

**ESTUDIO Y ANÁLISIS DE LA TEORIA WAVELET ENFOCADO AL
TRATAMIENTO DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES**

MIGUEL GONZALO NAVARRETE MEJIA

**ESPECIALIZACIÓN EN TELECOMUNICACIONES
UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
BUCARAMANGA
2008**

**ESTUDIO Y ANÁLISIS DE LA TEORIA WAVELET ENFOCADO AL
TRATAMIENTO DE SEÑALES UNIDIMENSIONALES**

MIGUEL GONZALO NAVARRETE MEJIA

**Monografía para optar al título de
Especialista en Telecomunicaciones**

**ESPECIALIZACIÓN EN TELECOMUNICACIONES
UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
BUCARAMANGA
2008**

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Bogotá, Agosto 31 de 2008

A Dios y a mis padres que siempre me apoyaron en mi camino.

A Raúl Restrepo que siempre estuvo apoyando cuando más se necesitaba y que además fue quien me alentó a cumplir esta meta. A Alex Monclou que siempre estuvo presente para apoyarme en esta tarea. A Jesús Vega por toda su ayuda y consejos. Y a todos quienes participaron en esta etapa de mi proceso de formación.

Muchas gracias a todos

Miguel

TABLA DE CONTENIDO

	Pag.
RESUMEN	1
ABSTRACT	2
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACION	3
OBJETIVOS	4
INTRODUCCION	5
1. ESPACIOS VECTORIALES	6
1.1 El espacio	6
1.2 El producto interno	12
1.3 Subespacios	15
1.4 Bases vectoriales	16
1.5 Bases ortogonales	18
1.6 Bases ortonormales	19
2. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	22
2.1 Limitaciones de la TF	24
2.2 La STFT	27
2.2.1 Ventanas de análisis	28
2.2.2 Cálculo de la STFT	33
2.3 La transformada de Fourier como una base vectorial	40
3. LA TRANSFORMADA WAVELET	44
3.1 Definición y conceptos	44
3.2 Condiciones de invertibilidad	55
3.3 La transformada Wavelet y el espacio vectorial Hilbert	56
3.4 Recuperación de información mediante la función de escala	57
3.5 Discretización de la WT y reconstrucción por convoluciones discretas	58
3.6 FRAMES COMO METODO DE RECONSTRUCCION	60
3.7 REPRESENTACION DE LA WT A TRAVES DE FRAMES	62
3.8 TRANSFORMADA WAVELET DIADICA	64
3.9 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA	66
3.9.1 Aproximaciones multirresolución	66
3.9.2 La función de escala	67
3.9.3 Filtro de espejo conjugado	68
3.9.4 Elección de la base ortonormal indicada	69
3.9.5 Algoritmo de cálculo de la DWT	71
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	76
BIBLIOGRAFIA	77

RESUMEN

Dentro de los métodos de análisis de señales que se aplican en la actualidad, la Transformada Wavelet (WT) es uno de los más recientes. Aunque fue implementada por primera vez a mediados del siglo XX, sus bases como una herramienta matemática completa no fueron desarrolladas hasta hace más de 20 años. Una de sus características más importantes es que esta herramienta fue creada desde la necesidad de las ciencias aplicadas para solucionar problemas en los cuales otras herramientas matemáticas se quedan desafortunadamente cortas. Luego de unos primeros desarrollos y perfeccionamientos en la geología, física nuclear y otras materias, los matemáticos toman esta herramienta y le dan las bases necesarias para que se expandiera a muchas más áreas del conocimiento, entre ellas el procesamiento de señales.

La teoría Wavelet se desarrolla matemáticamente en operaciones sobre espacios vectoriales, principalmente en el espacio de Hilbert, por tanto, se introduce el siguiente documento haciendo énfasis en las características de los espacios vectoriales, bases ortogonales y ortonormales. En una segunda sección se establece una conceptualización de la Transformada de Fourier de manera intuitiva, su relación y definición sobre espacios vectoriales y análisis tiempo frecuencia; así se presenta este tipo de análisis como un método introductorio a la WT, del cual los estudiantes de Electrónica y Telecomunicaciones están relacionados. En la tercera sección se hace ya referencia directa a la WT en su proceso continuo, semidiscreto, por *frames* y por último discreto, en la cual se determina de la forma más intuitiva posible la transición entre cada uno de ellos.

Cabe destacar que tanto la Transformada Wavelet (WT) y la Transformada Wavelet Diádica (DiWT) presentan resultados de análisis con gran cantidad de detalles; sin embargo, la WT y la DiWT presentan un análisis tiempo-escala que entrega información redundante reduciendo la efectividad del procesamiento; hecho tal, que puede ser solucionado mediante la discretización de la WT a través del análisis multiresolución en la denominada Transformada Wavelet Discreta (DWT).

ABSTRACT

Of all signal analysis methods applied nowadays, the Wavelet Transform is one of the newest. Although this method was implemented in the middle of XX century, its mathematical bases weren't developed more than 20 years ago. One of the most important characteristics of this tool is it was made from applied sciences needs for solve problems in which another mathematical tools can't resolve. The firsts developments of this method were made in geology and nuclear physic, after that, mathematicians took this tool and establish the necessary bases to expand it to other areas of knowledge, including signal processing. The Wavelet Theory is mathematically developed over vectorial spaces, mainly in Hilbert space. In that way, this document introduces Wavelet Transform empathizing the characteristics of vectorial spaces, orthonormal and orthogonal bases. The second section defines the Fourier Transform intuitively in vectorial spaces and time-frequency analysis, this method is showed like an introductory process to Wavelet Transform. Third section makes reference to the Wavelet Transform in continuous, semi-discrete, frames and discrete process and the relation between these. The Continuous Wavelet Transform and Diadic Wavelet Transform show information with a huge details quantity; however, these are scale-frequency analysis which give redundant information reducing in that way the performance of processing. This issue can be solved by way of the Wavelet Transform discretization through the multi-resolution analysis called Discete Wavelet Transform.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACION

La Transformada Wavelet es una muy buena herramienta en el procesamiento de señales tanto en una como en dos dimensiones, sin embargo esta transformada contrariamente de su importancia y efectividad en diversos procesos, no se encuentra muy divulgada en el ámbito académico fuera de los estudios de maestría y doctorado o de matemáticas puras. Además, las publicaciones realizadas sobre el tema son de alta complejidad matemática por lo que resultan de difícil comprensión para aquellos que no tienen conocimientos en matemáticas avanzadas. También, debido al ajuste en el manejo de información en otras áreas de la ingeniería, es de vital importancia su conocimiento y aplicación para analizar problemas de ingeniería.

Mediante el estudio y análisis de la teoría Wavelet enfocado al tratamiento de señales unidimensionales se busca examinar las bases de la teoría Wavelet y establecer así una fundamentación intuitiva de esta herramienta, que permita concebir el desarrollo de futuros trabajos en diferentes campos de aplicación dentro de las telecomunicaciones e inclusive en otras áreas similares

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Realizar un estudio de la Teoría Wavelet para fundamentar intuitivamente las bases matemáticas de esta transformada en el procesamiento de señales unidimensionales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar los conceptos matemáticos de las bases teóricas de la transformada Wavelet.
- Analizar la metodología de desarrollo de la Transformada Wavelet Continua
- Estudiar y analizar los métodos de análisis multiresolución.
- Analizar la metodología de desarrollo de la Transformada Wavelet Discreta

INTRODUCCION

La teoría de la transformada Wavelet no es un concepto nuevo ya que se soporta sobre bases matemáticas y teóricas desarrolladas en las últimas décadas. Sin embargo, su aplicación en el tratamiento de señales tanto en una dimensión como en dos dimensiones ha venido creciendo constantemente desde la segunda mitad del siglo veinte y aún más en los último veinticinco años del mismo. Es así como se han desarrollado aplicaciones en diversos campos de la tecnología para la determinación de características de señales estacionarias y no estacionarias, métodos de compresión para sonido y video, modelamiento y aplicación de filtros digitales en señales de una y dos dimensiones, etc.

Mediante el siguiente trabajo del estudio y análisis de la teoría Wavelet se busca mostrar intuitivamente la información que existe de la misma ya que los textos utilizados comúnmente como referencia presentan el tema desde el punto de vista académico con alto contenido matemático que lo hace ininteligible para el estudiante universitario promedio y para el lector con conocimiento mínimos del tratamiento de señales. Por la anterior razón el siguiente documento no se enfoca tanto en demostraciones matemáticas de los planteamientos que se establecen a continuación sino más bien en su explicación intuitiva y gráfica cuando ésta es posible; sin embargo, se debe tener en cuenta que para la compresión de esta herramienta es imposible prescindir de su naturaleza matemática y por tanto se debe tener un mínimo nivel de conocimientos en tratamiento de señales, ecuaciones diferenciales y operaciones matriciales que se presentarán a continuación. Si el lector quiere establecer alguna demostración estrictamente matemática de los planteamientos y fórmulas hechas, puede encontrarlas es los documentos citados como referencia.

1. ESPACIOS VECTORIALES

En el mundo de las matemáticas muchas veces es más fácil poder realizar operaciones de cálculos complejos si estos se pueden interpretar como vectores establecidos en un espacio determinado (que puede ser de 2, 3 o n dimensiones). Esto se debe a la facilidad que presentan los vectores de realizar operaciones de acuerdo a sus coordenadas y otras propiedades analíticas y numéricas de los mismos. Aun así, es difícil tener una concepción de vectores en espacios de más de tres dimensiones aunque se cumplan exactamente las mismas características tanto en los unos como en los otros.

La transformada Wavelet se define también a partir de los espacios vectoriales, de hecho, la concepción y el soporte para poder llegar a la transformada discreta Wavelet y el análisis multiresolución parte de una serie de operaciones justificadas en el espacio vectorial n -dimensional. Por ende, se introduce en el siguiente capítulo las características y operaciones básicas de los espacios vectoriales que pueden servir para entender luego los procedimientos que respaldan la transformada Wavelet.

1.1 El espacio

El espacio en si, permite definirse como una zona en la cual se logra especificar un vector; recuérdese sin embargo, que un vector se puede precisar a partir de una agrupación de números, es así que mediante una pareja (a_1, a_2) se establece un punto en el plano, una terna (a_1, a_2, a_3) localiza un punto en el espacio tridimensional, la cuadrúpula (a_1, a_2, a_3, a_4) se considera un punto en el espacio tetradimensional y así sucesivamente se pueden localizar puntos en espacios n -dimensionales.

Tal como se muestra en la Figura 1, la notación $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ puede interpretarse geoméricamente como un punto, en cuyo caso $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se consideran como coordenadas; o también como vector en donde a_2, a_3, \dots, a_n son las componentes [1].

Figura1. La notación (a_1, a_2) puede interpretarse como a) un vector o b) un punto.



No obstante la sucesión de números n ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$) denominada ***n-ada ordenada*** deben pertenecer a un campo. El conjunto de ***n-adas ordenadas*** se denomina espacio euclidiano n -dimensional, o simplemente espacio n -dimensional [1].

D1. Un conjunto F es un campo si existen los operadores $+$ (denominado *adición*) y \times (o \cdot) (denominado *multiplicación*) que cumplan las siguientes condiciones [2]:

- *Adición cerrada:* Todo número x e y que pertenezca a F , el resultado de $x + y$ existe y es un elemento de F .
- *Conmutatividad en la adición:* Para todo número x e y que pertenezca a F , el resultado de $x + y = y + x$.
- *Asociatividad en la adición:* Para todo número x, y, z que pertenezca a F , el resultado de $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- *Existencia de identidad aditiva:* Para todo número x que pertenezca a F , existe un número en F denotado como 0 , tal que $x + 0 = x$.
- *Existencia de inverso aditivo:* Para todo número x que pertenezca a F , existe un número en F denotado como $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.
- *Multiplicación cerrada:* Todo número x e y que pertenezca a F , el resultado de $x \cdot y$ existe y es un elemento de F .
- *Conmutatividad para la multiplicación:* Para todo número x e y que pertenezca a F , el resultado de $x \cdot y = y \cdot x$.
- *Asociatividad para la multiplicación:* Para todo número x, y, z que pertenezca a F , el resultado de $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- *Existencia de identidad multiplicativa:* Para todo número x que pertenezca a F , existe un número en F denotado como 1 , tal que $1 \neq 0$ y que $x \cdot 1 = x$.
- *Existencia de inverso multiplicativo:* Para todo número x que pertenezca a F , existe un número en F denotado como x^{-1} (o $1/x$), tal que $x \cdot (x^{-1}) = 1$.
- *Ley distributiva:* Para todo número x, y, z que pertenezca a F , el resultado de $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Por tanto, los conjuntos de los números reales R y de los números complejos C se pueden definir como campos ya que las anteriores condiciones se cumplen. Se denota R^n a un espacio n -dimensional sobre el campo de los números reales y a C^n al espacio n -dimensional sobre el campo de los números complejos

Generalizando, un espacio vectorial (que se denominará V) sobre un campo F es una sucesión de elementos (vectores) para los cuales se pueden definir claramente dos operaciones: adición de vectores y multiplicación escalar vectorial, las cuales satisfacen las siguientes propiedades naturales [2].

D2. Si F es un campo y por tanto cumple con las condiciones de la Definición 1, Un espacio vectorial V sobre F es un conjunto con operaciones de adición vectorial $+$ y multiplicación escalar \cdot que satisface las siguientes condiciones:

- **Adición cerrada:** Para todo u y v que pertenece a V , el resultado de la operación $u + v$ existe y es un elemento de V .

$$\forall u, v \in V \Rightarrow \exists(u + v) \in V$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^3$ (espacio tridimensional)

$u = (u_1, u_2, u_3) = (3, -2, 5)$

$v = (v_1, v_2, v_3) = (4, 0, 1)$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$u + v = (3, -2, 5) + (4, 0, 1)$$

$$u + v = (7, -2, 6)$$

En donde $(7, -2, 6)$ se encuentra dentro del conjunto \mathbf{R}^3

- **Conmutatividad en la adición:** Para todo u y v que pertenece a V , se puede afirmar que $u + v = v + u$.

$$\forall u, v \in V \Rightarrow (u + v) = (v + u)$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^3$ (espacio tridimensional)

$u = (u_1, u_2, u_3) = (3, -2, 5)$

$v = (v_1, v_2, v_3) = (4, 0, 1)$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) = v + u$$

$$u + v = (3, -2, 5) + (4, 0, 1) = (4, 0, 1) + (3, -2, 5) = v + u$$

$$u + v = (7, -2, 6) = v + u$$

- **Asociatividad en la adición:** Para todo u, v, w que pertenezca a V , el resultado de $u + (v + w) = (u + v) + w$.

$$\forall u, v, w \in V \Rightarrow u + (v + w) = (v + u) + w$$

Ejemplo:

Si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$$

$$v = (v_1, v_2) = (4, 0)$$

$$w = (w_1, w_2) = (-5, 1)$$

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (u + v) + w \\ (3, -2) + [(4, 0) + (-5, 1)] &= [(3, -2) + (4, 0)] + (-5, 1) \\ (3, -2) + (-1, 1) &= (7, -2) + (-5, 1) \\ (2, -1) &= (2, -1) \end{aligned}$$

- *Existencia de identidad aditiva:* Existe un elemento en V denominado 0 , tal que para cualquier u que pertenezca a V se cumple $u + 0 = u$.

$$\exists 0 \in V : u + 0 = u, u \in V$$

Ejemplo:

Si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$$

$$0 = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} u + 0 &= u \\ (3, -2) + (0, 0) &= (3, -2) \end{aligned}$$

- *Existencia de inverso aditivo:* Para cada u que pertenece a V , existe un elemento en V denotado como $-u$, tal que $u + (-u) = 0$.

$$\forall u \in V \Rightarrow \exists (-u) \in V : u + (-u) = 0$$

Ejemplo:

Si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$$

$$-u = (-u_1, -u_2) = (-3, 2)$$

$$\begin{aligned} u + (-u) &= 0 \\ (3, -2) + (-3, 2) &= (0, 0) \end{aligned}$$

- *Multiplicación escalar cerrada:* Para todo escalar α que pertenezca a \mathbf{F} y elemento u que pertenezca a V , existe resultado de la operación $\alpha \cdot u$ es un elemento de V .

$$\forall \alpha \in F \wedge \forall u \in V \Rightarrow \exists (\alpha \cdot u) \in V$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$

$\alpha = 4$

$$\alpha \cdot u = 4 \times (3, -2) = (12, -8)$$

En donde (12, -8) se encuentra dentro del conjunto \mathbf{R}^2

- *Asociatividad para la multiplicación escalar:* Para los escalares α y β que pertenezcan a F y cualquier elemento u que pertenezca a V , se puede afirmar que $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.

$$\forall \alpha, \beta \in F \wedge \forall u \in V \Rightarrow \alpha(\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$

$\alpha = 4, \beta = 9$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot u) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot u \\ 4 \times [9 \times (3, -2)] &= [4 \times 9] \times (3, -2) \\ 4 \times (27, -18) &= 36 \times (3, -2) \\ (108, -72) &= (108, -72) \end{aligned}$$

- *Existencia de identidad multiplicativa escalar:* Si 1 es la identidad multiplicativa de F , entonces se cumple que $1 \times u = u$ en donde u pertenece a V

$$\text{Si } 1 \cdot x = x \text{ en donde } x, 1 \in F \Rightarrow 1 \cdot u = u, u \in V$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$

$$\begin{aligned} 1 \cdot u &= u \\ 1 \times (3, -2) &= (3, -2) \end{aligned}$$

- *Primera propiedad distributiva:* Para todo número α que pertenezca a F , y u y v que pertenezcan a V , se puede afirmar que:

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v).$$

$$\forall \alpha \in F \wedge \forall u, v \in V \Rightarrow \alpha(u+v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$

$v = (v_1, v_2) = (4, 0)$

$\alpha = 4$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (u+v) &= (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v) \\ 4 \times [(3, -2) + (4, 0)] &= [4 \times (3, -2)] + [4 \times (4, 0)] \\ 4 \times (7, -2) &= (12, -8) + (16, 0) \\ (28, -8) &= (28, -8) \end{aligned}$$

- *Segunda propiedad distributiva:* Para todo los números α y β que pertenezcan a F , y u que pertenezca a V , se puede afirmar que:
 $(\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$.

$$\forall \alpha, \beta \in F \wedge \forall u \in V \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$$

Ejemplo:

Si $F = \mathbf{R}$ (Números reales)

$V = \mathbf{R}^2$ (espacio bidimensional)

$u = (u_1, u_2) = (3, -2)$

$\alpha = 4, \beta = 9$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot u &= (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u) \\ [4 + 9] \times (3, -2) &= [4 \times (3, -2)] + [9 \times (3, -2)] \\ 13 \times (3, -2) &= (12, -8) + (27, -18) \\ (39, -26) &= (39, -26) \end{aligned}$$

Aunque los enunciados anteriores se realizaron en ejemplos en los espacios \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 el lector podrá comprobar que también son aplicables en otros espacios como \mathbf{R}^n o \mathbf{C}^n con cualquier n que pertenezca a los naturales \mathbf{N} ($n \in \mathbf{N}$).

En este punto hay que establecer que cualquier tipo de objeto puede ser un vector aunque las operaciones de adición y multiplicación no sean similares a las que conocemos en \mathbf{R}^n , con tal que cumplan las condiciones establecidas en la **D1**; entonces es posible que estos objetos puedan establecer espacios vectoriales si se cumplen las propiedades de la **D2**. Es así que se pueden nombrar distintos ejemplos de espacios vectoriales como por ejemplo [1]:

- ~ El conjunto V de todas las matrices $m \times n$ con elementos reales. Estableciendo la adición vectorial como la suma de matrices y la multiplicación escalar vectorial como la multiplicación escalar matricial.

- ~ El conjunto V de funciones sobre toda la recta real $(-\infty, \infty)$. Si $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ y k es cualquier número, entonces se establece

La adición vectorial $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ como: $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x)$
 La multiplicación escalar como: $(k\mathbf{f})(x) = kf(x)$

Si las funciones están definidas en intervalos (a, b) o $[a, b]$ los espacios vectoriales se expresan como $F(a, b)$ y $F[a, b]$ respectivamente.

- ~ El conjunto de funciones $f(t)$ que son absolutamente integrables en el intervalo $(-\infty, \infty)$ de tal manera que se cumpla la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Se denota entonces que $f(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R})$

- ~ El conjunto de funciones $f(t)$ que tienen energía finita en el intervalo $(-\infty, \infty)$ de tal manera que se cumpla la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Se denota entonces que $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$

- ~ El conjunto de funciones $f(t)$ que en el intervalo $(-\infty, \infty)$ cumplan la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty$$

Se denota entonces que $f(t) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R})$

1.2 El producto interno

Algunas de las propiedades de los espacios vectoriales están fundamentadas a partir del producto interno sobre el espacio vectorial. El producto interno se representa como $\langle a, b \rangle$ y se define como se muestra a continuación.

D3. Si se tienen los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3 \dots u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3 \dots v_n)$, tal que \mathbf{u} y $\mathbf{v} \in V$, entonces el producto interno $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ se define como:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + u_3 \bar{v}_3 + \dots + u_n \bar{v}_n \quad (1.1)$$

En donde \bar{v}_n es el complejo conjugado de v_n , pero si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen únicamente componentes reales, entonces podemos representar el producto interior como:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n \quad (1.2)$$

Si los elementos de V son las funciones $\mathbf{f} = f(x)$ y $\mathbf{g} = g(x)$ definidas entre $[a, b]$ el producto interno se define como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g^*(x) dx \quad (1.3)$$

En donde $g^*(x)$ es el conjugado de $g(x)$. Esta representación tiene sentido si recordamos que la integral es la suma de los valores de la función que toma x cuando $\Delta x \rightarrow 0$; Si representamos esta integral como una sumatoria cuando $\Delta x \rightarrow 1$ entonces

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x=a}^b f[x] \bar{g}[x] \quad (1.4)$$

$$\langle f, g \rangle = f[a] \bar{g}[a] + f[a+1] \bar{g}[a+1] + f[a+2] \bar{g}[a+2] + \dots + f[b] \bar{g}[b] \quad (1.5)$$

Donde (1.5) es correspondiente con (1.1). Así mismo, si las funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} únicamente poseen componentes reales se cumple que:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (1.6)$$

Algunas propiedades de los productos interiores son:

Si V es un espacio vectorial y $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y donde k es un escalar, se cumple que:

i) $\langle 0, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, 0 \rangle = 0$

ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$

iii) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

iv) $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

v) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \bar{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

vi) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = 0$

A partir del producto interno pueden establecerse el concepto de norma y distancia.

D4. Si V es un espacio vectorial, entonces la norma (o longitud) de un vector $\mathbf{u} \in V$ se representa por el símbolo $\|\mathbf{u}\|$ y se define como:

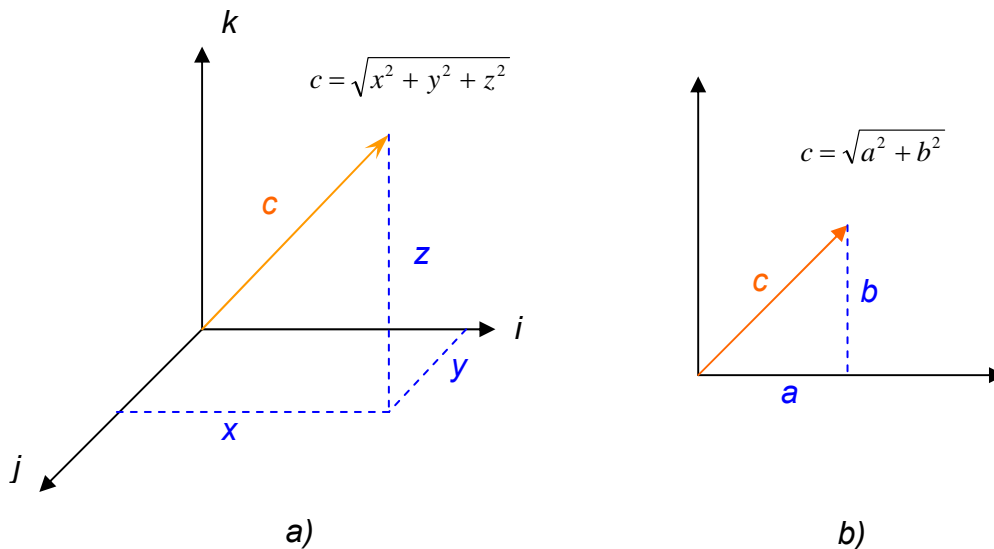
$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} \quad (1.7)$$

Si se observa detenidamente la anterior ecuación es posible relacionarla con la concepción de magnitud en un espacio bidimensional \mathbb{R}^2 o en uno tridimensional \mathbb{R}^3 . Si $u \in \mathbb{R}^3$ y equivale a $u = (x, y, z)$, entonces de acuerdo a la figura 2 puede observarse que la magnitud del vector u es:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.8)$$

Y recordando que $\langle u, u \rangle = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$ por tanto se llega a la ecuación 1.7

Figura 2. Cálculo de magnitud de un vector en el espacio a) tridimensional, b) bidimensional



La distancia entre dos puntos o vectores u y v se denota como $d(u, v)$ y se define como:

$$d(u, v) = \|u - v\| \quad (1.9)$$

Esta distancia se interpreta entonces como la magnitud del vector que va desde u hasta v , esto logra visualizarse en la figura 3. Por tanto, considerando los vectores u , v y d puede afirmarse que:

$$\vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{d(u, v)}$$

Despejando $d(u, v)$

$$\overrightarrow{d(u, v)} = \vec{v} - \vec{u}$$

Como es necesario encontrar la longitud o magnitud de $d(u, v)$ entonces se calcula su norma:

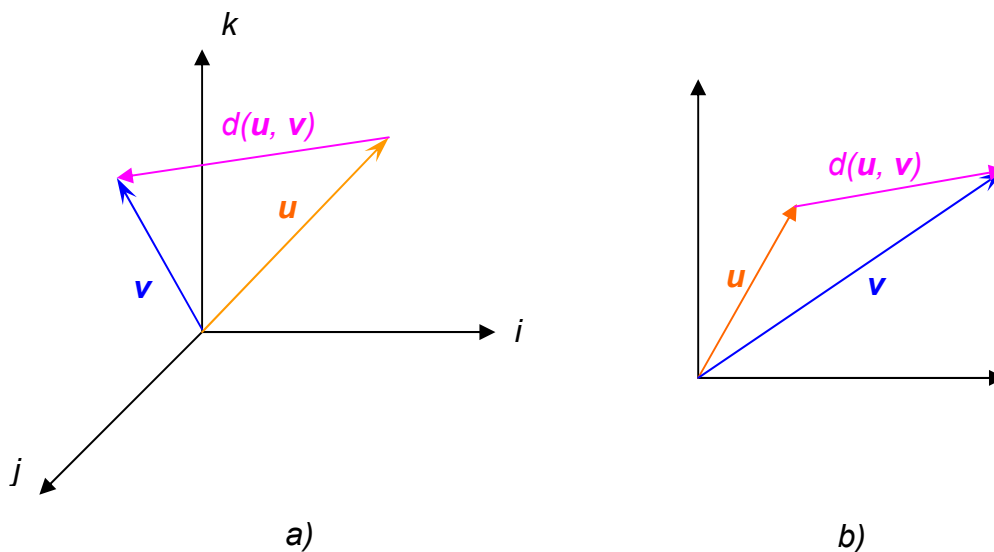
$$d(u, v) = \|v - u\|$$

Pero como

$$\|v - u\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \dots + (v_n - u_n)^2} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Puede concluirse que $d(u, v) = \|u - v\|$

Figura 3. Cálculo de distancia entre dos vectores en el espacio a) tridimensional, b) bidimensional



1.3 Subespacios

Un subespacio W es un subconjunto de un espacio vectorial V y por tanto cumple las mismas condiciones que V en cuanto a la definición de adición vectorial y multiplicación escalar. Además, debe cumplir con el siguiente teorema [1]:

T1. Si W es un conjunto formado por elementos de V , entonces W es un subespacio si cumple estrictamente con las siguientes condiciones:

- Si u y v vectores en W , entonces $u + v$ se encuentra en W , es decir:

$$\forall u, v \in W \Rightarrow (u + v) \in W$$

- Si α es un escalar y u es cualquier vector en W , entonces αu está en W , es decir:

$$\forall \alpha \in F \wedge \forall u \in W \Rightarrow \alpha \cdot u \in W$$

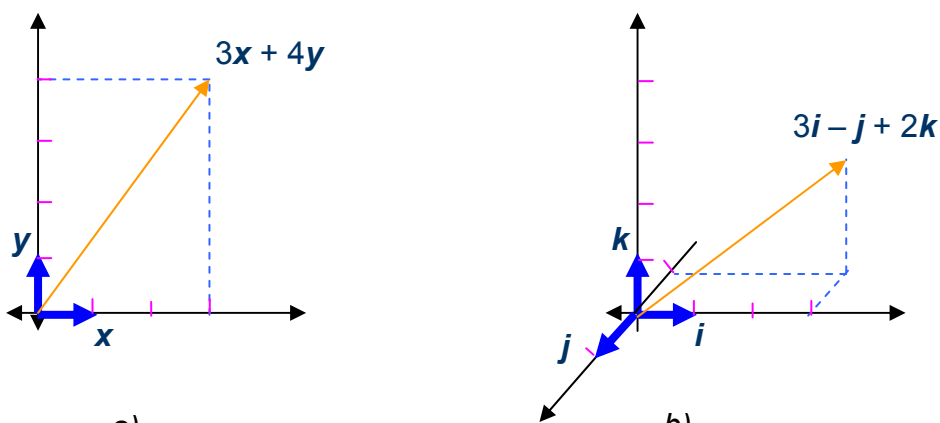
Es así como elementos de un espacio vectorial que compartan características en común que aseguren las condiciones del anterior teorema pueden formar un subespacio, facilitando la solución de algunas operaciones.

1.4 Bases vectoriales

Recordando que en sistemas de espacios bidimensionales y tridimensionales es posible expresar los vectores a partir de magnitudes de sus componentes, dichas componentes corresponden a los ejes de coordenadas que conforman el plano en \mathbb{R}^2 (x, y) o el cubo en \mathbb{R}^3 , (i, j, k). Es así como por ejemplo a un vector en $\mathbf{q} = (3, 4)$ podemos representarlo fácilmente como $\mathbf{q} = 3\mathbf{x} + 4\mathbf{y}$, o al vector $\mathbf{r} = (6, -1, 2)$ como $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Es necesario recordar también que las coordenadas x, y, i, j, k es posible interpretarlas como vectores unitarios (magnitud o norma igual a uno) a lo largo del eje que simbolizan; por tanto, las formas de representación anteriormente enunciadas para el espacio en \mathbb{R}^2 [$a_0\mathbf{x} + a_1\mathbf{y}$] o para el espacio en \mathbb{R}^3 [$b_0\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + b_2\mathbf{k}$], pueden entenderse como una combinación lineal de un vector a partir de otros vectores escogidos como patrón.

Figura 4. Representación vectorial a partir de combinaciones lineales en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3



Si este concepto se extiende a espacios vectoriales de mayor dimensión, entonces cualquier vector \mathbf{w} que pertenezca a un espacio V puede representarse a partir de la forma (1.10) denominada **combinación lineal**, con tal de que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ pertenezcan también a V y en donde α_n son escalares [1].

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad (1.10)$$

Si el conjunto de vectores $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$ consigue utilizarse para representar cualquier vector en el espacio V , entonces se puede decir que a partir de estos vectores podemos representar el espacio vectorial, es decir, con la combinación de S se puede generar el espacio V ; es así como con $S_{R^2} = \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \}$ pueden representarse todos los vectores en el espacio de R^2 , y con la combinación $S_{R^3} = \{ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \}$ todos los vectores en el espacio de R^3 .

Por definición, la base se entiende como una generalización del sistema de coordenadas de los espacios bidimensionales y tridimensionales, es decir, que a partir de la base se conoce la posición del vector dentro del espacio vectorial, es la guía y el eje de referencia. Sin embargo para que el conjunto $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$ pueda ser tomado como una base, es necesario que se cumplan dos condiciones:

- i)* Que los vectores del conjunto S generen el espacio vectorial, así como lo hacen $S_{R^2} = \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \}$ para R^2 y $S_{R^3} = \{ \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \}$ para R^3 .
- ii)* Que los vectores del conjunto S sean todos linealmente independientes entre sí. Es decir, que se cumpla la siguiente condición:

Para un conjunto de vectores $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$, la ecuación característica:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n = 0 \quad (1.11)$$

Únicamente tiene una solución, y es cuando $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$, en donde todos los k_n son escalares, entonces el conjunto S es linealmente independiente.

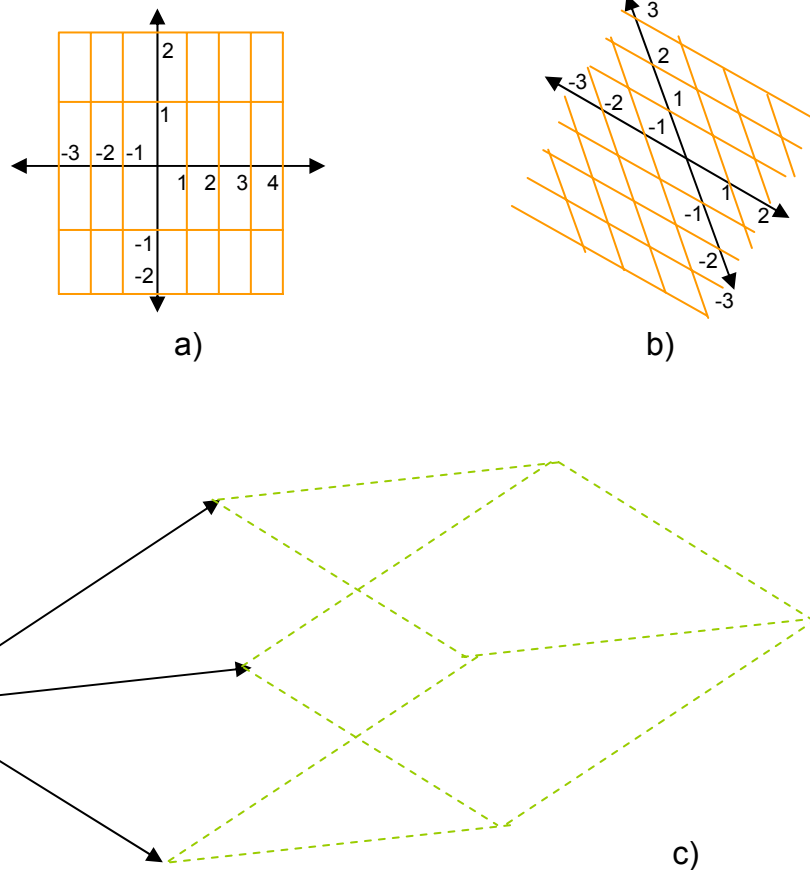
Esto quiere decir entonces que ningún \mathbf{v}_n puede expresarse a partir de la combinación lineal de los demás \mathbf{v}_n del mismo conjunto S , o en otras palabras, no es múltiplo escalar de otro vector de S .

De acuerdo a lo anterior se concluye que una base vectorial (o coordenadas) no depende de la magnitud ni de la forma de los vectores con tal que se cumplan los dos anteriores enunciados. Así es que podrían existir diversas bases vectoriales como se ilustra en la figura 5 en donde se exponen algunos ejemplos de bases para R^2 y R^3 .

En la figura 5.a se observa como la magnitud de los ejes no necesariamente tiene que ser igual en cada una de las coordenadas, en la figura 5.b la posibilidad de coordenadas las cuales no son perpendiculares las unas con las

otras como comúnmente se conocen. En la figura 5.d puede apreciarse también la posibilidad de coordenadas oblicuas para un espacio tridimensional.

Figura 5. Ejemplos de bases vectoriales en los espacios para \mathbb{R}^2 a) y b) y para \mathbb{R}^3 c).



1.5 Bases ortogonales

En el algebra lineal el concepto de ortogonalidad está estrechamente ligado al concepto de ángulo entre dos vectores y al concepto de perpendicularidad. Así es que normalmente se dice que dos vectores son ortogonales cuando el ángulo entre ellos equivale a 90° , por tanto, estos dos vectores son perpendiculares. Esto es fácil de visualizar en un espacio bidimensional y en uno tridimensional, pero ¿Cómo se podría entender la ortogonalidad en espacios n-dimensionales y en aquellos diferentes de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ?

Teniendo en cuenta que el ángulo entre dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ se define a partir de su producto interno y sus longitudes mediante la siguiente ecuación:

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (1.12)$$

Entonces puede deducirse fácilmente que es posible expresar el producto interno a partir del ángulo entre los vectores.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{Cos}(\theta) \quad (1.13)$$

Si se tiene claro que para vectores ortogonales el ángulo entre ellos es igual a 90° (o $\pi / 2$) entonces el resultado del $\text{Cos}(\theta) = 0$, por tanto el producto interno entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es igual a cero. De acuerdo a lo anterior entonces se afirma que para dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ son ortogonales si se cumple:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad (1.14)$$

D5. Si se tiene un conjunto de vectores $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$ que forman una base, entonces se dice que dicha base es ortogonal si todos los vectores de S son ortogonales entre si.

Por tanto, las coordenadas cartesianas que comúnmente se usan en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 son ortogonales a diferencia de las coordenadas que se muestran en las figuras 5.b y 5.c

1.6 Bases ortonormales

Tal como se había dicho anteriormente un conjunto de vectores $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$ forma una base vectorial si se cumple la condición de que entre ellos exista independencia lineal, y que a partir de los mismos se pueda representar el espacio vectorial. Sin embargo, no existe una restricción en cuanto a la magnitud o norma de cada uno de estos vectores, y por tanto este valor puede ser cualquiera.

D6. Si el conjunto de vectores $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$ forma una base vectorial, se dice que esta es ortonormal si esta base es ortogonal y además, cada uno de los \mathbf{v}_n tiene norma igual a 1.

$$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = \dots = \|\mathbf{v}_n\| = 1 \quad (1.15)$$

Es así que las coordenadas cartesianas además de ser ortogonales también son ortonormales ya que los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} tienen magnitud o norma iguales a la unidad.

Una importancia de esta característica la facilidad en que puede representarse cualquier vector localizado en la base ortonormal.

Si existe un vector \mathbf{u} en un espacio vectorial V con base ortonormal $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \}$, tal que pueda escribirse como [1]:

$$\mathbf{u} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$$

En donde todos los k_j corresponden a escalares. Entonces, al realizar el producto interno entre \mathbf{u} y cada vector de S se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle &= \langle (k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3 + \dots + k_n \mathbf{v}_n), \mathbf{v}_j \rangle \\ &= k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \rangle + k_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_j \rangle + k_3 \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_j \rangle + \dots + k_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que como S es un conjunto de vectores ortonormales (por tanto también son ortogonales) se tienen dos condiciones:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} \|\mathbf{v}_j\|^2 = 1 & \text{si } j = i, \text{ por ortonormalidad} \\ 0 & \text{si } j \neq i, \text{ por ortogonalidad} \end{cases}$$

Por tanto $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle$ puede simplificarse a la expresión $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = k_j$ que equivaldría al conjunto de coeficientes de \mathbf{u} , y por tanto puede escribirse:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle \mathbf{v}_3 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

Expresión que puede limitarse a la sumatoria de la ecuación 1.16

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j \tag{1.16}$$

De lo anterior se deduce que el conjunto de escalares $\langle u, v_j \rangle$ son las coordenadas de u respecto a la base $S = \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$, y esto se denota como $(u)_S$

$$(u)_S = (\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \langle u, v_3 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle) \quad (1.17)$$

Si por el contrario la norma de los vectores v_n fuese diferente de la unidad, entonces al realizar la expresión $u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \dots + k_n v_n$, las magnitudes de v_n modifican el vector u .

En un contexto tridimensional, lo anterior puede entenderse como si los vectores i, j y k tuvieran magnitud diferente de uno; así para representar un vector cualquiera, éste vector se modificaría.

Para ejemplificar lo anterior se toma como vector m con coeficientes (4, 2, 7); se quiere representar m respecto a la base $S = \{i, j, k\}$; sin embargo, si se suponen las normas de $\|i\| = 3$, $\|j\| = 0.5$ y $\|k\| = 1.2$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} m &= 4 \cdot (3 i) + 2 \cdot (0.5 j) + 4 \cdot (1.2 k) \\ &= 12 i + j + 4.8 k \end{aligned}$$

En el caso en que la base no sea ortonormal, la norma de los vectores base debe normalizarse de tal forma que sus magnitudes no influyan en los coeficientes para la representación de cualquier vector. De tal manera que si existe un vector u en un espacio vectorial V con base $S = \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \}$ no ortonormal; Entonces u puede escribirse como:

$$u = k_1 \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + k_2 \frac{v_2}{\|v_2\|^2} + k_3 \frac{v_3}{\|v_3\|^2} + \dots + k_n \frac{v_n}{\|v_n\|^2}$$

Expresión que puede resumirse a la igualdad 1.18:

$$u = \sum_{j=1}^n \frac{\langle u, v_j \rangle v_j}{\|v_j\|^2} \quad (1.18)$$

2. CONCEPTUALIZACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier (TF) es de las herramientas más utilizadas en el procesamiento de señales tanto para las comunicaciones como para otras áreas de la ingeniería y de las ciencias. Sin embargo, esta operación matemática no permite visualizar o analizar algunas características importantes que pueden ser de utilidad de la señal a la cual se le aplica.

El resultado de la TF se entiende como la distribución de energía de la señal respecto a su contenido de frecuencia, es decir, esta herramienta proporciona un método por el cual se hallan las diferentes componentes sinusoidales de una señal cualquiera. Esto es importante por ejemplo en la determinación del ancho de banda en cualquier señal digital o análoga; o simplemente en cualquier aplicación en la que se necesitan conocer estas componentes de frecuencia sin importar el momento en que ocurran o la duración de los eventos que las originan.

Si una señal $f(t)$ es de energía finita, es decir $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y por tanto su magnitud se hace cero cuando t tiende a $(\pm\infty)$. La TF de $f(t)$, se define entonces como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Si esta señal $f(t)$ es infinitamente continua, pertenece al espacio de funciones absolutamente integrables en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es decir, $f(t) \in \mathbf{L}^1(\mathbf{R})$. Entonces a TF de $f(t)$ tiende al resultado de la serie compleja de Fourier.

La TF es invertible mediante la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

Recordando que de acuerdo a la igualdad de Euler se tiene

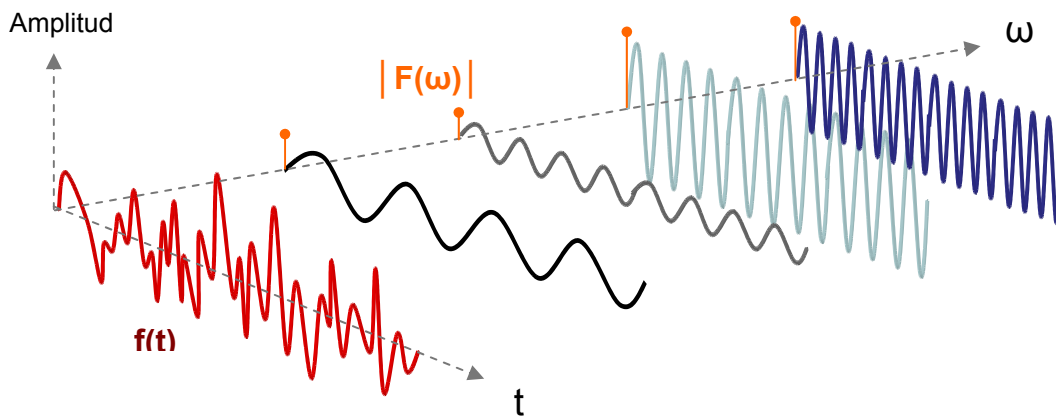
$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\text{sen}(\omega)$$
$$e^{-j\omega} = \cos(\omega) - j\text{sen}(\omega)$$

De acuerdo a lo anterior puede entenderse la TF como sumatoria infinitesimal de las componentes exponenciales complejas periódicas que forman a $f(t)$. Así,

observando la ecuación 2.1, si la señal $f(t)$ tiene un alto contenido de una frecuencia ω_n , entonces el producto de la señal con el término sinusoidal que corresponde a dicha frecuencia es relativamente alto; sin embargo, si la señal no tiene una componente de frecuencia ω_n , entonces el resultado del producto tiende a cero [3]. O en otras palabras, la TF dice cuánto aporte hay de la frecuencia ω_n en la señal $f(t)$.

Otra manera de entender el efecto de la TF se observa en la figura 6, en donde una señal $f(t)$ (definida en el tiempo), puede expresarse como un conjunto de señales sinusoidales resultado de la componente exponencial compleja de Ec. 2.1 (que en la figura se visualiza la parte real únicamente), y de las cuales se expresan sus magnitudes (definidas en el eje de frecuencias ω).

Figura 6. Relación tiempo-frecuencia de una señal continua.



Existen también otras definiciones alternativas para la TF y aunque el análisis puede realizarse aplicando cualquier par de ecuaciones, hay que tener en cuenta cual es el que se utiliza para que los resultados sean coherentes. Estos pares de ecuaciones son los siguientes:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Las definiciones anteriores caben a señales continuas, sin embargo la expresión 2.1 y sus alternativas pueden generalizarse a señales discretas mediante la transformada discreta de Fourier (DFT por sus siglas en inglés). De

tal manera que si tiene una señal discreta $f[n]$ con una cantidad de muestras N entonces se puede definir la DFT de dicha señal como:

$$F[\omega_k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\omega_k n} \quad (2.3)$$

Donde ω_k representa la k -ésima muestra en frecuencia:

$$\omega_k = k\Omega$$

En la cual: $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT_m}, \text{ frecuencia radián del intervalo de muestreo.}$$

$$T_m = \frac{1}{f_m}, \text{ periodo de muestreo.}$$

La DFT es invertible mediante la expresión:

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[\omega_k] e^{j\omega_k n} \quad (2.4)$$

No obstante, la condición $e^{j\omega_k n}$ presenta una complejidad computacional debido a que por los factores k y n , puede representarse dicha condición como una matriz $k \times n$, en donde por lo general $k = n$ para realizar una buena reconstrucción de la señal original. Por tanto, sería necesario realizar n^2 operaciones aritméticas produciéndose un cálculo ineficiente a medida que el número de muestras de la señal se hace mayor.

Para solucionar el anterior problema, se aplica la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) que reduce el cálculo de la matriz factorizándola en un producto de pocas matrices dispersas, tal que la complejidad computacional se reduce al orden de $n \cdot \log(n)$ operaciones matemáticas.

2.1 Limitaciones de la TF

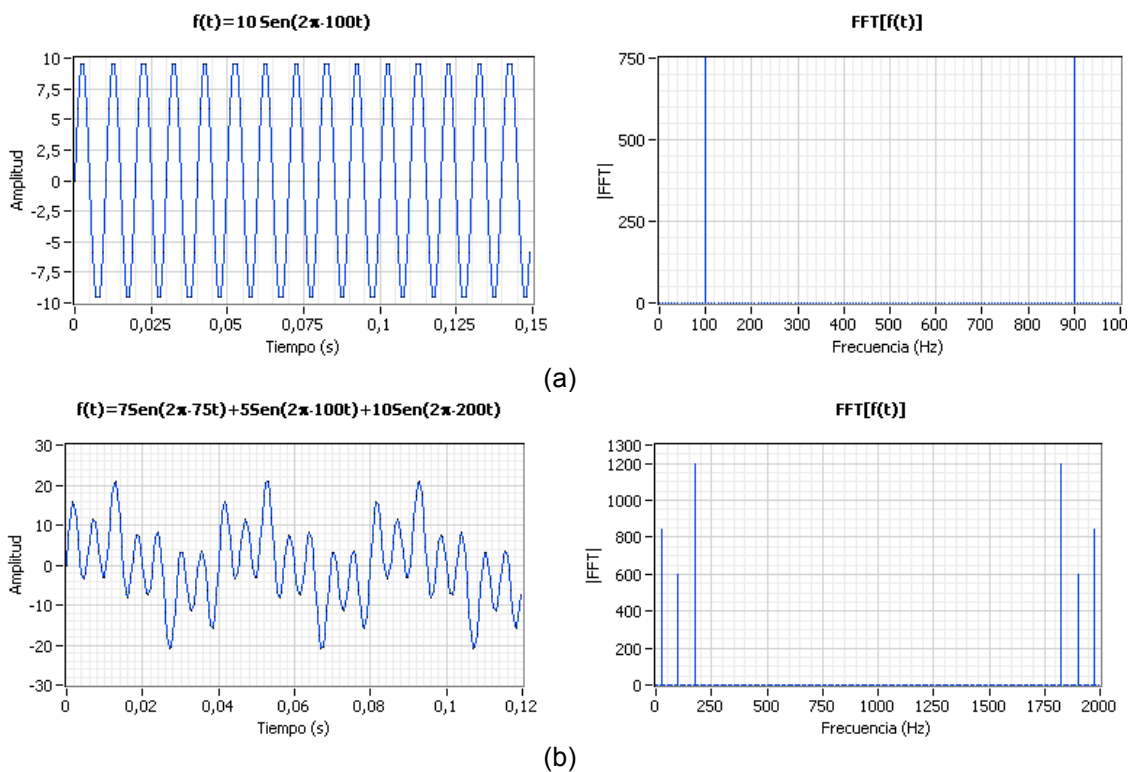
Como se ha dicho anteriormente, la TF encuentra las componentes en frecuencia de las señales, pero esto bastaría si la señal fuera estacionaria en todo el intervalo de tiempo en la cuál se presenta; sin embargo, en señales reales no se cumple esta condición ya que pueden existir variaciones de frecuencia en determinados instantes debidos a distintos factores ajenos o no a la generación de la señal. Por nombrar un ejemplo, es conocido que las

particularidades de los dispositivos de los sistemas de transmisión y de similar manera las condiciones ambientales, el terreno, etc. producen variaciones e insertan ruido en una señal que se transmite limitando así la calidad de la información que se recibe en el destino final.

Por ello, a pesar de su amplia difusión y sus aplicaciones, la TF posee algunas limitantes que impiden encontrar ciertas características de las señales que pueden ser primordiales según el tipo de análisis.

Así, para una señal sinusoidal estacionaria de 100Hz es posible aplicarle la TF y sus características quedan completamente definidas con el resultado que se obtiene (figura 7a). Lo mismo sucede con cualquier otra señal que mantenga todas sus componentes de frecuencia durante todo el tiempo, esto puede observarse en la figura 7.b que presenta una señal compuesta por componentes sinusoidales 25, 100 y 210Hz.

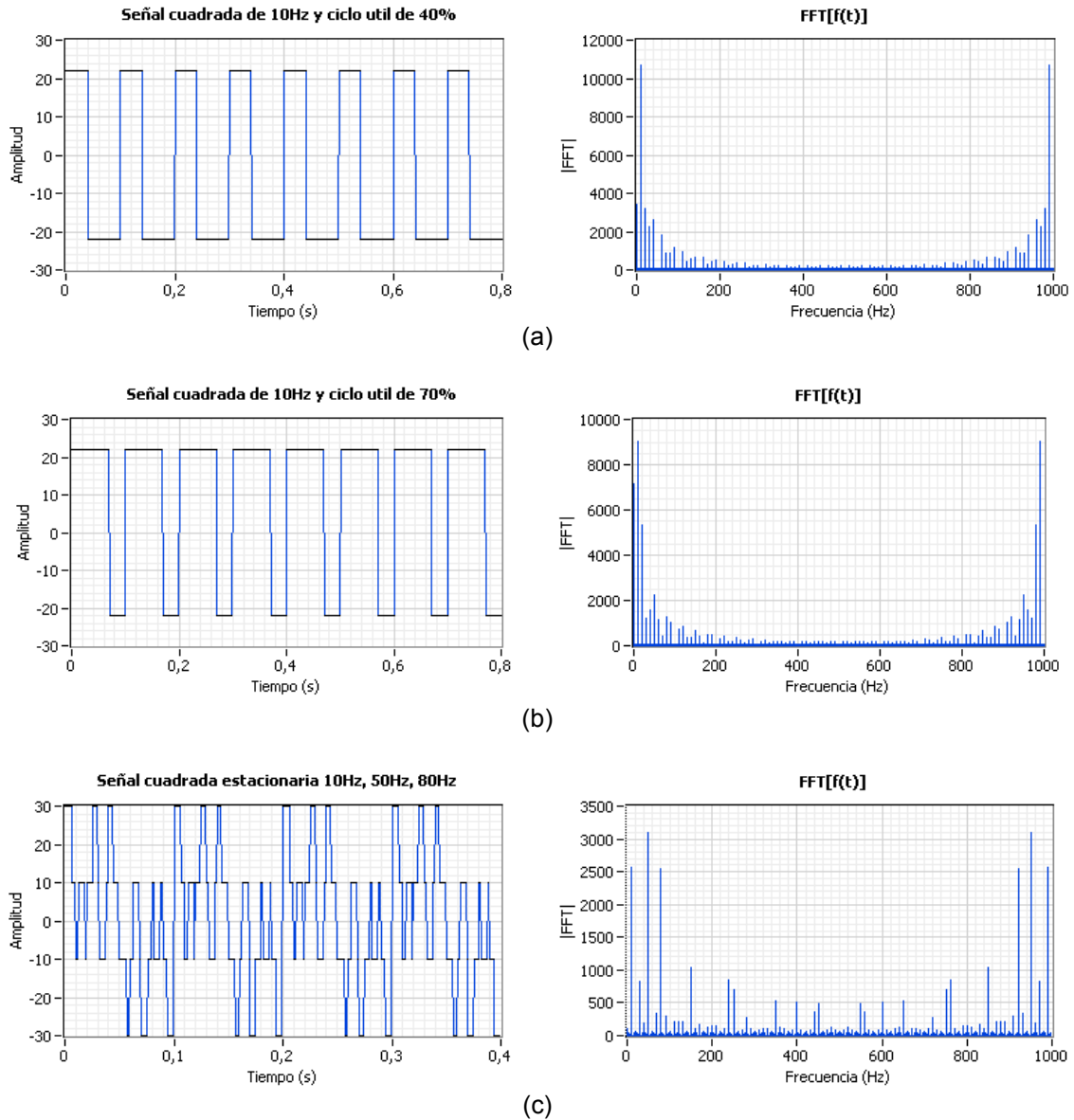
Figura 7. TF de distintas señales estacionarias



Sin embargo, para señales no sinusoidales con periodicidad similar a las anteriores mostradas, no es posible encontrar detalles que caracterizan la señal; este suceso puede visualizarse en la figura 8 en la cual dos señales rectangulares que aunque tienen la misma frecuencia base, poseen diferente porcentaje de ciclo útil, en la TF no es posible diferenciar con facilidad el espectro de frecuencia de la una con el espectro de la otra. Además, se presenta una señal estacionaria (figura 8.c) compuesta por la suma de tres

señales cuadradas de frecuencias 10Hz, 50Hz y 80Hz, de la cuál su espectro en frecuencia distingue estas componentes principales, pero también agrega una cantidad significativa de componentes de diversas frecuencias; éste fenómeno se debe a la discontinuidad que representa el cambio de amplitud en este tipo de señales.

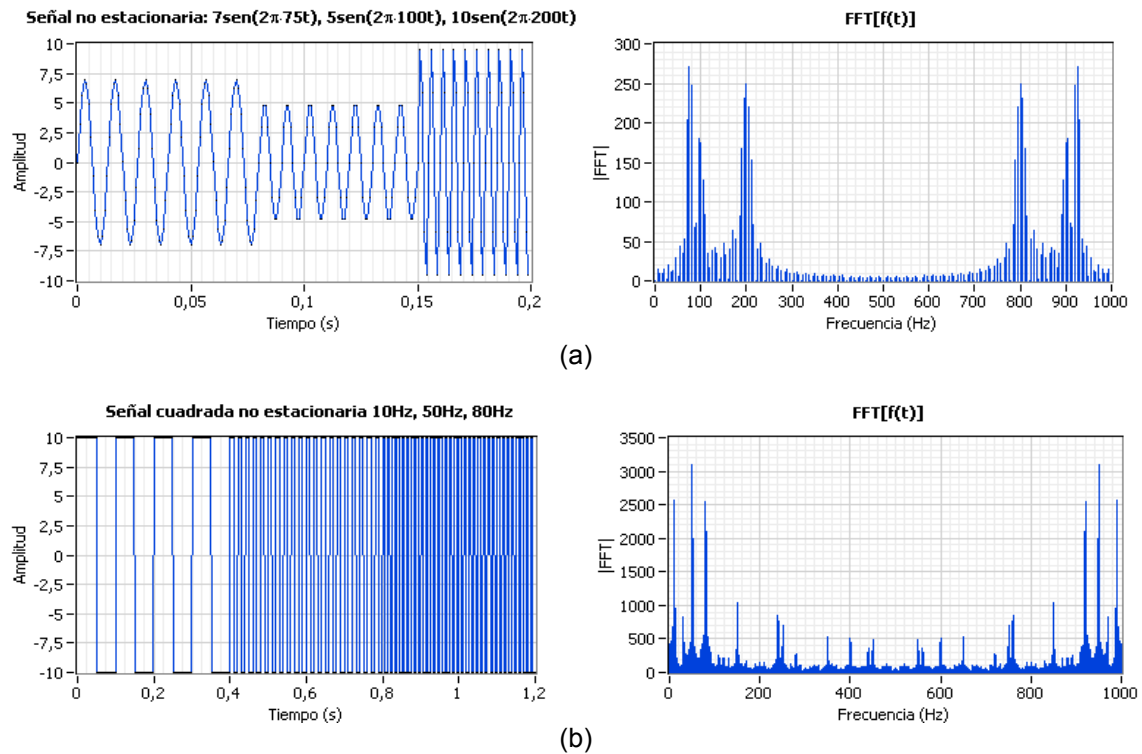
Figura 8. TF de distintas señales rectangulares estacionarias



Otra dificultad que presenta la TF es en la caracterización de señales no estacionarias. La figura 8.a presenta una señal en la cual durante los primeros 80mS existe una señal sinusoidal de 75 Hz, luego durante los 70 mS siguientes se mantiene en 100Hz y en los últimos 50mS permanece en 200 Hz; la TF muestra la presencia de tales componentes, y aunque agrega otras más debido a los cambios de frecuencia, puede decirse que no es muy diferente a la información que aporta la TF de la señal estacionaria de la figura 8.b

La posibilidad de diferenciar las formas no sinusoidales en las señales está fuera de la capacidad de la TF; sin embargo, el inconveniente de la detección de eventos de frecuencia en el tiempo, puede solucionarse mediante herramientas que implementen y detecten éste parámetro temporal como lo hace la transformada corta de Fourier (STFT por sus siglas en inglés)

Figura 9. TF de distintas señales no estacionarias



2.2 La STFT

La transformada corta de Fourier, como su nombre lo indica, es la ejecución de la TF en tramos cortos de la señal que se quiere analizar. En general, la STFT de una función $f(t)$ se define como:

$$SF(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)W(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \quad (2.5)$$

En donde $SF(\tau, \omega)$ son los coeficientes de la STFT, τ es un parámetro que representa una translación de una función ventana $W(t)$. Esta ventana es una función con la siguiente característica:

- Es una señal de tiempo compacto. Es decir, una señal que permanece únicamente durante un intervalo definido, fuera de este intervalo su valor es nulo.

Debido a que la STFT está en función de dos parámetros (tiempo, frecuencia), la expresión con la que se recupera la función original presenta una integral doble:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} SF(\tau, \omega) W(t - \tau) e^{j\omega t} d\omega dt \quad (2.6)$$

Que en general cumple las mismas características de la ecuación 2.2.

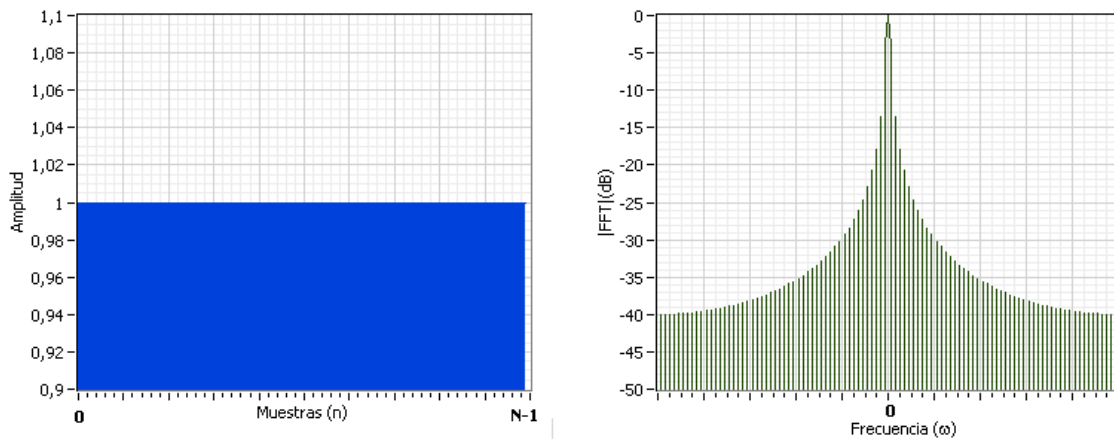
2.2.1 Ventanas de análisis Aunque teóricamente la ventana $W(t)$ puede ser cualquier función simétrica, existen en el procesamiento de señales una serie de ventanas ya definidas que son las más utilizadas debido a su respuesta tanto en tiempo como en frecuencia.

A continuación se muestran algunas de estas funciones y para crear un punto de referencia también su respuesta en frecuencia. Si $W[n]$ es la ventana definida en tiempo discreto y N es la longitud de las muestras, entonces:

- Ventana rectangular:

$$W[n] = 1 \quad (2.7)$$

Figura 10. Ventana rectangular y su respuesta en frecuencia.

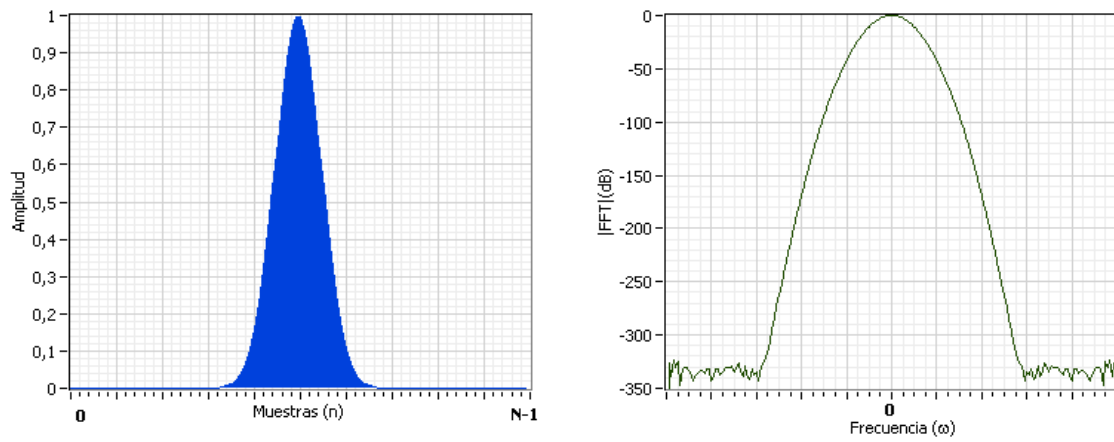


- Ventana de Gauss:

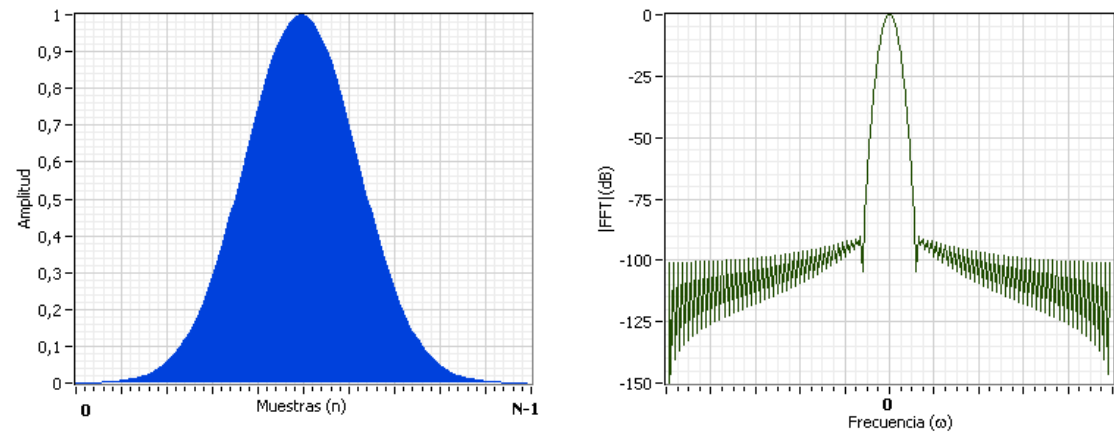
$$W[n] = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n - (N-1)/2}{\sigma(N-1)/2} \right)^2} \quad \sigma \leq 0.5 \quad (2.8)$$

Cuando la STFT se implementa con este tipo de ventana, se denomina Transformada de Gabor

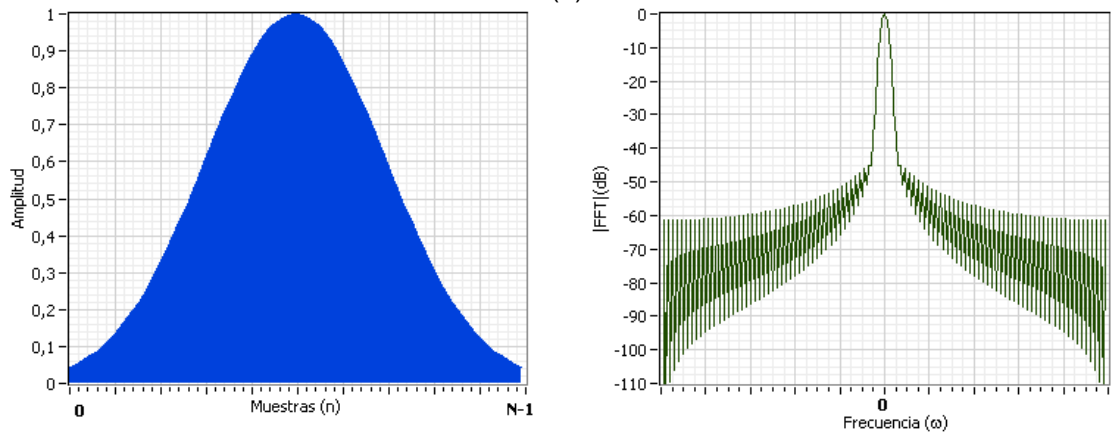
Figura 11. Ventana de Gauss y su respuesta en frecuencia. (a) $\sigma = 0.1$, (b) $\sigma = 0.25$, (c) $\sigma = 0.4$



(a)



(b)

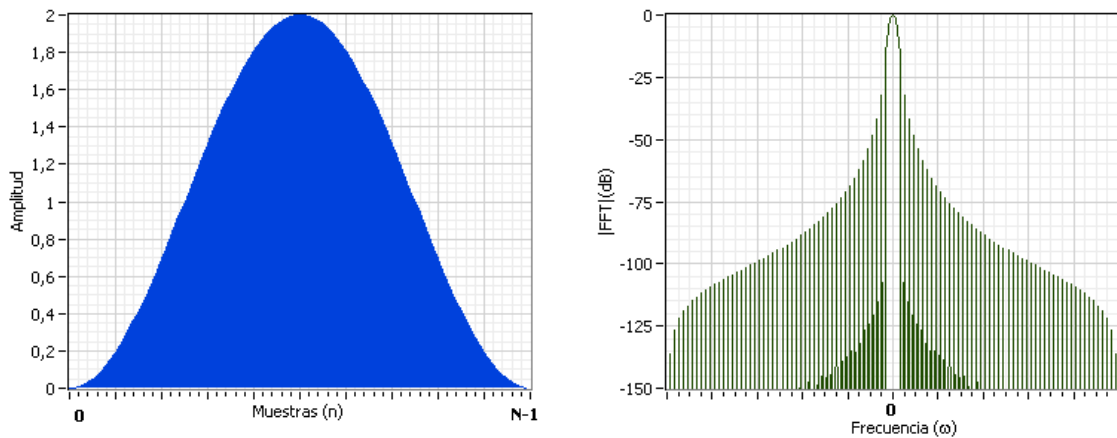


(c)

- Ventana Hann: Esta ventana también es conocida como Hanning

$$W[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) \quad (2.9)$$

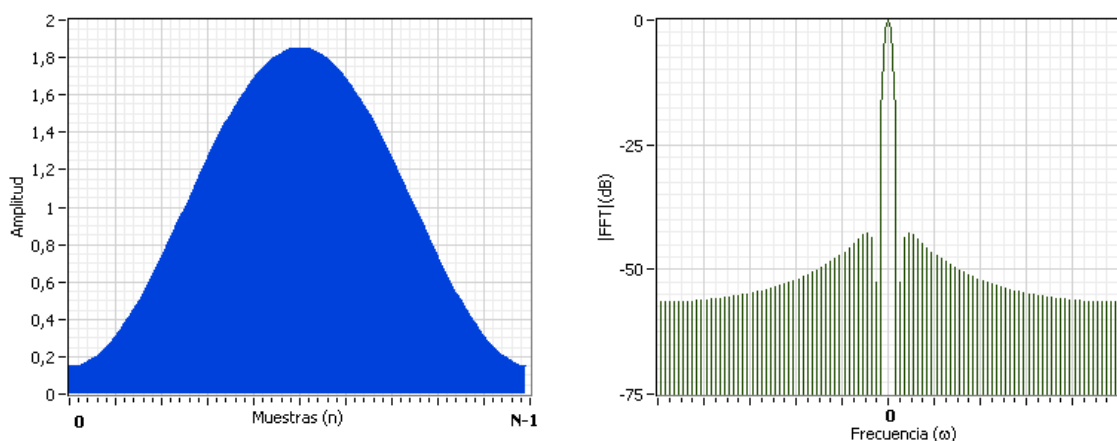
Figura 12. Ventana Hann y su respuesta en frecuencia.



- Ventana Hamming:

$$W[n] = 0.53836 - 0.46164 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \quad (2.10)$$

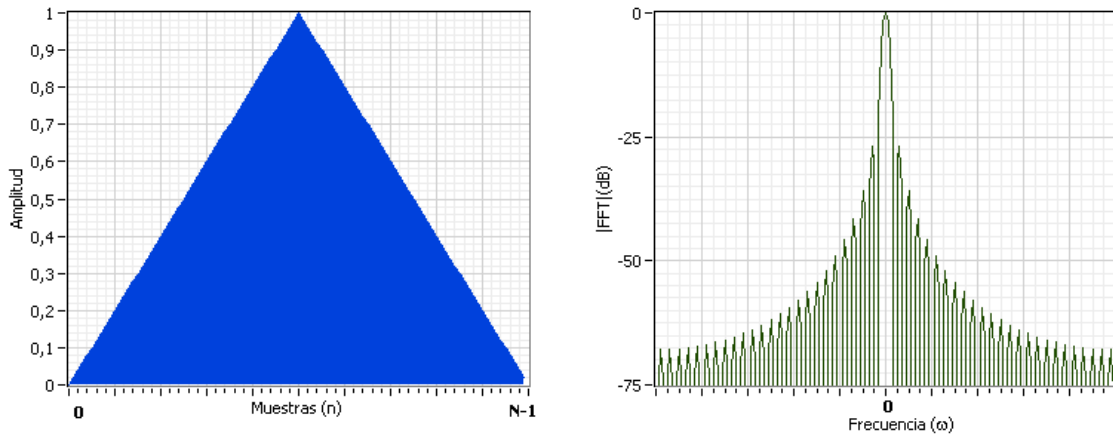
Figura 13. Ventana Hamming y su respuesta en frecuencia.



- Ventana Triangular:

$$W[n] = \frac{2}{N} \cdot \left(\frac{N}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right) \quad (2.11)$$

Figura 14. Ventana Triangular y su respuesta en frecuencia.

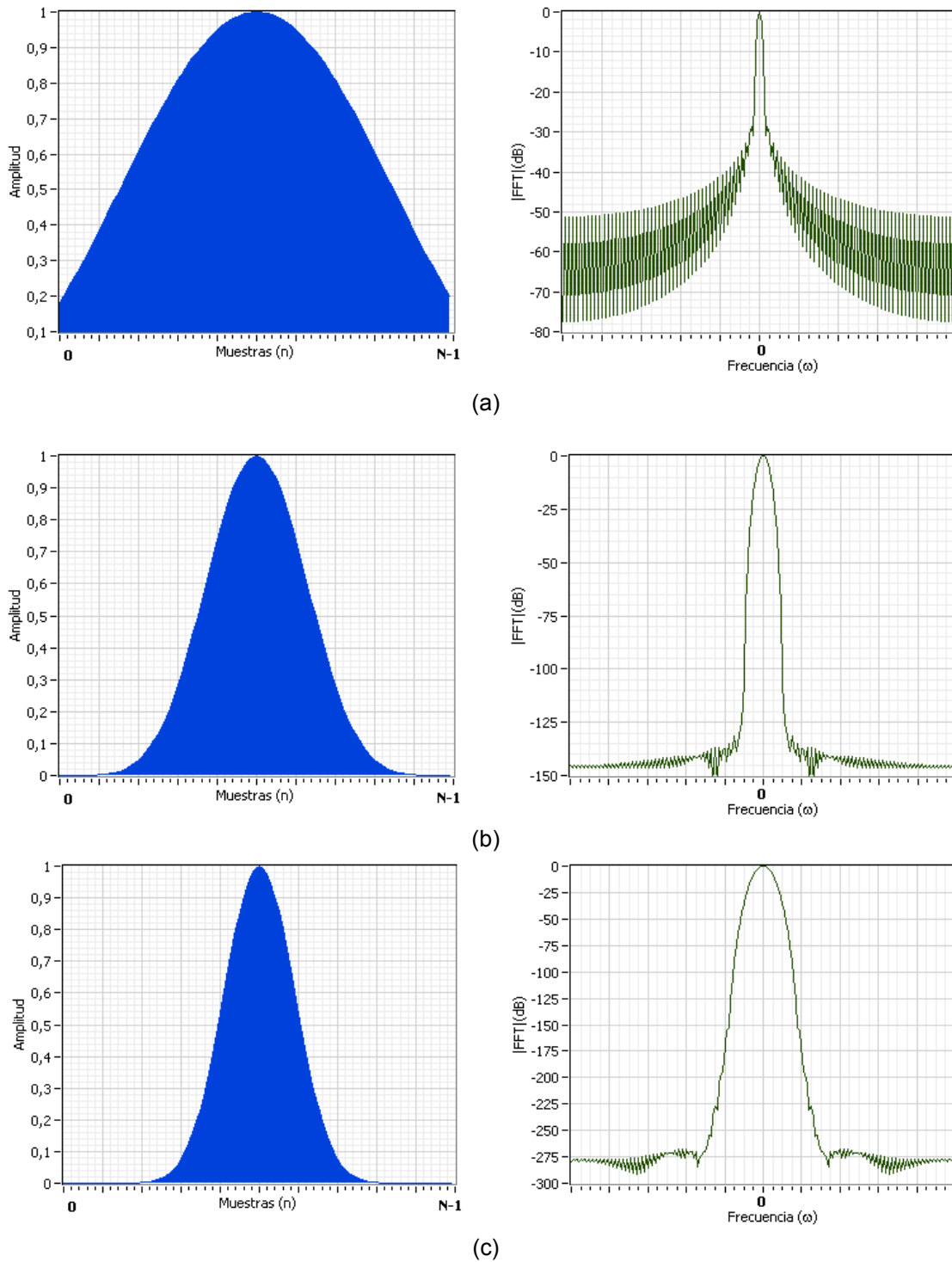


- Ventana Kaiser:

$$W[n] = \frac{I_0 \left(\alpha \pi \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right)}{I_0(\alpha \pi)} \quad (2.12)$$

En donde I_0 es la función modificada de Bessel de orden cero de la primera clase, α es cualquier número entero real; cuando este es igual a cero, se convierte en una ventana cuadrada, cuando α tiende a $(+\infty)$ se acerca a una curva gaussiana.

Figura 15. Ventana Kaiser y su respuesta en frecuencia. (a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 5$, (c) $\alpha = 10$



Existe otro tipo de ventanas que se originan de la expresión 2.13 las cuales toman diferentes nombres de acuerdo con los coeficientes que forme esta función.

$$W[n] = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N-1}\right) \quad (2.13)$$

Algunas de esas funciones ventana son:

$$\begin{array}{l}
 \text{- Ventana Blackman:} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0.42 \\ a_1 = 0.5 \\ a_2 = 0.08 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{- Ventana Nuttall:} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0.355768 \\ a_1 = 0.487396 \\ a_2 = 0.144232 \\ a_3 = 0.012604 \\ a_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{- Ventana Blackman-Harris:} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0.35875 \\ a_1 = 0.48829 \\ a_2 = 0.14128 \\ a_3 = 0.01168 \\ a_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{- Ventana Blackman-Nuttall:} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0.3635819 \\ a_1 = 0.4891775 \\ a_2 = 0.1365995 \\ a_3 = 0.0106411 \\ a_4 = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{- Ventana superficie plana (Flat Top):} \\
 \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1.93 \\ a_2 = 1.29 \\ a_3 = 0.338 \\ a_4 = 0.032 \end{array} \right.
 \end{array}$$

2.2.2 Cálculo de la STFT Según la ecuación 2.5, la STFT puede entenderse como una serie de resultados de una función $x(t)_{W,f}$ que resultan del producto de las funciones $f(t)$ y $W(t - \tau)$ cada vez que τ toma un nuevo valor.

$$x(t)_\tau = f(t)W(t - \tau)$$

A la cual se le aplica la TF cada vez que τ cambia de valor

$$SF(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_\tau e^{-j\omega t} dt$$

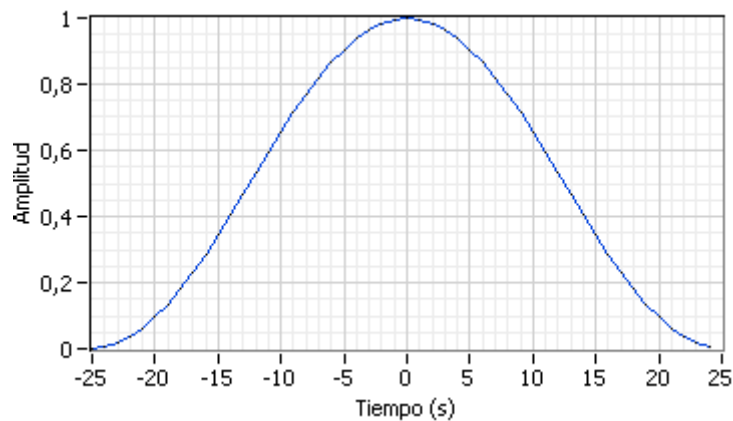
Así, es posible construir la STFT ejecutando los siguientes pasos:

- a. Definir la $f(t)$ y la ventana que será ejecutada durante el análisis. Para ejemplificar este proceso se utilizará la señal $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi 200t) & \text{si } 0\text{mS} \leq t < 100\text{mS} \\ \text{sen}(2\pi 100t) & \text{si } 100\text{mS} \leq t < 200\text{mS} \\ \text{sen}(2\pi 300t) & \text{si } 200\text{mS} \leq t < 300\text{mS} \end{cases}$$

Como función ventana se escoge la ventana Hann de tal manera que sea simétrica en tiempo (figura 16), ya que así el instante de mayor energía es correspondiente al instante τ .

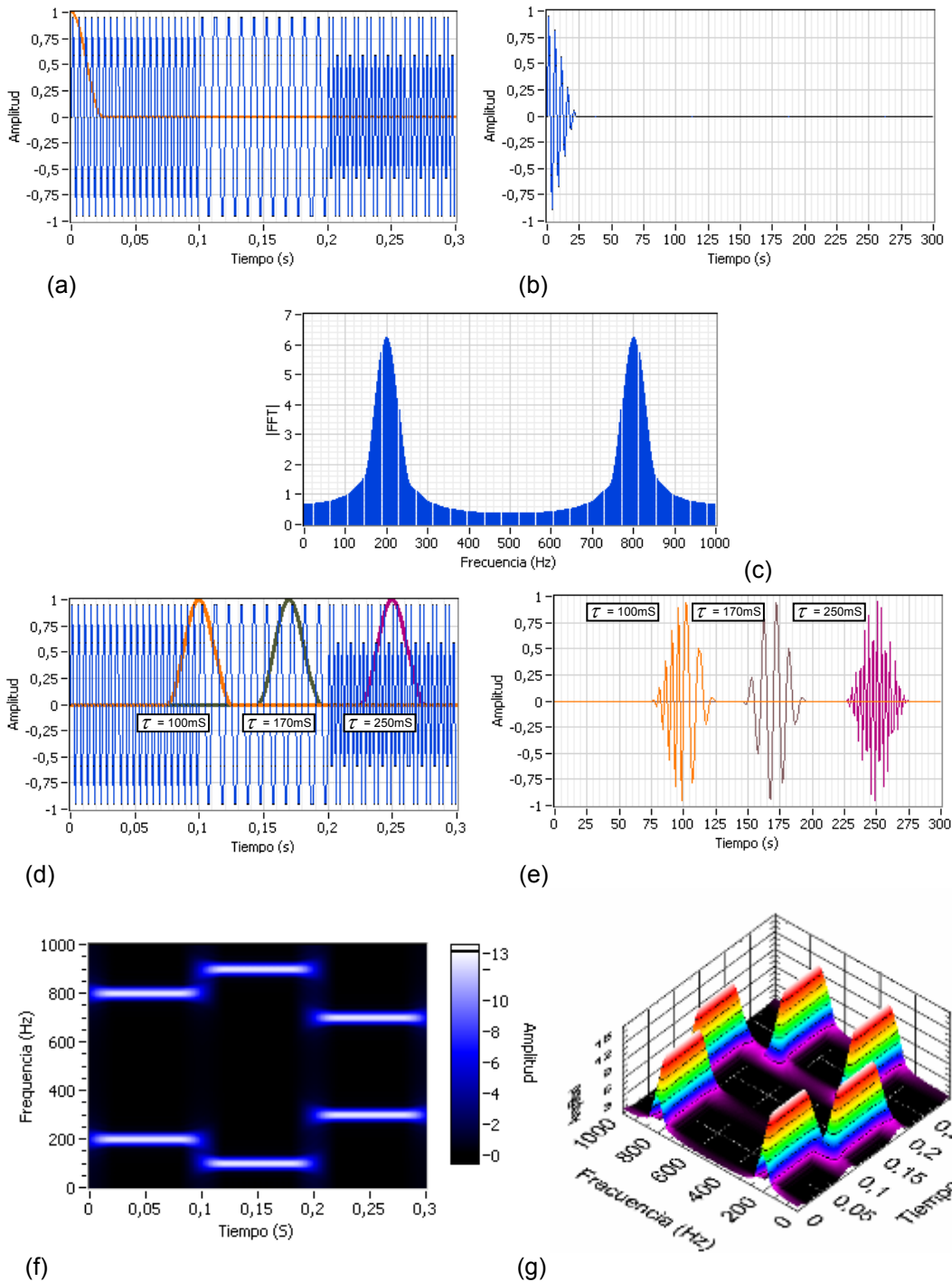
Figura 16. Ventana Hann simétrica de ancho 50mS



- b. Se escoge un ancho de ventana, este factor es bastante importante ya que como se verá más adelante, de acuerdo a él, se establece la resolución del resultado. Para el actual ejemplo se toma un ancho de ventana de 50mS.
- c. Se hace $\tau = 0$. Así, localizando las dos funciones sobre una misma línea de tiempo se visualiza como muestra la figura 17a.
- d. Se calcula la función $x(t)_\tau = f(t)W(t - \tau)$ con $\tau = 0$, (figura 17b)
- e. Se determina la TF de $x(t)_0 = f(t)W(t - 0)$, (figura 17c)
- f. Se realiza un incremento de τ en $\Delta\tau$.
- g. Se ejecutan de nuevos los pasos d, e y f con el nuevo τ hasta cubrir todo el tiempo de la señal $f(t)$. En la figura 17d se muestran la ventana trasladada para $\tau = 100\text{mS}$, 170mS y 250mS ; en la figura 11e las funciones $x(t)_\tau$ para dichos valores.

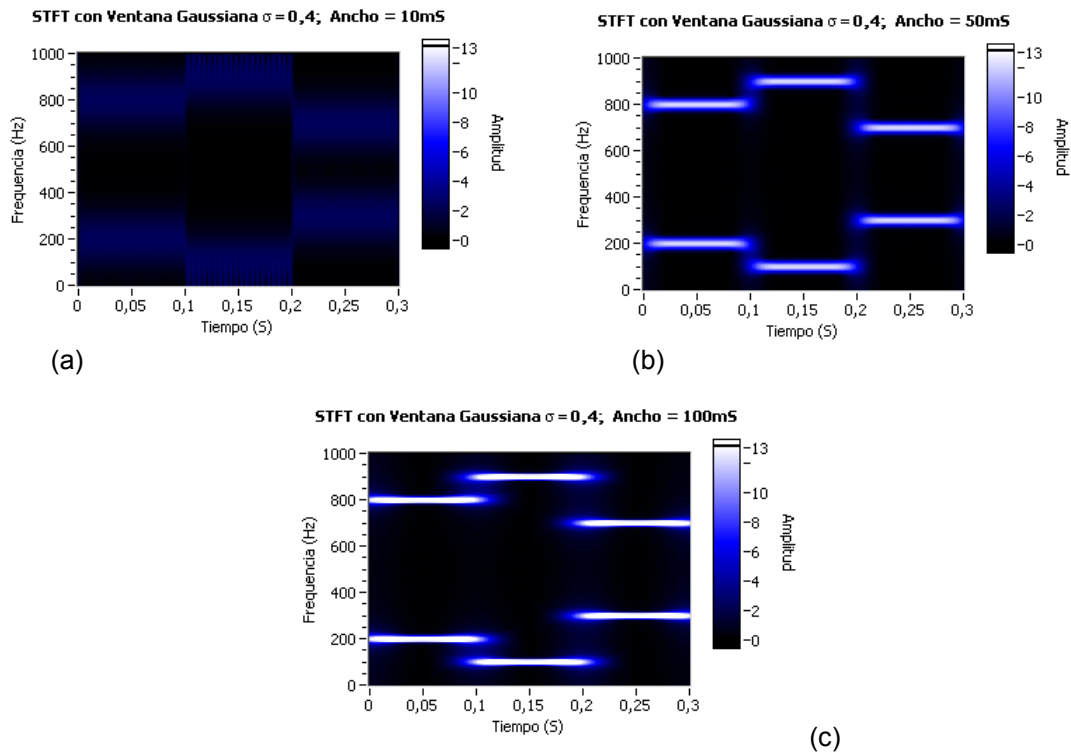
- h. Luego de haber obtenido la transformada de Fourier de todos los $x(t)_\tau$ resultantes, entonces se ordenan los resultados en un gráfico bidimensional o tridimensional; en el cual, el eje x corresponde al eje de tiempo, el eje y al de frecuencias, y las amplitudes o eje z según sea el caso, corresponden a los coeficientes de Fourier. La figura 17f muestra la representación bidimensional (llamado espectrograma si corresponden a los coeficientes del espectro de potencia), y la figura 17g muestra la representación tridimensional.

Figura 17. Ejemplo de cálculo de STFT



Conviene poner énfasis en que el ancho de la ventana durante el cálculo de la STFT permanece constante; asimismo, el resultado de ésta transformada es diferente para anchos de ventana diferentes, esto sucede aun si las ventanas corresponden a la misma función. En la figura 18 puede observarse dicho efecto, el cual se ejemplifica el resultado de la STFT de la figura 17a con una ventana de gauss con $\sigma = 0.4$ con un ancho de 10mS, 50mS y 100mS.

Figura 18. Resultado de la STFT con ventana de gauss con $\sigma = 0.4$ para distintos anchos de ventana



Como se percibe en la figura 18, a medida que el ancho de la ventana se hace mayor se va perdiendo la resolución en el tiempo y mejorándose en la frecuencia. En otras palabras, a ventanas de ancho menor es más fácil visualizar el instante en donde ocurre un cambio de frecuencias, así en la figura 18a con una ventana de 10mS se nota claramente que la frecuencia de la señal cambia en los instantes de 100mS y en 200mS, no obstante, no es posible establecer cuáles son las frecuencias en estos intervalos; en oposición a lo anterior, cuando la ventana tiene un ancho mucho mayor, ya es posible distinguir con mayor precisión las frecuencias que componen la señal, pero existe un intervalo de tiempo en el que se presentan varias componentes dificultando la identificación del instante en el que ocurre el cambio del periodo de la sinusoide.

Al anterior efecto se le conoce como el principio de incertidumbre de Heisemberg, estableciendo por tanto la imposibilidad de poseer una buena resolución en el tiempo y en la frecuencia para un mismo análisis, es así que no se puede definir un punto (t_0, ω_0) en el plano ya que no existe una caracterización que sea puntualmente especificada tanto en tiempo como en

frecuencia. Una forma de solucionar este inconveniente es escoger una ventana de ancho intermedio que permita establecer una resolución aceptable tanto en tiempo como en frecuencia; sin embargo, una ventana óptima para un tipo de análisis, puede no serlo para otra aplicación; asimismo, existen señales en las cuales su caracterización se dificulta ya que poseen eventos en instantes considerablemente cortos de tiempo, con componentes de frecuencia solapadas o al menos muy cercanas entre si, e inclusive ambos casos en la misma señal.

El por qué de este efecto es fácil de entenderse si se tiene en cuenta que la ventana que se utiliza para el análisis también posee una respuesta en frecuencia como se afirmó anteriormente, y también que el análisis de la TF en cualquier instante τ_n incluye un intervalo de la señal definido por el ancho de la ventana.

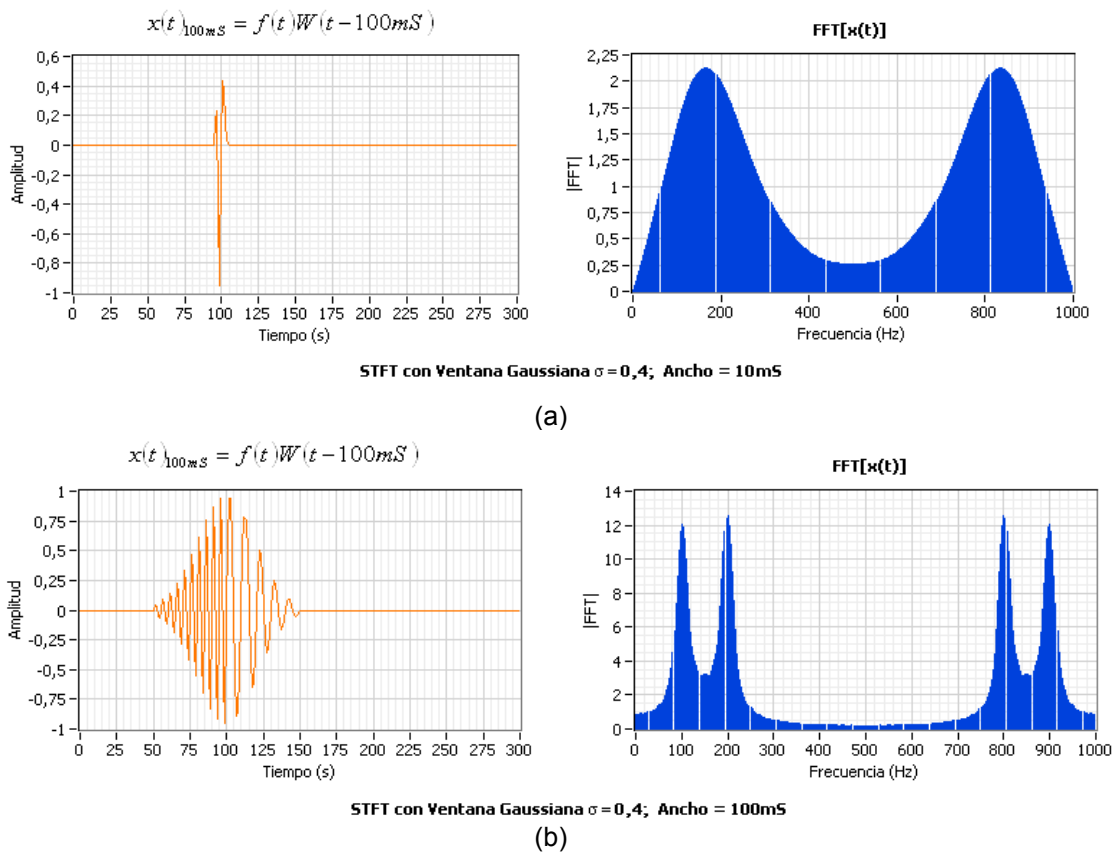
Para ejemplificar esto se toma como referencia la función

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi 200t) & \text{si } 0mS \leq t < 100mS \\ \text{sen}(2\pi 100t) & \text{si } 100mS \leq t < 200mS \\ \text{sen}(2\pi 300t) & \text{si } 200mS \leq t < 300mS \end{cases}$$

Que ya ha sido estudiada anteriormente. Como ventana $W(t)$, se seleccionan dos ventanas de gauss con $\sigma = 0.4$, con anchos de 10mS y 100mS respectivamente, y luego se calcula la TF de la función $x(t)_\tau = f(t)W(t - \tau)$ para distintos instantes $\tau_1 = 100mS$, $\tau_2 = 150mS$, $\tau_3 = 180mS$.

La figura 19 muestra $x(t)_{100mS} = f(t)W(t - 100mS)$. Nótese que es en este instante cuando se produce el cambio de frecuencia en la señal $f(t)$. Para $x(t)_{100mS}$ con ventana de 10mS el resultado es una señal que contiene parte de el ciclo de frecuencia 200Hz y otra parte del ciclo de la señal de 100Hz, por tanto la TF considera una frecuencia intermedia entre estas dos como la fundamental; sumado a esto, debido a la poca información que se tiene de la señal $f(t)$ en el intervalo de 10mS, las componentes de frecuencia de la ventana $W(t)$ son comparables a los de la señal $f(t)$ presentándose así un espectro bastante amplio (figura 19a). Contrariamente a lo anterior, cuando la ventana es lo suficientemente dilatada, puede precisarse claramente que existen dos componentes completamente definidos en el intervalo analizado; aun cuando las componentes espectrales de la ventana siguen existiendo, ya no son tan significativos comparados con los componentes de la información de $f(t)$.

Figura 19. Ejemplo de TF para el instante $\tau_1 = 100\text{mS}$ durante la STFT, utilizando dos ventanas de ancho diferente.



Lo anterior puede notarse también en la figura 20 aunque en este intervalo únicamente existe una componente de frecuencia de 100Hz. En el caso de la ventana de 10mS (figura 20a), cabe decir que a pesar de que la fundamental se aproxima a los 100Hz, no los toma como tal ya que la forma de la ventana afecta al ciclo de la señal original que la TF analiza en el instante de 150mS.

En el instante $\tau_3 = 180\text{mS}$ se sigue conservando una frecuencia de 100Hz, igual que en el instante $\tau_2 = 150\text{mS}$. Sin embargo, en la figura 21 se ve que aunque para la ventana de 10mS (figura 21.a) el espectro resultante no se diferencia del calculado en τ_2 ; en cambio, para la ventana de 100mS sí aparece otra componente en 300Hz que realmente no existe en dicho instante $\tau_3 = 180\text{mS}$ (figura 21.b). Esto sucede ya que al ser la ventana tan amplia, se alcanza a abarcar un intervalo de tiempo en el que la frecuencia de $f(t)$ ya ha cambiado.

Figura 20. Ejemplo de TF para el instante $\tau_2 = 150\text{mS}$ durante la STFT, utilizando dos ventanas de ancho diferente.

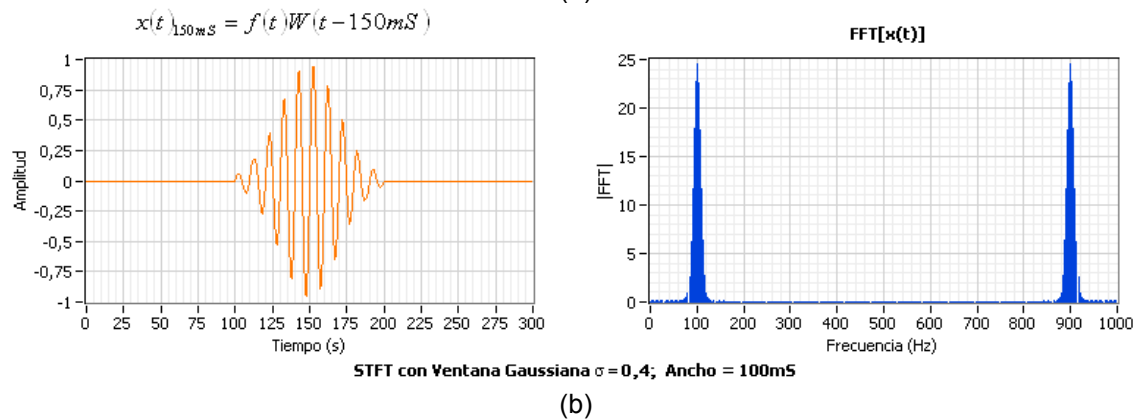
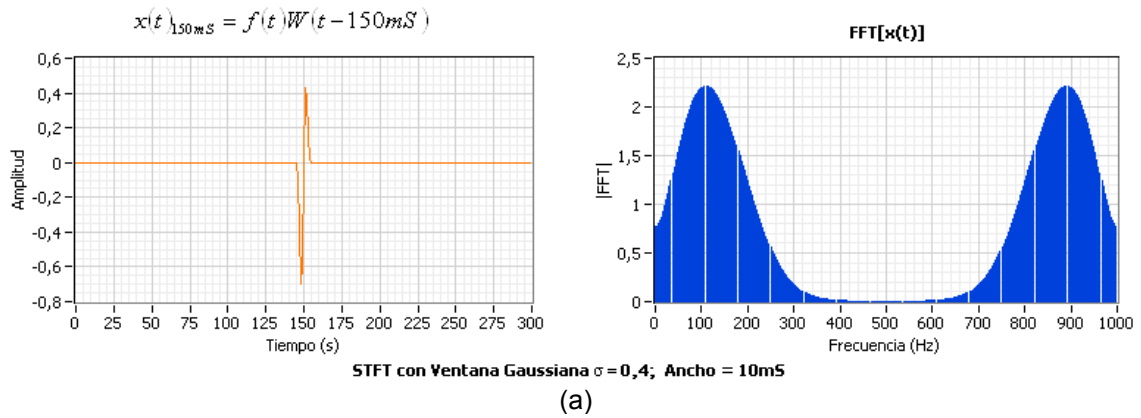
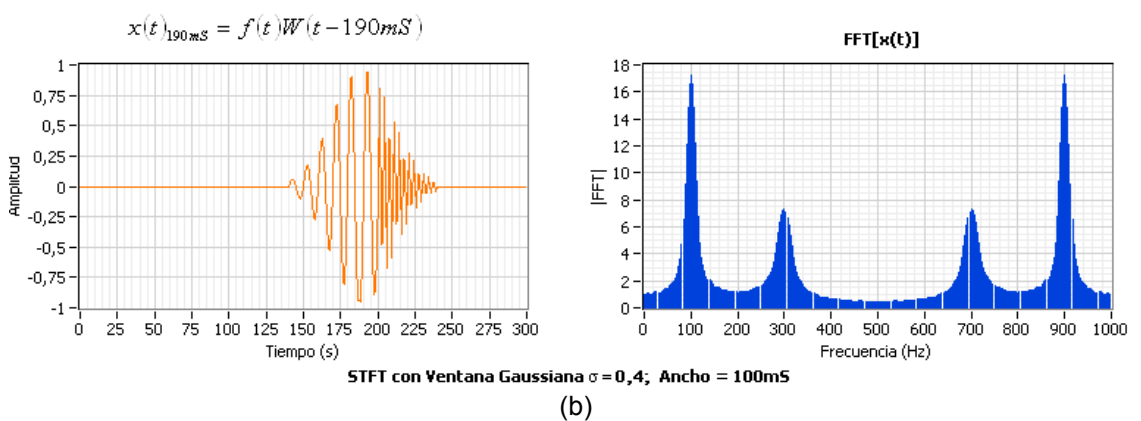
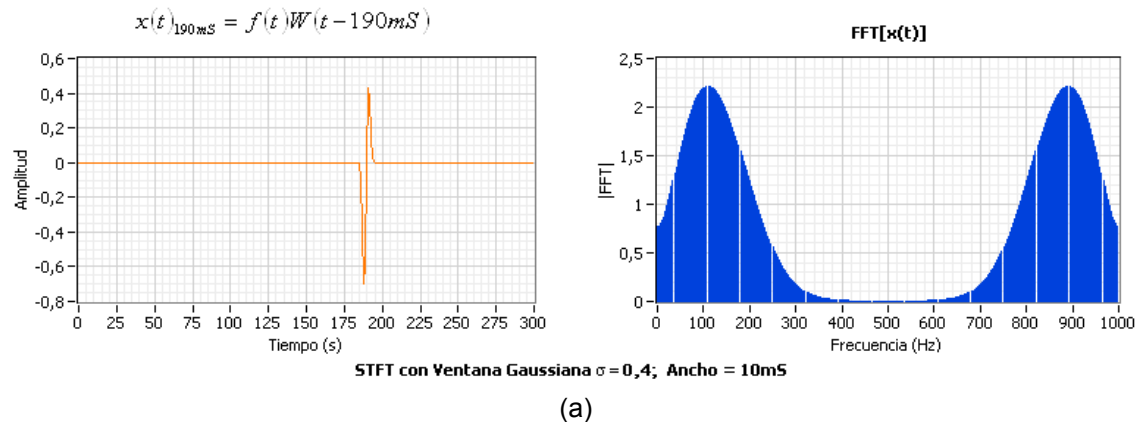


Figura 21. Ejemplo de TF para el instante $\tau_3 = 180\text{mS}$ durante la STFT, utilizando dos ventanas de ancho diferente.



2.3 La transformada de Fourier como una base vectorial

Anteriormente se establecieron las condiciones que conforman una base vectorial. A continuación se realizará un proceso que demuestra de manera intuitiva como está relacionada la TF con las bases vectoriales.

Retomando la ecuación 2.1 y la ecuación 1.6 se tienen:

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g^*(x) dx$
Definición de Transformada de Fourier	Definición de producto interno de funciones

Si se establecen las igualdades $f(x) = f(t)$ y $g(x) = e^{j\omega t}$, en donde ambas pertenecen al conjunto de funciones $L^2(\mathbb{R})$, entonces se constituyen las circunstancias para afirmar que la TF es en verdad la solución de un producto interno entre la función que se analiza y la expresión $e^{j\omega t}$, que es una función compleja. Se deduce entonces que:

$$F(\omega) = \langle f(t), e^{j\omega t} \rangle \quad (2.14)$$

De esta manera, $f(t)$ y $e^{j\omega t}$, se pueden interpretar como vectores. Para hacer más concebible esta afirmación, es factible expresar estas funciones en tiempo discreto; por tanto, si el periodo de muestreo es T_m y N es el número de muestras de la señal, se tiene la ecuación 2.3 que representa la DFT:

$$F[\omega_k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\omega_k n}$$

En donde $\omega_k = k\Omega = k \left(\frac{2\pi}{NT_m} \right)$, y $k = 1, 2, 3, 4 \dots N$

Por ello puede afirmarse que:

$$F[\omega_k] = \langle f[n], e^{j\omega_k n} \rangle \quad (2.15)$$

Si se reemplaza $F[\omega_k]$ en la IDFT por la expresión 2.15

$$f[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \langle f[n], e^{j\omega_k n} \rangle e^{j\omega_k n} \quad (2.16)$$

Que en su forma se parece a la igualdad 1.16 que define un vector respecto a una base ortogonal.

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j$$

De acuerdo a esto, \mathbf{v}_j equivale a $(1/\sqrt{N}) \mathbf{e}^{jk\Omega n}$ formando una base ortogonal en el espacio de señales; sin embargo, para que esto sea cierto debe comprobarse las condiciones de ortonormalidad y de ortogonalidad:

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} \|\mathbf{v}_j\|^2 = 1 & \text{si } j = i, \text{ por ortonormalidad} \\ 0 & \text{si } j \neq i, \text{ por ortogonalidad} \end{cases}$$

Así, si se tiene un conjunto de funciones $\mathbf{e}_K = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$, se toman dos funciones cualesquiera:

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\left(\frac{2\pi n}{NT_m}\right)k}, \quad \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\left(\frac{2\pi n}{NT_m}\right)l}$$

en donde $k, l \in N$.

Entonces se dice que: $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \sum_{n=0}^N \mathbf{e}_k[n] \overline{\mathbf{e}_l[n]}$

Reescribiendo las expresiones y solucionando:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\left(\frac{2\pi n}{NT_m}\right)k} \cdot e^{-j\left(\frac{2\pi n}{NT_m}\right)l} \right]$$

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi n}{NT_m}\right)(k-l)}$$

Que puede reescribirse como:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{j\Omega(k-l)} \right]^n, \text{ donde } \Omega = \left(\frac{2\pi}{NT_m} \right)$$

Lo cual hace de éste producto interno una serie geométrica finita, de tal manera que del álgebra se tiene:

$$S_n = \sum_{k=1}^n ax^{k-1} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 \dots + ax^{k-1} = a \frac{1-x^n}{1-x}$$

Que también puede escribirse

$$S_n = \sum_{k=0}^n ax^k = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + ax^5 \dots + ax^{k-1} = a \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (2.17)$$

Entonces la sumatoria consigue solucionarse de tal forma que queda definida como:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\Omega(k-l)}]^n = \frac{1 - [e^{j\Omega(k-l)}]^N}{1 - e^{j\Omega(k-l)}}$$

En donde se puede reorganizar $[e^{j\Omega(k-l)}]^N$ tal que:

$$[e^{j\Omega(k-l)}]^N \therefore [e^{j(2\pi/NT_m)(k-l)}]^N \therefore [e^{j(2\pi f_m(k-l)/N)}]^N \therefore e^{j(2\pi f_m(k-l))}$$

Pero de acuerdo a la igualdad de Euler

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta)$$

Se considera:

$$e^{j2\pi f_m(k-l)} = \cos[2\pi f_m(k-l)] + j\text{sen}[2\pi f_m(k-l)]$$

No obstante, como $(k-l)$ siempre dará un número entero, entonces la componente compleja invariablemente resulta cero y la componente real resulta igual a 1

$$\begin{aligned} \cos[(2\pi/T_m)(k-l)] &= 1 \\ j\text{sen}[(2\pi/T_m)(k-l)] &= 0 \end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\Omega(k-l)}]^n = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-1}{1-e^{j\Omega(k-l)}} = 0$$

Demostrando así, que las bases \mathbf{e}_k efectivamente son ortogonales.

Si por el contrario $k = l$, de la expresión:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\Omega(k-k)}]^n$$

se tiene que el resultado de la exponencial $e^{j\Omega(k-k)}$ es 1 y se sumaría N veces:

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1$$

el producto interno entonces es 1 y por tanto $\| \mathbf{e}_k \| = \| \mathbf{e}_l \| = 1$ cumpliendo la condición de ortonormalidad.

Del mismo modo, y cumpliendo las condiciones que se especificaron anteriormente, se dice que la STFT se considera también un producto vectorial entre la función $f(t)$ o $f[n]$ en el caso discreto y la expresión generada a partir del operador \mathbf{e}_m y la ventana, ésta puede definirse como $\mathbf{W}_{\tau,\omega} = W(t - \tau) \mathbf{e}_m$.

$$SF[\omega_k] = \langle f[n], \mathbf{W}_{\tau,\omega} \rangle \quad (2.18)$$

Si se escribe la expresión 2.6 incluyendo la anterior igualdad, se dice entonces que la señal original puede reconstruirse como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f[n], \mathbf{W}_{\tau,\omega} \rangle \mathbf{W}_{\tau,\omega} d\omega dt \quad (2.19)$$

Lo cual se parece a la descomposición de la señal en una base ortonormal, sin embargo, esto no es cierto ya que las funciones $\{\mathbf{W}_{\tau,\omega}\}$ son redundantes en $L^2(\mathbf{R})$. [4]

3. LA TRANSFORMADA WAVELET

Debido a las limitaciones que implican la utilización de la TF en diversas aplicaciones de las ciencias y de la ingeniería, análisis en los cuales se requiere más información además de las componentes espectrales de frecuencia, y por aquellas limitaciones que lleva consigo el análisis mediante la STFT, en la que es posible establecer una relación tiempo – frecuencia de la señal analizada, pero donde la resolución se encuentra limitada al ancho de ventana constante; se desarrolló entonces una serie de aplicaciones en distintas disciplinas que luego conformarían lo que actualmente se conoce como la teoría Wavelet. Así, este análisis nace desde las ciencias aplicadas como la geología, la mecánica, el procesamiento de señales, etc., y luego es perfeccionada y parametrizada por matemáticos; en pocas palabras, el análisis Wavelet nace de la necesidad de encontrar soluciones a problemas en los cuales las herramientas que se tenían como la TF y la STFT se quedaban cortas.

3.1 Definición y conceptos

La transformada Wavelet (WT) es un análisis en el cual pueden establecerse eventos de frecuencia localizados en el tiempo; sin embargo, a diferencia de la STFT la cual mantiene una resolución constante durante todo el análisis, la WT varía la resolución durante el proceso de desarrollo; así es que pueden identificarse detalles en los eventos de alta frecuencia de la señal como también realizar una caracterización del contenido general de la misma. Por la anterior razón a la transformada Wavelet se le ha denominado el microscopio matemático por excelencia.

La transformada Wavelet matemáticamente se define como:

$$WT[f(t)] = C(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\tau, s}^*(t) dt \quad (3.1)$$

En donde $C(\tau, s)$ representan los coeficientes resultado de la transformada, $f(t)$ corresponde a la señal que se analiza y la función $\psi_{\tau, s}(t)$ (psi) representa una función patrón. A la expresión 3.1 se le conoce comúnmente como Transformada Wavelet Continua (CWT por sus siglas en inglés). Como puede observarse, el resultado de esta integral está en función de dos componentes, τ la cual representa un parámetro de translación en el tiempo, y s que se interpreta como una variación de escala; estos factores modifican la onda patrón $\psi(t)$ y divisan las propiedades multirresolución de la WT.

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (3.2)$$

De acuerdo a 3.1 se afirma entonces que la WT es la descomposición de la señal $f(t)$ sobre una función $\Psi(t)$ dilatada y trasladada tal como muestra 3.2. Esta función patrón es denominada como la Wavelet madre (ondita madre en su traducción literal al castellano) la cual es una señal oscilatoria de promedio nulo y duración limitada, por tanto $\psi \in L^2(R)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

La función original $\Psi(t)$ se encuentra centrada en la vecindad de $t = 0$ con $\|\Psi(t)\| = 1$. A ella se le denomina madre por el efecto que la condición 3.2 ejerce sobre la misma; cada vez que se escala el valor de s o se hace la traslación τ , se produce una imagen de la función original pero más estrecha o más extendida según sea el caso, a estas nuevas $\Psi(t)$ se les conoce como la familia de la Wavelet madre.

Si se reemplaza 3.2 en 3.1 quedaría:

$$WT[f(t)] = C(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (3.4)$$

Entonces, según la anterior expresión, la transformada Wavelet es la sumatoria infinitesimal de las multiplicaciones de la señal que se quiere analizar con una función de corta duración (que puede ser interpretada como ventana) a la cual se le hace una variación en su extensión y posición. Aunque la anterior definición pueda parecer algo compleja, puede entenderse a la WT simplemente como una forma de medir la similitud entre la función analizada y la ondita madre (conjugada si esta es compleja) a diferentes resoluciones determinadas por la escala. Es así que si se presentan coeficientes de alto valor quiere decir que el segmento analizado de la señal tiene un gran parecido a la Wavelet en la escala en la que esta última se encuentra.

Tal como la STFT, la WT puede detectar y medir la evolución en el tiempo de los transitorios en frecuencia. Para ello se requiere el uso de Wavelet analítica compleja la cual pueda separar la amplitud y fase de los componentes. Por el

contrario, las Wavelet reales son comúnmente usadas para detectar transiciones agudas de señal [4].

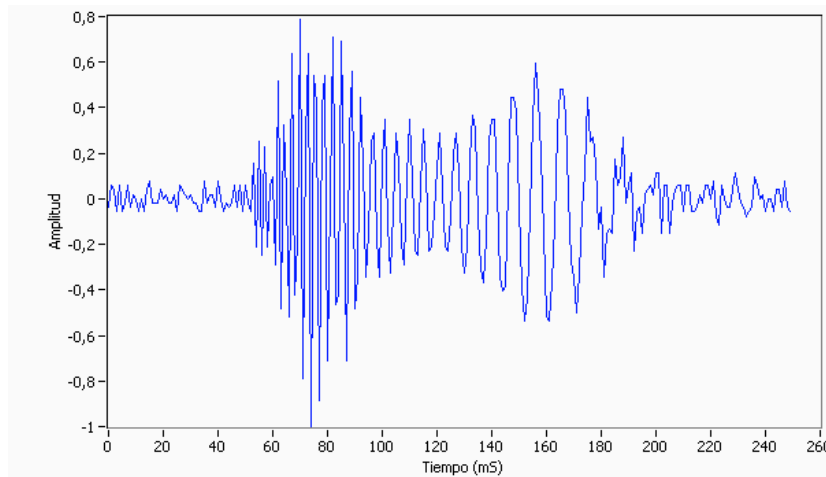
Si $\Psi(t)$ es una función real y posee promedio nulo, entonces la integral 3.4 mide la variación de $f(t)$ en la vecindad de τ , cuya dimensión es proporcional a s . Es decir, cuando la escala tiende a cero, esta disminución de los coeficientes Wavelet caracterizan la regularidad de $f(t)$ en la vecindad del instante analizado τ . Este efecto es importante en el análisis de transitorios y de fractales.

Una función $f \in L^2(\mathbf{R})$ se considera analítica si el espectro de su transformada de Fourier es nulo para frecuencias negativas. Esta, por sus propiedades debe ser obligatoriamente compleja pero puede caracterizarse completamente por su parte real.

Para calcular la WT se realizan los siguientes pasos:

- a) Se establece una $f(t)$ que quiera analizarse. Para este caso y como ejemplo se toma la señal de radiofrecuencia determinada por la figura 22.

Figura 22. Señal de RF.

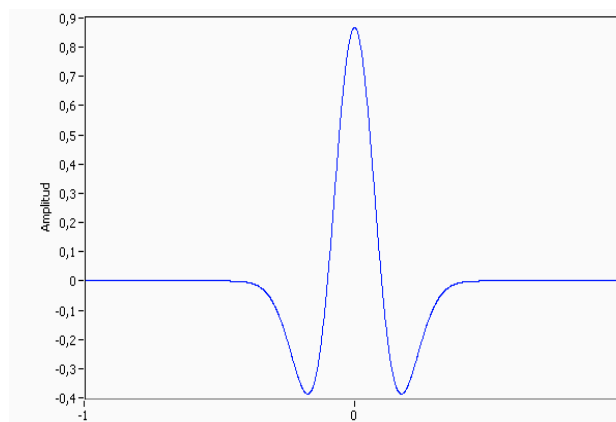


- b) Se elige una función Wavelet madre, para ello debe tenerse en claro cuáles son las características que se desean encontrar por medio de este análisis ya que funciones Wavelet diferentes pueden llegar a distintos resultados. La función definida por la segunda derivada de una gaussiana a la que comúnmente se le llama sombrero mexicano (Mexican hat); cuyo comportamiento define la ecuación 3.5 y puede observarse en la figura 23 se escoge para el desarrollo de este ejemplo.

$$\psi(t) = -\frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2} \right)} \quad (3.5)$$

- c) A continuación se inicia el cálculo de la ecuación 3.4 realizando el producto de la señal con la Wavelet. Para ello se comienza el operación con τ en cero, y escogiendo un valor de escala s de acuerdo al tipo de análisis que se requiera.

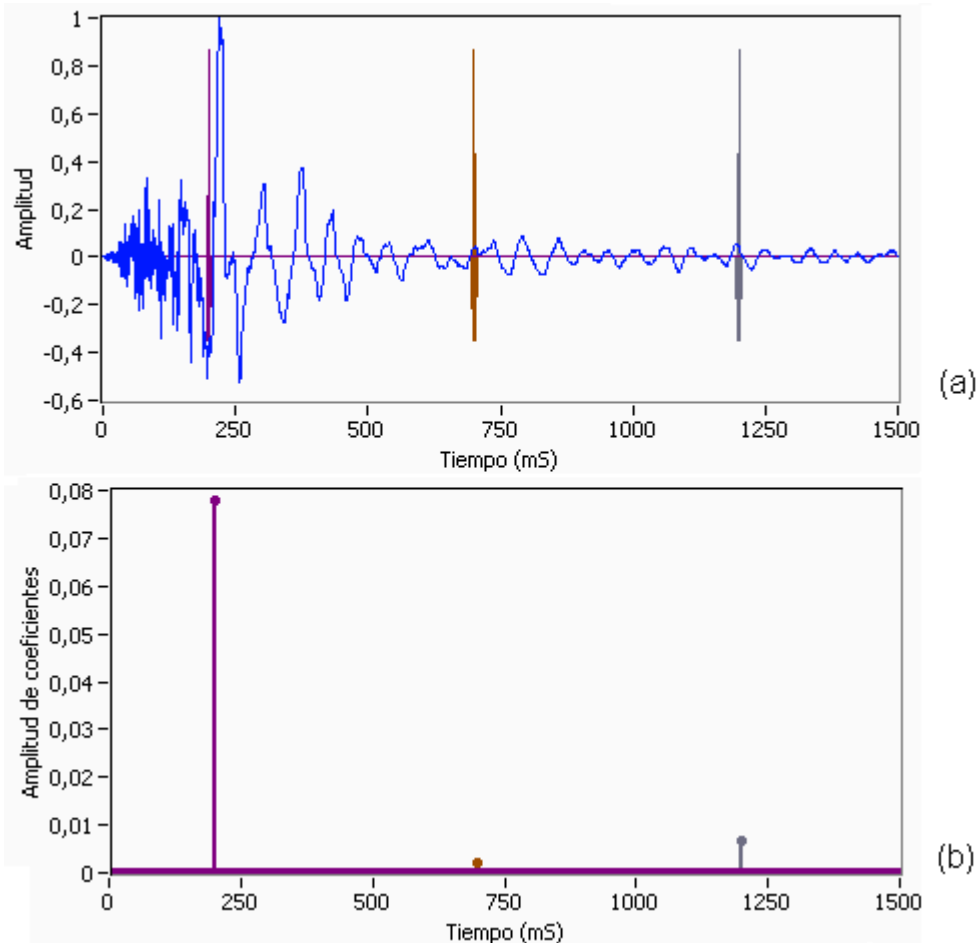
Figura 23. Wavelet Sombrero Mexicano



- d) Es necesario elegir un valor para la primera escala; esta puede variarse de manera continua con intervalos de Δs , pero así, se tendría una matriz resultado que tiende a infinito. Formas más comunes de elegir un valor de escala es el inicio en $s = 1$ e irla aumentando de a una unidad por vez; sin embargo una de las más conocidas es avanzar (disminuir o aumentar) en valores iguales a 2^n , esta forma de variar la escala se denomina *escala diádica*. El valor de s puede ser de signo positivo o negativo, no obstante la forma de asignarlo depende de las aplicaciones que se hagan; por ejemplo en el análisis de señales analíticas no cabe la utilización de escalas negativas. En este caso en particular puede realizarse el análisis comenzando con $s = 1$ hasta $s = 32$ en incrementos iguales a la unidad.
- e) Al realizar el primer producto de la señal con la función madre, en los valores $s = 1$ y $\tau = 0$, se integra el resultado, y se establece como el primer coeficiente de la matriz resultado $C(\tau, s)$, $C(0,1)$.
- f) Luego, se incrementa el valor de τ en un $\Delta\tau$ y se repite el paso anterior con la escala en el mismo valor hasta que este proceso se halla realizado en todo el eje temporal de la función analizada. En la figura 24.a se puede observar para escala $s = 1$, la Wavelet madre en valores

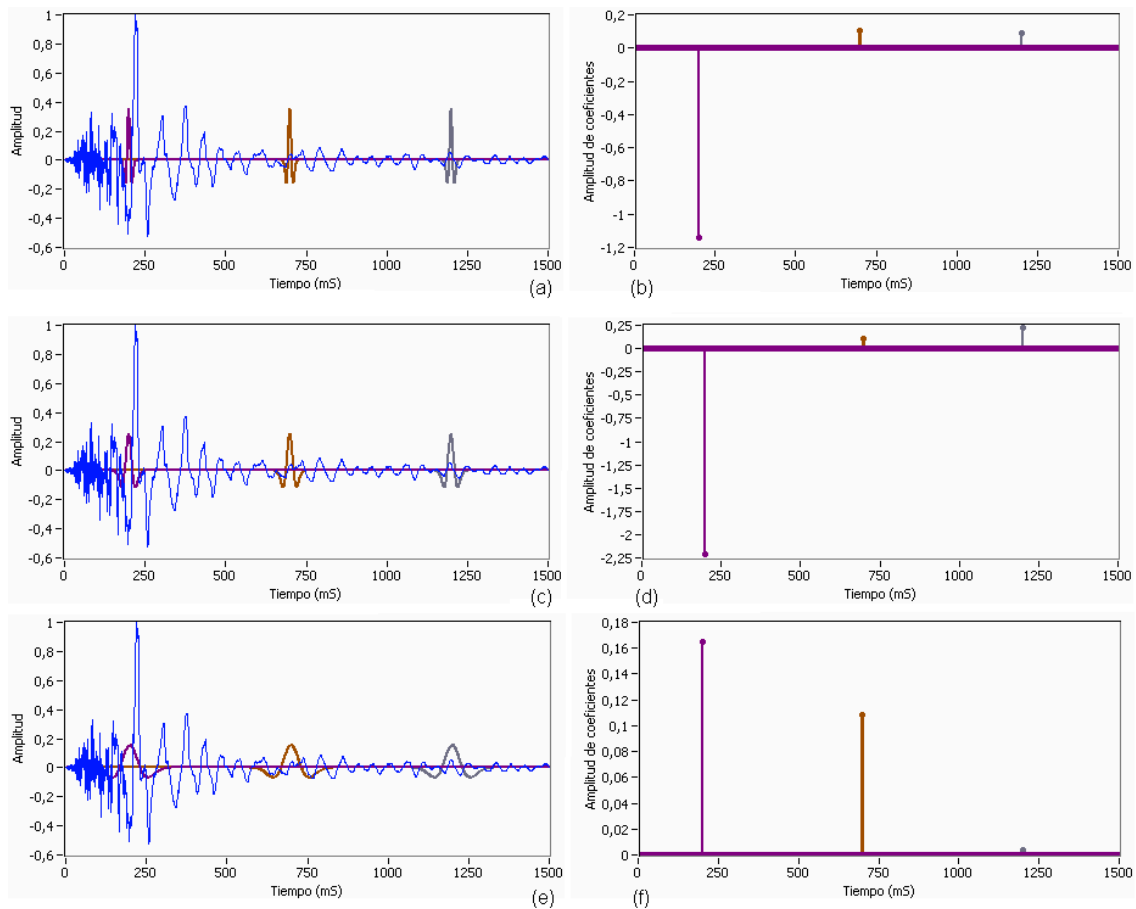
de translación $\tau = 200$ mS, $\tau = 700$ mS, $\tau = 1200$ mS, en figura 24.b se observan el valor de sus respectivos coeficientes en un plano translación Amplitud.

Figura 24. Análisis Wavelet



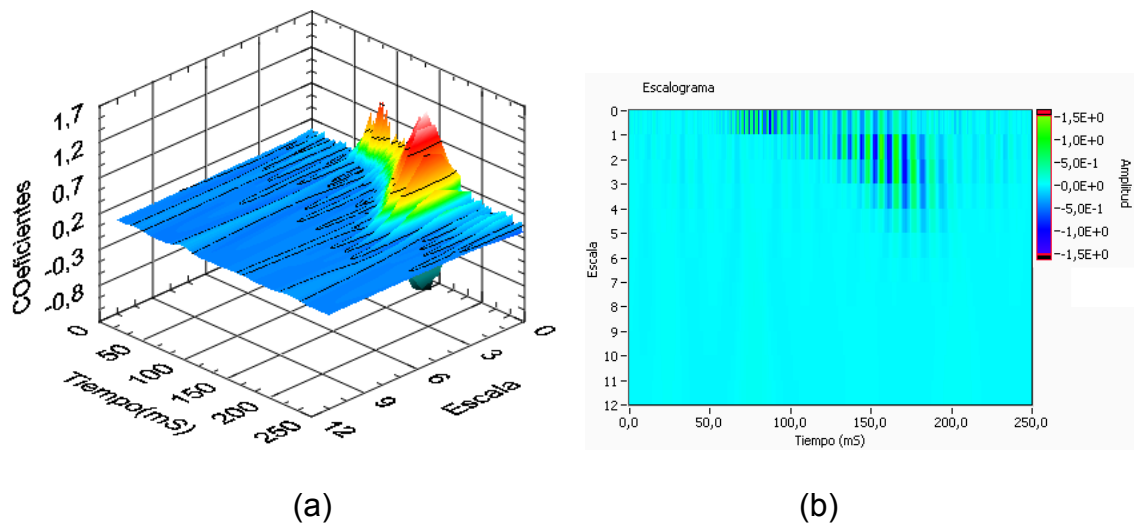
g) Luego de haber terminado de realizar la operación 3.4 recorriendo todo el eje temporal, se incrementa el valor de s y se realizan de nuevo los pasos e) y f) con los nuevos valores de escala. En la figura 25.a se observan la Wavelet madre con escala $s = 6$, para los mismos valores de translación de la figura 24 con sus respectivos coeficientes (Fig. 25.b); igualmente para $s = 12$ (Fig. 25.c y Fig. 4.d) y $s = 32$ (Fig. 25.e y Fig. 25.f).

Figura 25. Análisis Wavelet a distintos niveles de escala y de traslación



- h) Cuando se recorra todo el eje temporal calculando en cada translación su correspondiente coeficiente $C(\tau, s)$, se vuelve a incrementar la escala y se repiten los anteriores pasos. Sucesivamente se repite el procedimiento anterior hasta completar todas las escalas respectivas.
- i) Cuando se termine de hacer dicho procedimiento los coeficientes se pueden organizar en un escalograma o en un eje tridimensional (figura 26)

Figura 26. Escalograma resultado de la WT

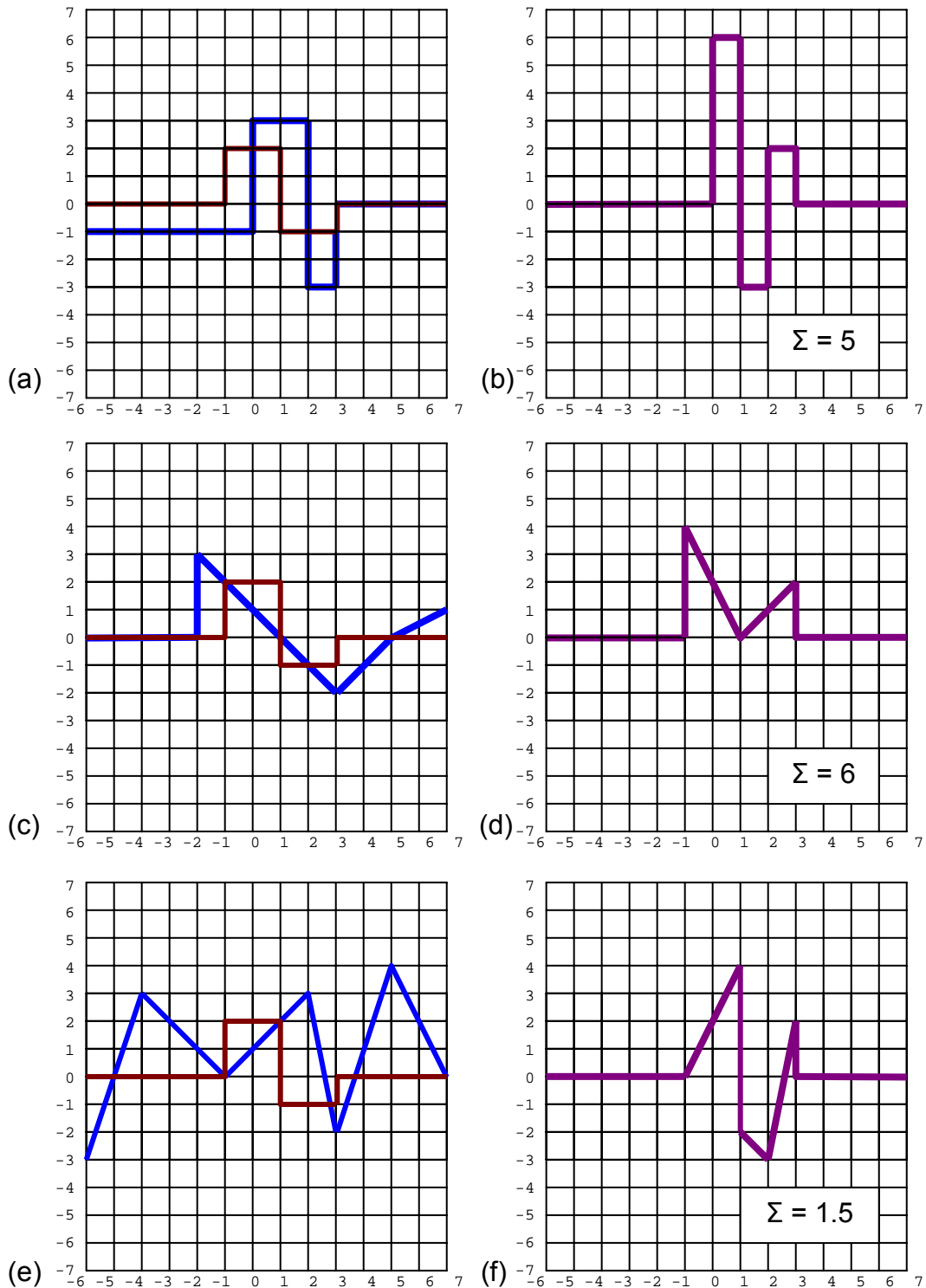


En este punto es importante retomar el concepto en el cual se afirma que la WT es una medida de similitud entre la señal y la función Wavelet a diferentes resoluciones. El efecto de integrar el producto de una señal por otra, hace que el resultado de esta operación establezca una relación de similitud entre las mismas; en cuanto más parecidas sean, el resultado entonces dará un número mayor. Un ejemplo simple puede observarse en la figura 27 en donde se exponen este efecto; nótese como el producto de las señales de la Fig. 27.a el cual se representa en Fig. 27.b es menor del producto de de las señales de la Fig. 27.c mostrado en 27.d aunque a simple vista en la primera imagen las figuras son más afines; sin embargo, en Fig. 27.b las señales poseen una tendencia más similar en el intervalo en donde el producto es diferente de cero. En Fig. 27.d las tendencias de ambas señales están poco relacionadas y por tanto su resultado es el menor.

Teniendo en cuenta lo anterior, a cada cambio de escala se realiza una comparación de la forma de la Wavelet madre comprimida, con el segmento de la señal de igual duración de la primera. La amplitud del coeficiente representante de este segmento dependerá de cuán relacionadas sean estas dos señales en el intervalo igual a la extensión de la Wavelet madre. Por tanto se afirma que el valor de los coeficientes depende de que tipo de Wavelet se utilice.

Nótese con cuidado el efecto de la escala sobre la función Wavelet, a medida que s aumenta, la amplitud de dicha señal disminuye; contrario a ello, cuando esto mismo sucede, se ensancha la duración de la señal (figuras 25.a, 25.b, 25c). Esto es lo mismo a decir que el periodo de la onda patrón se modifica con la escala; así cuando aumenta este valor, hace que la frecuencia de dicha onda disminuya, pero que también se reduzca el valor del coeficiente que se calcula debido a la disminución en amplitud de $\Psi(t)$.

Figura 27. Efecto de la integración del producto de dos señales en la CWT



Es así que teniendo en cuenta los anteriores efectos:

- La relación que existe entre el valor de los coeficiente Wavelet con la forma de ambas señales en intervalos definidos.

- El cambio de frecuencia que ejerce la escala sobre la Wavelet madre.

Existe por tanto una relación inversamente proporcional entre la frecuencia de la señal y la escala con la cual se analiza.

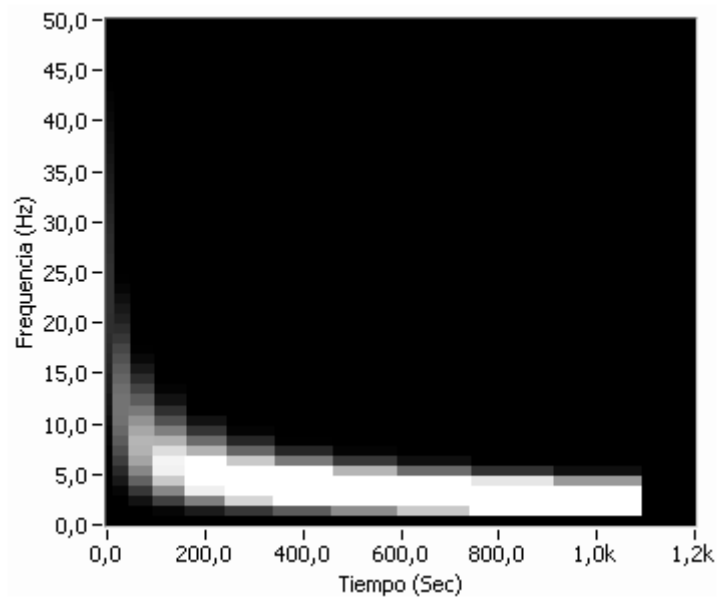
$$Escala \propto \frac{1}{frecuencia}$$

La primera condición se manifiesta en este efecto debido a que si las señales son similares a cierta escala, el valor del coeficiente en este punto es significativamente alto; esto quiere decir que la señal en el intervalo que compone la vecindad del instante de análisis, posee una tendencia y una frecuencia cercana o similar a la Wavelet con la escala que se este aplicando el análisis. La segunda condición se ve más claramente ya que la escala modifica la duración de la Wavelet. En otras palabras, si la escala es mayor, la frecuencia representativa de la Wavelet de análisis disminuye tal como se había dicho antes; si además el coeficiente es alto en el mismo instante, se sabe entonces que la señal en este segmento tiene una frecuencia similar a la Wavelet. Lo mismo ocurre en el caso contrario en donde la escala es menor y por tanto es representativa de las altas frecuencias.

De esta manera la WT entrega una representación indirecta de un análisis tiempo – frecuencia. Cabe en este momento resaltar que la escala NO ES EL INVERSO DE LA FRECUENCIA sino que presenta una relación inversa con ella. Sin embargo, es posible establecer un diagrama tiempo frecuencia a partir de la WT. En dicho diagrama se puede observar claramente el efecto de esta transformada en la resolución del resultado; así, la distribución de frecuencia de una escala de la Wavelet abarca las frecuencias de la señal analizada que pueden ser detectadas a dicha escala; igualmente, el intervalo de tiempo que ocupa la Wavelet en un instante determinado, abarca los eventos temporales que pueden identificarse en este valor de translación. Lo anterior se asocia al principio de Heissemberg anteriormente descrito en el cual no puede establecerse una buena resolución tanto en tiempo como en frecuencia. Recuérdese que en escalas menores la banda de frecuencia representativa es mayor que en escalas superiores, pero su intervalo de tiempo es más reducido lo cual concuerda con el anterior principio.

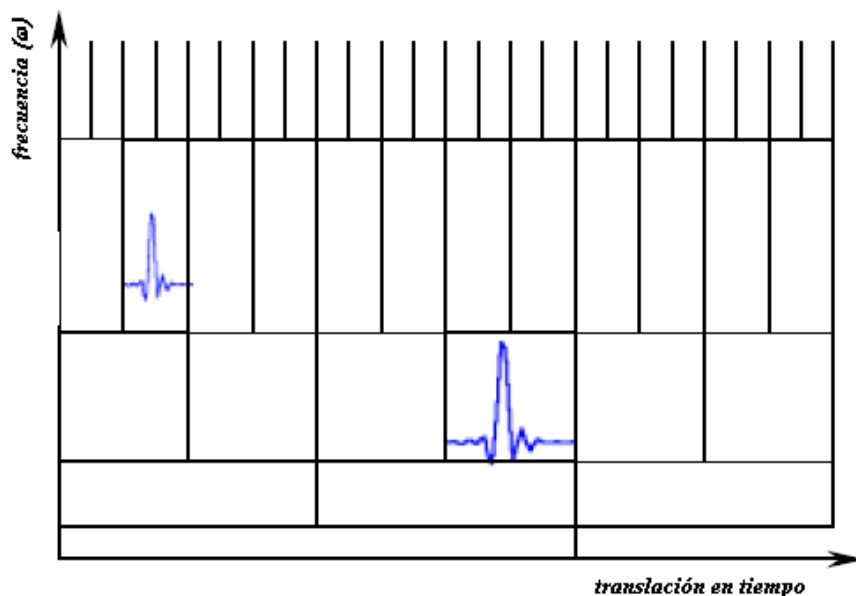
En la figura 28 se observa este efecto para una Wavelet *mexican hat* con $\sigma = 2$ con escalas desde 1 a 12. En ella se coloca cada Wavelet escalada una tras otra sobre el eje temporal y en estos intervalos se representa la distribución en frecuencia para cada escala, así es fácil visualizar la zona para cada escala en la que puede detectar eventos tanto en tiempo como en frecuencia. En otras palabras, la resolución para cada escala. Nótese que no existe una frecuencia puntual para un instante.

Figura 28. Escalograma WT



Si se escogen las escalas adecuadas puede construirse un espectrograma tal como muestra la figura 29, en donde se establece una grilla en la cual cada celda de la WT en este plano tiene un área no nula, y por tanto, no es posible conocer el valor de un punto en particular. Su área representa la banda de frecuencias y el intervalo de tiempo que puede analizar la Wavelet en la posición tiempo-escala que se encuentre. Sin importar su tamaño, estas celdas tienen igual área y están determinadas por el principio de Heissemberg.

Figura 29. Espectrograma WT



Fuente: MARTÍNEZ, Julio. Análisis de la teoría de ondículas orientadas a las aplicaciones en ingeniería eléctrica: fundamentos. España, 2002. Universidad Politécnica de Madrid, ETSI industriales, departamento de ingeniería eléctrica.

Debido a que la transformada Wavelet considera que ψ se encuentra centrada en 0, entonces la expresión

$$WT[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{s} \right) dt$$

Implica que el centro de la Wavelet se encuentra siempre en $t = \tau$. De lo anterior, puede llegar a comprobarse que la extensión de la celda en el eje de tiempo está determinado por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 |\psi_{\tau,s}(t)|^2 dt = s^2 \sigma^2$$

En donde

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$$

Sin embargo, para Wavelets analíticas existe la condición que las frecuencias negativas tienen componentes de Fourier nulas. El centro de frecuencia η de $TF[\psi]=\Psi(\omega)$ se determina por:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \omega |\psi(\omega)|^2 d\omega$$

No obstante, como la transformada de Fourier de $\Psi_{\tau,s}(\omega)$ es una versión escalada de $\Psi(\omega)$ por $1/s$.

$$\Psi_{\tau,s}(\omega) = \sqrt{s} \Psi(s\omega) e^{-j\omega\tau}$$

En consecuencia el centro de frecuencia de frecuencia de $\Psi_{\tau,s}(\omega)$ es η/s , y alrededor de este, la energía estará distribuida como:

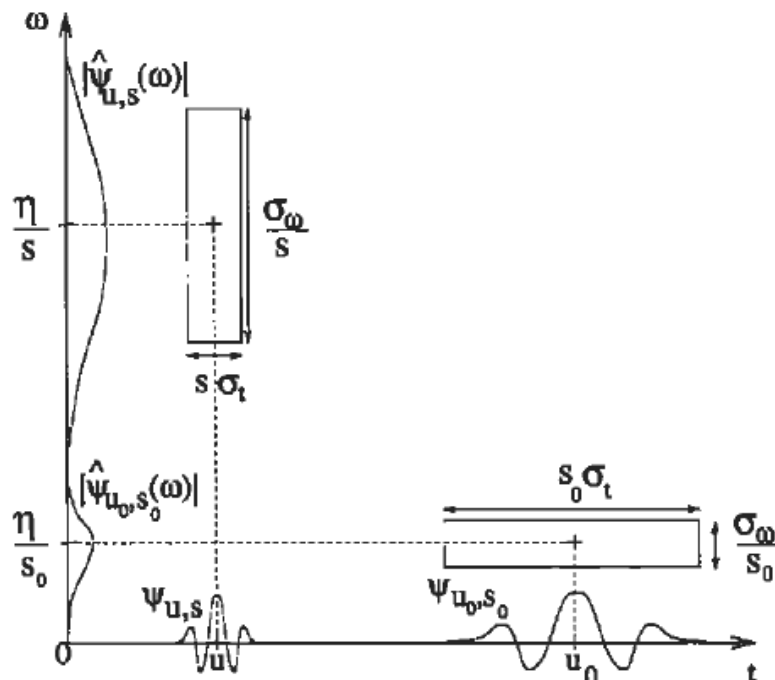
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\omega - \frac{\eta}{s} \right)^2 |\Psi_{\tau,s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_{\omega}^2}{s}$$

En donde

$$\sigma_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \eta)^2 |\Psi(\omega)|^2 d\omega$$

La extensión de la energía en tiempo-frecuencia de la Wavelet escalada corresponde a la resolución de la celda centrada en $(\tau, \eta/s)$, de dilatación $s\sigma^2$ en el tiempo y σ_{ω}/s a lo largo de la frecuencia. El área del rectángulo que conforma cada celda permanece igual a $\sigma_{\tau}\sigma_s$ en todas las escalas; sin embargo la resolución tiempo frecuencia depende de s [4].

Figura 30. Representación tiempo frecuencia de la CWT



Fuente: MALLAT, Stéphane. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company. Elsevier Science. 1999.

3.2 Condiciones de invertibilidad

Según lo descrito hasta el momento, cualquier señal oscilatoria delimitada en el tiempo puede ser utilizada como señal patrón en WT para determinar el diagrama traslación-escala sin necesidad de que posea promedio nulo; sin embargo, no todas estas señales permiten realizar la transformada inversa con el fin de recuperar la señal original a partir de los datos establecidos en un espectrograma. Para que se pueda determinar la transformada Wavelet inversa (IWT) es necesario que exista un C_{ψ} que cumpla la condición dada por la ecuación 3.6.

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} \wedge C_{\psi} < +\infty \quad (3.6)$$

En donde $\Psi(\omega)$ es la TF de $\Psi(t)$.

La ecuación 3.6 se denomina *condición de admisibilidad*. Si la Wavelet madre posee promedio nulo, entonces $\Psi(0) = 0$ y por tanto garantiza que esta integral sea finita; si se cumple lo anterior y además $\Psi(\omega)$ es continuamente diferenciable, entonces la condición de admisibilidad se cumple. Si esto sucede, la señal patrón puede considerarse como Wavelet madre.

De esta manera, IWT se define como:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau, s) \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (3.7)$$

La fórmula anterior muestra que para cualquier $f \in L^2(\mathbf{R})$ puede estar bien aproximada a una superposición de Wavelets ya que cada paso de las integrales es una Wavelet diferente de la misma familia pero distinta escala y traslación.

3.3 La transformada Wavelet y el espacio vectorial Hilbert

En el análisis Wavelet siempre se supone que $\Psi_{\tau,s} \in L^2(\mathbf{R})$ y pertenecen también al espacio de Hilbert, por tanto la CWT se define igualmente como el producto vectorial 3.8.

$$WT[f] = \langle f, \Psi_{\tau,s} \rangle \quad (3.8)$$

En donde $|WT[f(t)]| \leq \|f(t)\|$

Por esta misma propiedad, la función original logra recuperarse mediante la expresión 3.9 en donde la constante de admisibilidad C_ψ es la determinada mediante 3.6.

$$f = C_\psi \langle WT[f], \psi_{\tau,s} \rangle \quad (3.9)$$

Recuérdese que $\|\psi\|=1$, esta condición se debe mantener durante todas las translaciones y todas las escalas, así que las funciones $\psi_{\tau,s}$ de una misma familia están normalizadas.

Un caso especial de 3.9 en donde siempre $f \in L^2(\mathbf{R})$ se cumple:

$$\frac{1}{C_\psi} \iint \frac{1}{s^2} |WT[f(\tau,s)]|^2 ds d\tau = \int |f(x)|^2 dx \quad (3.10)$$

La anterior expresión explica que la WT mapea isométricamente a $L^2(\mathbf{R})$ el espacio de todos los valores complejos de funciones F en \mathbf{R}^2 para los cuales $\|F\|^2 = \frac{1}{C_\psi} \iint \frac{1}{s^2} |F(\tau,s)|^2 ds d\tau$ convergen. Así es que cualquier F que pertenezca al espacio de Hilbert, puede encontrarse una función $f \in L^2(\mathbf{R})$ tal que $F=TW(f)$.

3.4 Recuperación de información mediante la función de escala

La WT, como se ha recalado es comúnmente utilizada para la identificación de eventos a altas frecuencias; por tanto, si se conocen los coeficientes para escalas menores a un s_0 , entonces deben recuperarse los valores que corresponden a los coeficientes de baja frecuencia de la señal, para así completar la información necesaria para recobrar la función original $f(t)$. Para lograr lo anterior, se implementa una *función de escala* ϕ la cual corresponde a una adición de Wavelets de escala mayor a 1 [4] que puede interpretarse como la respuesta al impulso de un filtro pasa bajos. La función de escala debe cumplir las siguientes condiciones:

$$|\Phi(\omega)|^2 = \int_1^\infty \frac{|\Phi(s\omega)|^2}{s} ds = \int_\omega^\infty \frac{|\Psi(\xi)|}{\xi} d\xi \quad (3.11)$$

De la cual se puede inferir que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\Phi(\omega)|^2 = C_\psi \quad (3.12)$$

La aproximación de las bajas frecuencias del filtro pasa bajo queda determinada por:

$$LPF f(\tau, s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \right\rangle \quad (3.13)$$

Y por tanto la reconstrucción de la señal completamente estaría establecida por

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} WT[f] \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\psi s_0} \cdot LPF[f] \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \right) d\tau \quad (3.14)$$

3.5 Discretización de la WT y reconstrucción por convoluciones discretas

Tal como en la TF, es posible considerar la WT como una relación de señales discretas a partir de la expansión de la integral que define la transformada como una sumatoria de valores discretos que representan la señal. Así, la expresión 3.4 se enunciaría en forma discreta como:

$$WT\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{n-u}{s}\right) \quad (3.15)$$

En donde \mathbf{N} representa el número de muestras de la señal a analizar $f[n]$, traslación como u para diferenciarla de su caso continuo; sin embargo, la traslación no es necesariamente discreta en algunos casos como se verá más adelante. Si es el caso, nótese que $f[n]$ debe estar muestreada a intervalos tales que se cumpla un periodo de muestreo que se encuentre entre 0 y 1, es decir: $0 < 1/\mathbf{N} < 1$. De esta manera, el cálculo de la WT queda limitado al margen de escalas determinado por $\mathbf{N}^{-1} < s < 1$. Normalmente se establece la escala de la WT discretizada como $s = a^j$, en donde $a = 2^{1/v}$, lo cual significa que se aportan v escalas intermedias por cada octava; una octava es el espacio definido entre 2^j y 2^{j+1} .

Las anteriores afirmaciones implican que el soporte de la función Wavelet, es decir: su longitud, debe caber dentro del intervalo dado por \mathbf{N} . Así, si la duración de la función Wavelet es igual a \mathbf{L} , entonces $\psi(t)$ está dentro del intervalo determinado por $-L/2 < \psi(t) < L/2$. De esta forma se cumple que las escalas pueden tomar los valores del intervalo $2 \leq a^j \leq \mathbf{NL}^{-1}$, si la escala no es mayor que 2 entonces el intervalo de muestreo puede ser más grande que el soporte de la función Wavelet.

Ya que el resultado de la WT discretizada es una representación incompleta de la señal, para la recuperación de la señal es necesario introducir las bajas frecuencias debidas a las componentes no calculadas por el efecto del muestreo. De este modo es necesario aplicar un filtro similar a 3.13, de tal manera que simplificando las expresiones 3.13 y 3.14 para el caso discreto, se tiene:

$$\phi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \phi\left(\frac{n}{a^j}\right) \quad (3.16)$$

Que representa la función escala. Si se considera que $\bar{\phi}_j[n] = \phi_j^*[-n]$ entonces el filtro pasabajo se define

$$LPF[n, a^j] = \sum_m^{N-1} f[m] \phi_j^*[m-n] = f \circledast \bar{\phi}_j[n] \quad (3.17)$$

Para reconstruir $f[n]$ se aplica 3.18, en donde la translación u_j es la variable sobre la cual se hace la convolución circular; para el caso de WT analítica se aplica 3.19

$$f[n] \approx \frac{\log_e a}{C_\Psi} \sum_{j=1}^J \frac{1}{a^j} WTf[u_i, a^j] \circledast \psi_j[n] + \frac{1}{C_\Psi a^j} LPF[n, a^j] \circledast \phi_j[n] \quad (3.18)$$

$$f[n] \approx \frac{2 \log_e a}{C_\Psi} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^J \frac{1}{a^j} WTf[u_i, a^j] \circledast \psi_j[n] \right) \quad (3.19)$$

En donde $\operatorname{Re}(x)$ son los valores reales de x

En el caso de la WT analítica no es necesario insertar la función de escala debido a que las componentes de bajas frecuencias resultantes no son lo suficientemente significativas; sin embargo, la reconstrucción de la función original de la WT por convoluciones discretas crea errores de alta frecuencia si

se le compara con su caso continuo. Es por ello que se ha desarrollado un tipo de discretización a través de “frames” que permiten mejor resolución y menores errores en el resultado final de la reconstrucción de la señal original.

3.6 FRAMES COMO METODO DE RECONSTRUCCION

Los *frames* fueron originalmente desarrollados para la reconstrucción de señales de banda limitada las cuales fueron muestreadas en intervalos irregulares.

Los *frames* se basan en la condición según la cual se puede recuperar un vector función en un espacio de Hilbert \mathbf{H} de sus productos internos con una familia de vectores tales que $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$. En donde el índice Γ puede ser finito o infinito. Teniendo en cuenta lo anterior se introduce un factor U mediante la equivalencia de energía dada por:

$$\forall_n \in \Gamma, \quad Uf [n] = \langle f, \phi_n \rangle. \quad (3.20)$$

El factor U se conoce como el operador *Frame*.

Se dice que la secuencia dada por $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un *frame* si existen dos constantes A y B las cuales cumplan la condición:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.21)$$

Esta desigualdad define una completa representación completa y estable de la señal. Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es linealmente independiente entonces se cumple que $\mathbf{A} < \mathbf{1} < \mathbf{B}$, por tanto $A=B=1$, si y solo si se cumple esta igualdad se dice que la base es ortonormal

La reconstrucción de f a partir de sus coeficientes *frame* $Uf[n]$ son calculados con un pseudo inverso que se expresa mediante un *frame* dual.

Para explicar matemáticamente lo anterior se definen los siguientes términos:

- a. $\mathbf{Im}U$ es la imagen espacial de todo Uf con $f \in H$

b. $I^2(\Gamma) = \left\{ x : \|x\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |x[n]|^2 < +\infty \right\}$

c. Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un *frame* con vectores linealmente dependientes, entonces $\text{Im}U$ está estrictamente incluida en $I^2(\Gamma)$, es decir: $\text{Im}U \subset I^2(\Gamma)$ (ver la desigualdad 3.21 la cual cumple este propósito).

d. Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un *frame* con vectores linealmente dependientes entonces U admite un número indefinido de inversos izquierdos \bar{U}^{-1} (nótese que por tanto el operador U se comporta como una matriz), es decir:

$$\forall f \in H, \quad \bar{U}^{-1}Uf = f$$

e. $\text{Im}U^\perp$ es el complemento ortogonal de $\text{Im}U$ en $I^2(\Gamma)$, el cual para vectores linealmente dependientes obliga a que $\text{Im}U^\perp \neq \{0\}$.

f. De acuerdo a las anteriores afirmaciones se dice que el pseudo inverso \tilde{U}^{-1} es aquel que cumple

$$\forall x \in \text{Im}U^\perp, \quad \tilde{U}^{-1}x = 0 \tag{3.22}$$

g. El pseudo inverso cumple que:

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$$

El *frame* dual se define como

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1}\phi_n \tag{3.23}$$

Y satisface

$$\forall f \in H, \quad \frac{1}{B}\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \tilde{\phi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|^2 \tag{3.24}$$

Para recuperar f se aplica por tanto 3.25

$$f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n = \tilde{U}^{-1}Uf \tag{3.25}$$

La cual si se estudia detalladamente no es sino un resultado derivado de la igualdad 1.15

Si en la desigualdad 3.21 se cumple que $A=B$, entonces se da que $\tilde{\phi}_n = A^{-1}\phi_n$ y la ecuación de reconstrucción se convierte en

$$f = \frac{1}{A} \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \quad (3.26)$$

3.7 REPRESENTACION DE LA WT A TRAVES DE FRAMES

Los *Frames Wavelet* tal como para otras señales se construyen mediante el muestreo de la señal a convertir. Pero en este caso la señal muestreada son los parámetros de traslación y de escala de la CWT; para ello la selección de muestras debe hacerse en todas las celdas de Heissenberg que hacen parte de la grilla del espectrograma explicado al final de la sección 3.1. Generalmente el punto de mayor energía de dichas celdas debe ser el centro de la misma; por ello se especifica que para obtener una completa cobertura de información representativa, se hace el muestreo de s a través de una secuencia exponencial a lo largo $\{a^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ con una dilatación lo suficientemente pequeña tal que $a > 1$, esto se visualiza en la figura 31. La escala temporal es muestreada en intervalos proporcionales a a^j . De esta manera se da la ecuación 3.26.

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{a^j} \psi\left(\frac{t - nu_0 a^j}{a^j}\right) \quad (3.27)$$

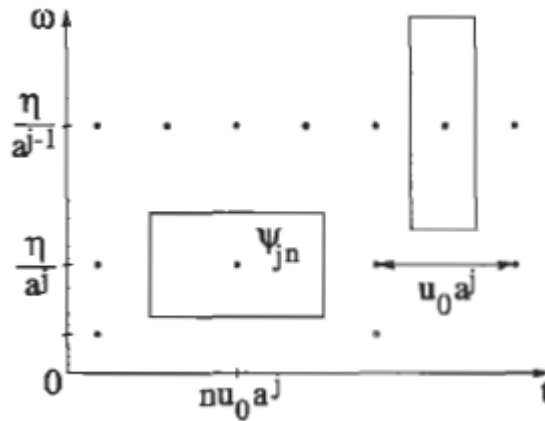
Existe un teorema propuesto por Daubechies desde el cual se especifica el principio de operatividad de la WT como *frame* el cual define lo siguiente:

TEOREMA: Si $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ es un *frame* de $L^2(\mathbb{R})$ entonces los límites del *frame* (A y B) satisfacen a 3.28 y 3.29

$$A \leq \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} \leq B \quad (3.28)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad A \leq \frac{1}{u_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 \leq B \quad (3.29)$$

Figura 31. Representación de un *frame* Wavelet



Fuente: MALLAT, Stéphane. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company. Elsevier Science. 1999.

Las condiciones dadas por el anterior teorema son suficientes para reconstruir una representación completa y estable de la señal si el parámetro u de traslación no es muestreado. De acuerdo a lo anterior y a lo visto en la sección de definición de *frames* se dice que el *frame* resultante es ortonormal si se cumple estrictamente la condición:

$$A = B \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} = 1$$

Debido a que no todas las selecciones de Wavelet ψ , a_0 , u_0 permiten generar *frames* de Wavelet, incluso si se cumple la condición de admisibilidad; para determinar los valores de A y B fácilmente, un método desarrollado también por Daubechies dice que:

TEOREMA: Para determinar A_0 y B_0 los cuales son respectivamente el límite más bajo posible por el *frame* y el límite más alto posible del mismo; se computa mediante los siguientes pasos para obtener 3.30 y 3.31:

- a. Se determina el valor β

$$\beta(\zeta) = \sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(a^j \omega)| |\Psi(a^j \omega + \zeta)|$$

- b. Se establece Δ

$$\Delta = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \left[\beta\left(\frac{2\pi k}{u_0}\right) \beta\left(\frac{-2\pi k}{u_0}\right) \right]^{1/2}$$

c. Se determinan A_0 y B_0

$$A_0 = \frac{1}{u_0} \left(\inf_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(a^j \omega)|^2 - \Delta \right) > 0 \quad (3.30)$$

$$B_0 = \frac{1}{u_0} \left(\sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(a^j \omega)|^2 + \Delta \right) < +\infty \quad (3.31)$$

En el caso de que $\Delta \ll \inf_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(a^j \omega)|^2$ entonces se afirma que A_0 y B_0 se

encuentran cerca a los valores óptimos de A y B . Recuérdese que la representación de un *frame* Wavelet se representa tal como se muestra en la figura 31.

3.8 TRANSFORMADA WAVELET DIADICA

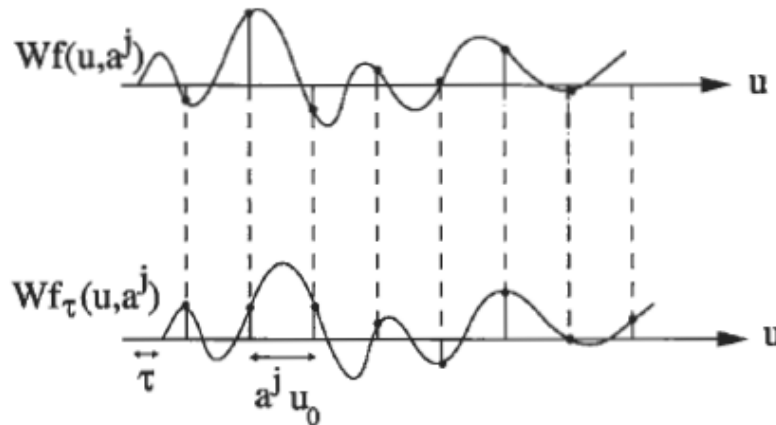
Para aplicaciones de reconocimiento de patrones es importante construir representaciones de la señal que sean invariantes de la translación. La CWT es un ejemplo de este tipo de representación, sin embargo si se realiza un muestreo uniforme del factor de translación u_0 esta propiedad no se sigue cumpliendo. Cuando un patrón se traslada sus descriptores numéricos deben trasladarse también pero nunca modificarse; si el valor trasladado no es múltiplo del intervalo de muestreo de u_0 entonces el valor de los coeficientes en dicho punto no es el mismo y por tanto varia su descripción por el método realizado.

Este efecto se visualiza en la figura 32, en este caso se han calculado los coeficientes Wavelet para una escala a^j cualquiera, en la cual se realiza un muestreo con intervalos dados por $a^j u_0$, para ver su efecto se ejecuta una translación a la misma señal por un valor igual a τ que es diferente de $ka^j u_0$, en donde k es cualquier constante entera positiva. Como puede observarse que los valores obtenidos por el mismo muestreo son completamente distintos a los extraídos en el muestreo antes de practicar la translación. Esto significa que los descriptores numéricos de la señal cambiaron al realizar este corrimiento en el tiempo.

Matemáticamente lo anterior se describe como:

Si $f_\tau(t) = f(t - \tau) \Rightarrow Wf_\tau(u, a^j) = Wf(u - \tau, a^j)$, muestreando de manera uniforme a $Wf_\tau(u, a^j)$ y $Wf(u, a^j)$ con $u = na^j u_0$ pueden existir diversos valores de τ tales que $\tau \neq kna^j u_0$ lo cual dará a lugar que $Wf_\tau(u, a^j) \neq Wf(u, a^j)$

Figura 32. Efecto de la traslación den la WT



Fuente: MALLAT, Stéphane. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company. Elsevier Science. 1999.

La transformada Wavelet diádica es una representación de discretizada de la CWT que es invariante de la traslación. Esta se logra si el valor de traslación no es muestreado pero la escala s si lo es a lo largo de una escala diádica determinada por $\{2^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, lo cual simplifica el cómputo. Matemáticamente se representa como 3.32.

$$Wf(u, 2^j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{t-u}{2^j} \right) dt = f * \bar{\psi}_{2^j}(u) \quad (3.32)$$

En donde

$$\bar{\psi}_{2^j}(u) = \psi_{2^j}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left(\frac{-t}{2^j} \right) \quad (3.33)$$

Para recuperar la señal original f deben aplicarse las condiciones de *frame* que la definen como una representación completa y estable propuestas en el siguiente teorema [4]:

TEOREMA: Si existen dos valores constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que:

$$\forall \omega \in R - \{0\}, \quad A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\Psi(2^j \omega)|^2 \leq B \quad (3.34)$$

Entonces se cumple de acuerdo a 3.21

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \|Wf(u, 2^j)\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3.35)$$

Si el pseudo inverso $\tilde{\psi}$ cumple

$$\forall \omega \in R - \{0\}, \quad A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Psi^*(2^j \omega) \tilde{\Psi}^*(2^j \omega) = 1 \quad (3.36)$$

Entonces

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} Wf(u, 2^j) * \tilde{\psi}_{2^j}(t) \quad (3.37)$$

3.9 TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

La discretización de la CWT de la cual se ha hablado anteriormente realmente no corresponde a lo que se denomina Transformada Wavelet discreta (DWT por sus siglas en inglés) debido a que aunque la CWT puede trabajarse discretizadamente, se mantienen en la solución una gran cantidad de valores que son redundantes en el análisis y a su vez hacen más lento su computación; sucede lo mismo pero con menor medida con los *frames* Wavelet ya que son una versión optimizada de la CWT pero mantiene información redundante en su solución. La DWT permite entregar la información estrictamente necesaria para analizar correctamente la señal y así mismo permitir que sea reconstruida, Sin embargo, la información del resultado de la Wavelet no es redundante y por tanto sacrifica el detalle de escalas correspondientes a eventos de baja frecuencia para permitir una mayor rapidez computacional.

La DWT se realiza mediante la aplicación del análisis multiresolución a través de filtros digitales llamados filtros de espejo conjugado (*conjugate mirror filters*) los cuales poseen las propiedades de la Wavelet madre original.

3.9.1 Aproximaciones multiresolución La transformada discreta Wavelet parte de la conversión de las bases Wavelet como generadoras de bases

ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ para el desarrollo de un análisis multiresolución de la señal que se está analizando. El análisis multiresolución de una señal realiza una serie de aproximaciones a la señal original f a partir de la sumatoria general de una señal (que puede ser la misma u otra diferente) en diferentes escalas. En otras palabras para la definición anterior, mediante la aplicación del análisis multiresolución (MRA por sus siglas en inglés) puede dividirse una señal muy compleja en funciones más simples de analizar a diferentes escalas de la misma para así estudiarlas separadamente.

Las aproximaciones multiresolución calculan la aproximación de señales a varias resoluciones con proyecciones ortogonales sobre diferentes espacios $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Esto es de suma importancia teniendo en cuenta que las Wavelets ortogonales pueden tomarse como una aproximación multiresolución. Para entenderse lo anterior recuerde que del capítulo 1 tomando la ecuación 1.16 se permite representar a $f \in L^2(\mathbb{R})$ como una suma parcial de coeficientes Wavelet.

$$f[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (3.38)$$

Lo cual admite interpretarse como la diferencia entre dos aproximaciones de f entre las resoluciones 2^{j+1} y 2^j y que a su vez cumple la definición de la aproximación multiresolución [4].

En la sección anterior se explicó que en los *frame* Wavelet la aproximación de una función f a una resolución 2^j está especificada por una serie discreta de muestras que representan el promedio de su vecindario con tamaño proporcional a 2^j tal como lo muestra la figura 31. En la nominación anterior se le llama el parámetro de escala a 2^j y a su inverso 2^{-j} se le denomina resolución.

3.9.2 La función de escala Una aproximación de f en cualquier resolución 2^j se define como la proyección ortogonal de una función $\mathbf{Pv}_j f$ sobre el espacio \mathbf{V}_j (es decir, 2^j equivale a \mathbf{Pv}_j , y que a su vez es denominada como la aproximación de f a la escala 2^j). Para ello se debe establecer una base ortogonal en cada espacio \mathbf{V}_j mediante la dilatación y translación de una función ϕ a la cual se le denomina la *función de escala*. La función de escala debe cumplir que:

$$\Phi(\omega) = \frac{\theta(\omega)}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\theta(\omega + 2k\pi)|^2}} \quad (3.39)$$

En donde $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es denominado la base de Riesz. Si se cumple lo anterior entonces puede establecerse que

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right) \quad (3.40)$$

Formando así una familia $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que es ortogonal a cada subespacio \mathbf{V}_j .

El anterior principio es fundamental en el desarrollo de la DWT ya que los filtros de espejo conjugado se forman a partir de esta ecuación.

3.9.3 Filtro de espejo conjugado La DWT se realiza mediante la implementación de filtros de media banda que poseen las características originales de la Wavelet madre. Estos filtros deben ser del tipo espejo conjugado, los cuales resultan de la función de escala descrita anteriormente ya que esta función caracteriza completamente la aproximación multiresolución que requiere hacerse en la DWT. De la anterior relación matemáticamente se infiere que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n) \quad (3.41)$$

Y por propiedades de los campos vectoriales.

$$h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle \quad (3.42)$$

En la anterior ecuación a la secuencia $h[n]$ se entiende como un filtro discreto. Sin embargo, para que dicho filtro sea considerado como conjugado en espejo debe cumplir la siguiente condición en donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de $h[n]$:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 2, \text{ en donde } H(0) = \sqrt{2} \quad (3.43)$$

Este tipo de filtros hacen posibles descomponer señales discretas en bandas separadas de frecuencia mediante el análisis multiresolución.

La transformada Wavelet original, si es construida con bases orthonormales implica el aumento de la resolución en la aproximación de la señal, su respuesta en frecuencia de la función también involucra que se establezca en términos de la respuesta de la función escala ϕ , así:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} g'\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.44)$$

En donde,

$$g'(\omega) = e^{-\omega i} H^*(\omega + \pi) \quad (3.45)$$

Este factor $g[n]$ es de suma importancia ya que si se calcula la transformada inversa de Fourier de la anterior expresión resulta:

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n] \quad (3.46)$$

Que representa el filtro en espejo conjugado de $h[n]$. No puede obviarse la relación lógica entre $g[n]$ y la función Wavelet que se establece como el producto interno entre ϕ y ψ .

$$g[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle \quad (3.47)$$

Que puede sobreescribirse como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \phi(t-n) \quad (3.48)$$

Nótese que al comparar $g[n]$ y $h[n]$ se encuentran en correspondencia con $\psi[n]$ y $\phi[n]$. Repasando las expresiones anteriores se observa:

$h[n]$	$g[n]$
$h[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle$	$g[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n] \phi(t-n)$
$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$	$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n]$$

3.9.4 Elección de la base ortonormal indicada Para construir una Wavelet es necesario saber para que aplicación se utilizará; sin embargo, como

normalmente no se busca construir una nueva Wavelet sino utilizar las que ya son comunes y aplicarla a un análisis en específico; entonces es necesario saber cuales fueron las características con que fue construida la función Wavelet que se va a utilizar para el análisis.

La aproximación determinada por una función Wavelet varía de acuerdo a tres parámetros en especial: Los momentos desvanecientes que posee, el tamaño de soporte y la regularidad de la misma.

- **Momentos desvanecientes:** En una señal que es o tiende a ser estacionaria, en la cual se presentan singularidades espaciadas entre si en intervalos que mantienen la regularidad; es conveniente entonces producir pocos coeficientes Wavelet de gran amplitud en bandas de alta resolución, para así, no establecer información redundante debido a la regularidad de la señal.

Para que los coeficientes de alta resolución mantengan dichos coeficientes de baja amplitud, se debe escoger un Wavelet de análisis que posea una mayor cantidad de momentos desvanecientes. Una función ψ tiene p momentos desvanecientes si se cumple la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \text{para } 0 \leq k < p \quad (3.49)$$

Matemáticamente la anterior expresión establece que ψ es ortogonal a cualquier polinomio de grado $p - 1$. Los momentos desvanecientes hacen posible analizar la regularidad local de una señal.

- **Tamaño de soporte:** Téngase en cuenta que el soporte de la función Wavelet corresponde a la longitud temporal de la misma; si existe una singularidad de la señal dentro del intervalo que comprende el soporte de la Wavelet, es decir, si hay un evento en el instante t_n y este instante t_n esta dentro del intervalo del soporte; entonces la amplitud del coeficiente $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ será de un alto valor. De esta manera, si el soporte de la función Wavelet no es lo suficientemente corto, por efecto de la traslación en n de la función ψ , se producirán una gran cantidad de coeficientes en una misma escala j correspondientes a la misma singularidad en t_n , por tanto, se tendrá una cantidad de información excesiva para un solo evento. Para reducir el número de altas amplitudes en los coeficientes Wavelet se debe reducir el soporte de la función Wavelet que hace el análisis.

Se expresa que ϕ tiene soporte compacto si y sólo si h tiene soporte compacto y este es igual al de ϕ ; entonces si el soporte de h y de ϕ es $[N_1, N_2]$ entonces el soporte de ψ es igual a $[(N_1 - N_2 + 1)/2, (N_1 + N_2 + 1)/2]$.

- **Regularidad:** Es el error que se introduce en la reconstrucción de la señal f al realizar la cuantización de los coeficientes Wavelet

Al escoger una Wavelet se intenta hacer un equilibrio entre los momentos desvanecientes y la talla del soporte. Se busca generar muchos momentos desvanecientes cuando las singularidades de f están aisladas en espacios regulares, en cambio, si son muchas singularidades el numero de momentos desvanecientes debe ser menor y así disminuir el tamaño del soporte para que los coeficientes definan de mejor manera la ubicación de dichas singularidades.

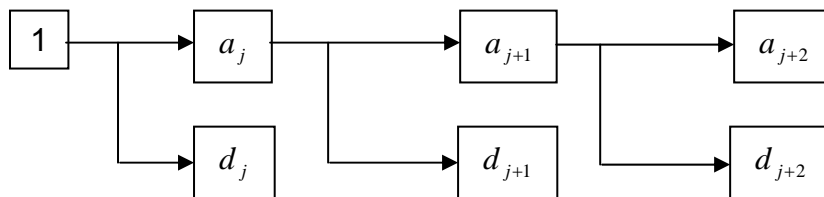
3.9.5 Algoritmo de cálculo de la DWT La transformada discreta Wavelet se calcula mediante un algoritmo rápido en el que se combinan la utilización de bancos de filtro determinados por $h[n]$ y $g[n]$, a este proceso se le denomina también codificación de sub-bandas.

El proceso del análisis multiresolución es verdaderamente simple de realizar; en este, se le aplican dos filtros de media banda a la señal original, uno pasa altos y otro pasa bajos, a continuación, a los resultados de estos filtros se les aplica la misma operación tantos niveles como se deseen. Cada vez que se haga un proceso de filtrado se determina un nivel siguiente de coeficientes Wavelet, aquellos que resulten del filtro pasa bajos se denominan coeficientes de aproximación (a_j), a su contraparte del filtro pasa altos se les llama coeficientes de detalle (d_j).

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad y \quad b_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (3.50)$$

De acuerdo a lo anterior la señal $f[n]$ se descompone mediante una serie de filtros en cascada que gráficamente se representaría como sigue:

Figura 33. Descomposición multiresolución en la DWT



El cálculo de filtro se realiza mediante la convolución discreta con $h[n]$ y $g[n]$ tal como se muestra a continuación

Si $x[-n] = \bar{x}[n]$ entonces

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} \quad (3.51)$$

Los filtros se determinan por

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p] \quad (3.52)$$

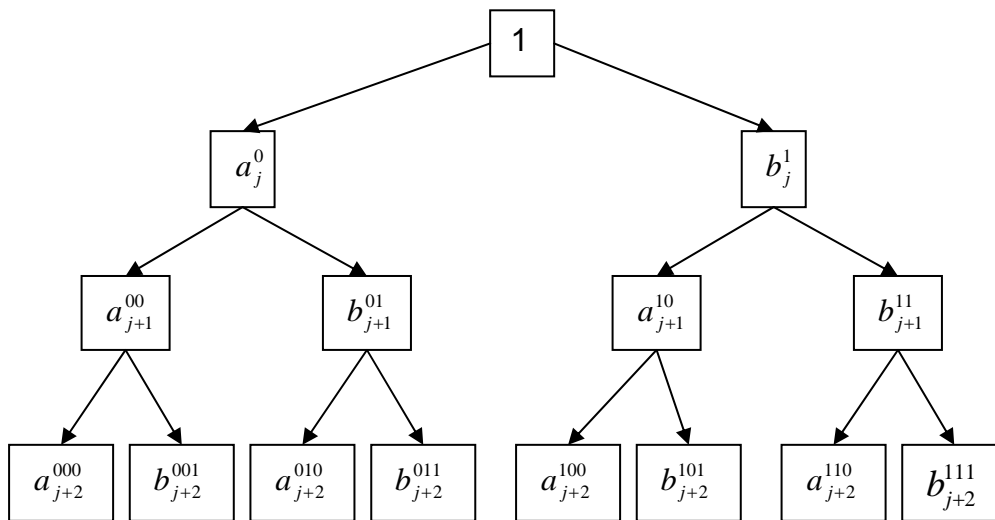
$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p] \quad (3.53)$$

Para la reconstrucción se usa:

$$\begin{aligned} a[p] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + g[p-2n]d_{j+1}[n] \\ &= a_{j+1} * h[p] + d_{j+1} * g[p] \end{aligned} \quad (3.54)$$

En la anterior decodificación, el análisis del siguiente nivel se le hace a la banda de baja frecuencia, sin embargo este puede hacerse a cualquiera de las dos bandas; en este caso el análisis es llamado encaminamiento Wavelet (*Wavelet Path*); normalmente dicho análisis es utilizado para analizar bandas de frecuencia muy acotadas, este análisis también es denominado Banco de filtros Wavelet.

Figura 33. Descomposición multiresolución mediante el banco de filtros o encaminamiento Wavelet

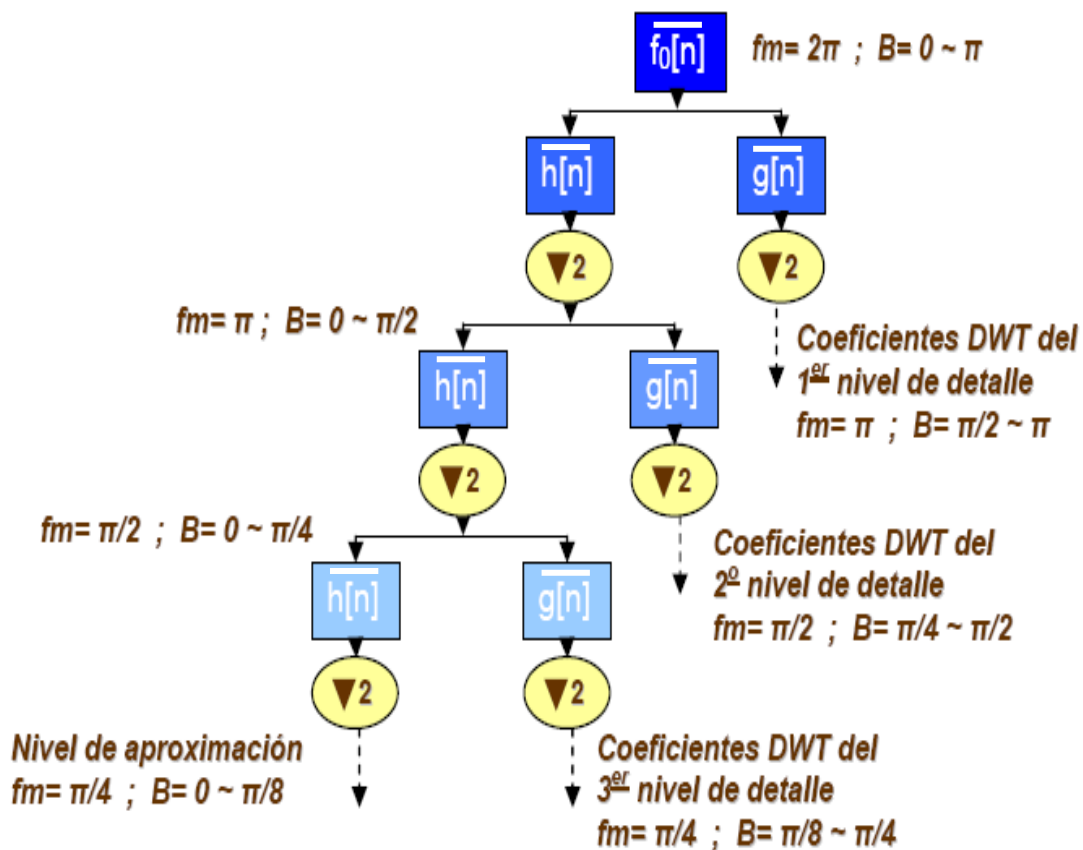


Luego de determinar los coeficientes Wavelet de cada nivel, el resultado tiene una longitud de muestras igual a su nivel antecesor, es decir, si a_j posee N muestras, entonces a_{j+1} y b_{j+1} poseerán también N muestras. La anterior

característica puede ser útil en algunas aplicaciones; sin embargo, posee el inconveniente de que esto produce redundancia en el resultado cada vez que se avanza de nivel.

Para evitar el efecto de redundancia en el resultado final del análisis multiresolución por codificación de sub-bandas, cada vez que se avance un nivel de descomposición, se realiza un sub-muestreo por dos de la totalidad de las muestras; es decir, se eliminan la mitad de las muestras reduciendo así la resolución cada vez que aumenta el nivel. Esta modificación se puede ejecutar por que siempre se mantendrá el principio de Nyquist y por ende, no se pierde información en el submuestreo. En la siguiente imagen se demuestra tal afirmación, nótese que la frecuencia de muestreo siempre va a cumplir el principio de Nyquist cubriendo su respectivo ancho de frecuencia B

Figura 35. Representación de la descomposición de la DWT con su efecto en la frecuencia

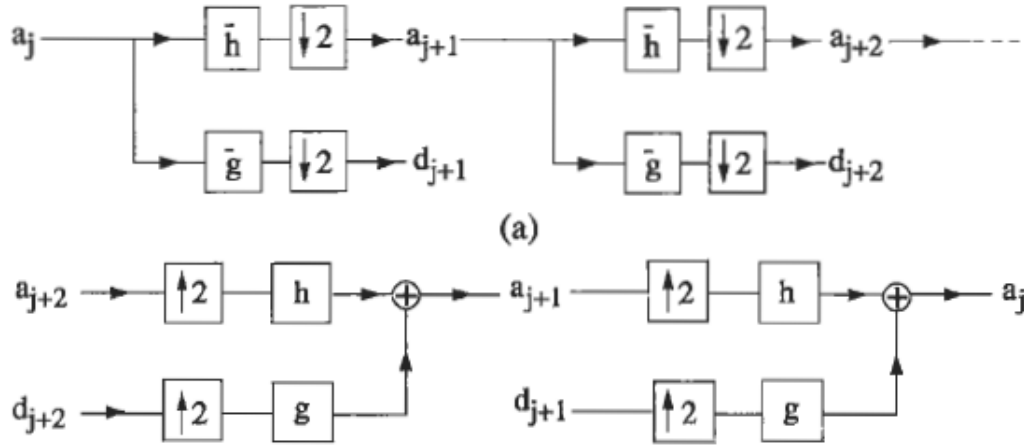


Fuente: ANDRADE M, Sandra M., NAVARRETE M, Miguel G. Análisis y tratamiento de la señal electrocardiográfica para la detección de parámetros de normalidad bajo la plataforma labview "ADPAN-ECG". Tesis de grado. Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga. Facultad de Ingeniería Electrónica. 2006.

Este proceso de descomposición si se hace hasta su límite llegará a un nivel en el que los coeficientes de aproximación y de detalle tengan una longitud de muestras igual a la unidad.

Las ecuaciones 3.51 a 3.54 se implementan en el cálculo de la DWT tal como lo demuestra la figura a continuación.

Figura 36. Análisis y síntesis de la DWT



Fuente: MALLAT, Stéphane. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company. Elsevier Science. 1999.

Téngase en cuenta que para que el número de muestras en el último nivel de descomposición sea igual a la unidad, entonces el soporte de la señal original debe ser par, aún es mejor si el soporte tiene un número de muestras igual a 2^n debido a que permitiría una escala diádica exacta.

El resultado final de este tipo de análisis es un vector de longitud igual al número de muestras de la señal original, este vector resultado se ordena tal como lo muestra la siguiente expresión

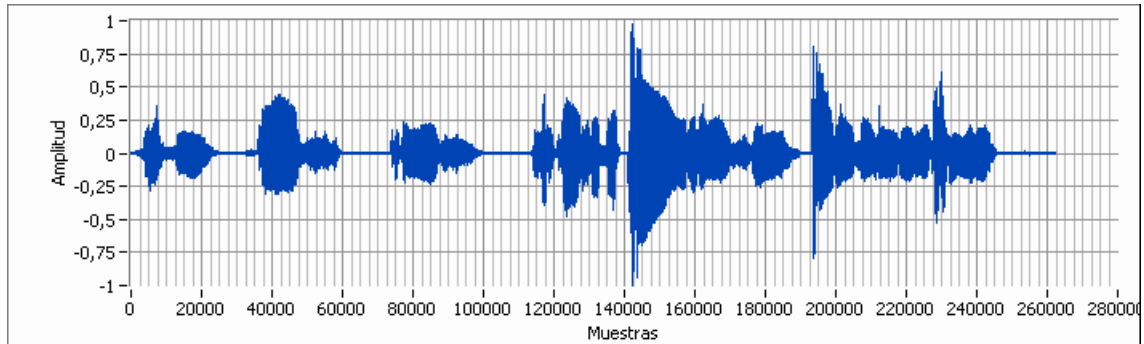
$$DWT = (a_{j+n}, d_{j+n}, d_{j+n-1}, d_{j+n-2}, \dots, d_j) \quad (3.55)$$

El concepto anterior se ejemplificará con la señal de voz que se presenta en la figura 37.a, la cual se analiza mediante la DWT con Wavelet madre symlet-3. En este caso $f[n]$ presenta 262.144 muestras de longitud, valor que equivale a 2^{18} , el resultado final de los coeficientes DWT es un vector de igual longitud a $f[n]$ con 262.144 muestras de longitud también.

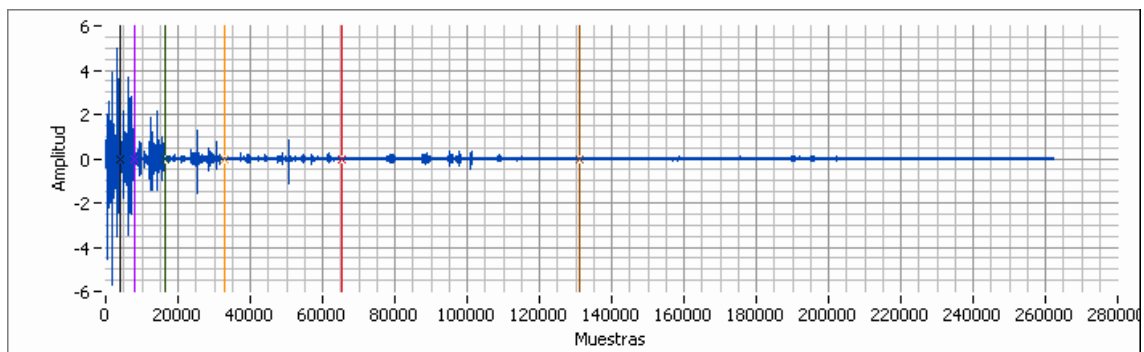
Para el resultado de la DWT (Figura 36.b) la muestra 131.072 hasta la final representa a d_j (Primer nivel de descomposición); de la muestra 65.536 hasta la muestra 131.071 representa a d_{j+1} (Segundo nivel de descomposición); desde la muestra 32.768 hasta la muestra 65.535 representa a d_{j+2} (Tercer nivel de descomposición); así sucesivamente hasta que se tiene una sola muestra para a_{j+17} y d_{j+17} el cual representa al 18° y último nivel de descomposición para esta cantidad de muestras de $f[n]$.

Se observa una línea de color en el corte de los primeros seis niveles de descomposición del resultado de la DWT de la figura 37.a

Figura 37. Ejemplificación del resultado del análisis DWT en una señal de voz



(a)



(b)

Si en el proceso de las comunicaciones la información o el mensaje a transmitirse son tratados como una señal electromagnética, de sonido o de datos. La transformada Wavelet unidimensional se aplica entonces a las telecomunicaciones al aprovechar sus características en el procesamiento de las señales; así, es posible manipular cualquier señal a ser transmitida mediante esta herramienta. Comúnmente la WT es utilizada en telecomunicaciones en procesos de filtrado, compresión de datos, en reconocimiento de patrones, como herramienta de soporte para el análisis de tráfico, en la codificación de datos para líneas VDSL y otras más aplicaciones que continuamente surgen. Si embargo, como ésta transformada es una herramienta relativamente nueva, entonces existen una gran variedad de métodos para realizar cada una de las aplicaciones nombradas debido a que se están realizando continuos estudios de cada una de ellas mediante el uso de la WT.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- La Transformada Wavelet unidimensional es una herramienta matemática útil en las telecomunicaciones ya que al partir del procesamiento de la señal puede aplicarse en varias etapas del proceso de comunicación. Así, como señal se puede analizar el mensaje propiamente dicho, la señal modulada, la señal radiada, todo ello tanto en el proceso de enviar el mensaje como en el proceso de recibirlo. En todos los pasos de la comunicación podría ser aplicada a una u otra función.
- La transformada Wavelet es un proceso de análisis tiempo-escala en donde el análisis de escala está estrechamente relacionado con el análisis de frecuencia, sin embargo, es de suma importancia no confundir la escala con la frecuencia en un análisis Wavelet. La escala tiene una relación inversamente proporcional a la frecuencia, más no es el inverso de la frecuencia del análisis Wavelet
- El análisis Wavelet es un proceso fácil de aplicar en una señal unidimensional cuando si se utilizan Wavelet madre ya creadas o filtros $h[n]$ y $g[n]$ ya establecidos. Sin embargo, el proceso de crear una Wavelet o sus filtros correspondientes es de alta complejidad matemática debido a las condiciones matemáticas que se deben cumplir para que la función creada sea considerada como Wavelet madre o como filtros Wavelet.
- La transformada continua Wavelet es una herramienta de muy lenta computación debido a la cantidad de datos que genera su resultado, sin embargo contiene una mayor cantidad de información que la que puede ser entregada con un algoritmo más rápido como el de la DWT. Así pues, si se necesita un análisis muy detallado de la señal sin importar el tiempo que dure el procesamiento es recomendable aplicar la CWT; en caso contrario, en donde es más importante la velocidad del análisis y que el resultado entregado sea estrictamente el necesario, como por ejemplo situaciones de procesamiento en tiempo real, entonces es mejor pensar en un análisis por medio de la DWT.
- La calidad y utilidad dada por los resultados del análisis por medio de la transformada Wavelet depende en gran parte de cuál fue la Wavelet madre o filtro Wavelet escogidos para realizar el análisis. Es por tanto, que cuando se necesite hacer un estudio a través de la WT es de gran importancia realizar un análisis previo de una variedad de Wavelets diferentes. Téngase en cuenta que para distintas aplicaciones sobre una misma señal pueden requerirse distintas Wavelets diferentes.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANTON, Howard. Introducción al álgebra Lineal. Limusa-Noriega. México. 2000
- [2] FRAZIER, Michael W. An introduction to wavelets through linear algebra. Springer-Verlag. 1999
- [3] MARTÍNEZ, Julio. Análisis de la teoría de ondículas orientadas a las aplicaciones en ingeniería eléctrica: fundamentos. España, 2002. Universidad Politécnica de Madrid, ETSI industriales, departamento de ingeniería eléctrica.
- [4] MALLAT, Stéphane. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press. A Harcourt Science and Technology Company. Elsevier Science. 1999.
- [5] DAUBECHIES, Ingrid. Ten Lectures on Wavelets. vol. 61 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [6] HUBBARD, Barbara B. The world according to Wavelets, The history of a mathematical technique in the making. A K Peters Ltd. Wellesley Massachusetts. 1996.
- [7] STARK, Hans-Georg. Wavelets and signal processing. Springer-Verlag. 2005.
- [8] HERNANDEZ E, WEISS G. A First Course on Wavelet. CRC Press, 1996.
- [9] TANG, Yuan Y., WICKERHOUSER, Victor, YUEN, Pong C., LI, Chu-Hung. Wavelet analisis and its aplicaciones. Springer-Verlag. 2001.
- [10] ANDRADE M, Sandra M., NAVARRETE M, Miguel G. Análisis y tratamiento de la señal electrocardiográfica para la detección de parámetros de normalidad bajo la plataforma labview "ADPAN-ECG". Tesis de grado. Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga. Facultad de Ingeniería Electrónica. 2006.