

**VARIEDADES CRÍTICAS BASADAS EN CONTROLABILIDAD DE
ESTADO PARA SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES**

RAMON LEONARDO PINEDA PORTILLA

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MEDELLÍN**

2020

**VARIEDADES CRÍTICAS BASADAS EN CONTROLABILIDAD DE
ESTADO PARA SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES**

RAMON LEONARDO PINEDA PORTILLA

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ciencias Naturales y
Matemática

Director(es)

Dr. Ing. Diego Alejandro Muñoz Durango
Doctor of Engineering Sciences

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MEDELLÍN**

2020

Nota de aceptación

Firma

Nombre:

Presidente del jurado

Firma

Nombre:

Jurado

Firma

Nombre:

Jurado

Medellín, Febrero 3 de 2020

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Febrero 3 de 2020

RAMON LEONARDO PINEDA PORTILLA

“Declaro que este trabajo de grado no ha sido presentado con anterioridad para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en ésta o en cualquiera otra universidad”. Art. 92, parágrafo, Régimen Estudiantil de Formación Avanzada.

Firma:

Ramon Leonardo Pineda Portilla.

A la maravillosa mujer que día a día estuvo a mi lado sirviendo de soporte en todo momento y es mi motivo para continuar luchando siempre. Para ti Virginia, gracias por no perder la fe en mí.

Acknowledgements

Quiero agradecer al Dr. Diego Muñoz dado que su apoyo fue incondicional en los momentos más difíciles, y siempre me animó a continuar con la tarea.

A la Dra. Luz Aida Sabogal por su enorme colaboración durante el proceso al estar al tanto de mi situación.

A mi segunda familia, quienes estuvieron presentes durante la culminación del presente trabajo, prestos siempre a ayudarme en lo que fuese.

A la vida, por permitirme la oportunidad de culminar una meta más en mi recorrido por este mundo, enseñandome duras pero significativas lecciones.

Contenido

	Pág.
Acknowledgements	11
Contenido	13
Lista de Figuras	15
Lista de Tablas	17
Resumen	19
1 Introducción	21
1.1 Controlabilidad de sistemas dinámicos lineales	22
1.2 Variedades críticas en sistemas dinámicos	23
1.3 Objetivos	24
1.3.1 Objetivo general	24
1.3.2 Objetivos específicos	24

2	Variedades críticas de controlabilidad	25
2.1	Variedades	25
2.1.1	Espacio tangente	28
2.1.2	Espacio normal	29
2.1.3	Campo de vectores sobre variedades	30
2.2	Sistemas dinámicos sobre variedades	31
2.3	Criterio de controlabilidad para sistemas lineales	33
2.4	Variedades críticas de controlabilidad para sistemas dinámicos lineales	36
2.4.1	Sistemas SISO	37
2.4.2	Sistemas MIMO	37
2.5	Vectores normales a variedades críticas de controlabilidad	40
3	Caso de estudio: OPERACIÓN UNITARIA INTERCAMBIO CALÓRICO	45
3.1	Linealización del modelo	47
3.2	Modelo en el espacio de estados	48
3.3	Criterios de controlabilidad	49
	CONCLUSIONES	51
	BIBLIOGRAFÍA	57

Lista de Figuras

	Pág.
2.1 Sistema coordinado sobre A_p de una variedad M	26
2.2 Cartas C^∞ -compatibles.	27
2.3 Espacio tangente T_pM	29
2.4 Campo vectorial en M	30
2.5 Flujo de un campo vectorial f	32
2.6 Generación de flujos para distintos valores de u	33
3.1 zonas de no controlabilidad de $(d_{i,t}, d_{i,c})$ para los valores singulares σ_1 y σ_2	52
3.2 zonas de variación paramétrica	53
3.3 Vector normal en el punto frontera $(0.0074 m, 0.4965 m)$	54

Lista de Tablas

	Pág.
3.1 Propiedades y punto de operación del IC.	51

Resumen

En el presente trabajo se analiza la controlabilidad de estado para sistemas dinámicos lineales y la formulación de variedades críticas basadas en el criterio de rango completo dado por Kalman [18]. Usando estas variedades críticas, se realiza el cálculo de los vectores normales utilizando el esquema desarrollado por Mönnigmann y Marquardt [23], los cuales permiten caracterizar paramétricamente diferentes estados de un sistema obteniendo regiones de no controlabilidad que contribuye al diseño robusto de sistemas dinámicos controlables. De manera ilustrativa, se aplica esta metodología a la operación unitaria intercambio calórico tomando los parámetros de diseño específicos así como del punto de operación de un intercambiador calórico particular [19] linealizando el modelo, como se hizo en el trabajo de Marín, Muñoz y Taborda [20], obteniendo relaciones de controlabilidad en función de los parámetros de diseño generales del intercambiador calórico.

PALABRAS CLAVE:

Vector normal; controlabilidad; sistemas dinámicos.

Capítulo 1

Introducción

La controlabilidad de estado es una de las propiedades que se deben garantizar para el diseño de sistemas dinámicos. Tener en cuenta condiciones y restricciones sobre los parámetros de diseño desde las primeras etapas, ayuda no solamente a garantizar el funcionamiento adecuado del sistema en lazo cerrado, sino que también permite analizar que las transiciones entre los estados cumplan las restricciones impuestas por razones económicas, de eficiencia, calidad entre otras.

En la primera parte de este trabajo se establecen las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la controlabilidad de estado sobre sistemas dinámicos lineales desde un punto de vista geométrico, definiendo las variedades de controlabilidad en términos de los parámetros de diseño y tomando como referencia el criterio de rango completo establecido por Kalman [18]. Es así que siguiendo el método propuesto en [23], se define el esquema de vectores normales para variedades críticas de controlabilidad, variedades que se definen con el fin de establecer restricciones y condiciones del sistema y garantizar de esta manera la robustez del diseño del sistema. Por último se aplica la metodología desarrollada para formular la variedad crítica de controlabilidad sobre la Operación Unitaria Intercambiador Calórico, estableciendo regiones de no controlabilidad para una configuración particular [19], y calculando los vectores normales que servirán para caracterizar los parámetros de diseño del sistema para las primeras etapas del diseño integrado de la planta.

1.1 CONTROLABILIDAD DE SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES

Ziegler y Nichols [34] definen la controlabilidad como la habilidad que tiene un proceso de alcanzar y mantener un valor de equilibrio deseado. Skogestad [28] define la controlabilidad de entrada-salida como la capacidad de alcanzar un desempeño aceptable de control, esto es, el mantener las salidas acotadas o desplazamientos dentro de algunos valores de referencia a pesar de la presencia de variaciones desconocidas pero acotadas, tales como perturbaciones y cambios en el proceso, usando entradas y medidas alcanzables.

Esta noción de controlabilidad de un sistema yace en los trabajos desarrollados por Bellman [2] y Pontryagin [22] en los años 50, y se logra observar la utilidad adquirida por la teoría de control. En su obra [18], Kalman inicia el estudio de la teoría pura de control, teniendo como objetivo responder a las interrogantes acerca del tipo y cantidad de información que se necesita para lograr el tipo de control deseado sobre un sistema.

La mayoría de los estudios de controlabilidad para modelos lineales se han ocupado de los factores que impiden las inversiones físicamente realizables de la función de transferencia de la planta tales como tiempos de retardo (time delays), ceros del semiplano complejo positivo RHP (Right-Half Plane), modelo bajo incertidumbres y variables de restricción manipuladas. Existen dos grandes métodos que tienen en cuenta estos factores. El método de la resiliencia Dinámica y el método de controlabilidad funcional.

Dentro de la resiliencia dinámica, Garcia y Morari [24] usan una estructura de control, llamada control por modelo interno (CMI) para representar de la mejor manera posible el controlador que es alcanzable. La suposición de que el controlador ideal es el inverso de la función de transferencia del proceso da una cota superior de controlabilidad que lleva a Holt [16] a usar este concepto para medir la controlabilidad. Sin embargo, por la realización física del mismo se ve limitado y la resiliencia dinámica sirve como indicador para generar las medidas de alcanzabilidad de un control perfecto. Así es como Holt estudia el efecto de los ceros RHP sobre la controlabilidad de procesos químicos. Estos se vuelven polos inestables en la inversa de la función de transferencia del proceso, lo que exhibe un comportamiento de respuesta inversa. Skogestad y Morari [29] hacen uso del método RGA (Relative Gain Array) como marco de referencia para medir los efectos de la incertidumbre para sistemas lineales, proponiendo un valor singular mínimo

σ_{min} para juzgar el rendimiento del proceso alcanzable, sin embargo la magnitud de las perturbaciones que pueden ser rechazadas están limitadas por las restricciones sobre las variables manipuladas las cuales tienen un efecto negativo sobre la controlabilidad del proceso.

La controlabilidad funcional es definida al considerar un espacio de estados para un sistema lineal. Un sistema lineal se dice funcionalmente controlable si dado un flujo γ y funciones de salida y con las condiciones iniciales de las variables de estado, existe una manipulación en los flujos que generan las funciones de salida. Esto ofrece una herramienta para evaluar la controlabilidad y evita límites en la inversión del proceso tales como ceros RHP, retardos, restricciones de variables manipuladas y modelos de incertidumbre [31].

1.2 VARIEDADES CRÍTICAS EN SISTEMAS DINÁMICOS

Las variedades críticas sobre sistemas dinámicos separan el espacio de parámetros en regiones en las cuales el sistema manifiesta un comportamiento cualitativo diferente, como por ejemplo en los puntos de bifurcación, o puntos en donde las restricciones sobre las variables de estado o salidas son violentadas.

Estas variedades han sido formuladas respecto a las bifurcaciones en las cuales los puntos de equilibrio pierden estabilidad en [23], y también se formulan con respecto a puntos críticos en general. Esto permite caracterizar de forma paramétrica las soluciones de equilibrio imponiendo restricciones de distancia mínima, encontrando regiones donde se conserva la operabilidad del sistema.

Una vez definidas estas variedades críticas, es posible definir restricciones que garanticen un diseño robusto adecuado mediante el cálculo de vectores normales sobre las variedades críticas [23]. Este tipo de consideraciones para incrementar los márgenes de estabilidad han sido discutidas en [11] y [14], y no sólo han sido aplicados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), sino que también se han aplicado a sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales (EAD) [8], [9], [32] y [33].

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Extender el método de vectores normales sobre variedades críticas para establecer fronteras de controlabilidad.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir las variedades críticas de controlabilidad para encontrar regiones de controlabilidad/ no controlabilidad de sistemas dinámicos lineales.
- Aplicar el esquema de vectores normales sobre estas variedades críticas.
- Proponer restricciones que permitan el diseño robusto de sistemas lineales.

Capítulo 2

Variedades críticas de controlabilidad

A continuación se muestran algunas definiciones y resultados sobre las variedades desde un punto de vista geométrico, para definir las variedades críticas de controlabilidad de sistemas dinámicos lineales, tomando como referencia el criterio de controlabilidad de rango completo de Kalman [18], para posteriormente utilizar el esquema de derivación de vectores normales y establecer las restricciones sobre los parámetros de diseño del sistema.

2.1 VARIEDADES

La palabra variedad es usada para describir varios tipos de conjuntos que cumplen con ciertas características, por ejemplo variedades topológicas, variedades complejas, variedades analíticas y C^k -variedades. Para los fines del presente trabajo se consideran las variedades diferenciables, y para ello se parte de algunos conceptos desde el punto de vista topológico.

Definición 2.1.0.1. *Un espacio topológico M es localmente euclidiano de dimensión n si todo $p \in M$ tiene una vecindad abierta $A_p \subset M$ tal que existe un homeomorfismo*

ϕ de A_p a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , esto es $\phi : A_p \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

A la pareja (A_p, ϕ) se le denomina carta local alrededor de p , a A_p una vecindad coordinada y a ϕ un sistema coordinado sobre A_p . También se dice que la carta (A_p, ϕ) está centrada en p si $\phi(p) = 0$.

Definición 2.1.0.2. Una variedad topológica M de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff, con base contable, localmente euclidiano de dimensión n .

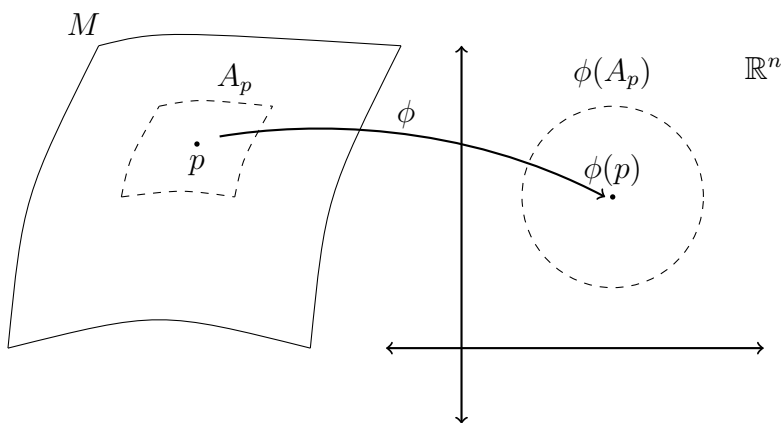


Figura 2.1. Sistema coordinado sobre A_p de una variedad M .

En la figura 2.1 se observa que para cada punto $p \in M$ se tiene una vecindad abierta homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^n . La dimensión de una variedad topológica está bien definida puesto que no es posible que un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n sea homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m si $n \neq m$ por el teorema de Brouwer sobre la invarianza de la dimensión [17].

Teorema 2.1.0.1. Invarianza del dominio de Brouwer: Sea A un abierto de \mathbb{R}^n y B un abierto de \mathbb{R}^m tal que A y B son homeomorfos. Entonces $n = m$.

Sean $(A, \phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n)$ y $(B, \psi : B \rightarrow \mathbb{R}^n)$ dos cartas de una variedad topológica. Como $A \cap B$ es un abierto de A y $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo a un abierto de \mathbb{R}^n , la imagen $\phi(A \cap B)$ también está en un abierto de \mathbb{R}^n . Similarmente $\psi(A \cap B)$ se encuentra en un abierto de \mathbb{R}^n . Para cada $p \in A \cap B$, el conjunto de coordenadas locales $(\phi_1(p), \dots, \phi_n(p))$ hacia el conjunto de coordenadas locales $(\psi_1(p), \dots, \psi_n(p))$ es llamada una transformación de coordenadas sobre $A \cap B$.

A menudo los conjuntos $(\phi_1(p), \dots, \phi_n(p))$ y $(\psi_1(p), \dots, \psi_n(p))$ son representados como

vectores n -dimensionales $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ y $y = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ respectivamente. Así la transformación de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1}$ puede ser representada de la forma

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = y(x),$$

y la transformación inversa $\phi \circ \psi^{-1}$ de la forma

$$x = x(y).$$

Definición 2.1.0.3. *Dos cartas $(A, \phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n)$ y $(B, \psi : B \rightarrow \mathbb{R}^n)$ de una variedad topológica son C^∞ -compatibles si las dos aplicaciones*

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(A \cap B) \rightarrow \phi(A \cap B), \quad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(A \cap B) \rightarrow \psi(A \cap B)$$

son homeomorfismos de clase C^∞ . (Figura 2.2).

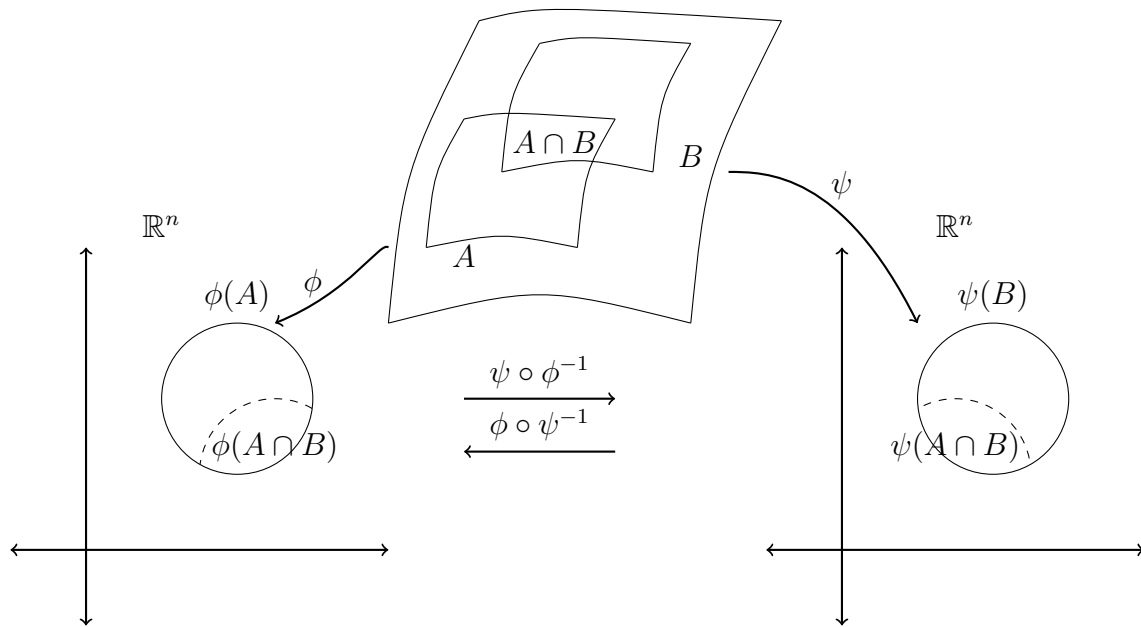


Figura 2.2. Cartas C^∞ -compatibles.

De acuerdo a [12], una variedad suave $M \in \mathbb{R}^n$ de dimensión k con $k \leq n$ puede ser descrita, al menos localmente sobre M , por $n - k$ funciones suaves $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-k}$ las cuales sirven como coordenadas sobre un punto $p \in M$. Esta variedad es localmente euclidiana a E^k . Se dice entonces que M es una k -variedad determinada por ψ y viene

determinada al igualar a cero cada una de las funciones ψ_i . Por ejemplo si se hace $k = 2$ y $n = 3$, entonces la variedad M es una superficie 2-dimensional en E^3 . Si $k = n$ cualquier subconjunto abierto de E^n será una n -variedad.

Definición 2.1.0.4. *Sea $1 \leq k \leq n$, $q \geq 1$. Una variedad M de dimensión k y clase $C^{(q)}$ tiene la propiedad de que para todo $p \in M$ existe una vecindad A de p y $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n-k})$ de clase $C^{(q)}$ sobre A , tal que $D\psi(p)$ tiene rango $n - k$ para todo $p \in A$ y*

$$M = \{p \in A \mid \psi(p) = 0\}. \quad (2.1)$$

Cuando se da (2.1), se dice que M es una k -variedad definida por ψ . Una variedad puede ser vista como una generalización no lineal de un subespacio de un espacio vectorial.

2.1.1 ESPACIO TANGENTE

Una variedad se puede aproximar de manera lineal en una vecindad para cualquier punto $p \in M$ mediante el uso de vectores tangentes. Dado $p \in M$ se define a $C^\infty(p)$ como el álgebra de funciones C^∞ cuyo dominio incluye alguna vecindad abierta de p con valores en los reales. Un vector tangente a M en el punto p , notado como X_p es una forma lineal sobre el álgebra $C^\infty(p)$ que satisface la condición

$$X_p(f \cdot g) = X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g), \quad \text{para } f, g \in C^\infty(p).$$

Desde un punto de vista alterno, se puede considerar el vector tangente a una variedad M en un punto p como el vector velocidad a una curva suave de la variedad que pasa por ese punto. (Figura 2.3).

Definición 2.1.1.1. *Un vector X_p es un vector tangente a M en p si existe una función $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = X(p)$.*

Al conjunto de estos vectores tangentes a la variedad M se le conoce como espacio tangente y se denota como T_pM .

Definición 2.1.1.2. *El espacio tangente T_pM de una variedad suave M en un punto $p \in M$ se define como el conjunto de todos los vectores tangentes de todas las curvas*

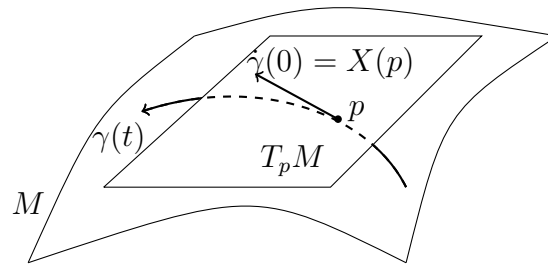


Figura 2.3. Espacio tangente $T_p M$.

suaves en M que pasan por p en $t = 0$, esto es

$$T_p M = \left\{ \left. \frac{d\gamma}{dt} \right|_{t=0} \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ suave}, \gamma(0) = p \right\}.$$

Además $T_p(M)$ constituye un espacio vectorial de dimensión n que satisface las siguientes condiciones

1. $(X(p) + Y(p))(f) = X(p)(f) + Y(p)(f)$ para $f \in C^\infty(p)$.
2. $(aX(p))(f) = a \cdot X(p)(f)$ para $a \in \mathbb{R}$.

De forma equivalente se define el espacio tangente como el conjunto de vectores tangentes determinados por curvas en la variedad M . Una curva γ en una variedad M es una aplicación diferenciable del tipo C^∞ que va de un intervalo real a M , esto es $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$. (Ver figura 2.3).

Si la variedad M tiene dimensión k , el espacio tangente $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión k . Lo que lleva a plantear un resultado que se demuestra en [12].

Teorema 2.1.1.1. *El espacio tangente $T_p M$ es el kernel de la transformación lineal $D\psi(p)$. Puesto que $D\psi(p)$ tiene rango $n - k$, el kernel $T_p M$ es un subespacio vectorial de E^n con dimensión k .*

2.1.2 **ESPACIO NORMAL**

Se define ahora el complemento ortogonal del espacio tangente $T_p M$, que son los **vectores normales**. Un vector n es llamado normal a M en p si $n \cdot h = 0, \forall h \in T_p M$. Los

vectores normales forman un espacio vectorial de dimensión $n - k$, lo que se muestra en el siguiente teorema, cuya prueba al igual que las otras de esta sección se encuentran en [12].

Teorema 2.1.2.1. *El espacio normal k -dimensional a una variedad M es generado por los k vectores gradientes en \mathbb{R}^n para las funciones ψ con respecto a p ,*

$$b_1 = \nabla\psi_1, b_2 = \nabla\psi_2, \dots, b_k = \nabla\psi_k.$$

Dado que se asume que el Jacobiano de ψ tiene rango completo, entonces los vectores b_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, son linealmente independientes y forman una base para el espacio normal de la variedad M .

2.1.3 CAMPO DE VECTORES SOBRE VARIETADES

Un campo vectorial \mathcal{X} sobre M de clase C^∞ es una aplicación diferenciable que asigna a cada punto $p \in M$ un vector $X(p)$ del espacio tangente T_pM . El rango de esta aplicación consiste de todos los vectores tangentes de todos los puntos de la variedad M .

$$\mathcal{X} : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_pM = T(M)$$

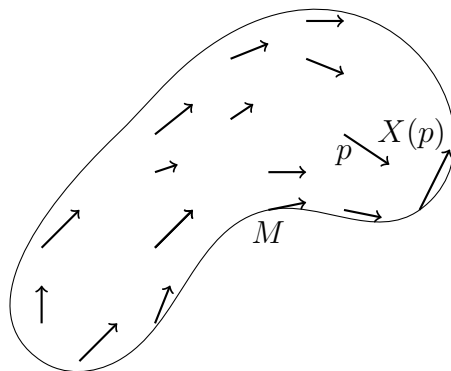


Figura 2.4. Campo vectorial en M .

El conjunto $T(M)$ está particionado en subconjuntos disjuntos T_pM , los cuales se asocian para todos y cada uno de los puntos p pertenecientes a la variedad diferencial M (figura 2.4). Si \mathcal{X} es un campo de vectores, para toda $f \in C^\infty(p)$ se determina la función diferenciable $\chi_f \in C^\infty(p)$ como

$$\begin{aligned}\chi_f : C^\infty(p) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \chi_f(p) = X_p(f).\end{aligned}$$

Se dice que para todas $f, g \in C^\infty(p)$ el campo de vectores \mathcal{X} es una derivación del álgebra $C^\infty(p)$ puesto que cumple las siguientes propiedades.

1. $\chi(af + bg) = a\chi_f + b\chi_g$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\chi(f \cdot g) = f\chi_g + g\chi_f$.

De esta forma de acuerdo a la acción realizada sobre los elementos de $C^\infty(p)$ el campo de vectores \mathcal{X} puede ser caracterizado.

2.2 SISTEMAS DINÁMICOS SOBRE VARIEDADES

Los sistemas dinámicos son muy utilizados en diferentes áreas y disciplinas tales como ingeniería, física, química, biología, economía entre muchas otras. Un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica de un objeto.

Definición 2.2.0.1. *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre una variedad suave M es un sistema de la forma*

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{X}(p), \quad p \in M, \quad (2.2)$$

donde $\mathcal{X}(p)$ es un campo vectorial suave sobre M .

Asumiendo que se cumplen las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de curvas solución llamadas curvas integrales para variedades suaves, las cuales son aplicaciones suaves definidas sobre un intervalo real que contiene al cero, la evolución del sistema dinámico representado en (2.2) depende del tiempo y puede ser determinado por un estado inicial, por ejemplo cuando $t = 0$.

Sea la curva $\gamma_p : I \rightarrow M$ una solución de (2.2), de acuerdo a la definición 2.1.1.1 se cumple que para un punto $p \in M$,

$$\gamma_p(0) = p$$

y

$$\frac{d\gamma_p}{dt} = \mathcal{X}(\gamma_p(t)), \quad \forall t \in I.$$

A esta curva $\gamma_p(t)$ también se le conoce como flujo del campo vectorial \mathcal{X} . (Véase la figura 2.5)

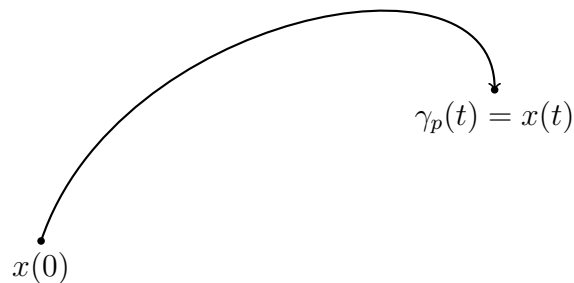


Figura 2.5. Flujo de un campo vectorial f .

El siguiente teorema da muestra de la existencia de dichas soluciones. La demostración se puede consultar en [3], pág 133.

Teorema 2.2.0.1. *Sea \mathcal{X} un campo vectorial de clase C^∞ sobre una variedad suave M y suponga que $p \in M$. Entonces existe un único intervalo abierto de $I_p \subset \mathbb{R}$ que contiene a $t = 0$ tal que:*

- i) existe una curva integral $\gamma_p(t)$ definida sobre I tal que $\gamma_p(0) = p$,*
- ii) dada cualquier otra curva integral $\gamma_p^*(t)$ con $\gamma_p^*(0) = p$, entonces el intervalo de definición de γ_p^* está contenido en I_p y $\gamma_p(t) = \gamma_p^*(t)$ en este intervalo.*

Desde un punto de vista geométrico, a este campo vectorial \mathcal{X} se le asocia un grupo local de difeomorfismos γ_p en el punto $p \in M$. Estos flujos se asocian con las órbitas de operabilidad de un sistema dinámico por lo que dada una familia de flujos $\{\gamma(t) : t \in I\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\gamma(t_1) \circ \gamma(t_2) = \gamma(t_1 + t_2)$.

2. $\gamma(-t) = (\gamma(t))^{-1}$.
3. $\gamma(0) = id$.

2.3 CRITERIO DE CONTROLABILIDAD PARA SISTEMAS LINEALES

Considere el sistema lineal definido por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)b_i(x) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.3)$$

donde la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$ en la ecuación (2.3), es conocida como vector de estados que toma valores en \mathbb{R}^n y $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ es la variable de manipulada. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ son las matrices que definen el sistema. Este tipo de sistema se denomina sistema de control lineal afín con la entrada. Para cualquier $u \in U$, el campo vectorial genera un flujo $\gamma(t)$. (figura 2.6).

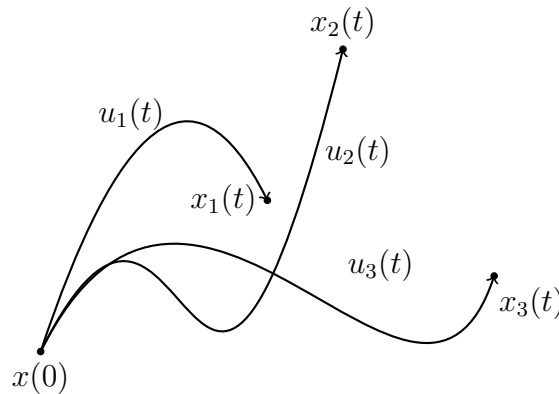


Figura 2.6. Generación de flujos para distintos valores de u .

De acuerdo a [4] se dice que un punto del espacio de estado de un sistema x_1 es controlable desde el estado x_0 en $[t_0, t_1]$ si existe una entrada u definida en el intervalo $[t_0, t_1]$

tal que transfiera el estado del sistema desde x_0 en t_0 hasta x_1 en t_1 . Un sistema se dice controlable si todos los puntos de su espacio de estado son controlables.

Para comprobar la controlabilidad de un sistema dinámico se debe considerar de manera diferencial si el sistema es lineal o no lineal, puesto que los criterios para cada uno de ellos es distinto según el tipo.

Considérese el sistema de control afín con la entrada (2.3) y suponga que la solución de este sistema está dado por la serie de potencias

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots, \quad (2.4)$$

con $b_i \in \mathbb{R}^n$. Al sustituir esta solución en (2.3) se tiene que

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots).$$

Al igualar los coeficientes de ambos lados se obtiene

$$\begin{aligned} b_1 &= Ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} Ab_1 = \frac{1}{2} A^2 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!} A^k b_0. \end{aligned}$$

Si se hace $t = 0$ en (2.4) resulta que $x(0) = b_0$ y la solución vendría dada por

$$x(t) = \left(I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots \right) x(0).$$

El término entre paréntesis corresponde a una serie infinita de potencias para matrices, por lo que la matriz exponencial definida por

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

converge absolutamente para todo t finito.

Se reescribe la ecuación (2.3) de la forma

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t),$$

y se multiplican ambos lados por e^{-At} lo que resulta como

$$\frac{d}{dt} [e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t).$$

Al integrar entre 0 y t se obtiene la solución de la forma

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, se considera el estado final como el origen del espacio de estados, por lo que para un tiempo final $t_f > 0$ se tiene

$$x(t_f) = 0 = e^{At_f}x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

despejando, se obtiene el estado inicial $x(0)$ como sigue

$$x(0) = - \int_0^{t_f} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau,$$

utilizando el teorema de Cayley-Hamilton y el polinomio mínimo como se muestra en [27], se obtiene la expresión para la matriz exponencial de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k,$$

lo que determina

$$\begin{aligned} x(0) &= - \int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)A^kBu(\tau)d\tau \\ &= -A^kB \int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

si $\beta_k = \int_0^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau$, entonces

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^kB\beta_k$$

o equivalentemente

$$x(0) = - [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

De acuerdo al trabajo realizado por Kalman [18], un sistema dinámico lineal representado por la ecuación de estado (2.3), es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad

$$M_c = [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B]_{n \times nm} \quad (2.5)$$

tiene rango n . Esto determina el criterio de controlabilidad para sistemas dinámicos lineales y es utilizada para definir las variedades críticas de controlabilidad en términos de los parámetros de diseño del proceso, lo que permite proponer las restricciones que se deben tener en cuenta durante la etapa de diseño.

2.4 VARIEDADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD PARA SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES

El espacio de parámetros puede ser caracterizado al identificar fronteras no lineales por medio de regiones en las cuales los parámetros afectan al sistema dinámico mostrando comportamientos diferentes, que para nuestro caso, el criterio de controlabilidad de estado es el que determina los puntos críticos pertenecientes a dicha frontera.

Marquardt y Mönningman describieron otras restricciones sobre la dinámica del sistema por medio de variedades críticas basadas en estabilidad. Por ejemplo, en [23] muestran como la información sobre la localización de variedades críticas de singularidades de cúspide pueden ser usadas para evitar estados estacionarios múltiples.

Retomando el sistema dinámico lineal de la forma (2.3) y considerando que las matrices A y B están afectadas por los parámetros de diseño, $\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t),$$

y teniendo en cuenta la matriz de controlabilidad definida por (2.5)

$$M_c(\alpha) = [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B]_{n \times nm},$$

el criterio de controlabilidad de Kalman [18] establece que el sistema es controlable si

2.4. VARIETADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD PARA SISTEMAS DINÁMICOS

el rango de esta matriz es completo, es decir

$$\text{Ran}(M_c(\alpha)) = n. \quad (2.6)$$

De acuerdo al número de acciones de control, a continuación se realiza los desarrollos matemáticos separados para los sistemas SISO (single-input single-output) y los sistemas MIMO (multiple-inputs multiple-outputs).

2.4.1 SISTEMAS SISO

Si $u \in \mathbb{R}$, aplicando el criterio de rango completo de Kalman, la matriz de controlabilidad sería cuadrada con dimensión $n \times n$

$$M_c(\alpha) = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B]_{n \times n},$$

por lo que sería controlable si $\det(M_c(\alpha)) \neq 0$. Así esta condición determina la frontera consistente en los puntos críticos que satisfacen que $\det(M_c(\alpha)) = 0$, es decir, de acuerdo a (2.1), esta variedad crítica viene definida como

$$M(\alpha) = \{\alpha \in \mathbb{R}^\alpha | \det(M_c) = 0\}. \quad (2.7)$$

Note que esta variedad estaría afectada por los parámetros de diseño a través de la dependencia de α en las matrices que definen el sistema dinámico lineal.

2.4.2 SISTEMAS MIMO

Si $u \in \mathbb{R}^m$, $m > 1$, la matriz de controlabilidad es de dimensión $n \times nm$

$$M_c(\alpha) = [B|AB|\cdots|A^{n-1}B]_{n \times nm}.$$

En este contexto, el rango de una matriz no cuadrada puede calcularse considerando uno de los siguientes caminos:

1. La dimensión del subespacio generado por las filas.
2. La dimensión del subespacio generado por las columnas.
3. El máximo orden de cualquier determinante menor.

El siguiente teorema es de bastante utilidad para calcular el rango de una matriz, por lo que este y otros resultados consecuentes cuyas demostraciones están dados en [13] son utilizados para establecer las variedades críticas de controlabilidad para sistemas dinámicos lineales.

Teorema 2.4.2.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ son matrices cuadradas invertibles, entonces $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(PAQ)$.*

Es decir, el rango es conservativo para una transformación matricial dada. Particularmente, si dada la matriz A se busca una forma diagonal conveniente, el cálculo del rango puede verse simplificado. Los valores singulares de una matriz tienen un rol significativo en la teoría del álgebra lineal numérica. Son cruciales para trabajar con cantidades características como el rango de una matriz y permiten calcularlo de forma confiable.

Definición 2.4.2.1. *Sean m, n enteros positivos y $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. La descomposición en valores singulares de A es la factorización*

$$A = USV^T \tag{2.8}$$

donde $U \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $V^T \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ son matrices ortogonales y $S \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ es una matriz diagonal de la forma

$$S = \begin{cases} \begin{bmatrix} \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) \\ 0_{n-m \times m} \end{bmatrix} & \text{si } n \geq m \\ [\text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad 0_{n \times m-n}] & \text{si } m \geq n, \end{cases}$$

con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$, $p = \min\{m, n\}$ los valores singulares de A ordenados de manera descendente y son no negativos.

El siguiente teorema da cuenta de la posibilidad de factorizar cualquier matriz por medio de los valores singulares y de cómo pueden ser calculados.

2.4. VARIETADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD PARA SISTEMAS DINÁMICOS

Teorema 2.4.2.2. *Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ admite una descomposición en valores singulares, los cuales están determinados de forma única por $\sqrt{\lambda_i}$, donde λ_i son los valores propios distintos de cero de la matriz $A^T A$ y también los de AA^T .*

Con este enfoque, se puede observar que la condición de controlabilidad se relaciona de forma estrecha con el número de valores singulares de la matriz de controlabilidad (2.5) diferentes de cero, lo que nos permite establecer un criterio en el siguiente sentido. Sea

$$M_c(\alpha) = [B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B]_{n \times nm} = USV^T \quad (2.9)$$

la factorización de la matriz de controlabilidad con U, V^T ortogonales y

$$S_{n \times nm} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Si $\text{Ran}(M_c) = n$, entonces $\sigma_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Si algún valor singular es nulo, es consecuente que la dimensión de la matriz de controlabilidad es menor, lo que permite formular el criterio de controlabilidad de la siguiente forma

$$\prod \sigma_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

De esta forma, la variedad crítica de controlabilidad para sistemas MIMO así

$$M(\alpha) = \{\alpha \in \mathbb{R}^\alpha \mid \prod \sigma_i = 0\}. \quad (2.12)$$

Note que esta variedad estaría afectada por los parámetros de diseño α a través de la dependencia de los valores singulares calculados en la descomposición de la matriz de controlabilidad que dependen de las matrices que definen el sistema dinámico lineal.

2.5 VECTORES NORMALES A VARIETADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD

Como se indicó anteriormente, el método de vectores normales ha sido utilizado en diferentes contextos, pero en su trabajo Mönnigmann [23] usa este método de una forma constructiva para el diseño robusto de sistemas. La idea principal es medir de forma paramétrica la robustez de una solución de equilibrio con respecto a una variedad crítica en general, donde el comportamiento del sistema es diferente, por ejemplo, estable o no estable, controlable o no controlable.

Sea $(x^{(0)}, \alpha^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+n_\alpha}$ una solución de equilibrio de (2.3), entonces el sistema $f(x, \alpha) = 0$ define una variedad suave de equilibrio para alguna vecindad de $(x^{(0)}, \alpha^{(0)})$. Sea \tilde{f} una función auxiliar definida de acuerdo a la variedad crítica a considerar. Por ejemplo, para una restricción de salida dada, como una cota de temperatura $T \leq T_0$, se toma $\tilde{f}(x, \alpha) = T(x, \alpha) - T_0$. Se determina el sistema aumentado $F(y, \beta)$ de la forma

$$F(y, \beta) := \begin{pmatrix} f_1(y, \beta) \\ \vdots \\ f_n(y, \beta) \\ \tilde{f}_1(y, \beta) \\ \vdots \\ \tilde{f}_{l+\text{codim}}(y, \beta) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.13)$$

donde

$$y := \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\text{codim}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l+\text{codim}}, \quad \beta := \begin{pmatrix} \alpha_{\text{codim}+1} \\ \vdots \\ \alpha_{n_\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\alpha - \text{codim}}, \quad (2.14)$$

para l , codim , $n_\alpha \in \mathbb{Z}^+$ y $\tilde{x} \in \mathbb{R}^l$ variables auxiliares. Se asume que los parámetros α del sistema (2.3) están ordenados de tal manera que el sistema aumentado determina los primeros parámetros de codimensión codim , $\alpha_1, \dots, \alpha_{\text{codim}}$. Así y consiste de las variables dependientes del sistema aumentado y β de los parámetros del sistema aumentado.

2.5. VECTORES NORMALES A VARIEDADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD

Los sistemas de la forma (2.13) se toman como sistemas aumentados de bifurcaciones de codimensión dada $codim$. En el caso de puntos de bifurcación, las variables auxiliares \tilde{x} representan por ejemplo los vectores y valores propios del jacobiano de f , esto es Df .

Si el sistema aumentado $F(y, \beta) = 0$ es regular para y en una solución $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$, entonces las $n + l + codim$ ecuaciones para $F(y, \beta)$ definen una variedad $(n_\alpha - codim)$ -dimensional para alguna vecindad de $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$. Además, los vectores

$$b_1 := \begin{pmatrix} \nabla_y F_1 \\ \nabla_\beta F_1 \end{pmatrix}, \dots, b_{n+l+codim} := \begin{pmatrix} \nabla_y F_{n+l+codim} \\ \nabla_\beta F_{n+l+codim} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

que son evaluados en $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$ son linealmente independientes y generan el espacio normal a la variedad en $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$, con ∇_y y ∇_β los gradientes con respecto a y y β respectivamente. Los sistemas aumentados de la forma (2.5) comprenden generalmente derivadas para el modelo de ecuaciones (2.3) por lo que el gradiente en (2.15) contiene derivadas de orden superior.

Para encontrar el punto crítico paramétricamente más cercano a una solución de equilibrio del sistema (2.3), se requiere medir la distancia entre ellos por medio del vector normal generado por $gen\{b_1, b_2, \dots, b_{n+l+codim}\}$, es decir se deben calcular los coeficientes $k \in \mathbb{R}^{n+l+codim}$ tales que

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_{n+l+codim} b_{n+l+codim} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_\alpha - (codim - 1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l+m}, \quad (2.16)$$

donde $r = (r_1, r_2, \dots, r_{n_\alpha - (codim - 1)})^T \neq 0$ es el vector normal que se está buscando en el espacio de parámetros. Esta elección de r no es única, pero cualquiera que se considere dentro del espacio normal sirve para este propósito. Para fines de simplicidad en la notación se hace a $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_{n+l+codim} b_{n+l+codim} = Bk$ con B una matriz de

dimensiones $(n + l + n_\alpha) \times (n + l + \text{codim})$ y k con dimensión $n + l + \text{codim}$. Así la ecuación (2.16) queda

$$Bk = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_\alpha - (\text{codim} - 1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l+m}. \quad (2.17)$$

Para cualquier $\text{codim} < n_\alpha$, k se interpreta como el vector que genera el núcleo de las primeras $n + l + \text{codim} - 1$ filas de B , además como se requiere que el sistema aumentado (2.13) sea regular en y para la solución $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$, las primeras $n + l + \text{codim}$ filas de B evaluadas en $(y^{(0)}, \beta^{(0)})$ deben tener rango completo. Si adicionalmente para algún $c \in \mathbb{R}^{n+l+\text{codim}}$ no normal a k

$$c^T k - 1 = 0, \quad (2.18)$$

entonces k está definida únicamente por (2.18) y las primeras $n + l + \text{codim} - 1$ ecuaciones del lado derecho de (2.17), es decir

$$\begin{pmatrix} f_x^T & \tilde{f}_x^T \\ 0 & \tilde{f}_{\tilde{x}}^T \\ f_{\alpha_1}^T & \tilde{f}_{\alpha_1}^T \\ \vdots & \vdots \\ f_{\alpha_{\text{codim}-1}}^T & \tilde{f}_{\alpha_{\text{codim}-1}}^T \end{pmatrix} k = 0, \quad c^T k - 1 = 0.$$

Una vez encontrado k , el vector normal $r \in \mathbb{R}^{n_\alpha - (\text{codim} - 1)}$ es obtenido multiplicando las filas restantes de (2.17) por k

$$\begin{pmatrix} f_{\alpha_{\text{codim}}}^T & \tilde{f}_{\alpha_{\text{codim}}}^T \\ \vdots & \vdots \\ f_{\alpha_{n_\alpha}}^T & \tilde{f}_{\alpha_{n_\alpha}}^T \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n_\alpha - (\text{codim} - 1)} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

2.5. VECTORES NORMALES A VARIETADES CRÍTICAS DE CONTROLABILIDAD

Una vez que las variedades críticas de controlabilidad (2.7) y (2.12) están definidas, se deben calcular los vectores normales utilizando el esquema de derivación presentado anteriormente, como se hizo en [23].

El sistema ampliado queda de la forma

$$F(x, \alpha) = \begin{pmatrix} f(x, \alpha) \\ \tilde{f}(x, \alpha) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

donde $f(x, \alpha) = (f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha), \dots, f_n(x, \alpha))^T$, $\tilde{f}(x, \alpha)$ viene dada por (2.7) o (2.12) respectivamente, además de que al no utilizar variables auxiliares \tilde{x} , entonces $l = 0$ y $\text{codim} = 1$.

Con estas consideraciones, la matriz B dada en (2.17) es expresada de la forma

$$B = \nabla_{\alpha} M \quad (2.21)$$

y se debe encontrar el coeficiente $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$Bk = r \in \mathbb{R}^{n_{\alpha}}, \quad (2.22)$$

y

$$c^T k - 1 = 0, \quad (2.23)$$

para algún $c \in \mathbb{R}^{n_{\alpha}}$ no normal a k .

Por medio de las ecuaciones (2.20), (2.21) y (2.23) se calculan los vectores normales a la variedad crítica, lo que permite medir de forma paramétrica la robustez de un punto de operación del sistema, pues con esta información se establecen las restricciones sobre los parámetros del sistema y se garantiza una distancia mínima a la frontera de controlabilidad.

Capítulo 3

Caso de estudio: OPERACIÓN UNITARIA INTERCAMBIO CALÓRICO

Los modelos matemáticos permiten predecir comportamientos de interés los cuales son tenidos en cuenta a la hora de diseñar un sistema, pues la información acerca de las principales variables y su evolución conllevan a la adecuada elección de valores para los parámetros del diseño. Desde este punto de vista, si la estructura del modelo junto a sus parámetros tienen una interpretación física, es posible un diseño integrado del proceso.

Como se indicó al principio, el análisis de controlabilidad está ligado con la teoría de control y con la representación de los sistemas dinámicos en el espacio de estado. A continuación se realiza un breve análisis de la controlabilidad de la operación unitaria Intercambio Calórico, que consiste en realizar la transferencia de calor entre dos fluidos y cuyo objetivo es alcanzar y mantener una temperatura de salida deseada para cada uno de los fluidos.

No es posible establecer un modelo general que represente la operación unitaria de manera global, puesto que existen diferentes configuraciones y consideraciones que deben

ser tenidas en cuenta. En el presente análisis, por ejemplo, se considera un intercambio calórico de contacto indirecto, en el cual los fluidos no interactúan de forma directa sino que lo hacen a través de estructuras como tubos y corazas. El modelo matemático y sus valores son tomados como se muestra en [20].

En la realización del modelo se consideran las siguientes suposiciones:

1. Los coeficientes de transferencia de calor y las propiedades de los fluidos y del material de la pared del intercambiador son constantes.
2. Los fluidos utilizados son líquidos incompresibles y no hay acumulación de la masa a lo largo del IC.
3. No hay pérdidas de calor al ambiente.
4. El intercambiador de calor no realiza ni recibe ningún tipo de trabajo de los alrededores.
5. Sólo se tiene en cuenta el cambio en la energía interna del fluido, se desprecian los cambios en la energía cinética y potencial.

El balance de energía para el fluido frío es

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dw}{dt} + \dot{v}_f \rho_f \left(\widehat{H}_f(T_{f,e}) - \widehat{H}_f(T_{f,s}) \right) = \frac{dE_{T,f}}{dt} \quad (3.1)$$

donde el subíndice f representa el fluido frío, el subíndice e representa la entrada al IC, el subíndice s representa la salida del IC, T es la temperatura, Q representa el calor transferido entre ambos fluidos, w representa el trabajo neto del sistema, \dot{v} es el flujo volumétrico, ρ es la densidad, \widehat{H} es la entalpía por unidad de masa y E_T es la energía total. Esta notación no distingue entre fluidos de proceso y de servicio, sino entre fluidos caliente y frío, donde el fluido caliente es aquel que entra al IC con una temperatura más alta.

Adicionalmente se tiene que

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad (3.2)$$

$$dE_{T,f} = (\rho V C_V dT)_f \quad (3.3)$$

$$\widehat{H}_f(T) = (C_P(T - T_R))_f \quad (3.4)$$

$$\frac{dQ}{dt} = UA \times \Delta T \quad (3.5)$$

con V es el volumen que ocupa el fluido en el intercambiador, C_P y C_V las capacidades caloríficas a presión constante y a volumen constante, respectivamente y T_R es la temperatura de referencia, U es el coeficiente global de transferencia de calor, A es el área de transferencia y ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos corrientes a través de toda la superficie A .

Es necesario definir a ΔT como la diferencia de temperatura media logarítmica ($LMTD$) la cual tiene en cuenta las variaciones espaciales de la diferencia de temperatura entre los fluidos, pues esta cambia punto a punto de acuerdo a la configuración de flujo establecida. Se usa el flujo en contracorriente ya que esta se realiza de manera más efectiva, por lo que la diferencia de temperatura media logarítmica queda de la forma:

$$\Delta T = LMTD = \frac{(T_{c,e} - T_{f,s}) - (T_{c,s} - T_{f,e})}{\ln \left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}} \right)} \quad (3.6)$$

Si se reemplazan (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) en (3.1) se tiene

$$\frac{dT_{f,s}}{dt} = \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V V} \right)_f (T_{f,e} - T_{f,s}) + \frac{UA \times LMTD}{(\rho V C_V)_f} \quad (3.7)$$

y análogamente para el fluido caliente

$$\frac{dT_{c,s}}{dt} = \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V V} \right)_c (T_{c,e} - T_{c,s}) - \frac{UA \times LMTD}{(\rho V C_V)_c} \quad (3.8)$$

donde los subíndices c, f representa el fluido caliente y frío, respectivamente.

Las temperaturas de entrada $T_{,e}$ hacen parte del conjunto de variables manipuladas, mientras que las temperaturas de salida $T_{,s}$ son los estados del sistema.

3.1 LINEALIZACIÓN DEL MODELO

Los modelos matemáticos para procesos químicos tienen por lo general una naturaleza no lineal, dada la posible interacción entre sus variables. Una estrategia a adoptar es linealizar el modelo alrededor de un punto de operación para así realizar los respectivos análisis. Esta linealización estará expresada en variables de desviación, para las

cuales cuando una de ellas se tome en su valor de estado estacionario, en términos de desviación se hará nula, y desaparece del modelo.

Para el flujo en contracorriente, la linealización viene dada por

$$\frac{dT'_{f,s}}{dt} = \alpha T'_{f,s} + \beta T'_{c,s} + \gamma \dot{v}'_f + \zeta T'_{f,e} + \eta T'_{c,e} \quad (3.9)$$

$$\frac{dT'_{c,s}}{dt} = \phi T'_{f,s} + \varphi T'_{c,s} + \psi \dot{v}'_c + \vartheta T'_{f,e} + \kappa T'_{c,e} \quad (3.10)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= - \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V \bar{V}} \right)_{f,E} - \frac{UA\Gamma}{(\rho V C_V)_f} \quad , \quad \beta = - \frac{UA\Delta}{(\rho V C_V)_f} \quad , \quad \gamma = \left(\frac{C_P}{C_V} \frac{1}{\bar{V}} \right)_f (T_{f,e} - T_{f,s})_E \\ \zeta &= \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V \bar{V}} \right)_{f,E} + \frac{UA\Delta}{(\rho V C_V)_f} \quad , \quad \eta = \frac{UA\Gamma}{(\rho V C_V)_f} \\ \phi &= \frac{UA\Gamma}{(\rho V C_V)_c} \quad , \quad \varphi = \frac{UA\Delta}{(\rho V C_V)_c} - \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V \bar{V}} \right)_{c,E} \quad , \quad \psi = \left(\frac{C_P}{C_V} \frac{1}{\bar{V}} \right)_c (T_{c,e} - T_{c,s})_E \\ \vartheta &= - \frac{UA\Delta}{(\rho V C_V)_c} \quad , \quad \kappa = \left(\frac{C_P \dot{v}}{C_V \bar{V}} \right)_{c,E} - \frac{UA\Gamma}{(\rho V C_V)_c} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} LMTD' &= \Gamma (T'_{c,e} - T'_{f,s}) + \Delta (T'_{f,e} - T'_{c,s}) \quad , \quad (3.11) \\ \Gamma &= \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}} \right)} - \frac{(T_{c,e} - T_{f,s} - T_{c,s} + T_{f,e})}{\ln \left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}} \right)^2 (T_{c,e} - T_{f,s})} \right)_E \quad , \\ \Delta &= \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}} \right)} - \frac{(T_{c,e} - T_{f,s} - T_{c,s} + T_{f,e})}{\ln \left(\frac{T_{c,e} - T_{f,s}}{T_{c,s} - T_{f,e}} \right)^2 (T_{c,s} - T_{f,e})} \right)_E \quad , \end{aligned}$$

donde el subíndice E corresponde al estado estacionario y $(')$ representa la variable de desviación.

3.2 MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS

Se considera al vector de estados como al vector correspondiente a las temperaturas de salida en términos de desviación

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{f,s}(t) \\ T'_{c,s}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (3.12)$$

y al vector u como

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{f,e}(t) \\ T'_{c,e}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

dando paso al sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \phi & \varphi \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \zeta & \eta \\ \vartheta & \kappa \end{bmatrix} u. \quad (3.14)$$

La cantidad de variables manipuladas para el IC son 4, $(T_{f,e}, T_{c,e}, \dot{v}_f, \text{ y } \dot{v}_f)$ pero debido a que se cuenta con dos variables de estado, se deben escoger sólo dos variables a los sumo, como se indica en [20].

3.3 CRITERIOS DE CONTROLABILIDAD

Para el sistema dado por (3.14), la matriz de controlabilidad, de acuerdo a la ecuación (2.5) está dada por

$$M_c = \begin{bmatrix} \zeta & \eta & \alpha\zeta + \beta\vartheta & \alpha\eta + \beta\kappa \\ \vartheta & \kappa & \phi\zeta + \varphi\vartheta & \phi\eta + \varphi\kappa \end{bmatrix}_{2 \times 4} \quad (3.15)$$

Las constantes Γ , Δ , β , γ , ϕ , ψ , ϑ y η dependen de las propiedades de los fluidos, parámetros de diseño y condiciones de operación, por lo que toman valores finitos diferentes de cero desde un punto de vista práctico.

A continuación se muestra brevemente el procedimiento por el cuál se descompone la matriz de controlabilidad (3.15) en sus valores singulares σ_i , lo que establece el criterio propuesto en el presente trabajo y que se establece en la ecuación (2.12).

1. Primero, se hallan los valores y vectores propios de la matriz

$$M_c M_c^T = V D V^T$$

con $D = \text{Diag}(\lambda_i)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2$ valores propios ordenados de forma descendente.

2. Luego se hace $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
3. Por último, se expresa la matriz de controlabilidad M_c en términos de los valores singulares

$$M_c = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4} V^T \quad (3.16)$$

La condición de controlabilidad de Kalman establece que el sistema es controlable si la matriz de controlabilidad, en este caso (3.15) tiene rango completo, pero esta condición es equivalente a que los valores singulares de la matriz de controlabilidad sean diferentes de cero.

Estos valores singulares dependen de las propiedades de los fluidos, parámetros de diseño y condiciones de operación, por lo que se evalúan IC específico con un punto de operación y propiedades de los fluidos determinadas como se hizo en [19], para de esta manera encontrar relaciones entre los parámetros de diseño de tal forma que el sistema se haga no controlable y defina regiones de con controlabilidad en el espacio de parámetros.

Se toma el diseño de un IC de tubos y coraza, con configuración de flujo en contracorriente, con el fluido caliente por los tubos y el frío por la coraza. Los valores para cada parámetro, tanto de diseño como de operación tenidos en cuenta para dar valor a las propiedades físicas y a los parámetros de operación y como referencia para utilizar intervalos de parámetros de diseño factibles en la práctica son tomados de [19]. Los parámetros de diseño para el cual se realiza el análisis son el diámetro interno de la coraza $d_{i,c}$ y el diámetro interno de los tubos $d_{i,t}$.

El punto de operación y los fluidos a utilizar, se muestran en la Tabla 3.1 que fué tomada de [19] donde se encuentran también las propiedades físicas calculadas a la temperatura de entrada de los fluidos.

Los valores singulares σ_i dados en (3.16) dependen del diámetro interno de la coraza $d_{i,c}$ y del diámetro interno de los tubos $d_{i,t}$. En la figura 3.1 se muestra la gráfica de la variedad crítica de controlabilidad que depende de $\sigma_1(d_{i,t}, d_{i,c})$ y $\sigma_2(d_{i,t}, d_{i,c})$ al hacer que los demás parámetros de diseño tomen valores constantes. En la figura 3.2 se puede

	Fluido Caliente	Fluido Frío
Fluido	Agua	Agua
Flujo másico $\left[\frac{kg}{s}\right]$	13.88	8.33
Temperatura de entrada $[K]$	340.15	290.15
Temperatura de salida $[K]$	326.36	313.15
Densidad $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	979.4	999.0
Capacidad calorífica $\left[\frac{kJ}{kgK}\right]$	4.188	4.184
Viscosidad $\left[\frac{Ns}{m^2}\right] \times 10^6$	420	1080
Conductividad térmica $\left[\frac{W}{mK}\right] \times 10^3$	660	598
Restricciones	Máxima caída de presión permitida = 12000Pa	
Materiales utilizados: Acero al carbón	Conductividad térmica = 60W/mK	
	Espesor del tubo = 0.002m	

Tabla 3.1. Propiedades y punto de operación del IC.

observar las regiones en el plano $d_{i,t} - d_{i,c}$ en la cual la pareja de diámetros toman valores que hacen que la controlabilidad de estado no pueda llevarse a cabo, pues el rango de la matriz de controlabilidad (3.15) no sería completo.

En la etapa del diseño, se deben escoger los valores de los parámetros de tal forma que estos no ocasionen que el sistema alcance valores no permitidos por razones de seguridad, calidad del producto, entre otras. Para el caso particular de los diámetros tanto de los tubos como de la coraza, a la hora de diseñar el intercambiador, estos deben ser seleccionados de tal forma que no estén en la región donde se pierde la controlabilidad.

El método de vectores normales aplicado a la controlabilidad de estado permite medir la distancia paramétrica entre un punto de operación y la zona de no controlabilidad. En la figura 3.3 se muestra el vector normal al punto crítico de controlabilidad ubicado justo en la frontera que corresponde a los valores para el diámetro interno de los tubos del intercambiador $d_{i,t} = 0.0074 m$, y el diámetro de la coraza $d_{i,c} = 0.4965 m$.

Para $(d_{i,t}^{(0)}, d_{i,c}^{(0)})$ establecido como posible candidato de diseño del intercambiador de calor, la distancia hasta el punto crítico de controlabilidad más cercano $(d_{i,t}^{(c)}, d_{i,c}^{(c)})$ se mide a través del vector normal r de la frontera crítica. Este candidato debe estar a una distancia mínima de la la frontera de controlabilidad.

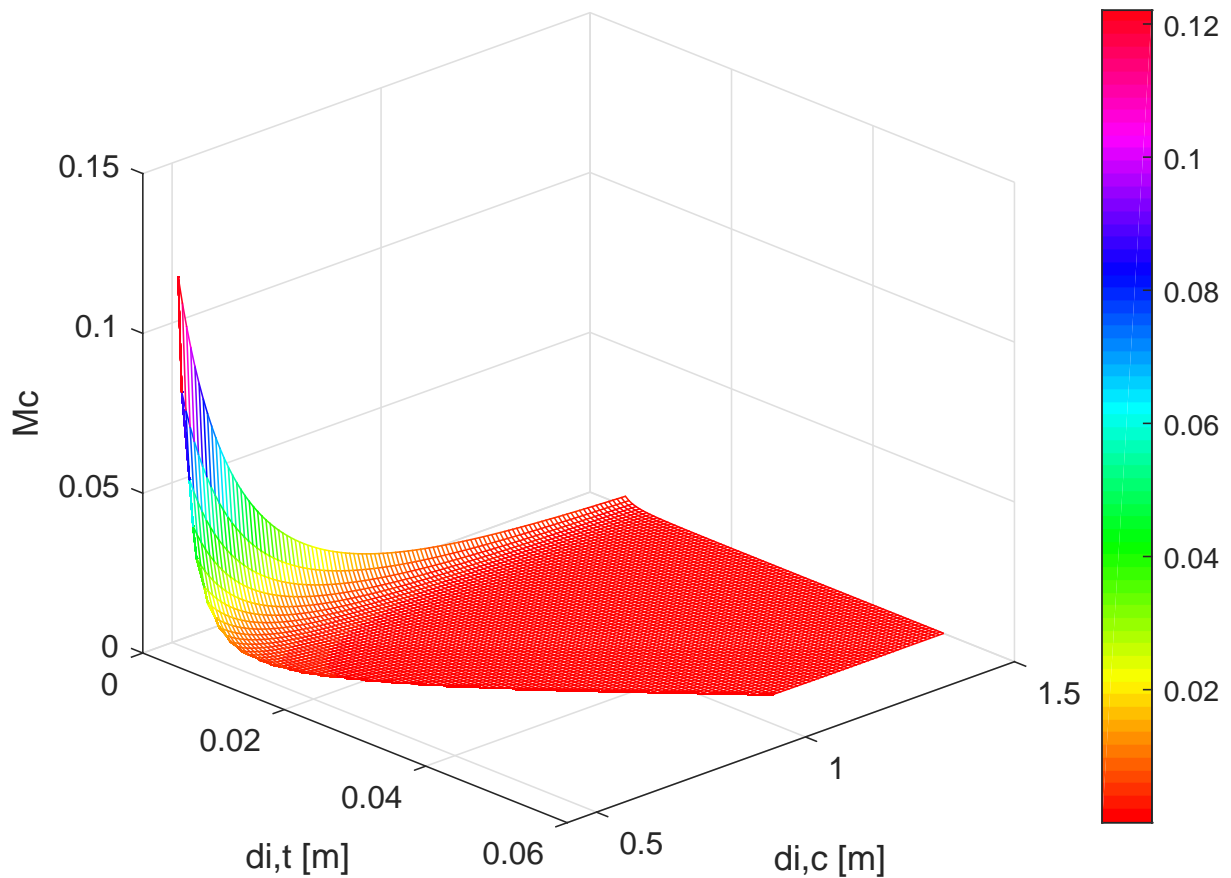


Figura 3.1. zonas de no controlabilidad de $(d_{i,t}, d_{i,c})$ para los valores singulares σ_1 y σ_2

CONCLUSIONES

Por medio del criterio de rango completo para la controlabilidad de sistemas dinámicos lineales propuesto por Kalman [18], en el presente trabajo se obtuvo la representación matemática de variedades críticas de controlabilidad en términos de los parámetros de diseño del sistema.

Usando el esquema de derivación de los vectores normales usado en [18] sobre estas variedades críticas de controlabilidad, se caracterizan los posibles puntos de operación por medio de la distancia que se mide a lo largo del vector normal hacia la frontera de controlabilidad, obteniendo así regiones de controlabilidad/no controlabilidad.

Esto permite diseñar de forma robusta el sistema dinámico, teniendo en cuenta las difer-

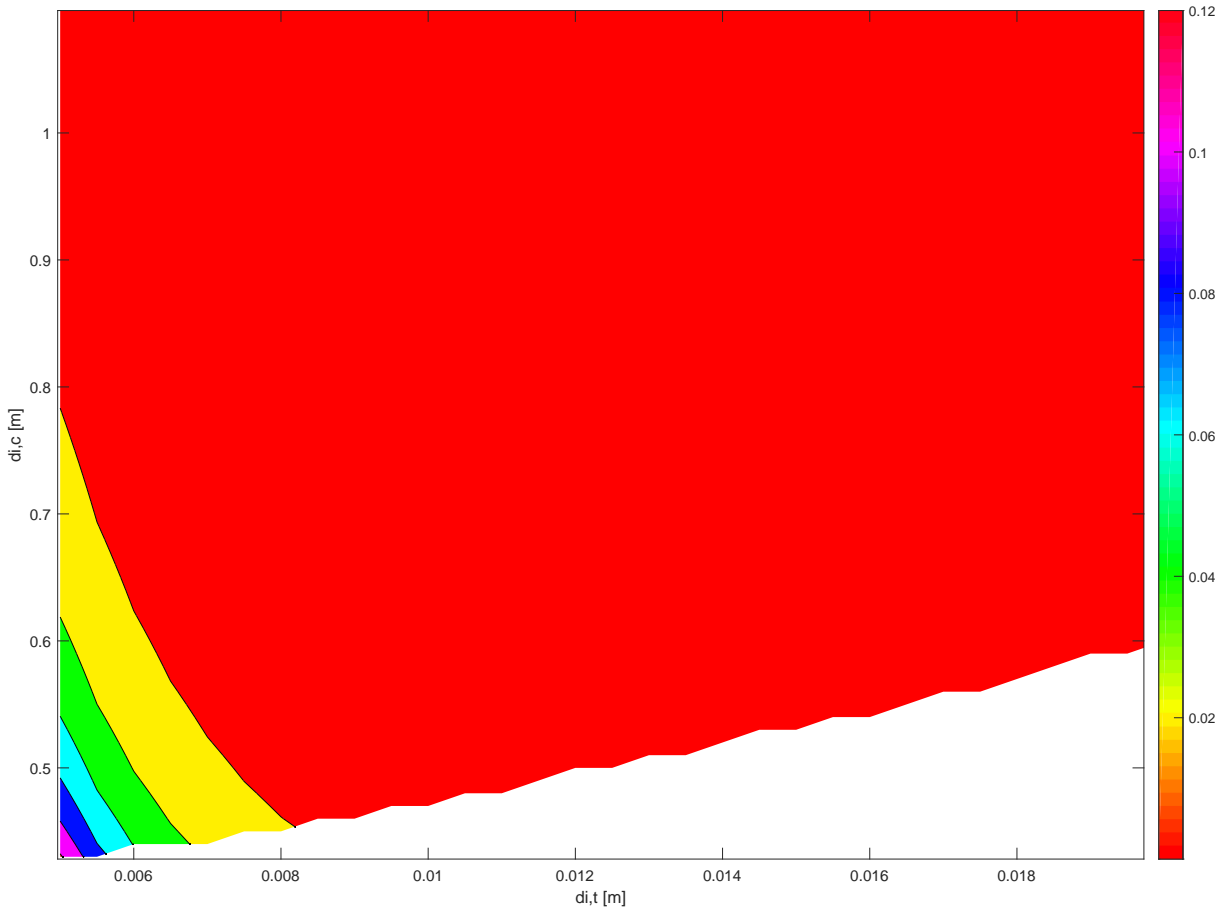


Figura 3.2. zonas de variación paramétrica

entes interacciones o la presencia de perturbaciones e incertidumbres para las acciones de control. Los parámetros del sistema pueden tomar valores en un rango

$$\alpha_i \in \left[\alpha_i^{(0)} - \Delta\alpha_i, \alpha_i^{(0)} + \Delta\alpha_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n_\alpha.$$

y pueden ser representados en el espacio de parámetros como cajas n_α -dimensionales con diferentes medidas, aproximadas de forma suave por n_α -elipsoides que los contienen y que por lo general no manejan las mismas unidades. Así, si se escala cada uno de ellos haciendo

$$\alpha_i \rightarrow \frac{\alpha_i}{\Delta\alpha_i}$$

se obtiene un hipercubo n_α -dimensional

$$\alpha_i \in \left[\alpha_i^{(0)} - 1, \alpha_i^{(0)} + 1 \right], \quad i = 1, 2, \dots, n_\alpha.$$

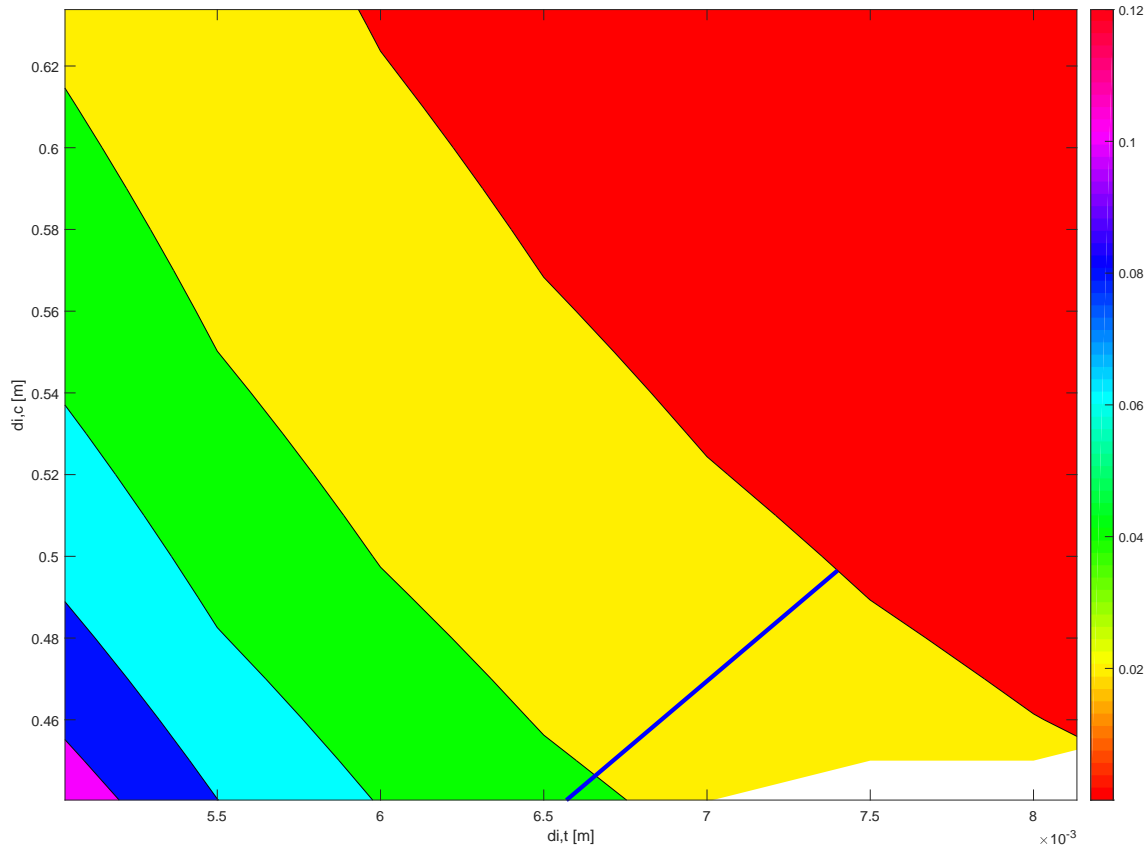


Figura 3.3. Vector normal en el punto frontera (0.0074 m, 0.4965 m).

encerrado por una hiperesfera n_α -dimensional de radio $\sqrt{n_\alpha}$.

Si el punto de operación está ubicado en el centro de la hiperesfera, se garantiza que esta permanece a una distancia mínima $\sqrt{n_\alpha}$ a lo largo del vector normal para cualquier variación en los parámetros y por lo tanto no se cruzará la frontera dada por la variedad crítica.

Para la solución de equilibrio $(x^{(0)}, \alpha^{(0)})$, esta condición hace que para el vector normal r y el punto crítico $\alpha^{(c)}$ más cercano se cumpla

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &= \alpha^{(c)} + l \frac{r}{\|r\|} \\ l &\geq \sqrt{n_\alpha} \end{aligned}$$

para $l \in \mathbb{R}$.

Para la Operación Unitaria Intercambiador Calórico al escoger la configuración de flujo

cruzado, y teniendo en cuenta las dimensiones de un intercambiador específico tal como en [19] se obtuvo la región donde no se conserva la propiedad de controlabilidad, y sobre esta variedad crítica se formulan restricciones para los parámetros de diseño correspondientes a los diámetros internos de los tubos y la coraza.

Este análisis de controlabilidad debe considerarse desde el enfoque de diseño integrado y debe ser la base para el diseño óptimo de equipos, pero se debe tener en cuenta que el sistema es linealizado, por lo que si se aplica a sistemas no lineales se recomienda hacer uso de otras herramientas matemáticas como lo son el Álgebra de Lie sobre distribuciones.

Bibliografía

- [1] F. L. ALVARADO, I. DOBSON, AND Y. HU. *Computation of closest bifurcations in power systems*. IEEE Trans. Power Syst., 9(2):918-928, May 1994.
- [2] BELLMAN, RICHARD. *Dynamic Programming*. Princeton University Press. 1957.
- [3] BOOTHBY, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry* (Vol. 120). Academic press.
- [4] CAMPOY, P. D., JIMENEZ, S., SEBASTIAN, A., AND DOMÍNGUEZ, J. M. (2006). *Control en el espacio de estado*.
- [5] C. A. CANIZARES AND F. L. ALVARADO. *Point of collapse and continuation methods for large AC/DC systems*. IEEE Trans. Power Syst., 8(1):1-8, February 1993.
- [6] C. A. CANIZARES. *Calculating optimal system parameters to maximize the distance to saddlenode bifurcations*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 45(3):225-237, March 1998.
- [7] A. C. Z. DE SOUZA, C. A. CANIZARES, AND V. H. QUINTANA. *New techniques to speed up voltage collapse computations using tangent vectors*. IEEE Trans. Power Syst., 12(3):1380-1387, August 1997.
- [8] C. A. CANIZARES AND F. L. ALVARADO. *Point of collapse and continuation methods for large AC/DC systems*. IEEE Trans. Power Syst., 8(1):1-8, February 1993.
- [9] C. A. CANIZARES AND Z. T. FAUR. *Analysis of SVC and TCSC controllers in voltage collapse*. IEEE Trans. Power Syst., 14(1):158-165, February 1999.
- [10] I. DOBSON. *Computing a closest bifurcation instability in multidimensional pa-*

- parameter space*. J. Nonlinear Sci., 3:307-327, 1993.
- [11] I. DOBSON AND L. LU. *Computing an optimum direction in control space to avoid saddle-node bifurcation and voltage collapse in electric power systems*. IEEE Trans. Automatic Control, 37:1616-1620, 1992.
- [12] FLEMING, W. (2012). *Functions of several variables*. Springer Science & Business Media.
- [13] FRIEDBERG, S. H., INSEL, A. J., AND SPENCE, L. E. (1982). *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural.
- [14] S. GREENE, I. DOBSON, AND F. L. ALVARADO. *Sensitivity of the loading margin to voltage collapse with respect to arbitrary parameters*. IEEE Trans. Power Syst., 12(1):262-272, 1997.
- [15] R. HERMANN AND A. J. KRENER. *Nonlinear controllability and observability*, IEEE Trans. Automatic Control AC-22, 5, 728-740. 1977.
- [16] HOLT B.R. AND MORARI M.. *Design of resilient processing plants. V. the effect of right-half plane zeros on dynamic resilience.*, Chem Eng Sci, 40, 59-74. 1985.
- [17] ISIDORI, A. (2013). *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media.
- [18] R. E. KALMAN . *On the general theory of control systems*, Proc. First IFAC Congress, 1, 481-492. 1960.
- [19] KARA, YUSUF A. AND GÜRARAS, ÖZBILEN. *A computer program for designing of shell-and-tube heat exchangers*. : Applied Thermal Engineering. 24, 1797-1805. 2004.
- [20] MARÍN, H.M., MUÑOZ, D.A., AND MURILLO, J.T. (2004). *Evaluación y Análisis de Controlabilidad para la Operación Unitaria Intercambio Calórico como una Aproximación a la Integración Diseño-Control*. (tesis de pregrado). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- [21] HAHN, J., MÖNNIGMANN, M., AND MARQUARDT, W.. *A method for robustness analysis of controlled nonlinear systems*, Chemical Engineering Science. 59(20), 4325-4338. 2004.
- [22] MISHCHENKO, E. F., AND PONTRYAGIN, L. S.. *Derivation of certain asymptotic estimates for solutions of differential equations with a small parameter in*

- the derivatives.* Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya, 23(5), 643-660. 1959.
- [23] MÖNNIGMANN, M. AND MARQUARDT, W.. *Normal vectors on manifolds of critical points for parametric robustness of equilibrium solutions of ODE systems*, J. Nonlinear Sci. 12(2), 85-112. 2002.
- [24] GARCIA E. AND MORARI M.. *Internal Model Control a unifying review and some new results.* Ind. Eng Chem Process Des Dev., 21:308-323, 1982.
- [25] MUÑOZ, D.A. (2007). *Controlabilidad de sistemas dinámicos no lineales acoplados.* (tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
- [26] OCHOA, S., ALVAREZ, H., AND AGUIRRE, J. (2004) *Using Controllability for Chemical Equipment Design as a First Step to Integrated Design*, In X Convención Internacional y Feria Informática 2004-XI Congreso Latinoamericano de Control Automático.
- [27] OGATA, K., AND YANG, Y. (2002). *Modern control engineering.* (Vol. 4). India: Prentice hall.
- [28] SKOGESTAD S. *Controllability analysis of SISO systems*, IN: ADChEM Proceedings, 471-476. 1994.
- [29] SKOGESTAD S. AND MORARI M. *Design of resilient processing plants - the effect of model uncertainty on dynamic resilience*, Chem Eng Sci. 42, 1765-1780. 1987.
- [30] H. SUSSMANN AND V. JURDJEVIC. *Controllability of nonlinear systems*, Journal of Differential Equations, 12, 95-116. 1972.
- [31] ROSENBROCK H.H. *State-space and Multivariable Control.* London: Nelson, 1970.
- [32] YU. V. MAKAROV, Z. Y. DONG, AND D. J. HILL. *A general method for small signal stability analysis.* IEEE Trans. Power Syst., pages 979-985, 1998.
- [33] YU. V. MAKAROV, Z. Y. DONG, AND D. J. HILL. *Computation of bifurcation boundaries for power systems: A new 1-plane method.* IEEE Trans. Circuits Syst., 47(4):536-544, April 2000.
- [34] ZIEGLER J.G. AND NICHOLS N.B.. *Process lags in automatic-control circuits.* Trans ASME. 65, 433-444. 1943.