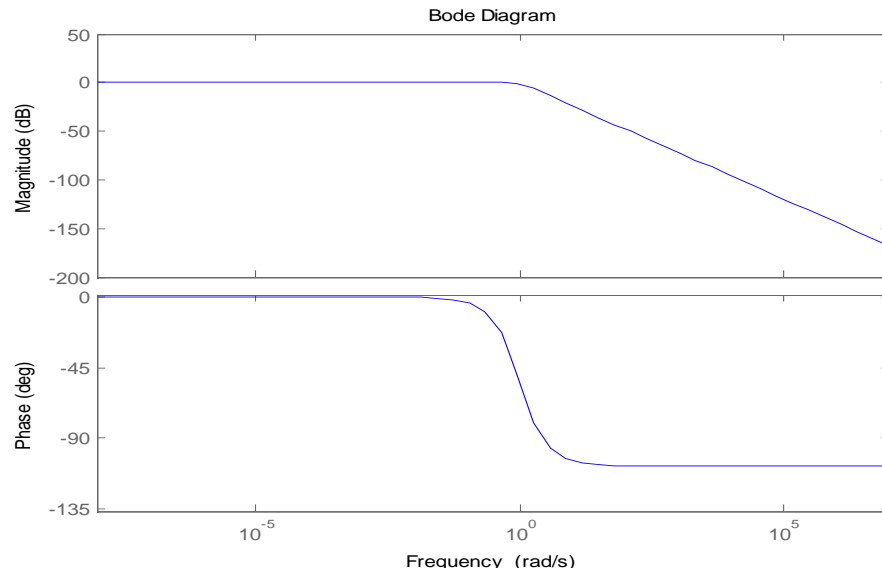
$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\prod_{k=0}^m (s^\alpha + \sigma_k)}{\prod_{k=0}^n (s^\alpha + \lambda_k)} \quad (41)$$

Donde  $\sigma_k$  se evalúa para  $P(\sigma_k)=0$ . De igual manera para  $\lambda_k$  cuando  $Q(\lambda_k)=0$ , y ambos son respectivamente los coeficientes de las raíces del numerador y el denominador.  $m$  y  $n$  es la cantidad de raíces en el numerador y el denominador.

La ecuación 42 plantea la ecuación que define a una de las raíces presentes en el numerador o denominador de la ecuación 40, cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura 8.

$$F(s) = \frac{1}{s^{1.2} + 1} \quad (42)$$

Figura 8: respuesta en frecuencia de la ecuación 40.



En la figura 8 se observa que hay una pendiente de magnitud 24Db y una fase que comienza en cero y termina en  $-108^\circ$ . Esto en general significa que para los sistemas de orden conmensurado, cada una de sus raíces aportara  $-20$  Db a la magnitud y  $-\alpha \frac{\pi}{2}$  rad a la fase del sistema.

#### 4.6 RESPUESTA EN ESTADO ESTACIONARIO DE UN SISTEMA DE CONTROL FRACCIONARIO

Al igual que con los sistemas enteros para los sistemas fraccionarios también es posible aplicar los criterios de error de posición, de velocidad y de aceleración, cuyos coeficientes son determinados por:

- Coeficiente para el error de posición

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

- Coeficiente para el error de velocidad

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

- Coeficiente para el error de aceleración

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

Para los sistemas de orden fraccionario conmensurados, los coeficientes y los errores se definen como se muestra en la tabla 1.

Coeficiente	Error
$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K s^{-\alpha}$	$Ep = \frac{1}{1 + k_p}$
$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} K s^{1-\alpha}$	$Ev = \frac{1}{k_v}$
$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} K s^{2-\alpha}$	$Ep = \frac{1}{k_a}$

Tabla 1: Error de estado estacionario para los sistemas fraccionarios conmensurados

Donde:

- $-\alpha$  es el orden conmensurado del sistema
- $K$  es el factor común de los elementos del numerador de la función de transferencia.

Si se aplican las ecuaciones de la tabla 1 se observa que para los sistemas de orden fraccionario, los coeficientes de error siempre serán infinito o cero, haciendo de que el valor del error sea también infinito o cero, lo que implica la presencia en los sistemas de orden no entero de elementos tanto de sistemas de orden bajo como de orden alto.

A modo de ejemplo se tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^{1.5} + s^{0.5} + 3} \quad (43)$$

Aplicando las formulas de la tabla 1 se obtienen los siguientes resultados para los diferentes errores, Para  $\alpha=0.5$  y  $K=1$ , los cuales como se menciona en el párrafo anterior se encuentran entre cero e infinito.

Error	Coeficiente	Valor del error
Posición	$\infty$	0
Velocidad	$\infty$	0
Aceleración	0	$\infty$

Tabla 2: Parámetros de desempeño para el error de estado estacionario.

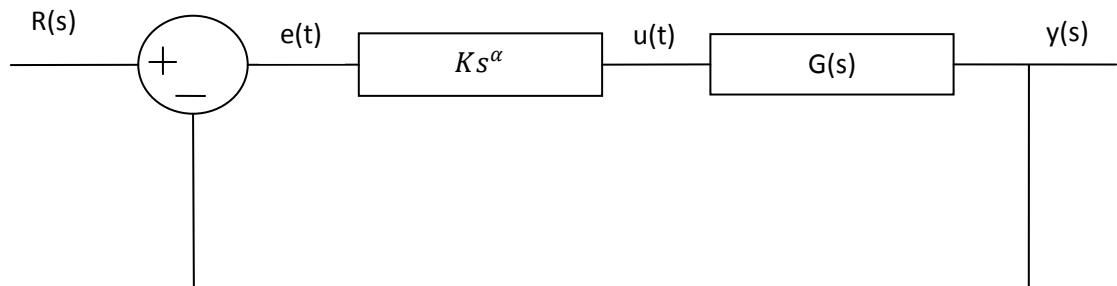
## 5. CONTROLADORES FRACCIONARIOS

Cuando se habla de controladores y de acciones de control, el controlador PID es el primer tipo de controlador mencionado dada su sencillez y facilidad de implementación, el cual utiliza un integrador y un derivador para realizar el control de un proceso específico.

Sin embargo, cuando se habla de controladores fraccionarios también es posible la implementación de un controlador PID, con la diferencia que su integrador y derivador no serán de orden entero, sino un número decimal, lo que implica una generalización del controlador y de sus acciones de control, que se traduce en un mayor número de parámetros sintonizables que le brindan robustez al control.

Para comenzar el análisis de las acciones generalizadas de control se toma como referencia el sistema de control de retroalimentación unitaria negativa, como el que se muestra en la figura 9.

Figura 9: sistema de control con realimentación unitaria negativa



### 5.1 ACCION INTEGRAL

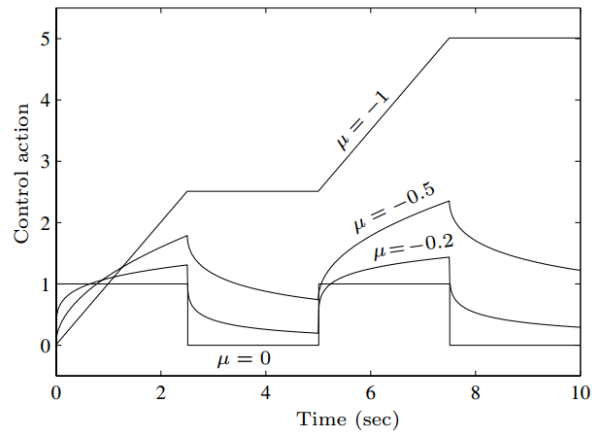
Normalmente, la acción integral tiene la función de eliminar el error de estado estacionario, pero retrasando el tiempo de estabilización del sistema y tornándolo más inestable. Estos efectos se ven en el dominio del tiempo en un aumento del setting time, en el plano complejo se ve como el desplazamiento de los polos hacia el semiplano derecho, y en el dominio de la frecuencia genera un aumento en la pendiente de la magnitud de 20DB y en la fase un aumento de 90°grados.

Ahora para analizar los efectos del orden fraccionario en la acción integral, se pone una señal de error  $e(t)$  cuadrada y se observa la acción de control  $u(t)$ , la cual se define por la siguiente ecuación:

$$U(t) = K \sum_{j=0}^N \frac{-1^j}{\Gamma(1-\alpha)} (t - jT)^{-\alpha} u_0(t - jT) \quad (44)$$

En la figura 10 se muestra la Evaluación de esta función para el orden fraccionario  $\alpha = 0, -0.2, -0.5$  y  $-1$ .

Figura 10: acción de control para diferentes ordenes fraccionarios<sup>14</sup>



A partir de la figura 9, se puede decir que para  $\alpha=0$ , la señal de error se comportará de la misma forma. para  $\alpha=1$ , se observa un incremento constante en la acción de control, mientras que para valores intermedios de  $\alpha$ , la señal de control se comporta con una tendencia al crecimiento cuando el error es constante, y cuando este retorna a cero, la señal de control decrece, lo que implica una mayor estabilidad del sistema, ya que los polos se desplazarán hacia el semiplano derecho, pero esta vez la región de estabilidad, como se muestra en la sección 5.3 se extiende sobre una parte de este plano, lo que garantiza que se alcance la estabilización del sistema.

Por la parte del análisis de frecuencia es posible incluir un aumento controlado de magnitud de la pendiente de  $-20\text{dB}$  y de fase de  $\alpha\frac{\pi}{2}$  rad, como se demuestra en la sección 4.5.

<sup>14</sup> Ibid 8

## 5.2 ACCION DERIVATIVA

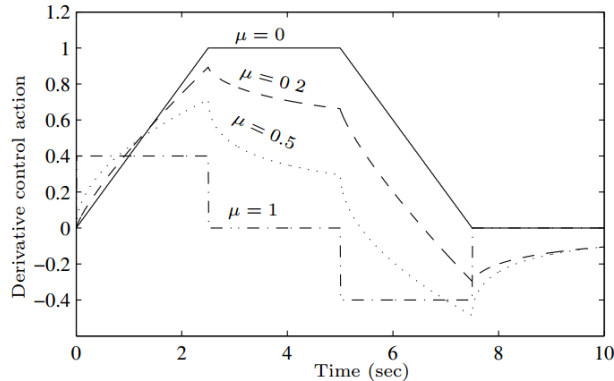
La acción derivativa tiene como principales ventajas que permite la atenuación del ruido de alta frecuencia y torna más estable al sistema. Esto en el dominio del tiempo se ve como un aumento en el overshoot y un menor tiempo de establecimiento. En el plano complejo se desplazan los polos hacia el semiplano izquierdo, acercándolos a la región de estabilidad y en el dominio de la frecuencia añaden 20DB a la pendiente de la magnitud y  $90^\circ$  a la fase.

Para observar los efectos de la acción generalizada, se realiza el mismo procedimiento que en la sección 6.2, con la diferencia que en este caso la señal de error no será una onda cuadrada sino de forma trapezoidal  $u_0(t)$ , lo que cambia la acción de control  $u(t)$  que ahora estará dada por la siguiente expresión.

$$U(t) = \frac{K}{\Gamma(2-\alpha)} [t^{1-\alpha}u_0(t) - (t-T)^{1-\alpha}u_0(t-T) - (t-2T)^{1-\alpha}u_0(t-2T) - (t-3T)^{1-\alpha}u_0(t-3T)] \quad (45)$$

Igualmente, se realiza la grafica de la ecuación 42 para  $\alpha=0$ ,  $\alpha=0.2$ ,  $\alpha=0.5$  y  $\alpha=1$  cuyo resultado se muestra en la figura 12.

Figura 12: acción derivativa generalizada para señal trapezoidal<sup>15</sup>



Como se observa en la figura 12 cuando se aplica un orden entero a la acción derivativa se observan cambios más violentos en la acción de control, mientras que al aplicar un orden fraccionario, la acción de control cambia más suavemente, lo que mejora la atenuación de ruidos de alta frecuencia. En el dominio de la frecuencia, al igual que con la acción integral se puede generar un cambio controlado en la pendiente de la magnitud en  $\alpha 20$  DB y en la fase de  $\alpha \frac{\pi}{2}$  rad.

<sup>15</sup> Ibid 8.

### 5.3 CONTROLADOR PID CLASICO

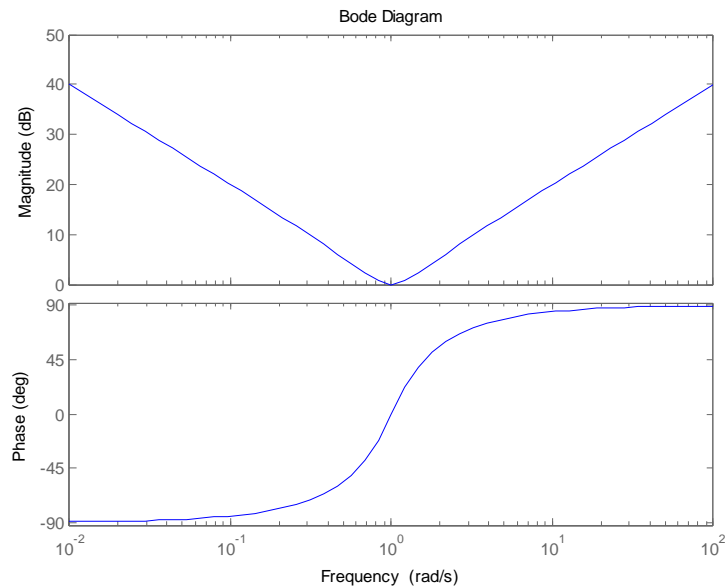
El controlador PID clásico es considerado como un compensador de adelanto-atraso, cuya función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (46)$$

Los parámetros que se sintonizan comúnmente en este controlador son las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ , las cuales están ligadas a la parte proporcional, integral y derivativa respectivamente.

La respuesta en frecuencia del controlador PID para las constantes  $K_p=K_i=K_d=1$ , se muestra en la figura 13:

Figura 13: Respuesta en frecuencia del controlador PID clásico



Se puede observar en la figura 11 que tanto para la magnitud como para la fase del sistema, respectivamente comienzan en 40 DB y  $-90^\circ$  y después de pasar el punto de inflexión de ambas curvas regresan al mismo valor con el que arrancaron.

## 5.4 CONTROLADOR PID FRACCIONARIO

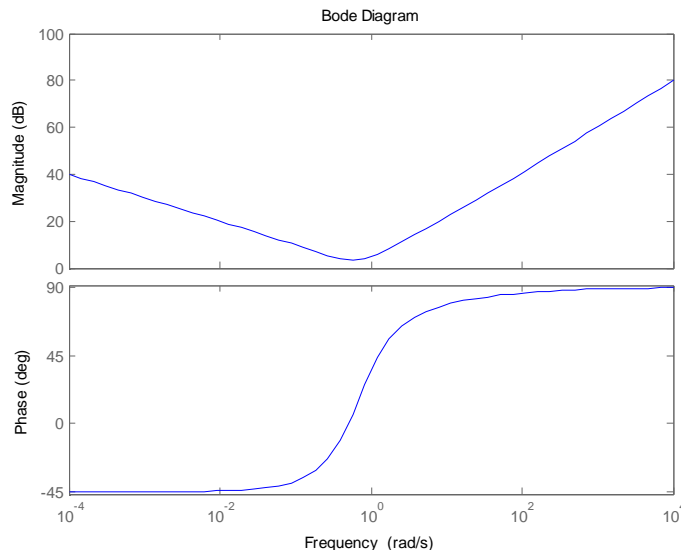
El controlador PID fraccionario o FOPID (fractional order PID controller) está definido por la siguiente ecuación integro diferencial donde  $e(t)$  es la señal de error.

$$G_c(t) = e(t)[K_p + K_i D^{-\alpha} + K_d D^{\beta}] \quad (47)$$

La transformada de Laplace de esta ecuación para condiciones iniciales cero y la respuesta en frecuencia del controlador para  $K_p=K_i=K_d=1$  y  $\alpha=\mu=0.5$  se muestran en la ecuación 48 y en la figura 14.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\mu \quad (48)$$

Figura 14: Respuesta en frecuencia del PID fraccionario

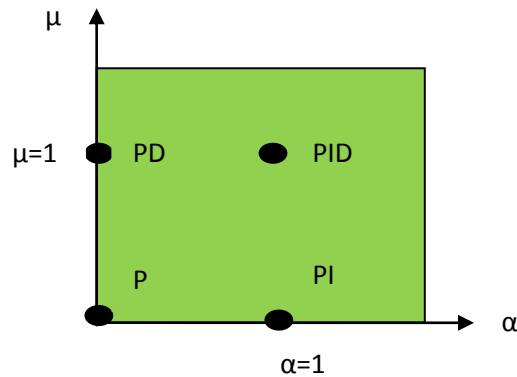


En la figura 14, la respuesta en frecuencia del FOPID muestra que es posible escoger los puntos de partida y de llegada de la magnitud y la fase, lo que se traduce en poder escoger las aportaciones de magnitud y frecuencia que se deseen para lograr controlar un sistema.

Con el objetivo de ver mejor las ventajas del controlador fraccionario, en la figura 15 se realiza una grafica del orden derivativo  $\mu$  vs el orden integral  $\alpha$ .



Figura 15: Descripción grafica de los controladores PID enteros y fraccionarios



Los puntos negros representan los diferentes controladores clásicos o enteros como el PD, PID y PI, mientras que el recuadro verde comprende todas las posibilidades que existen para los controladores FOPID, FOPI o FOPD. Esto muestra que los controladores fraccionarios pueden ajustarse mejor a cada sistema, alcanzando más fácilmente sus requerimientos de control.

## 6. TECNICAS DE DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS

Cuando se busca diseñar un controlador PID entero, existen diferentes formas de sintonizarlo con el objetivo de buscar una condición en particular. Por ejemplo, robustez ante perturbaciones de cualquier tipo como ruido de alta frecuencia, ante variaciones de ganancia en la planta, o simplemente frente a perturbaciones externas. Otra condición buscada es que el controlador sea óptimo con respecto a los diferentes índices de desempeño como son el ISE o el ITAE. También se busca que el controlador se pueda sintonizar de forma rápida y sencilla frente a plantas desconocidas.

Para el caso del control fraccionario y de los controladores FOPID y sus derivados como el controlador fraccionario proporcional integral FOPI, o el controlador fraccionario proporcional derivativo FOPD, existen métodos de sintonía que permiten cumplir las especificaciones anteriormente mencionadas, los cuales al igual que para los controladores enteros se pueden diseñar por análisis en frecuencia, métodos empíricos y análisis de tiempo.

## 6.1 DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El diseño de controladores fraccionarios utilizando métodos frecuenciales, tiene como objetivo principal brindar robustez al controlador frente a las perturbaciones ya mencionadas.

Para el desarrollo de esta metodología de diseño es necesario conocer el modelo del sistema  $G_p(s)$  y la función de transferencia del controlador  $G_c(s)$ .

El controlador deberá cumplir con 6 condiciones especiales que son:

- Margen de fase (pm): el margen de fase es uno de los indicadores de robustez del sistema, ya que permite medir la tasa de atenuación del sistema, el cual está definido por la ecuación 46:

$$\text{Arctan}(G_c(s)G_p(s)) = -\pi + pm \quad (49)$$

- Frecuencia de resonancia ( $W_c$ ): también conocida como frecuencia de ganancia de cruce. Es el segundo indicador de robustez, que también permite medir la tasa de atenuación del sistema y predecir su comportamiento dinámico. En este punto es cuando la función de transferencia del sistema junto con el controlador alcanzan su punto más alto. Este parámetro de diseño se describe en la ecuación 47.

$$|G_c(s)G_p(s)| = 0 \text{ DB} \quad (50)$$

- Robustez ante variaciones de ganancia de la planta: Esta condición fuerza al sistema en lazo abierto, a que su fase se mantenga plana en un intervalo alrededor de la frecuencia de resonancia. Esta hace que el sistema se mantenga a pesar que la ganancia de la planta cambie bruscamente, y el overshoot se mantenga constante dentro de un rango de ganancia específico. Esto es conocido como la propiedad de iso-atenuación. la ecuación 50 define esta propiedad.

$$\frac{\text{Darctan}(G_c(jw)G_p(jw))}{dw} = 0, \text{ Para } w=W_c \quad (51)$$

- Rechazo al ruido de alta frecuencia: esta propiedad depende de la función sensitiva complementaria, la cual es la encargada de definir la robustez del sistema en lazo cerrado ya que controla el ruido del sistema y las

consideraciones dinámicas que no fueron modeladas para la planta. esta propiedad solo es aplicable para sistemas con realimentación unitaria como los de la figura 8.

$$\left| \frac{G_c(jw)G_p(jw)}{1+G_c(jw)G_p(jw)} \right| = B \text{ dB}, (52)$$

para  $w=W_c$  y B el valor deseado de rechazo en dB

- Rechazo de perturbaciones en la salida: este parámetro esta dado por la función sensitiva, la cual se encarga del rechazo de las perturbaciones en la salida de un sistema con realimentación unitaria. Al igual que para la condición anterior, solo es aplicable a sistemas como el de la figura 8.

$$\left| \frac{1}{1+G_c(jw)G_p(jw)} \right| = A \text{ dB}, (53)$$

para  $w=W_c$  y A el valor deseado de rechazo en dB

- Eliminación del error de estado estable: para el cumplimiento de este requerimiento, basta con colocar un integrador fraccionario, sin embargo este integrador debe implementarse como se muestra en la ecuación 51, incluyendo el integrador entero de orden 1, ya que el operador fraccionario es infinito en frecuencia, pero en el momento de la implementación su respuesta en frecuencia es limitada a un rango, lo que hace que pierda sus propiedades de eliminación del error de estado estable. Este procedimiento debe realizarse también al derivador, ya que de igual que el integrador, cuando se implementa este queda limitado en frecuencia. para el derivador se muestra en la ecuación 51.b

$$\frac{1}{s^\alpha} = \frac{s^{1-\alpha}}{s} (54.a)$$

$$s^\alpha = s * s^{1-\alpha} (54.b)$$

Para el caso más general que es el controlador FOPID, cuya función de transferencia está en la ecuación 46, es necesario determinar 5 incógnitas que son las constantes proporcional, integral y derivativa, además del orden fraccionario para el integrador y el derivador, lo que resulta en un sistema de ecuaciones no lineales, el cual contiene 5 incógnitas, que no es posible resolver por métodos matriciales.

Para la resolución de estos sistemas no lineales, se pueden utilizar métodos numéricos para llegar a la respuesta. Sin embargo, MATLAB con la Toolbox de optimización permite realizar este proceso, ya que permite trabajarlo como una optimización multiobjetivo.

Dentro de la Toolbox, existe un comando conocido como FMINCON, el cual encuentra el mínimo valor de una función dada una serie de restricciones. Este algoritmo necesita de 2 funciones, una de ellas es la función objetivo, sobre la cual se realiza la minimización, y otra que recoja todas las condiciones para la optimización.

Para el controlador FOPID la ecuación objetivo de la sintonización es la ecuación 49 correspondiente a la frecuencia de cruce de ganancia, y las ecuaciones objetivo son las ecuaciones 48, 50, 51 y 52.

El éxito de esta metodología de sintonización depende de las condiciones iniciales con las que se haya comenzado el proceso.

Este método también puede aplicarse para la encontrar las constantes de un controlador FOPI o FOPD, teniendo en cuenta que estos controladores ya no cuentan con 5 parámetros, sino con 3 los cuales son las constantes proporcional, integral o derivativa, y el correspondiente orden fraccionario de la derivada o de la integral.

Ya que para un FOPI o FOPD solo se cuenta con 3 incógnitas, basta solamente con 3 ecuaciones para resolver el sistema. Siguiendo la metodología expuesta, las ecuaciones que se utilizan son la 49, 50 y 51, que corresponden al margen de fase, la frecuencia de resonancia y la variación de ganancia en la planta.<sup>16</sup>

Aplicando la solución con FMINCON, la ecuación objetivo será igualmente la 49, la 50 y 51 las funciones que condicionan la solución.

Sin embargo, en <sup>17</sup> <sup>18</sup>, se plantea un método de sintonización para controladores FOPI y FOPD, para sistemas de orden 1 con retardo, como el que se describe en la ecuación 54, el cual utiliza las ecuaciones 48-50, con la diferencia que resuelve el sistema de ecuaciones no lineales de forma diferente.

---

<sup>16</sup> VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, On Fractional PI $\lambda$  Controllers: Some Tuning Rules for Robustness to Plant Uncertainties. Jornadas de ingeniería de control (2006: pamplona). España, 2006, 18 p.

<sup>17</sup> YANGQUAN, Chen, Fractional Order Proportional and Derivative Controller Synthesis for A Class of Fractional Order Systems: Tuning Rule and Hardware-in-the-loop Experiment. 48th IEEE Conference on Decision and Control (2009,china).

<sup>18</sup> YANGQUAN, Chen, Fractional Order Proportional Integral (FOPI) and [ProportionalIntegral] (FO[PI]) Controller Designs for First Order Plus Time Delay(FOPTD) Systems. Chinese Control and Decision Conference (2009,china).

$$G_p(s) = \frac{K}{(Ts+1)} e^{-Ls} \quad (55)$$

Donde:

- K es la ganancia del sistema
- T es el tiempo de establecimiento
- L es el retardo del sistema

El procedimiento planteado para hallar las constantes es el siguiente:

- Determinar para la planta en lazo abierto: la constante de tiempo, la frecuencia de resonancia, el margen de fase, el tiempo de retardo y la ganancia del sistema.
- Despejar la constante Kp de la ecuación 49.
- Despejar de 49 y 50 la constante Ki o Kd en función del orden fraccionario de la derivada o de la integral, dependiendo del tipo de controlador
- Asignar un rango de solución para  $\alpha$ . Se selecciona  $0 < \alpha < 2$ .
- Graficar los despejes de las ecuaciones 50 y 51 en el rango de  $\alpha$  y encontrar el punto de corte entre ambas, para obtener el valor de  $\alpha$  y de Ki.
- Reemplazar en el despeje de 47  $\alpha$  y Ki, para obtener Kp.

## **6.2 DISEÑO DE CONTROLADORES FRACCIONARIOS POR EL METODO HEURISTICO**

Cuando se busca sintonizar un controlador PID y no se conoce el modelo de la planta a controlar, el método de Ziegler y Nichols suele ser la opción preferida, ya que no requiere conocimientos previos de la planta y encontrar los parámetros de sintonización es bastante simple.

Partiendo de esta idea, Valeiro y Costa<sup>19</sup>, plantearon una serie de reglas para sintonizar controladores FOPID, denominando su método como Ziegler y Nichols modificado.

Al igual que la metodología de sintonización de Ziegler y Nichols original, existe una serie de reglas para los diferentes sistemas, es decir para aquellos con respuesta en lazo abierto en forma de S y para los que su respuesta es una señal con oscilaciones sostenidas.

Para el primer conjunto de reglas de sintonización, Valeiro y Costa toman la respuesta en lazo abierto en forma de S, que corresponde a la dinámica de un sistema de orden 1 como el de la ecuación 51, que es sintonizado utilizando el método de optimización con FMINCON, con variaciones de la constante de tiempo T y del retardo del sistema L.

A partir de esto se obtienen los datos de Kp, Ki, Kd y los órdenes derivativo e integral, a los cuales se les realiza una regresión por mínimos cuadrados que aproxima el comportamiento del sistema, obteniendo la siguiente expresión para la constante proporcional:

$$P = -0.048 + 0.02664L + 0.4982T + 0.0232L^2 - 0.0702T^2 - 0.0348TL \quad (56)$$

En la ecuación 56 se observan unos coeficientes que acompañan a cada T y L, los cuales varían de acuerdo a la constante que se desee calcular, y estos se encuentran en la tabla 3.

	P	I	D	$\alpha$	$\mu$
1	-0.0048	0.3254	0.0662	0.8736	2.1187
L	0.2664	0.2478	-0.2528	0.2746	-3.5207
T	0.4982	0.1429	0.1081	0.1489	-0.1563
$L^2$	0.0232	-0.1330	0.0702	-0.1557	1.5827
$T^2$	-0.0720	0.0258	0.0328	-0.0250	0.0025
LT	-0.0348	-0.0171	0.2202	-0.0323	0.1824

Para  $0.1 < T < 5$

<sup>19</sup> VALERIO, Duarte. COSTA, José. TUNING-RULES FOR FRACTIONAL PID CONTROLLERS. (2005, Portugal), 6p.

	P	I	D	$\alpha$	$\mu$
1	2.1187	-0.5201	1.0645	1.1421	1.2902
L	-3.5207	2.6643	-0.3268	-1.3707	-0.5371
T	-0.1563	0.3453	-0.0229	0.0357	-0.0381
$L^2$	1.5827	-1.0944	0.2018	0.5552	0.2208
$T^2$	0.0025	0.0002	0.0003	-0.0002	0.0007
LT	0.1824	-0.1054	0.0028	0.2630	-0.0014

Para  $5 < T < 50$

Tabla 3: Valores de los mínimos cuadrados para el caso 1 de sintonización por curva de reacción.

Existe un segundo paquete de normas de sintonización, basado en el segundo caso de Ziegler y Nichols, que es para los sistemas que no presentan una curva de reacción, donde siguiendo el método para controladores enteros, se pone el sistema en lazo cerrado con una ganancia proporcional hasta que en un valor de esta el sistema se comporte como un oscilador obteniendo una ganancia crítica  $K_{cr}$  y un periodo de oscilación crítico  $P_{cr}$ . De la misma forma que antes, se varía L y T, luego se aplica el algoritmo de optimización, y por último a los datos de las constantes se les aplica regresión cuadrática, obteniendo una expresión mostrada en la ecuación 53, similar a la ecuación 56.

$$P = 0.4139 + 0.0145K_{cr} + 0.1584P_{cr} - \frac{0.4384}{K_{cr}} - \frac{0.0855}{P_{cr}} \quad (57)$$

La tabla 4 muestra los coeficientes que acompañan la regresión cuadrática para el segundo paquete de reglas de sintonía.

	P	I	D	$\alpha$	$\mu$
1	0.4139	0.7067	1.3240	0.2293	0.8804
$K_{cr}$	0.0145	0.0101	-0.0081	0.0153	-0.0048
$P_{cr}$	0.1584	-0.0049	0.0163	0.0936	0.0061
$1/K_{cr}$	-0.4384	-0.2951	0.1393	-0.5293	0.0749
$1/P_{cr}$	-0.0855	-0.1001	0.0791	-0.0440	0.0810

Para  $K_{cr} \cdot P_{cr} < 64$

	P	I	D	$\alpha$	$\mu$
1	-1.4405	5.7800	0.4712	1.3190	0.5425
Kcr	0	0.0238	-0.0003	-0.0024	-0.0023
Pcr	0.4795	0.2783	-0.0029	2.6251	-0.028
1/Kcr	32.2516	-56.2373	7.0519	-138.9333	5.0073
1/Pcr	0.6893	-2.5917	0.1355	0.1941	0.2873

Para  $64 < K_{cr} * P_{cr} < 640$

Tabla 4: Valores de los mínimos cuadrados para el caso II de oscilaciones sostenidas.

La principal ventaja de este método de sintonía es que no se necesita el modelo del sistema para sintonizar el controlador. Sin embargo, las aproximaciones de este método no son generales para cualquier sistema, ya que los 2 casos esta limitados dentro de un rango de valores.

## 7. IMPLEMENTACION PRACTICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO

La implantación de controladores, sin duda, es una de las partes más importantes en el proceso de control, ya que si no existe una forma de llevar al mundo real una ley de control, no es posible aplicarlo en el control o la optimización de algún proceso.

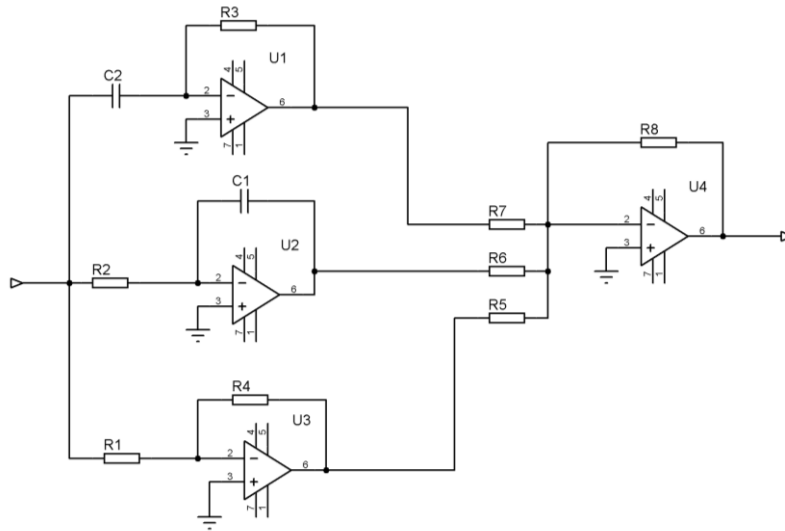
Para los controladores fraccionarios, de igual manera que para los controladores enteros existen 2 formas de realizar los controladores que son la forma analógica y la forma digital.

### 7.1 IMPLEMENTACION ANALOGICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO

La implementación del controlador PID entero, se realiza por medio de la implementación de amplificadores operacionales, los cuales cumplen la función de la ganancia proporcional, de integrador y de derivador como se muestran en la figura 16.



Figura 16: implementación analógica de un PID entero



Como se observa en la Figura 14, el efecto integral y derivativo, es generado por una impedancia, en este caso la de los capacitores, haciendo las veces de integrador y derivador.

Sin embargo, en el caso del controlador fraccionario buscar una impedancia o un arreglo que emule el efecto de la derivada fraccionaria no es tan sencillo, por lo que existen diferentes formas de realizar esta aproximación.

Una de ellas consiste en realizar una expansión en series del operador fraccionario, para lo cual se utiliza el filtro de Oustalop, el cual está definido en la ecuación 54.

$$s^{\pm\alpha} = K \prod_{j=0}^n \frac{s+wk'}{s+wk} \quad (58)$$

Donde:

- $wk'$  son los ceros de la función de transferencia del filtro definidos por:  $wk' = wb * wu^{(2k-1-\alpha)/N}$ , siendo  $wb$  el límite inferior de frecuencia del filtro.
- $wk$  son los polos de la función de transferencia del filtro definidos por:  $wk' = wb * wu^{(2k-1+\alpha)/N}$
- $K$  es la ganancia del filtro dada por  $wh^\alpha$ , siendo  $wh$  el límite superior de frecuencia
- $n$  es el orden del filtro.
- $wu$  es la relación entre los límites del filtro dada por  $wu = \sqrt{\frac{wh}{wb}}$

Esta aproximación del operador es formada por polos y ceros entrelazados a lo largo del eje negativo, para garantizar sistemas estables y de fase mínima, permitiéndolos ver como una serie de elementos que generan adelantos y atrasos para crear la respuesta deseada. Este filtro puede implementarse con alguna topología conocida para la realización de filtros como son Butterworth o Chevyshev, o utilizando técnicas de DSP.

Otra forma utilizada para la implementación de operadores fraccionarios de forma analógica, que aún se encuentra en su fase experimental, son dispositivos que generan una impedancia fraccionaria llamados Fractores. Estos fractores son un arreglo de condensadores, resistencias e inductancias, que organizados físicamente de una forma específica, general el efecto de la derivada fraccionaria, en <sup>20</sup> se encuentra una revisión más detallada de los fractores.

## **7.2 IMPLEMENTACION DISCRETA DE LOS CONTROLADORES FRACCIONARIOS**

De la misma manera que para los controladores enteros es posible realizar una implementación discreta del controlador fraccionario, realizadas comúnmente por medio de la ecuación de diferencias, que puede ser implementada por ejemplo en un PLC, un sistema embebido, en un microcontrolador o una FPGA. Sin embargo, esto plantea un problema y es como obtener una aproximación discreta de operador fraccionario.

Para solucionar este problema es posible de la misma forma que con los controladores analógicos, crear una aproximación discreta del operador fraccionario, utilizando series de Taylor, expandiendo de esta forma la expresión del operador y truncándola luego en un orden deseado.

En la tabla 5, se plantea la discretización para el operador fraccionario utilizando series de Taylor.

---

<sup>20</sup> BHASKARAN, Tripti. practical tuning method for fractional order proportional and integral controllers. Logan, 2007, 103 p, Utah state university. Facultad de Ingeniería Eléctrica.

Método	$s \rightarrow z$	Series de Taylor
Tustin	$s^\alpha = \left(\frac{2(1-z)^{-1}}{T(1+z)^{-1}}\right)^\alpha$	$\left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha Z^{-1} + 2\alpha^2 Z^{-2} \dots)$
Grünwald-Letnikov	$s^\alpha = \left(\frac{1}{T}(1-z)^{-1}\right)^\alpha$	$\left(\frac{1}{T}\right)^\alpha (1 - \alpha Z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} Z^{-2} \dots)$

Tabla 5: Aproximación discreta del operador fraccionario

A partir de las aproximaciones del operador fraccionario para el tiempo discreto, es posible obtener una ecuación en diferencias que pueda ser implementada en algún dispositivo programable. Si se desean obtener mejores resultados la serie de Taylor debe truncarse en el número más alto posible.

## 8. APLICACIÓN PRACTICA DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO: SISTEMA DE ORDEN 1 CON RETARDO

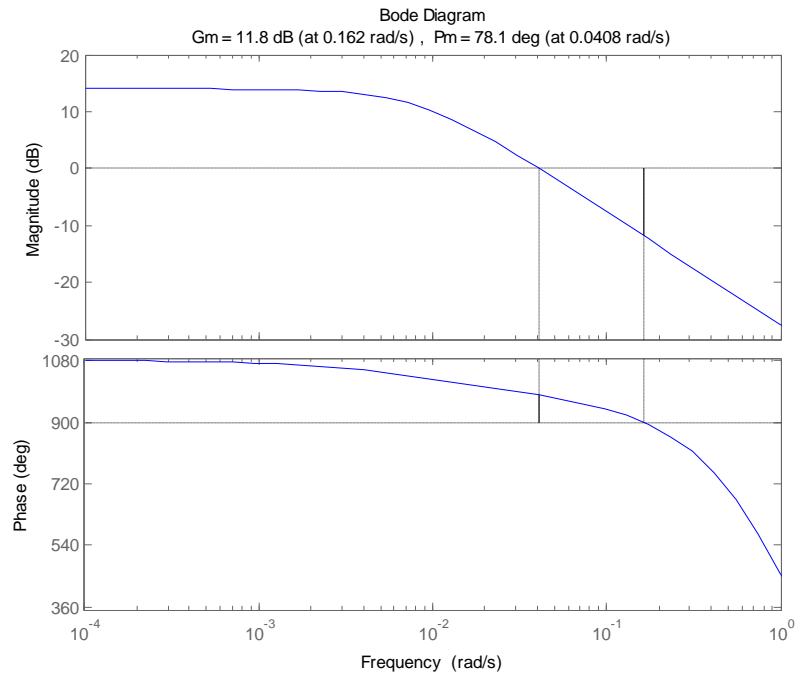
Con el objetivo de aplicar las técnicas de diseño de controladores mostradas en el capítulo 6, se diseñara un controlador FOPI para un sistema de orden 1 con retardo que está definido en la ecuación 59:

$$Gp(s) = \frac{5}{120s+1} e^{-10s} \quad (59)$$

En la ecuación se observa que este sistema tiene una ganancia de 5, un tiempo de establecimiento de 120 segundos y un retardo de 10 segundos.

La respuesta en frecuencia de este sistema se muestra en la figura 17. Se observa que el margen de ganancia es 11.8 dB y el margen de fase es 78.1° en la frecuencia de corte igual a 0.00408 rad/s.

Fig. 17. respuesta en frecuencia de la planta en lazo abierto



Una vez el controlador fraccionario sea diseñado, será contrastado contra 2 controladores, un PID diseñado por análisis en frecuencia y un PI sintonizado utilizando la metodología SIMC.

### 8.1 DISEÑO DEL CONTROLADOR FOPI

De acuerdo con el capítulo 6, para diseñar el controlador es necesario conocer el modelo de la planta, el cual está definido en la ecuación, y modelo del controlador FOPI, que está definido por la siguiente ecuación.

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{K_i}{s^\alpha} \right) \quad (60)$$

Donde:

-KP: constante proporcional

-KI: constante integral

-  $\alpha$ : orden fraccionario del término integral.

Para el diseño del controlador FOPI, se deben cumplir las condiciones anteriormente descritas, que son la Frecuencia de cruce de ganancia. El margen

de fase del sistema en lazo abierto y la robustez ante variaciones de ganancia de la planta, descritas por las ecuaciones 48, 49 y 50. A partir de las cuales surge un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, donde las incógnitas son los parámetros del controlador FOPI ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $\alpha$ ).

Para resolver las ecuaciones es necesario tener la magnitud y la fase tanto del sistema como del controlador, por lo que de la ecuación (60) podemos obtener la magnitud y la fase del controlador y de la ecuación (59) la magnitud y la fase del sistema, los cuales quedan de la siguiente manera:

$$G_c(j\omega) = K_p \sqrt{(1 + Ki\omega^{-\alpha} \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))^2 + (Ki\omega^{-\alpha} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}))^2} \quad (61)$$

$$\text{Arctan}(G_c(j\omega)) = -\text{Arctan}\left(\frac{Ki\omega^{-\alpha} \sin(\alpha \frac{\pi}{2})}{1 + Ki\omega^{-\alpha} \cos(\alpha \frac{\pi}{2})}\right) \quad (62)$$

$$\text{Arctan}(G_p(j\omega)) = -\text{Arctan}(\omega T) - L\omega \quad (63)$$

$$|P(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad (64)$$

Reemplazando (61)-(64) en 50 se obtiene una expresión para  $K_p$ .

$$K_p = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{1+(\omega T)^2}{(1 + Ki\omega^{-\alpha} \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))^2 + (Ki\omega^{-\alpha} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}))^2}} \quad (65)$$

Después, reemplazando (61)-(64) en 49 se obtiene una expresión para  $K_i$

$$K_i = \frac{-\tan(\text{atan}(\omega c T) + pm + L\omega c)}{H} \quad (66)$$

Donde:

$$H = \omega c^{-\alpha} \sin(\alpha \frac{\pi}{2}) + \omega c^{-\alpha} \cos(\alpha \frac{\pi}{2}) \tan(\text{atan}(\omega c T) + pm + L\omega c)$$

Por último, reemplazando (61)-(64) en 51, se obtiene una segunda expresión para determinar Ki.

$$a_2wc^{-2\alpha}ki^2 + b_2ki + a_2 = 0 \quad (67)$$

Donde:

$$a_2 = \frac{T}{1 + (wcT)^2} + L$$

$$b_2 = 2a_2wc^{-\alpha} \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) - \alpha wc^{-\alpha-1} \sin\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)$$

Resolviendo la ecuación (66) que es cuadrática se obtiene

$$Ki = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2^2wc^{-2\alpha}}}{2a_2wc^{-2\alpha}} \quad (68)$$

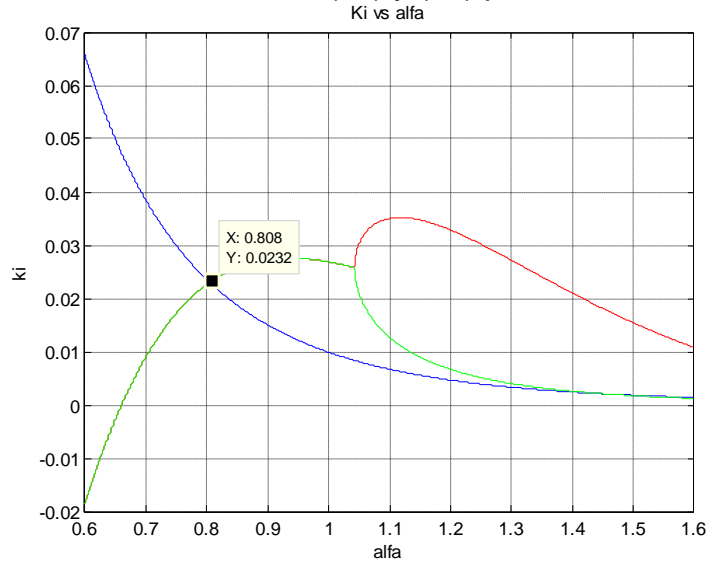
Con (66), (67), (68), ya se puede determinar el valor de las constantes Kp, Ki y  $\alpha$ . Aplicando el procedimiento mencionado :

1. Se determina para la planta en lazo abierto la constante de tiempo , la frecuencia de corte de 0 db, el margen de fase, el tiempo de retardo y la ganancia del sistema. De (planta) y de la respuesta en frecuencia del sistema se obtiene: T=120 s, wc=0.03 rad/s, pm= 80°, L=10 s y k=5;

2. Asignar un rango de solución para  $\alpha$ . Se selecciona  $0 < \alpha < 2$ .

3. Graficar las ecuaciones (67) y (68) que corresponden a Ki en función de  $\alpha$ , en el rango de soluciones planteado para encontrar el punto de corte entre (67) y (68), para obtener el valor de  $\alpha$  y de Ki.

Fig. 18: intersección entre (66) y (67) para obtener  $K_i$  y  $\alpha$ .

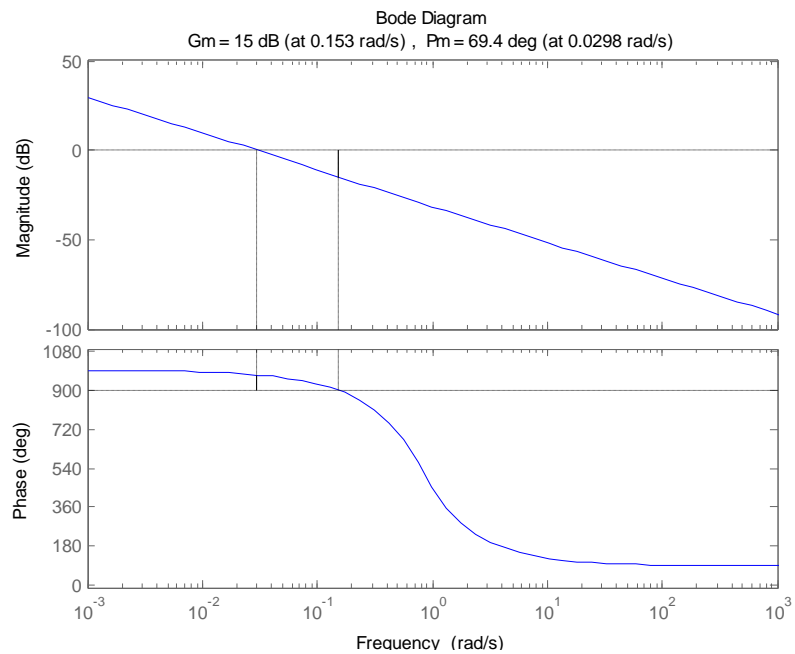


Dando como resultado:  $K_i = 0.0232$ ,  $\alpha = 0.808$

4. Reemplazar en (66)  $\alpha$  y  $K_i$ , para obtener  $K_p$ , donde se obtiene que  $K_p = 0.6338$ .

Ya con las constantes del controlador determinadas, se procede a la simulación del controlador, para lo cual se utiliza el filtro de oustalop [3] de orden 5 en un rango de frecuencias de de 0.001 rad/s hasta 1000 rad/s. La respuesta en frecuencia en lazo abierto se muestra en la figura 19.

Fig. 19: Respuesta en frecuencia en lazo abierto del sistema



Como se observa en la figura 4, el margen de fase y la frecuencia de corte corresponden a las condiciones de diseño inicialmente planteadas, además la frecuencia de corte  $W_c$ , se encuentra dentro de un intervalo plano de frecuencia, lo que la hace robusta a cambios de ganancia.

## 8.2. DISEÑO DEL CONTROLADOR IOPI UTILIZANDO EL METODO SIMC

El método SIMC de sintonización de controladores. Fue desarrollado por Sirgud Skogestad<sup>21</sup>, y plantea de una forma muy sencilla un procedimiento para obtener las constantes de un controlador que haga robusto al sistema ante perturbaciones.

Este método plantea el uso de 2 pasos para sintonizar el controlador. El primero de ellos consiste en obtener un modelo aproximado del sistema de orden 1 u orden 2 y el segundo consiste en hallar los parámetros del controlador.

En este caso particular se cuenta con un modelo de orden 1 de la planta, por lo que no es necesaria la implementación de métodos de reducción de orden del sistema, del cual se obtienen los siguientes parámetros:

-Constante de tiempo del sistema,  $T_i=120$  segundos

-Retardo,  $\theta=10$  segundos

-Ganancia,  $K=5$

Con el modelo de la planta conocido, ya es posible realizar la segunda parte de la metodología de sintonización, la cual, para sistemas de orden 1 con retardo el controlador a utilizar es un PI, el cual tiene un conjunto de reglas para obtener los parámetros, que son:

$$Kp = \frac{1}{k'} * \frac{1}{t_c + \theta} \quad (69)$$

$$Ki = \min[T_i, 4(T_c + \theta)] \quad (70)$$

Donde:

- $k' = \frac{K}{T_i}$
- -min es el mínimo valor entre las 2 constantes.

---

<sup>21</sup> VILLANOVA R, VISIOLI. PID Control in the Third Millennium, Advances in Industrial Control. Springer, London, UK, 2012, 600 p, ISBN 978-1-4471-2425-2



El parámetro  $T_c$ , es la constante de tiempo que es ajustable para obtener la robustez del sistema, que debe ser igual al retardo del sistema  $\theta$ . Luego, se realiza el cálculo de las constantes para el sistema de acuerdo a (69) y (70), obteniendo como resultado  $K_p=1.2$  y  $K_i=0.0125$ . Para este controlador la respuesta al escalón se muestra en la figura 20.

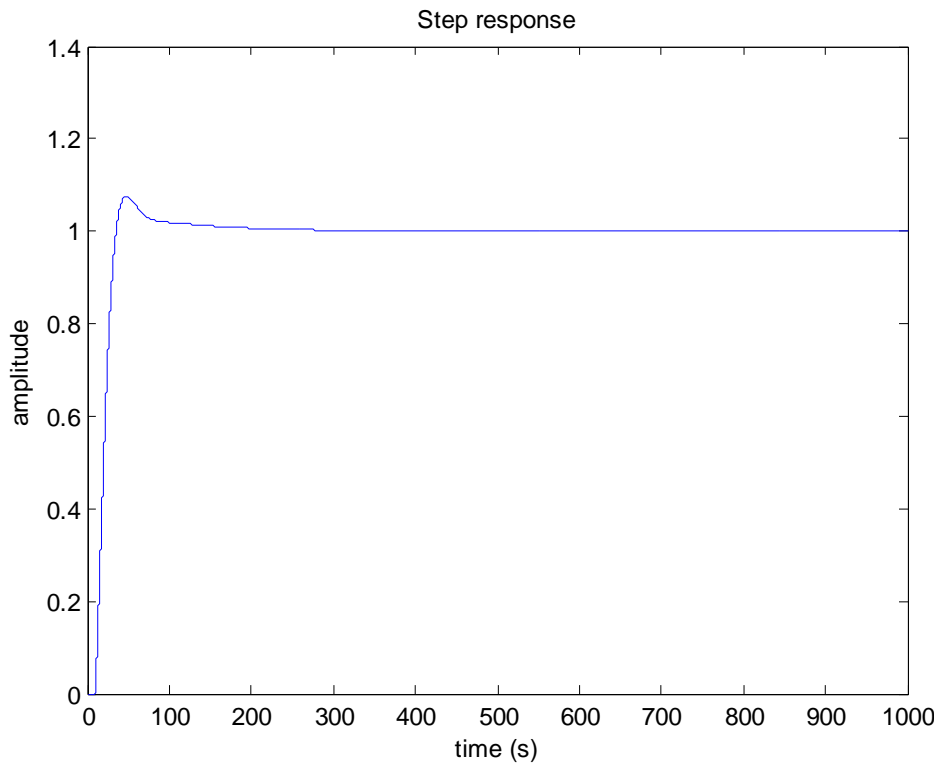


Fig. 20: Respuesta al escalón del sistema con el controlador PI sintonizado con SIMC

Como se observa en la Fig. 6, esta forma de sintonía, garantiza la robustez del sistema ante perturbaciones, sin embargo no permite sintonizar el controlador frente a una serie de parámetros como tiempo de establecimiento o margen de fase.

### 8.3 DISEÑO DEL CONTROLADOR IOPID

La metodología de diseño utilizada para sintonizar el controlador PID entero, es la misma que se emplea para el FOPI como se plantea en el capítulo 6, con la diferencia que aquí la función de transferencia de controlador ya no es de orden fraccionario sino entera como la describe la ecuación 71

$$Gc(s) = Kp + \frac{Ki}{s} + KdS \quad (71)$$

Siguiendo estrictamente el método de diseño, para poder evaluar las ecuaciones 49, 50 y 51 se necesita la magnitud y la fase del sistema y del controlador. Como la planta es la misma su fase y magnitud están descritas por (61) y (62), pero para el controlador estarán ahora dadas por (72) y (73) respectivamente:

$$\text{Arctan}(Gc(jw)) = \text{Arctan}\left(\frac{(k_d w^2 - k_i)}{w k_p}\right) \quad (72)$$

$$|C_1(jw)| = \sqrt{k_p^2 + (k_d w - \frac{k_i}{w})^2} \quad (73)$$

Ahora reemplazando (61), (62), (72), (73) en 49, 50, 51, Se obtiene:

$$\frac{K \sqrt{k_p^2 + (k_d w - \frac{k_i}{w})^2}}{\sqrt{1 + (wT)^2}} = 1 \quad (74)$$

$$\frac{(k_d w c^2 - k_i)}{w c k_p} = A1 \quad (75)$$

Donde:

$$A1 = \tan(\text{Arctan}(wcT) + Lwc - \pi + pm)$$

$$\frac{k_p (k_d w c^2 - k_i)}{(k_p w c)^2 + (k_d w c^2 - k_i)^2} = \frac{T}{B1} + L \quad (76)$$

Donde:

$$B1 = 1 + (wcT)^2$$

A partir de (74), (75), (76) es posible despejar  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  y evaluarlas directamente para hallar las constantes del controlador, las cuales quedan de la siguiente manera:

$$K_p = \sqrt{\frac{B1}{1+A1^2}} \quad (77)$$

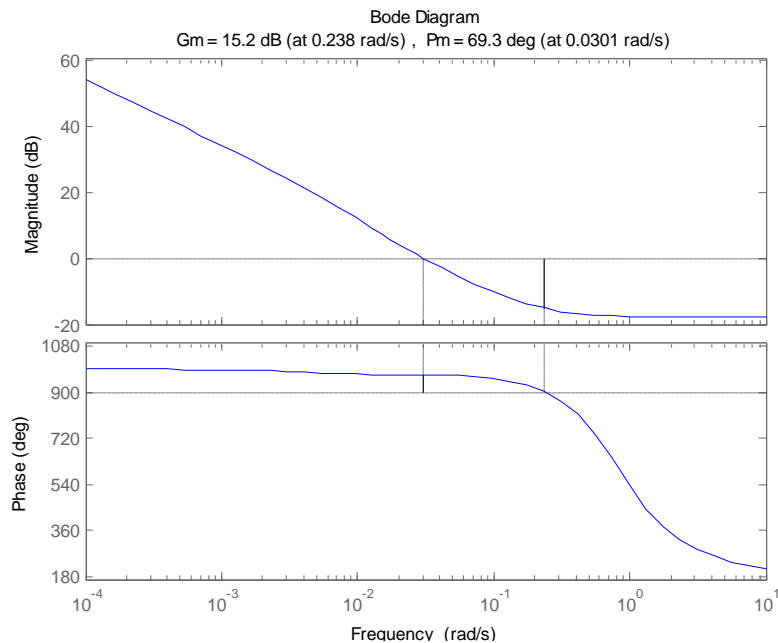
$$K_i = \frac{1}{2}((T\omega_c^2 + B1\omega_c^2)(K_p(\frac{1+A1^2}{B1})) + A1K_p\omega_c) \quad (78)$$

$$K_d = \frac{1}{2}((T + B1L)(K_p(\frac{1+A1^2}{B1})) + \frac{A1K_p}{\omega_c}) \quad (79)$$

Realizando la evaluación de las ecuaciones (21)-(23) utilizando los mismos parámetros de diseño de FOPI y del PI SIMC se obtienen como resultados los siguientes parámetros para el controlador:  $K_p=0.7394$ ,  $K_i=0.0079$ ,  $K_d=5.0846$ .

Implementando el controlador PID, la respuesta en frecuencia es mostrada en la figura 21.

Fig. 21: Respuesta en frecuencia con controlador PID entero.



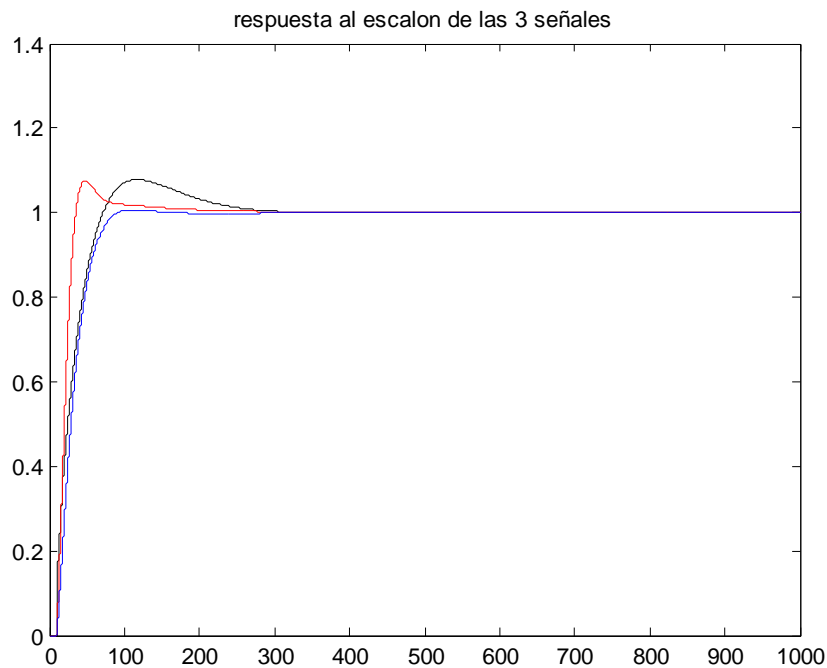
En la grafica se puede ver que las condiciones de diseño se cumplen para este controlador.

## 8.4. ANALISIS DE RESULTADOS

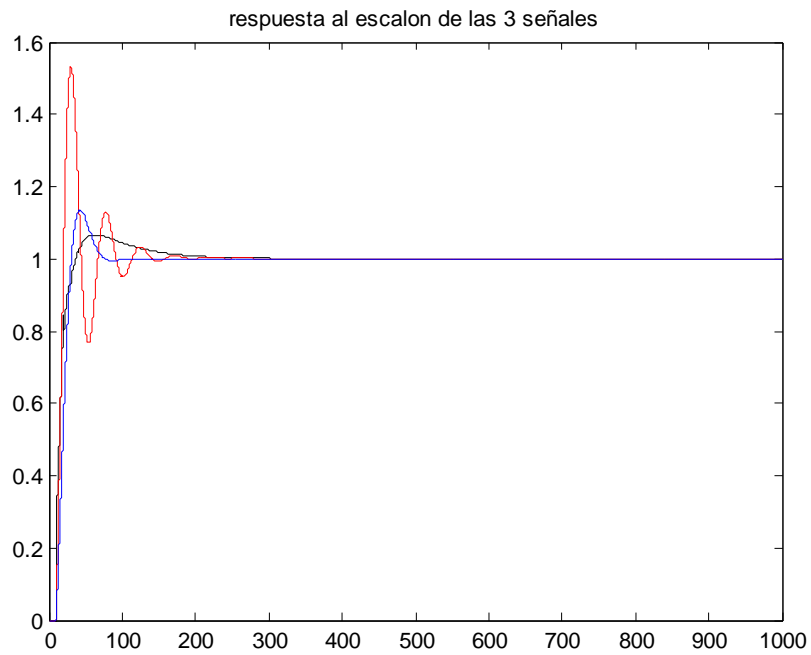
Para realizar un análisis más detallado de los resultados obtenidos para los diferentes controladores, se realizarán 3 pruebas. La primera de ellas consiste en variar la ganancia de la planta. La segunda prueba se basa en agregar una perturbación externa al sistema equivalente al 50% de la señal de entrada, y la tercera consiste en cambiar la entrada escalón unitario por un tren de pulsos al cual se le variará la ganancia y se le añadirá la misma perturbación de la prueba 2. En cada una de las pruebas se tendrá en cuenta la respuesta al escalón y la señal de control.

Los resultados de la prueba 1 se muestra en las figuras 22 y 23. El diagrama de simulación de la prueba 1 para las 3 diferentes topologías de control se encuentra en el anexo A1.

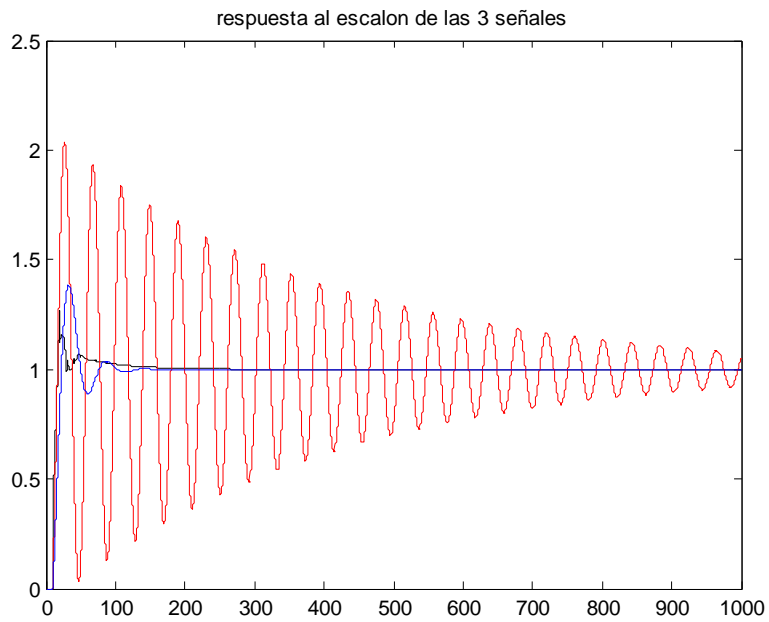
Fig. 22 Respuesta al escalón del sistema para: (a)  $k=5$ , (b)  $k=10$  y (c)  $k=15$  FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo).



a.



b.



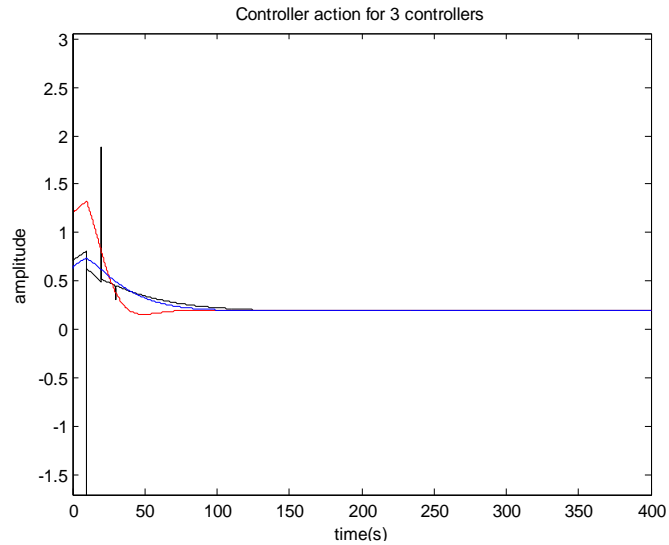
(c)

En la figura 22 observa que a medida que la ganancia se aumenta, el controlador IOPID y el FOPI mantienen el comportamiento dinámico del sistema a pesar que

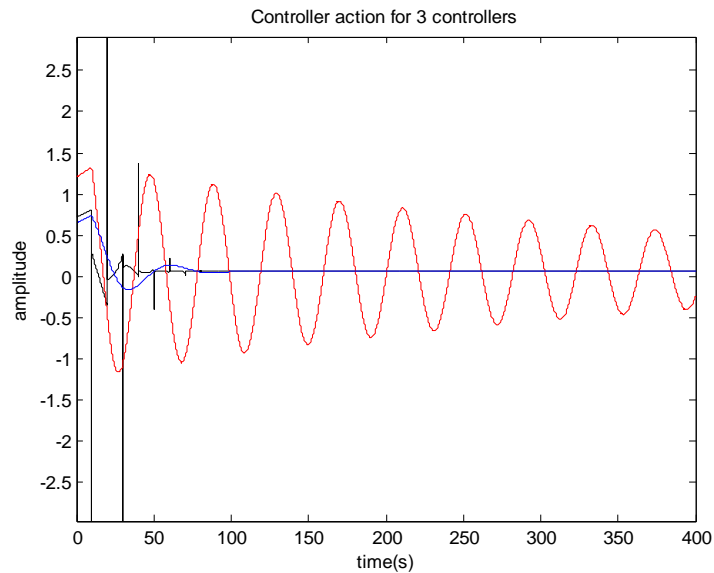
la ganancia sea muy alta, mientras que el PI SIMC a ganancias muy altas se torna inestable.

En la figura 23 se observa la acción de control para  $k=5$ ,  $k=10$  y  $k=15$ .

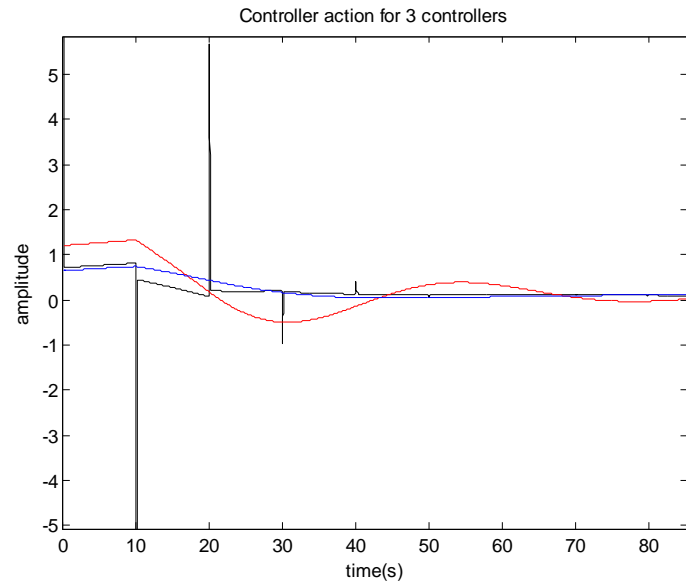
Fig. 23 Acción de control para (a)  $k=5$ , (b)  $k=10$  y (c)  $k=15$  FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo).



a.



b.

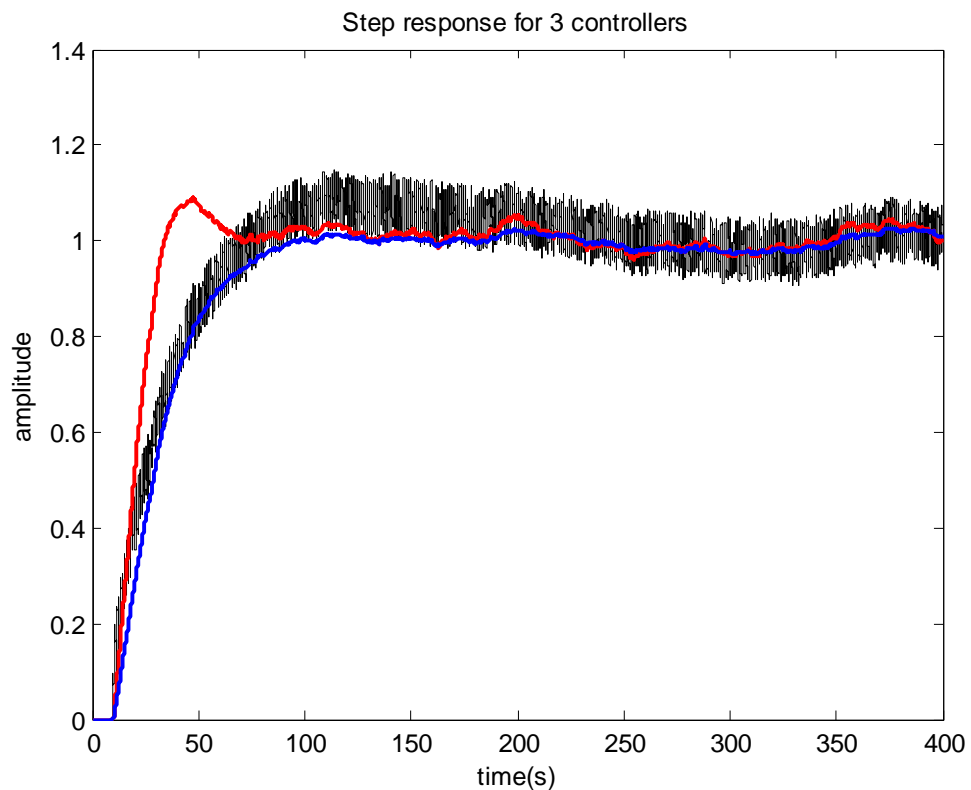


C.

Como se observa en la figura 25, los controladores FOPI e IOPID a pesar de la variación de ganancia mantienen la acción de control, mientras que el PI SIMC a mayor ganancia va deformando la acción de control.

Para la prueba 2 se adiciona una perturbación externa del 50% del valor de la entrada. Los resultados se aprecian en las figuras 24 y 25. El diagrama de simulación se muestra en el anexo A2.

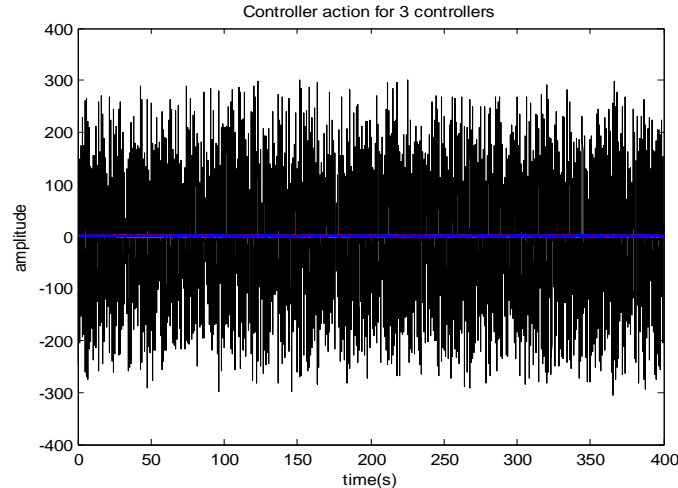
Fig. 24 Respuesta al escalón del sistema con relación de ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo).



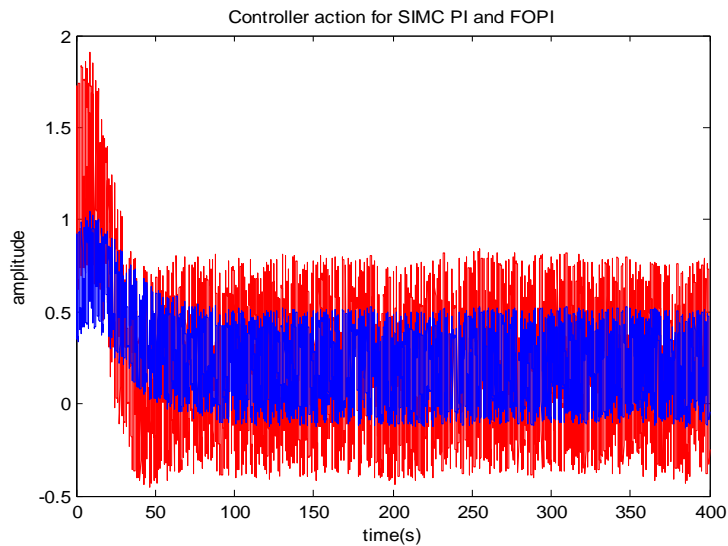
Se puede ver en la figura 9 que el controlador FOPI y el PI SIMC son robustos ante las perturbaciones de alta frecuencia a diferencia del controlador IOPID, que aunque mantiene un comportamiento similar al de la figura 7, el ruido genera cambios abruptos en la amplitud del sistema.



Fig. 25 (a) Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo). (b) Zoom de la Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul) y PI SIMC (rojo).



a



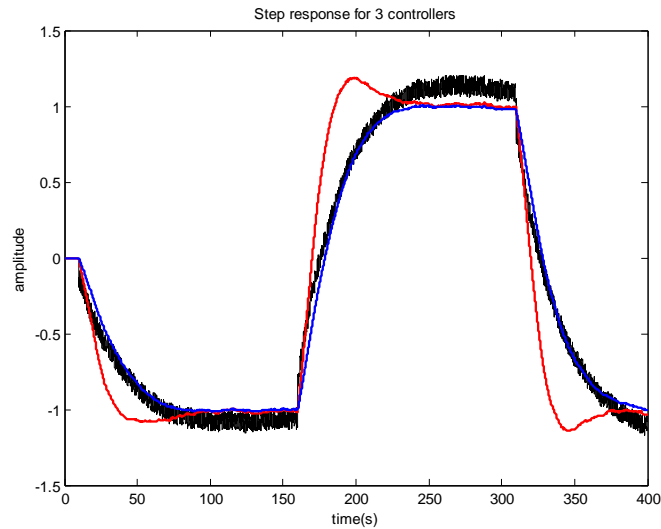
b

En la figura 25 (a) se observa que la acción de control en presencia de ruido para el controlador IOPID (línea negra) tiene una mayor amplitud, lo que implica un mayor consumo de energía en el actuador, a diferencia de la figura 10(b) la cual es un zoom de 10(a) que corresponde al controlador FOPI y al PI SIMC, cuyas acciones de control son mucho menores en amplitud, reduciendo el consumo de potencia. Sin embargo, la acción de control para el FOPI muestra un

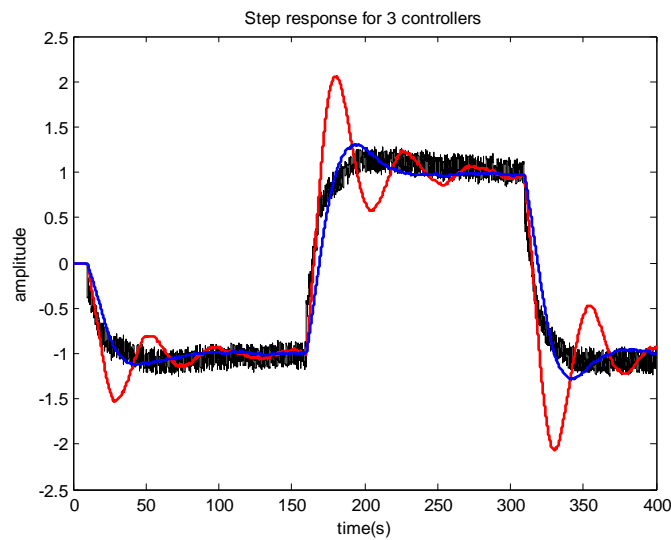
comportamiento más uniforme y de menor amplitud que el PI SIMC, por lo tanto el FOPI es el controlador de menor consumo de energía.

Finalmente, la tercera prueba consiste en cambiar la entrada escalón por una señal cuadrada, variando la ganancia y añadiendo ruido al sistema. Los resultados de la prueba se muestran en las figuras 26 y 27. el diagrama de simulación se muestra en el anexo 3.

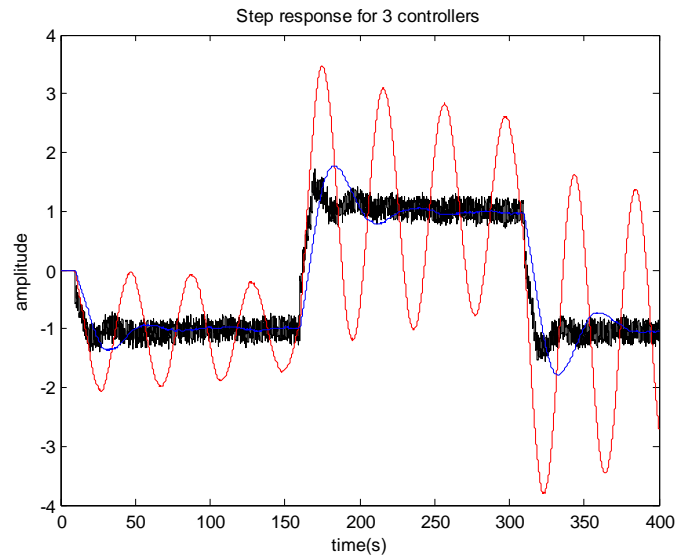
Fig. 26 respuesta a la señal cuadrada para (a)  $k=5$ , (b)  $k=10$  y (c)  $k=15$  con ruido del 50%, FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo).



a.



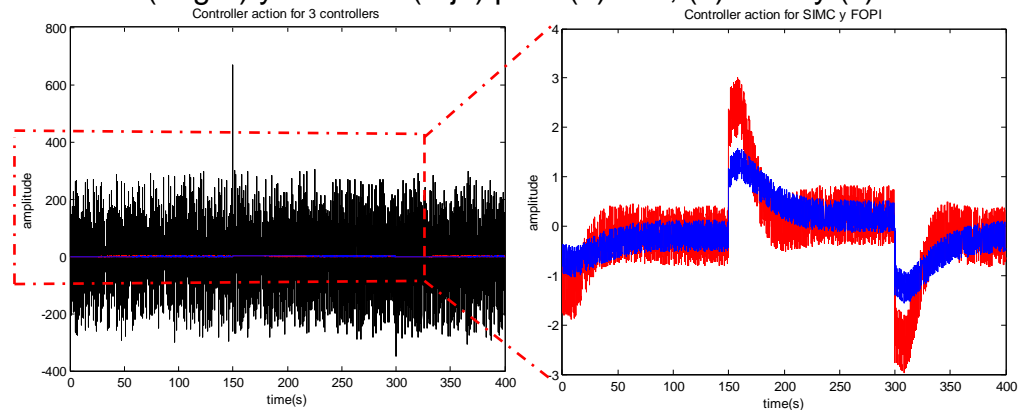
b.



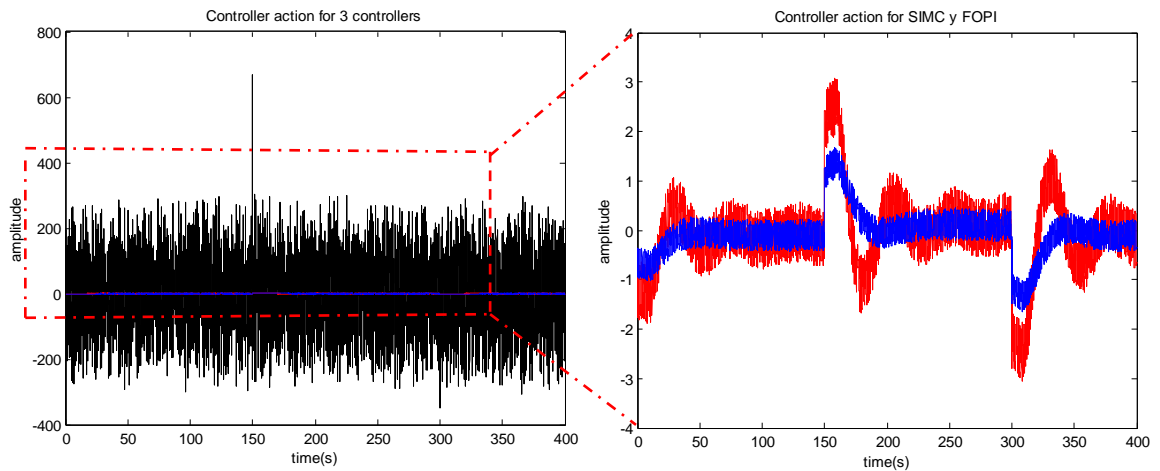
c.

En la figura se observa que ante una señal de entrada cuadrada el sistema tarda un poco más en responder debido al cambio de estado, sin embargo los controladores PI SIMC y FOPI en 11(a) y 11(b) logran estabilizarse mientras el valor de la entrada es positivo. De igual forma que al variar la ganancia el controlador SIMC con gran variación de ganancia como es el caso en 11(c) se vuelve inestable, mientras el IOPID y el FOPI continúan realizando control. La respuesta ante el ruido de alta frecuencia es igual para todos los controladores.

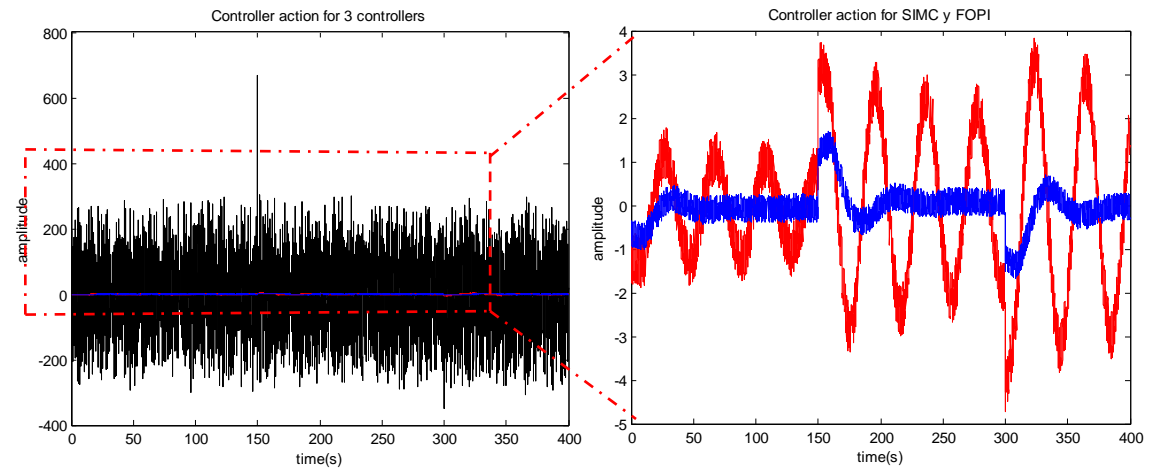
Fig. 27 Acción de control para el sistema con ruido del 50% FOPI(azul), IOPID(negro) y PI SIMC (rojo) para (a)  $k=5$ , (b)  $k=10$  y (c)  $K=15$ .



a.



b.



c.

A partir de la figura 27, se puede observar que la acción de control para el IOPID se mantiene similar a la obtenida en la prueba 2, a pesar de tener una entrada diferente al escalón. También se observa que la acción de control para el controlador fraccionario, a pesar de los cambios de la onda cuadrada y de ganancia, se mantiene constante en (a), (b), (c), situación que no ocurre para el controlador PI SIMC ya que al igual que en las prueba 1, con grandes variaciones de ganancia, la acción de control pierde su efectividad, y con el tren de pulsos se transforma en una señal oscilante cuya amplitud aumenta cada periodo.

## 8.5 DISCRETIZACION DEL CONTROLADOR FRACCIONARIO

Utilizando el método de discretización de tustin, con truncamiento en el segundo término de la serie de Taylor, para las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $\alpha$  del capítulo 7 el controlador discreto para el sistema es:

$$\frac{155.23Z^4 - 130.958Z^3 - 3.968Z^2 - 0.44Z}{66.666Z^4 - 66.666Z^3} \quad (80)$$

La respuesta del sistema con el controlador y el actuador se muestran en las figuras 28 y 29.

Figura 28: comportamiento dinámico del sistema con el controlador FOPI.

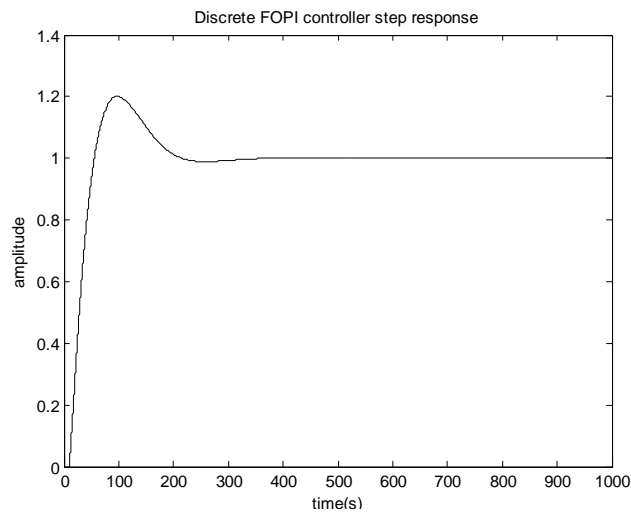
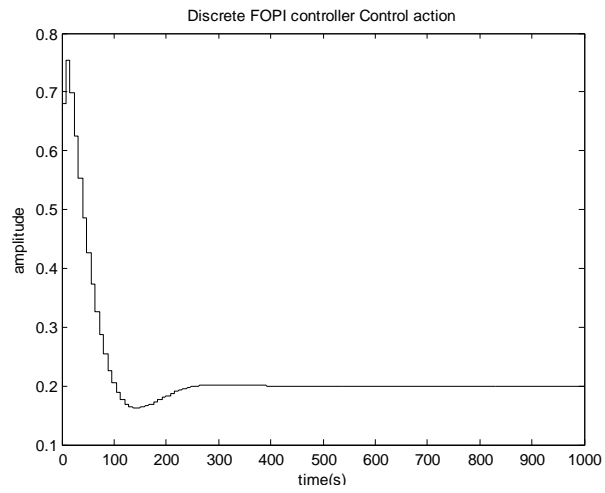


Figura 29: Acción de control del sistema.



A partir de las figuras 13 y 14 se puede deducir que el sistema responde correctamente al controlador discreto de acuerdo a las especificaciones de diseño deseadas. El diagrama de simulación y el algoritmo de discretización utilizado para la implantación digital del controlador se muestran en el anexo B.

## 9. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

1. A partir del estudio de la teoría del control fraccionario, se logro el diseño, sintonización y simulación de un controlador PI fraccionario para un sistema de orden 1 con retardo.
2. Se realizó el estudio de la teoría del cálculo fraccionario que es la base del control fraccionario. Se definieron conceptos como la derivada y la integral, y se amplió el horizonte de estos procedimientos del cálculo, no solamente hacia números enteros, sino hacia cualquier real e incluso los complejos.
3. Se analizaron los sistemas de orden fraccionario y sus diferentes parámetros como su representación, clasificación, estabilidad, respuestas en estado transitorio y estable y su respuesta en frecuencia, donde se observó que en el caso de los sistemas de orden fraccionario hay una mayor región de estabilidad que se aprovecha para mejorar el desempeño de los controladores.
4. Se estudiaron diferentes técnicas de diseño de controladores fraccionarios, donde los diseños por métodos frecuenciales son los más comunes y eficientes, ya que permiten garantizar la robustez del sistema ante diferentes perturbaciones.
5. Utilizando MATLAB y SIMULINK, se realizaron las simulaciones de los controladores fraccionarios, donde los controladores fraccionarios mostraron mayor robustez en todas las pruebas frente a sus contrapartes enteras.

6. La utilización de cálculo fraccionario para la realización de los modelos matemáticos de un proceso, permite crear una aproximación más exacta del comportamiento dinámico del sistema, ya que al tener en cuenta el orden de la derivada, toma un número mayor de variables, lo que lo acerca más al comportamiento en el mundo real.
  
7. El comportamiento dinámico de un sistema mejora con la presencia de controladores fraccionarios, ya que poseen un número mayor de parámetros a sintonizar, lo que da un mayor número de posibilidades de sintonización.
  
8. Para trabajos futuros de control fraccionario se plantea la implementación del controlador fraccionario planteado en un dispositivo programable como PLC, microcontrolador, sistema embebido, tecnología FPGA, utilizando técnicas de prototipado rápido, aplicado a un proceso real como un sistema de tanques o un intercambiador de calor. También se propone la exploración de nuevos métodos de sintonía, utilizando sistemas de orden 2 o utilizando un tipo de controlador diferente como el FOPID. Incluir controladores fraccionarios dentro de procesos de automatización que utilicen sistemas SCADA, o el desarrollo de los mismos basados en controladores fraccionarios.



## 10. BIBLIOGRAFIA

BRUZZONE Luca, BOZZINI Giorgio. Fractional order position control of SCARA robots. (2009, Italia), 10p

BHASKARAN, Tripti. practical tuning method for fractional order proportional and integral controllers. Logan, 2007, 103 p, Utah state university. Facultad de Ingeniería Eléctrica.

FUENTES, Manuel, Modelado y control robusto de un cilindro neumático, Madrid 2009. 107p. Trabajo de grado (Ingeniero industrial). Universidad Carlos III de Madrid. Facultad de ingeniería industrial, departamento de ingeniería de sistemas y automática.

HAMZAOUI, Mohammed. ARAB Tehrani .Current Control Design with a Fractional-Order PID for a Three-Level Inverter. (2010, Italia).

LI, Y. Chen Y, Ahn H.-S, A Generalized Fractional-Order Iterative Learning Control. 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 5356-5361, 2011.

Machado. Tenreiro. DISCRETE-TIMEFRACTIONAL-ORDER CONTROLLERS. journal of fractional calculus and applied analysis. Volumen 4. 2001. 19p.

MARIANI, a.m Criterio de Estabilidad de Nyquist- Aplicación al análisis de la Estabilidad de Sistemas de Control continuos y LTI. (2007, Argentina). 44 p.

NISE, Norman, Control Systems Engineering, 5th Edition. Hoboken: editorial John wiley and sons. 2012. 865 p. ISBN 978-0471-79475-2.

OLDHAM, keith, The fractional calculus, San Diego, California: editorial academic press. 1974. Volumen 111. 225 p. ISBN 0-12-525550-0.

PADILLA, Pedro. ABREU, Hugo. CHANG, Francisco. Una introducción al Cálculo, la habana, 2008, 26 p. Universidad del oriente, Facultad de Ing. Eléctrica

PODLUBNY, Igor, Fractional Differential ecuations, San Diego, California: editorial academic press. 1999. Volumen 198. 366 p. ISBN 0 -1 2 S5H810 -2.

Q. Changmao, Q. Naiming, S. Zhiguo, Fractional PID controller design of Hypersonic Flight Vehicle, International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering (CMCE), 466-469, 2010.

ROCHA, M, Una Breve Introducción al Calculo Fraccional, En: Laberintos e Infinitos Numero 8, marzo, 2003.

SAUCHELLI, Víctor, LABORET, Sergio, calculo fraccional aplicado al control automático. Volumen XXVI. Octubre de 2007. P 3308-3327.

SAPTARSHI Das, INDRANIL Pan. Control of Nuclear Reactor Power with Thermal-Hydraulic Effects via Fuzzy  $PI\lambda D\mu$  Controllers. Kabali, India: 2009, 5p

Suarez, José. Calculo fraccionario en control y robótica. Aplicaciones en robótica móvil. En: Nuevas tendencias de investigación en ingeniería. (2003: Badajoz).

SUNDARAVADIVU K, ARUN B. Design of Fractional Order PID Controller for Liquid Level Control of Spherical Tank. IEEE International Conference on Control System, Computing and Engineering. 2011, 5p

VALERIO, Duarte. COSTA, José. TUNING-RULES FOR FRACTIONAL PID CONTROLLERS. (2005, Portugal), 6p.

VILLANOVA R, VISIOLI. PID Control in the Third Millennium, Advances in Industrial Control. Springer, London, UK, 2012, 600 p, ISBN 978-1-4471-2425-2

VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, Fractional order system and controls fundamentals and applications, Nueva York: editorial Springer. 2010. 430 p. ISBN 978-1-84996-334-3.

VINAGRE, Blas, MONJE, concepción, Introducción al control fraccionario. Volumen 3. Numero 3, Julio 2006, p 5-23, ISSN: 1697-7912.

VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, Métodos de sintonía y auto sintonía de PIDs fraccionarios, Jornadas de ingeniería de control (2006: pamplona). Escuela de ingenierías industriales. Universidad de Extremadura. 2006, 33 p.

VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, On Fractional  $PI\lambda$  Controllers: Some Tuning Rules for Robustness to Plant Uncertainties. Jornadas de ingeniería de control (2006: pamplona). España, 2006, 18 p.

VINAGRE, Blas, MONJE, Concepción, on fractional  $PI^\lambda$  controllers: some tuning rules for Robustness to plant uncertainties, Escuela de ingenierías industriales. Universidad de Extremadura. 2003, 18 p.

YANQUAN, Chen, ATHERTON, Derek, Linear feedback control: analysis and design with matlab, Philadelphia: editorial siam, 2007. 367 p. ISBN 978-0-898716-38-2.

YANGQUAN, Chen, Fractional order control a tutorial. American control conference. (2009: Saint Louis, MO). Saint Louis, MO: 2009, 15p.

YANGQUAN, Chen, Fractional Order Proportional and Derivative Controller Synthesis for A Class of Fractional Order Systems: Tuning Rule and Hardware-in-the-loop Experiment. 48th IEEE Conference on Decision and Control (2009,china).

YANGQUAN, Chen, Fractional Order Plasma Position Control of the STOR-1M Tokamak. 48th IEEE Conference on Decision and control. (2009,china).

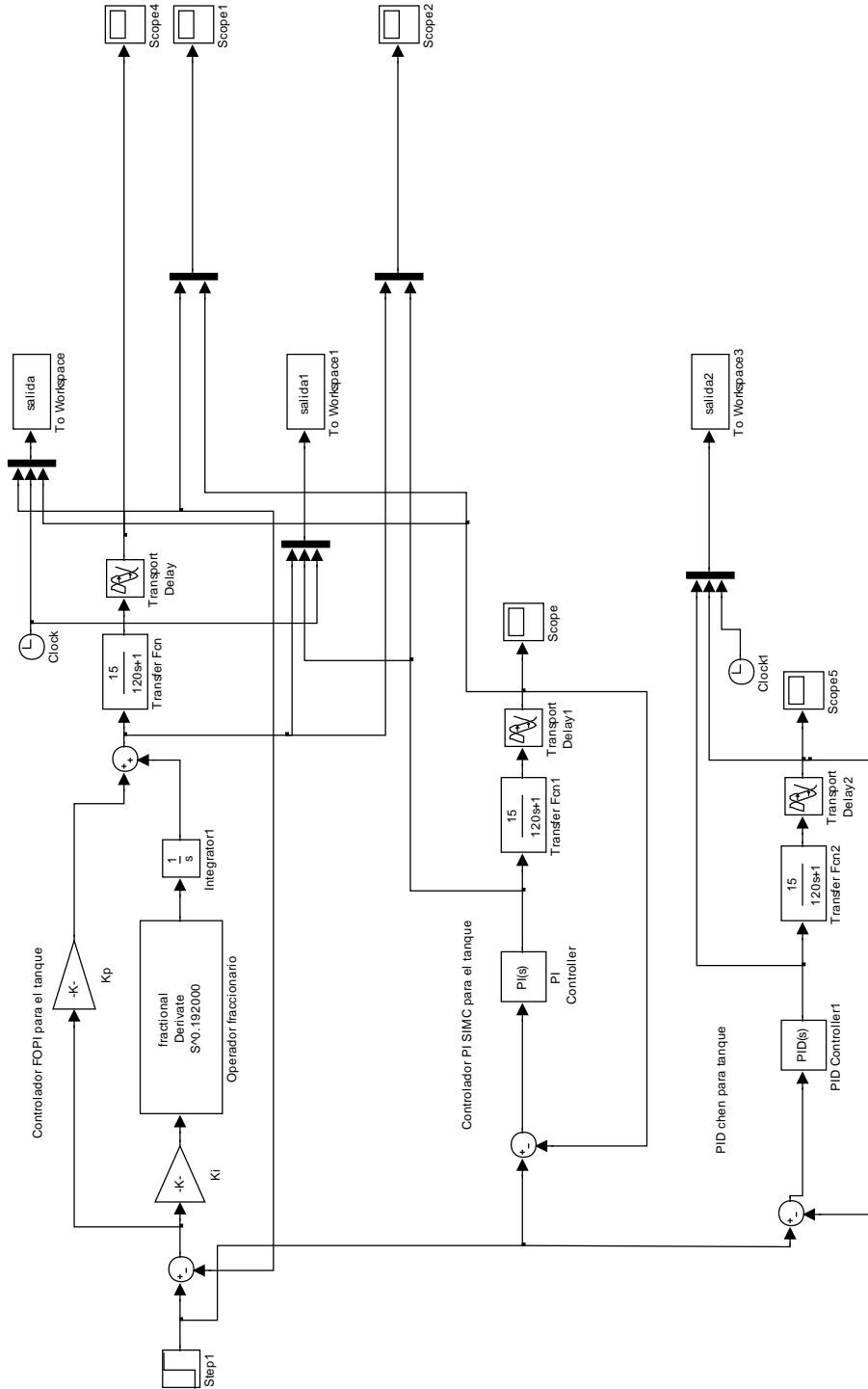
YANGQUAN, Chen, Fractional Order Proportional Integral (FOPI) and [ProportionalIntegral] (FO[PI]) Controller Designs for First Order Plus Time Delay(FOPTD) Systems. Chinese Control and Decision Conference (2009,china).

YANGQUAN, Chen, LabView Based Experimental Validation of Fractional Order Motion Controllers. Chinese Control and Decision Conference (2009,china).

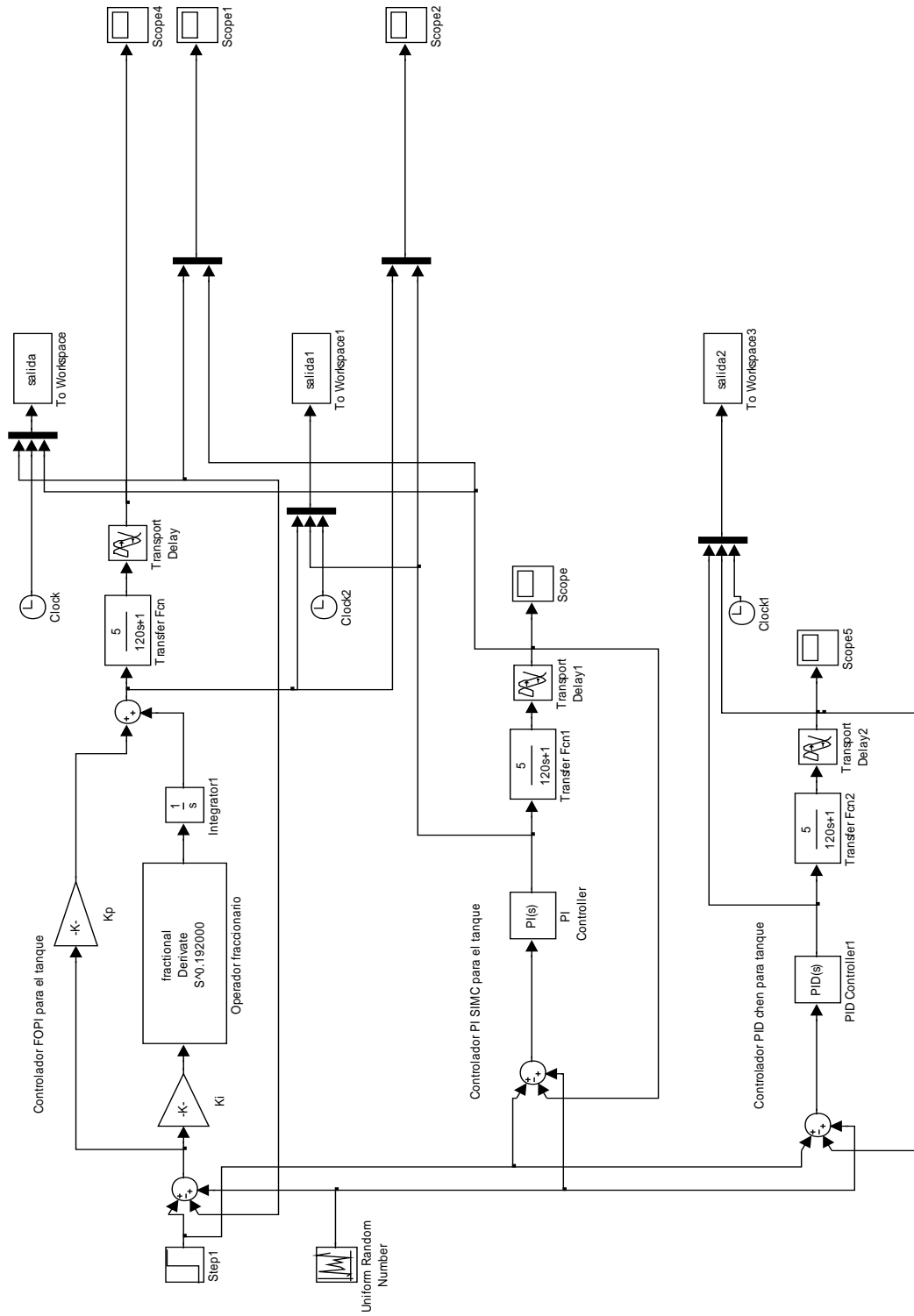
# ANEXO A:

## Esquemas de simulación para un sistema de orden 1 con retardo

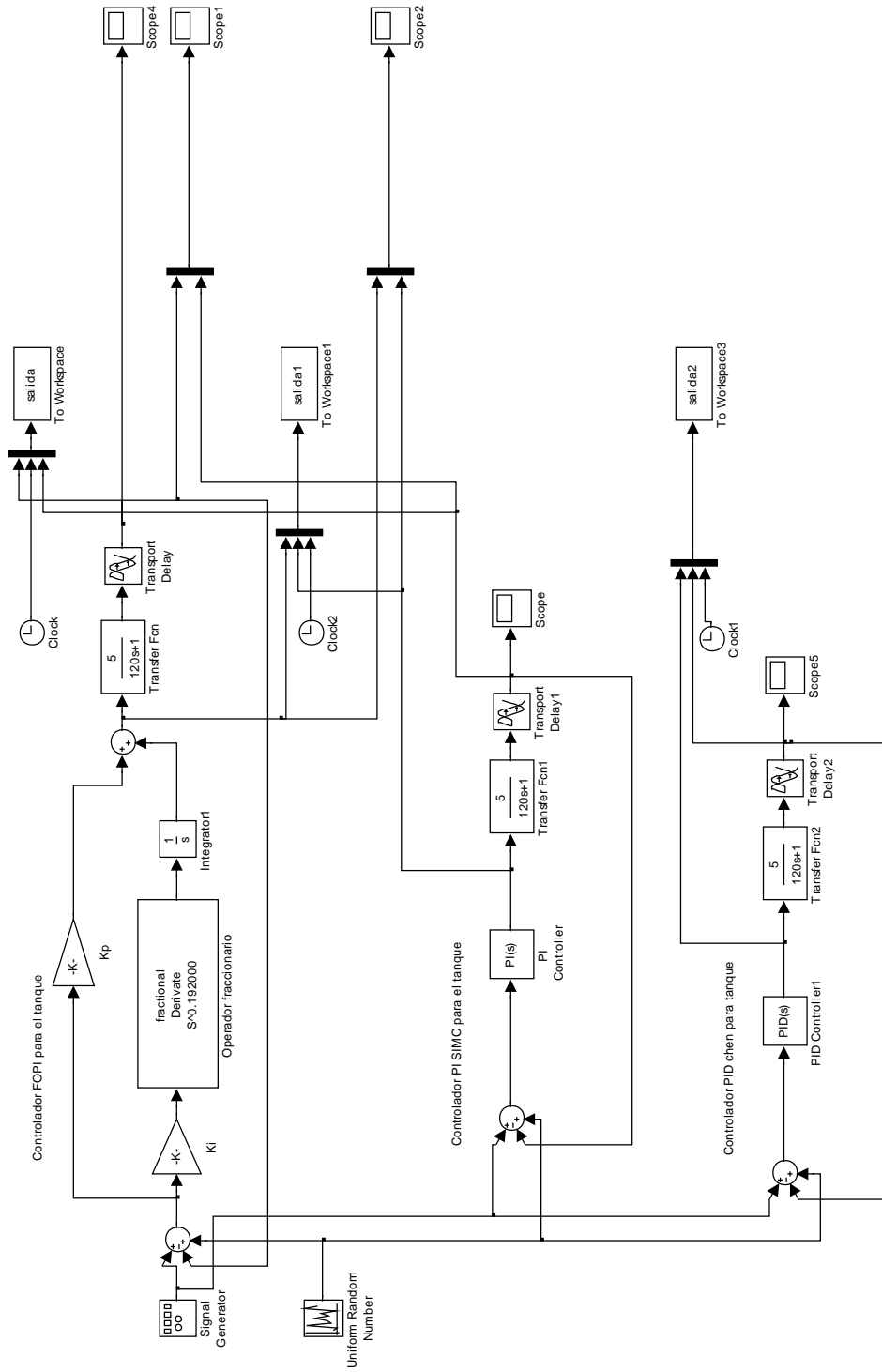
### A1. Prueba 1: Variación de ganancia de la planta



## A2. Prueba 2: señal de ruido externo



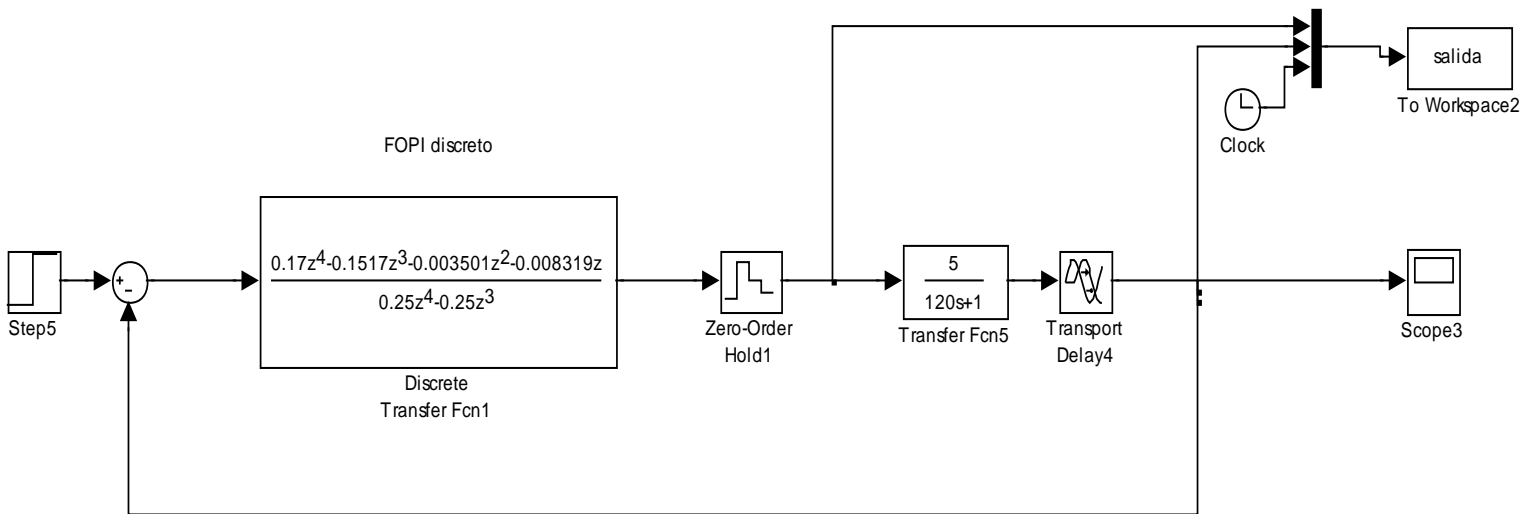
### A3. Prueba 3: variación de ganancia, señal de ruido externo y entrada cuadrada



## ANEXO B

### CONTROLADOR FOPI DISCRETO

#### C.1 Esquema de simulación del controlador discreto en SIMULINK



#### C.2 algoritmo para la discretización del controlador FOPI

```

%% Discretización del FOPI
% autor: Jairo Bernardo Viola Villamizar
clear all
close all
clc

T=8; %tiempo de muestreo
kp=0.6347;
ki=0.0232;
alfa=0.192;%orden fraccionario

%discretización del operador fraccionario
num_alfa=[0 0 0 0]; %numerador op fraccionario
den_alfa=[1 0 0 0]; % denominador op fraccionario
num_alfa(1)=((2/T)^alfa);
num_alfa(2)=-((2/T)^alfa)*(2*alfa);
num_alfa(3)=((2/T)^alfa)*(2*(alfa^2));

%funcion de transferencia discreta en terminos de z^-1

op_frac=tf(num_alfa,den_alfa,8);

```

```

%funcion de transferencia operador entero
cons_int=(2/T);
num_int=cons_int*[1 -1];
den_int=[1 1];
op_int=tf(num_int,den_int,8);

%funcion de transferencia del controlador discreto
m=kp*ki;
gc=kp+((m*op_frac)/op_int)%/(op_int)

%sistema de orden 1 con retardo
s=tf('s');
gp1=5/(1+(120*s));
[num,den]=pade(10,5);
gp4=tf(num,den);
gp=c2d(gp1*gp4,8)

%sistema mas controlador realimentado
gt=gp*gc;
g=feedback(gt,1);

figure(1)
step(g)

```