

APLICACIÓN DE FUNCIONES DE BASE RADIAL (RBF) PARA LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP) QUE APARECEN EN
PROBLEMAS DE FLUIDOS

MAURICIO DE JESÚS PÉREZ LUJÁN

Tesis para optar por el título de Magister en Ciencias Naturales y Matemáticas

Asesor
WHADY FELIPE ESCOBAR FLÓREZ,
Doctor En Mecánica Computacional

UNIVERSIDAD PONTIFICA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
MEDELLÍN
2016

Julio de 2016

Mauricio De Jesús Pérez Luján

“Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad” Art 82 Régimen discente de Formación Avanzada

Firma: _____

DEDICATORIA

A mi esposa y mi hija por su apoyo incondicional en este proceso, por la paciencia y sacrificio, por estar a mi lado cuando más lo necesité, las amo. A mis padres (en el lugar que estén) por darme la vida, a todos y cada uno de mis docentes desde la escuela hasta la maestría, por aportar ese grano de arena en mi formación, a ellos mi eterna admiración y gratitud; a mis familiares y amigos porque de una u otra forma me han aportado momentos y enseñanzas valiosas que me hacen único.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS	5
ÍNDICE DE GRÁFICOS	6
RESUMEN	8
INTRODUCCIÓN	9
1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	11
2. JUSTIFICACIÓN	12
3. OBJETIVOS	13
3.1. OBJETIVO GENERAL	13
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
4. MARCO REFERENCIAL	14
4.1. MÉTODOS NUMÉRICOS SIN MALLA	14
4.2. MÉTODO DE KANSA	16
5. DISEÑO METODOLÓGICO	18
6. RESULTADOS Y ANALISIS	19
6.1. LAS RBF	19
6.1.1. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL POR MEDIO DE LAS RBFs	19
6.1.2. SOLUCIÓN DE EDP POR MEDIO DE RBFs	22
6.2. PRESENTACIÓN GRAFICA DE LA REVISIÓN DE ARTÍCULOS	24
6.3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN LA FORMA VELOCIDAD- PRESIÓN	27
6.3.1. MÉTODO PURO	27
6.3.2. MÉTODO DE COLOCACIÓN MAPS	36
6.3.3. MÉTODO DQ-RBF	45
6.3.4. MÉTODO IRBF	48
6.3.5. MÉTODO IB	51
6.3.6. MÉTODO FD	54
6.4. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN LA FORMA FUNCIÓN DE CORRIENTE-VORTICIDAD.	59
6.4.1. MÉTODO PURO PARA RBFS CON COLOCACIÓN GLOBAL	59
6.4.2. MÉTODO DQ-RBF	65
6.4.3. MÉTODO IRBFN	66
6.4.4. MÉTODO FD	68
6.5. ECUACIONES NAVIER-STOKES EN LA FORMA VORTICIDAD- VELOCIDAD	71
6.5.1. MÉTODO DE DQ-RBF	71
6.5.2. MÉTODO LMAPS	73
6.5.3. MÉTODO IRBF	77
7. CONCLUSIONES	80
8. RECOMENDACIONES	82
BIBLIOGRAFÍA	83

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 coordenadas de puntos a interpolar	21
Tabla 2 algunos valores hallados con método de Kansa comparado con los valores exactos de (17)tomado de [10]	24
Tabla 3 condiciones límite de los problemas de flujo de Couette y del canal con fluido	28
Tabla 4 condiciones de frontera para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes tomado de [26]	34
Tabla 5 tiempos para el FVM y la solución localizada sin malla para diferentes distribuciones de puntos tomado de [26]	35
Tabla 6 perfil de la velocidad horizontal mínima a lo largo del línea vertical central para $Re=1000$, el error relativo se tomó con base a la solución de Benchmark , tomado de [30]	50
Tabla 7 comparación de los datos experimentales con tres referencias pertenecientes a la literatura para $Re= 30$, tomado de [32]	53
Tabla 8 malla óptima para lograr el resultado con la mejor exactitud tomado de [31]	57
Tabla 9 resultados y errores al implementar el método numérico dado en (94) tomado de [35]	60

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Fig. 1 interpolación de puntos con RBF, elaborado con Geogebra	21
Fig. 2 región a interpolar, los puntos seleccionados están en rojo; elaborado en Geogebra ..	22
Fig. 3 RBF usadas en artículos analizados	25
Fig. 4 gráfico ecuaciones hidrodinámicas utilizadas en artículos analizados.....	25
Fig. 5 gráfico año publicación de los artículos analizados	26
Fig. 6 gráfico revista donde se publicaron los artículos analizados	26
Fig. 7 gráfico buscadores donde se hallaron los artículos analizados	27
Fig. 8 Vector velocidad sin gradiente al usar RBF vs la representación exacta tomado de [9]	29
Fig. 9 vector velocidad con gradiente al usar RBF vs la representación exacta tomado de [9]	29
Fig. 10 Canal sin obstáculo al usar RBF vs CFD tomado de [9].....	29
Fig. 11 canal con obstáculo al usar RBF vs CFD tomado de [9]	30
Fig. 12 esquema de flujo de Couette, tomado de [25].....	32
Fig. 13 esquema y condiciones de frontera para lid-driven cavity flow tomado de [25]	33
Fig. 14 líneas de corriente par Re equivalente a 100, 1000 y 3200 respectivamente tomado de [25]	33
Fig. 15 magnitud del vector velocidad y magnitud con FVM y meshless tomado de [26]....	36
Fig. 16 perfil de velocidad distancias en $x=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ m FVM líneas continuas, meshless puntos tomado de [26].....	36
Fig. 17 distribución de puntos en la superficie, oscuros internos y blancos frontera tomado de [27].....	38
Fig. 18 componente μ_1 de velocidad, analítica(superior) numérica(inferior) para valores de Re= 10, 100, 1000 respectivamente tomado de [27]	39
Fig. 19 condiciones de contorno para la velocidad en el lid-driven cavity flow tomado de [11]	42
Fig. 20 campo de velocidad para el lid-driven cavity flow, tomado de [11].....	42
Fig. 21 comparaciones de los valores de velocidad u_1 en $x_2=0,5$ y u_2 en $x_1=0,5$ entre varias distribuciones nodales y algunos métodos al aplicar CFD tomado de [11]	43
Fig. 22 líneas de corriente tomado de [28]	44
Fig. 23 comportamiento del fluido en una relación de 2:1 tomado de [28]	45
Fig. 24 diferentes canales con obstáculos usados en el análisis del método upwind RBF-DQ tomado de [29].....	46
Fig. 25 vector de velocidad para el canal con tres obstáculos y diferentes valores de Re, tomado de [29].....	48
Fig. 26 velocidad horizontal en la línea central vertical , para Re= 1000, tomado de [30]....	50
Fig. 27 contornos de velocidad para Re= 30 y Re= 185 respectivamente, tomado de[32]	53
Fig. 28 simulaciones con varios parámetros de forma y varias RBF, tomado de [31].....	55
Fig. 29 campo de velocidad en rejillas uniforme y aleatoria comparado con literatura existente, tomado de [31]	57
Fig. 30 comparación parámetro fijo y ASP respecto a la literatura existente, tomado de [31]	58
Fig. 31 representación del esquema del método tomado de [7]	62

Fig. 32 contorno de función de corriente y vorticidad para distribución uniforme de 31x31 puntos para $Re=0$, tomado de [7]	64
Fig. 33 contorno de función de corriente y vorticidad para distribución aleatoria de 31x31 puntos para $Re=0$, tomado de [7]	64
Fig. 34 perfil de velocidad en las componentes x e y , MQ-DQ vs Ghia tomado de [33]	66
Fig. 35 simulaciones de la función de corriente y la vorticidad respectivamente para un $Re=3200$ en una malla de 91 x 91, tomado de [34]	68
Fig. 36 vorticidad en el contorno al usar puntos fantasmas, tomado de [36]	69
Fig. 37 (a) función de corriente y (b) vorticidad para el RBF-FD con un $Re=0$, tomado de [36]	70
Fig. 38 líneas de corriente para (a) $Re= 400$ y (b) $Re= 1000$ con el RBF-FD método, tomado de [36].....	70
Fig.39 nodos irregulares para el método de MQ-DQ tomado de [37].....	72
Fig. 40 vorticidad para $Re=10, 100$ y 1000 respectivamente problema de Kovasznay, tomado de [38].....	76
Fig. 41 porcentaje de error promedio para u_1 y u_2 contra numero de puntos, tomado de [39]	78
Fig. 42 formación de vórtices con diferentes Re , tomado de [39]	79

RESUMEN

En este trabajo se realiza una revisión sobre la utilización de las funciones de base radial (RBF), en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que modelan fenómenos propios de la mecánica de fluidos. Para ello se realizó la vigilancia tecnológica de las RBF implementadas en la mecánica de fluidos, en esta búsqueda se obtienen un total de 100 resultados relacionados con los temas mencionados, de los cuales se decanta por 18 entradas para realiza el análisis de las diferentes RBF que se han utilizado en la solución de problemas de fluidos incomprensibles que se modelan a través de las ecuaciones de Navier-Stokes y las ventajas que se han obtenido al usar este método numérico en la solución directa o indirecta de dichas ecuaciones. En la construcción de esta revisión se hallan diferentes métodos numéricos; fruto de las combinaciones de diferentes métodos con y sin malla unidos a las RBF como son Diferencias Finitas (FD), Método de Soluciones Particulares Aproximadas (MAPS), RBF integradas (IRBF), Cuadratura Diferencial (DQ) entre otros. A lo largo del desarrollo del trabajo se halló que las métodos implementados en la solución de diferentes problemas como el de flujo de Poiseuille, el flujo de Couette, o el lid-driven cavity flow, generan soluciones que están acorde con los resultados conocidos por soluciones previas halladas de forma analítica o por métodos numéricos reportados en la literatura.

Palabras claves: Métodos libre de malla, RBF, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Mecánica de Fluidos, Fluidos incomprensibles, Parámetro de forma, Ecuaciones de Navier-Stokes

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como objetivo realizar la revisión de diferentes artículos que utilizan RBF, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que modelan problemas de fluidos incomprensibles donde se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes, para lograr este objetivo se recolectó información acerca de RBF, además se identificó el uso de RBF en la interpolación de superficies y se indagó en diferentes bases de datos académicas artículos en los cuales se usan las RBF para solucionar ecuaciones de mecánica de fluidos. Los artículos a analizar se obtienen por medio de una vigilancia tecnológica que se realizó en diferentes recursos de información como lo son Science Direct, Scopus, Google, EBSCO entre otros.

La solución numérica de EDP ha contado con un gran aporte de los métodos basados en mallas, entre estos los más significativos son el método de diferencias finitas (FDM), el método de volumen finito (FVM) y el método de elementos finitos (EFM) [1], pero en el momento de solucionar problemas donde aparecen mallados en geometrías de alta complejidad, presentan una mayor dificultad, especialmente en la generación de la malla y posterior remallado de ser necesario; los métodos libre de malla surgen como propuesta de solución de las dificultades presentadas al realizar las mallas, al proponer una colocación directa en un conjunto de puntos [2]. En las últimas décadas ha tomado auge el uso de los métodos libre de malla en la solución de EDP, pero de los métodos sin malla, sin duda alguna los relacionados con las RBF, son los más atractivos ya sea directo o indirecto [3].

A través de este trabajo se pretende entregar un escrito en el cual se muestren los diferentes métodos sin malla, donde se implementa el uso de las RBF y se comprueba la efectividad de las mismas en la solución de EDP. Esta revisión es importante porque permite ver la exactitud que presentan los diferentes métodos que usan RBF como base para dar una solución numérica a las ecuaciones de Navier-Stokes. Se seleccionan artículos científicos que implementan métodos sin mallas en los cuales se puede identificar las diferentes ecuaciones de fluidos incomprensibles que se han solucionado por medio de RBF.

La revisión que se construye en este trabajo, es importante en el estudio de la mecánica de fluidos, porque proporciona una herramienta inicial que les permite a los diferentes investigadores actualizar conceptos y categorías, pues en este escrito se realiza una búsqueda y centralización de la temática abordada. La metodología en la cual se enfoca esta propuesta es la investigación documental, ya que la importancia de la misma radica en la selección de la información, con el fin de ahondar en la teoría existente. Los resultados se presentan por medio de gráficos para dar una visión general de los datos obtenidos, además se realiza un escrito que da cuenta de las principales características de los artículos analizados.

La estructura de este escrito es la siguiente; en 1 se da una identificación del problema a solucionar, en 2 se presenta la justificación del presente trabajo, en 3 se plantean los objetivos de este trabajo, en 4 se da una mirada más profunda de los antecedentes que tienen las RBF y los métodos sin malla, además de una aproximación al método de Kansa, en 5 se presentan el proceso mediante el cual se seleccionaron los artículos a analizar, en 6 se presentan los gráficos resumen de la vigilancia tecnológica realizada, además de los

diferentes artículos analizados, en 7 se dan las principales conclusiones respecto a los métodos analizados en los artículos para finalmente en 8 dar una recomendación acerca de la posibilidad de generar nuevas investigaciones.

1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En la actualidad se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones acerca del uso de los métodos sin malla en la solución de EDP que modelan fenómenos de fluidos, de estos métodos los enfocados en usar las RBF han tenido un aumento significativo en su uso, debido a las facilidades que dan a nivel de obtención de resultados aproximados y el ahorro de tiempo en superficies con una distribución de puntos uniforme o aleatoria; esto se puede evidenciar al revisar diferentes herramientas de búsqueda, a través de las cuales se obtienen más de 100000 resultados diferentes al limitar la búsqueda a los criterios antes mencionados.

Pero en los diferentes artículos que tratan esta temática no existe aún uno que se encargue de realizar un estado del arte donde se sintetice los diferentes métodos y ecuaciones de fluidos solucionadas al implementar las RBF, es importante resaltar la necesidad de este trabajo en cuanto al tiempo de análisis que le ahorrara a los futuros investigadores que deseen publicar el proceso de solución de ecuaciones de fluidos, puesto que un estado del arte es la herramienta base para iniciar una investigación, ya que ofrece un referente teórico que permite realizar estudios de caso de un proyecto en especial.

Es por ello que en este trabajo es conveniente realizar la revisión de los diferentes artículos que utilizan RBF, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales que modelan problemas de fluidos incomprensibles donde se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes, Para lograr la solución del problema se intenta dar respuesta a los siguientes interrogantes ¿Qué ecuaciones de mecánica de fluidos se han solucionado mediante el uso de las RBF?, ¿cuáles RBF se han utilizado en la solución de ecuaciones de fluidos? Y ¿cuál es la mas usada?, ¿En qué años se han publicado una mayor cantidad de artículos que utilicen las RBF en la solución de ecuaciones de mecánica de fluidos?, ¿Qué métodos sin malla se han implementado para solucionar ecuaciones de fluidos?, ¿cuál es el método sin malla que usa RBF más efectivo para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes? ¿cuál es la base de datos en la cual se generan más artículos relacionados con el uso de las RBF en la solución de ecuaciones de mecánica de fluidos?.

2. JUSTIFICACIÓN

Realizar la revisión de los diferentes artículos que utilizan RBF, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que aparecen en problemas de fluidos incompresibles donde se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes, es importante porque en el momento actual se halla una gran cantidad de artículos científicos que se encargan de investigar y dar solución a esta temática particular, pero hasta el momento no se ha generado un escrito donde se sintetizen los diferentes métodos numéricos que utilizan las RBF para solucionar esta clase de problemas.

La construcción de este trabajo de investigación se centra en las ecuaciones de Navier-Stokes porque estas son las encargadas de modelar gran parte de los fenómenos de fluidos “reales” que se presentan en meteorología, navegación aeronáutica, corrientes oceánicas, y otros problemas complejos. Dichas ecuaciones también solucionan los problemas más sencillos del movimiento de fluidos como el flujo de Poiseuille o el flujo de Couette, por lo tanto la revisión toma importancia basados en la diversidad de problemas que solucionan las ecuaciones Navier-Stokes, y en el impulso que ha tomado la investigación en mecánica de fluidos. Adicionalmente el creciente uso de los métodos sin malla en la solución de problemas en las diferentes ramas del conocimiento, impulsado por el avance en la tecnología en la creación de computadoras cada vez más rápidas. También está el creciente uso de las RBF, por lo cual se hace necesario tener un escrito que brinde a los investigadores una mirada general de los diferentes enfoques que se han dado a la solución de fluidos incompresibles, en donde se resalten aciertos y dificultades presentes en la implementación de los métodos, especialmente aquellos que utilizan en forma directa o indirecta las RBF, puesto que han mostrado ser más rápidos y precisos en las soluciones que arrojan con respecto a los métodos con malla ampliamente conocidos.

Este trabajo pretende ofrecer una herramienta de consulta a las personas que emprendan una nueva investigación en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, pues aquí encontrarán un escrito que da cuenta de la búsqueda, recuperación y centralización de los diferentes métodos numéricos sin malla que implementan las RBF, de esta forma se hallará en un solo escrito la posibilidad de contrastar las fortalezas y dificultades que se presentan al hacer uso de los diferentes métodos, para poder seleccionar el que se considere más apropiado de usar. Además este trabajo permite dar en principio una base para el marco de referencia de una investigación en mecánica de fluidos, métodos sin malla o uso de las RBF.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Elaborar una revisión bibliográfica de los diferentes artículos que utilizan RBF, en la solución de EDP que modelan problemas de fluidos incomprensibles donde se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar una búsqueda bibliográfica que permita recolectar información acerca de las RBFs
- Identificar el uso de RBF en la interpolación de superficies
- Indagar en diferentes bases de datos artículos en los cuales se usan las RBF para solucionar ecuaciones de mecánica de fluidos.
- Clasificar los artículos científicos que utilizan las RBFs para la solución de ecuaciones de mecánica de fluidos
- Identificar las diferentes ecuaciones diferenciales que modelan los fluidos incomprensibles que han sido solucionadas mediante el uso de RBF
- Generar RAE(Resumen Analítico Especializado) para analizar los diferentes artículos seleccionados
- Analizar artículos en los cuales se usen diferentes métodos sin malla que utilizan las RBF en la solución de flujos incomprensibles
- Presentar la información cuantitativa de los diferentes artículos hallados por medio de gráficos

4. MARCO REFERENCIAL

4.1. MÉTODOS NUMÉRICOS SIN MALLA

Los métodos con malla han mostrado a través del tiempo efectividad en la solución de EDP, al consultar la literatura existente, se determina que los métodos más usados son el método de diferencias finitas (FDM), el método de volumen finito (FVM) y el método de elementos finitos (EFM). Aunque el gran uso que han tenido estos métodos en la solución de problemas de ingeniería demuestra su importancia, a la hora de solucionar problemas complejos los mismos presentan grandes dificultades para originar las mallas necesarias, lo cual puede consumir la mayor cantidad de tiempo del proceso de solución, especialmente cuando se trabajan problemas de geometría compleja.

En contraste con métodos anteriores, los métodos sin malla aparecen en la década de los sesenta del siglo XX, cuando Shepard propone una función de este tipo para el modelado de superficies. En los setenta Hardy propone la función multicuadrática (MQ) y la multicuadrática inversa (IMQ) a la par de Jean Duchon quien propone la función The Pline Spline (TPS). Ya en los ochenta, Richard Frank asegura que los métodos de TPS y MQ son los mejores a esa fecha, la conjetura realizada por Richard Frank impulsa el uso de las RBF[4], por ello los métodos libres de malla han tenido un gran avance en las últimas décadas, presentan facilidades para determinar la solución de estructuras de alta complejidad y de geometría irregular, algo más sencillo, con relación a las técnicas de malla, por el costo temporal que implica la generación de la malla y el posterior remallado, cuando se hace necesario. Adicionalmente las técnicas libres de malla, han demostrado una mayor continuidad en sus funciones en relación a las funciones que se plantean en las técnicas con malla.

En primera instancia se dice que los métodos sin malla, además de ser flexibles, (especialmente en problemas con discontinuidades) ofrecen una alta precisión en sus resultados [5]. Al usar el computador para hallar el polinomio interpolante, el método sin malla facilita la programación respecto al método de malla, no necesita integración numérica y se formula de forma similar si se trabaja en 2D ó 3D. [6]

Además se pueden determinar otras ventajas del método sin malla entre las que se encuentran:

Se supera la carga de la generación de mallas en el método de diferencias finitas (FDM) y en ecuaciones de difusión fraccional (FEM), por lo cual es fácil alcanzar un análisis adaptativo

Generalmente son más precisos que FDM Y FEM debido al uso de funciones de prueba sin malla de orden superior

Se pueden resolver problemas que son difíciles para la FDM Y FEM [1].

Entre las bondades de los métodos sin malla, (al realizar interpolaciones con RBF) se puede decir que esta técnica mejora los procesos de solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, debido a la facilidad para solucionar PDE, en grupos de puntos ordenados o distribuidos en forma aleatoria [7]. Las RBF, también se pueden usar para solucionar PDE

que representan ecuaciones de Poisson, que son de gran aplicación en soluciones de problemas de ingeniería, física y otras ramas del conocimiento[5].

Entre los métodos libre de malla se ven dos tendencias especiales que son: los métodos locales y los métodos globales.

Los métodos locales son aquellos que se trabajan en subdominios de pequeños grupos de puntos, a los cuales se les conoce como nubes de puntos, los análisis con estos métodos han crecido rápidamente pues el interpolador se puede solucionar con un esfuerzo menor y además el cálculo de las derivadas e integrales se realiza más fácilmente, ya que se trabaja con los puntos vecinos al centro seleccionado [8].

Los métodos globales se caracterizan por dar una visión general del problema, incorporan puntos nuevos a la estructura general de la “malla” a trabajar con respecto a la comprobación de los diferentes métodos y técnicas para interpolar puntos dispersos. Franke determinó que las técnicas globales dan mejores resultados que las técnicas locales, de todas las técnicas trabajadas encontró que el mejor método es el de Hardy multicuadrática , pues con él se obtienen los mejores resultados y el segundo método que se recomienda es el thin-plate Spline[8]

Si bien los métodos sin malla aún no alcanzan toda la precisión que pueden ofrecer los métodos con malla tradicionales, si han mostrado la capacidad de originar muy buenos resultados en los problemas de fluidos, los diversos métodos que existen han mejorado el uso del tiempo para realizar los cálculos, además han facilitado el trabajo con puntos dispersos; con relación a los métodos sin malla que se han propuesto. Se pueden nombrar entre otros el método de suavizado hidrodinámico de partículas (SPH), el método de los elementos difusos (DEM), el método libre de elementos Galerkin (EFGM) , el método de partículas del núcleo de reproducción (RKPM) , el método de partición de la unidad (PUM), el método hp-nubes (HPCM) , el método de valor finito (FPM), el método Petrov-Galerkin sin malla local (MLPGM) , el método de movimiento de partículas semi-implícito (MPSM) y el método general de diferencias finitas (GFDM), funciones de base radial (RBF).[9]

Las ecuaciones de Navier-Stokes se han solucionado por una gran variedad de métodos basados en la generación de mallas, pero el alto costo a nivel temporal en la generación de las mismas y del remallado que en muchos casos se debe generar, limitan la cantidad de simulaciones y métodos utilizados, es por ello que;.... las RBF que inicialmente se propusieron para datos multivariados y la interpolación de funciones, (especialmente en situaciones de orden superior) son funciones completamente libres de malla, pues no es necesaria alguna conexión entre los puntos y permiten la solución de PDE en dominios con puntos dispersos en forma aleatoria, esto se debe en gran parte al trabajo realizado por Kansas [19-20]. Las RBF han mostrado una ductilidad que permite extender los problemas analizados a dimensiones superiores, estas funciones se han utilizado en la solución de una gran variedad de problemas, han sido eficientes al ser comparadas con los resultados obtenidos y que se han reportado, no obstante se tiene una limitante que presenta el trabajo con RBF en cuanto a la matriz que soluciona el sistema de ecuaciones planteado, pues “un

mejor acondicionamiento está asociado con una mala precisión, y un peor acondicionamiento se asocia con una mayor precisión, este problema se hace más evidente a medida que aumenta el tamaño del sistema o el valor del parámetro”[11]; además no existe un procedimiento estándar que permita determinar el valor adecuado del parámetro de forma para las funciones que lo usan.

Con la gran variedad de aplicaciones que tienen las RBF en los métodos sin malla, su solución por medio de programas computacionales, como Matlab y Fortran, son de especial interés como se resalta en [2]; además en [12] se plantea y muestra el uso de las RBF en la solución de PDE, lo cual nos proporciona una herramienta poderosa en la solución de problemas que emplean este tipo de ecuaciones. En [12] además se realiza un tratamiento especial a los problemas de contorno con el uso de capas de puntos localmente ortogonales, y se obtiene como conclusión que los métodos de colocación local presentaron unos mejores resultados a la hora de solucionar problemas de contorno lineal general con relación a los problemas globales.

Las RBF también se utilizan para mejorar la interpolación de datos obtenidos en el estudio del fondo oceánico, como lo hacen Caruso y Portapila en [13], se realiza una interpolación multivariable con colocaciones hermitianas y no hermitianas, al final del trabajo se destaca el uso de las RBF en las soluciones obtenidas, por presentar unos mejores resultados con respecto a otros métodos numéricos. Los autores destacan como en los ejemplos exhibidos, la función RBF utilizada es del tipo multicuadrática, se dispone de un parámetro (el parámetro de forma c) cuya adecuada elección disminuye el error.”[13]

Finalmente el uso de las RBF facilita la realización del cálculo de flujos de Stokes sobre y alrededor de un obstáculo cuando hay fluido hacia arriba por un plano inclinado, en la solución del problema mencionado y gracias al uso de las RBF se concluye que se produce cambio de flujo con base en la altura de las películas [14]

Aunque en un principio las matrices analizadas eran no simétricas, el avance en las investigaciones de este tipo de funciones ha logrado crear matrices simétricas, lo cual garantiza la solución de las ecuaciones planteadas, no obstante se tiene una limitante que presenta el trabajo con RBF con respecto a la matriz que soluciona el sistema de ecuaciones planteado, pues “un mejor acondicionamiento está asociado con una mala precisión, y peor acondicionamiento se asocia con una mayor precisión, este problema se hace más evidente a medida que aumenta el tamaño del sistema o el valor del parámetro”[11]

4.2. MÉTODO DE KANSA

Kansa introdujo el método de colocación directa al utilizar RBFs, en especial la multicuadrática (MQ), hasta la fecha, este método parece ser una de las técnicas de aproximación kernel más prometedoras, debido a que produce un esquema de interpolación altamente eficiente y se puede tratar con datos aleatorios. Además, por lo general tiene una mejor exactitud en rejillas no organizadas que los métodos basados en FDM típico. Métodos basados en RBF son también más fáciles de implementar que los esquemas numéricos

tradicionales como FEM, FDM, y FVM.[9]

En el uso del método de Kansas “los resultados numéricos demuestran que...es un método excelente no sólo para la interpolación muy exacta, sino también para las estimaciones de derivadas parciales”[8], pero además es muy útil en la interpolación de “ecuaciones parabólicas, hiperbólicas, y elípticas de Poisson”[10]. El avance que ha suscitado el uso de este método con el desarrollo de los computadores de última generación, ha permitido un gran avance en las últimas décadas, por lo cual este método es de gran aplicación, además es muy llamativo para investigadores, pero “la precisión del método de Kansa depende profundamente de la elección del parámetro para la RBF”[15]. Para mejorar la elección del parámetro, los autores del artículo citado utilizaron el algoritmo de optimización genética, el cual no se explicará en este trabajo, pues está por fuera de los fines del mismo, no obstante cabe resaltar que con este proceso lograron un parámetro más confiable a la hora de crear polinomios de interpolación.

Como ejemplo del uso del método se utilizó para trabajar “ecuaciones fraccionales espaciales de advección-dispersión”[16]. Al comparar el método mencionado, con las técnicas de colocación local, los autores comprobaron que:

Debido a la interpolación global, el método Kansa supera a la FDM convencional y FEM en términos de precisión y eficiencia computacional. Además, el método Kansa es más flexible para los problemas de irregular dominio que el FDM, debido a su mérito sin malla, y a que requiere menos esfuerzo de cálculo que el FEM.[16]

Las funciones MQ muestran tener un excelente comportamiento a la hora de ajustar superficies de difícil interpolación, y con las MQ se consiguen un ajuste muy cercano a las derivadas e integrales de las superficies estudiadas.

5. DISEÑO METODOLÓGICO

En este trabajo se realiza la revisión de los diferentes artículos que utilizan RBF en la solución de ecuaciones diferenciales parciales que modelan en problemas de fluidos incomprensibles donde se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes. Se realiza una investigación de corte teórico desde el tratamiento del tema, puesto que el propósito principal es analizar la documentación existente acerca del uso de las RBF en la solución de las EDP que resuelven ecuaciones de mecánica de fluidos; al analizar el método de investigación que se implementa en este trabajo acertadamente se debe ubicar en el marco de una investigación documental, puesto que la idea principal del mismo es la recopilación de datos existentes en forma documental; esta recolección de datos se realiza por medio de una investigación bibliográfica; la construcción de esta revisión se inicia con una vigilancia tecnológica de las palabras clave de la investigación, la cual como resultado permite obtener un universo aproximado de 100000 entradas, esto como producto del filtro que se realiza para seleccionar los artículos ligados con la temática a trabajar, de este universo inicial, se seleccionan un total de cien artículos que cumplen con las características buscadas, que son el uso de las RBF en la solución de EDP que aparecen en fluidos. Los artículos académicos se organizan con el gestor de referencias Mendeley, además con el fin de categorizar la información se crea un Resumen Analítico Especializado (RAE), en el cual se pone en observación las ecuaciones de mecánica de fluidos solucionadas, la RBF usada en los artículos, año de publicación, revista o medio de publicación, autores y buscador en el cual se hallaron los documentos seleccionados; luego de ello se decanta un poco más para dejar solamente aquellos artículos que analizan fluidos incomprensibles y son solucionados por las ecuaciones de Navier-Stokes; de este grupo de artículos se seleccionan 18, que se constituyen en la muestra sobre la cual se procedió a realizar el análisis que se presenta en este trabajo.

Los resultados de la revisión bibliográfica se muestran por medio de un esquema mixto, pues se generan gráficos a partir del RAE, éstos le dan un enfoque cuantitativo a los artículos que cumplen con algunos de los criterios impuestos en las categorías analizadas, pero también se les da en enfoque de tipo cualitativo, debido al análisis más profundo de los diferentes artículos que conforman la muestra final a analizar, con base en la agrupación de las categorías dispuestas en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

6. RESULTADOS Y ANALISIS

6.1. LAS RBF

Las RBF son aquellas que solo dependen de la distancia que existe desde un punto central, por ello se recomiendan para realizar interpolaciones en 2D, 3D y dimensiones superiores, estas funciones se definen de la siguiente forma “Una función $\Phi : R \rightarrow R$ es llamada radial, si existe una función invariante $\phi : [0, \infty)$ tal que:

$$\Phi(x) = \phi(r), \text{ donde } r = \|x\|, \quad (1)$$

y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathfrak{R}^d [17]. definiciones similares a esta se pueden ver en [18]–[23], Además, en el artículo de González citado, también se trabajan algunos teoremas de funciones positivas las cuales se definen de la siguiente forma

Una función continua real valuada Φ es positiva definida en \mathfrak{R}^d si y solo si es par y

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0 \quad (2)$$

Para cualesquiera N puntos diferentes $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{R}^d$ y $c = [c_1, \dots, c_N] \in \mathfrak{R}^d$. La función Φ es estrictamente definida positiva en \mathfrak{R}^d , si el único vector c que cumple la igualdad es el vector cero. [17].

El trabajo con las funciones positivas se realiza para demostrar que todas las funciones radiales son de esta clase.

6.1.1. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL POR MEDIO DE LAS RBFs

La interpolación es vital para la solución de una gran cantidad de problemas en diversas ramas del conocimiento, especialmente en problemas relacionados con la ingeniería, pero para ser más preciso si se tiene un conjunto de valores reales diferentes $X = \{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{R}^d$ se y un conjunto de valores de funciones $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathfrak{R}$ se tendrá un polinomio interpolador $p(x)$ tal que

$$p(x_i) = f_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

En este orden de ideas, al realizar una definición mas elaborada de las RBFs, en la cual se resalta la importancia que tienen este tipo de funciones, entre las cuales está la facilidad para interpolar puntos en varias variables, se pasa a definir el polinomio interpolador con una expresión más precisa para la ecuación que es

$$s(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_{\xi} \phi(\|x - \xi\|), \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad (4)$$

donde $s(x)$ es el polinomio de interpolación, los λ_{ξ} , son coeficientes reales, ϕ es la RBF, x son las ordenadas de los puntos dados u obtenidos, $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana n -dimensional en \mathfrak{R}^d .

la expansión de los coeficientes λ_{ξ} genera una matriz de la forma

$$[A][\lambda] = [f] \quad (5)$$

en (5), $[A]$ esta dada por los valores dados por la función de base radial al respecto en [21] se observa una variada gama de demostraciones de teoremas que permiten proponer RBF lisas a través del uso de las EDP. Entre las diferentes funciones de base radial que se pueden incluir, las más populares son las siguientes

Gaussiana

$$\phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2} \quad (6)$$

Multicuadrática

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2} \quad (7)$$

Inversa cuadrática

$$\phi(r) = \frac{1}{1 + (\varepsilon r)^2} \quad (8)$$

Inversa multicuadrática

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}} \quad (9)$$

Función de Spline poliarmónica

$$\phi(r) = r^k; \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (10)$$

$$\phi(r) = r^k \ln(r); \quad k = 2, 4, 6, \dots \quad (11)$$

Función Spline de placa delgada

$$\phi(r) = r^2 \ln(r) \quad (12)$$

En las anteriores expresiones ε es el parámetro de forma, además de esta forma básica, también es muy usual encontrar la forma ampliada del método de la RBFs, en el cual el polinomio interpolante esta dado por la expresión

$$s(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_j\|) + \sum_{j=1}^l \gamma_j p_j(\bar{x}) \quad \bar{x} \in \mathfrak{R}^d \quad (13)$$

donde λ , γ son coeficientes de ϕ y p respectivamente que permite realizar la interpolación, que se expresa en forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} A & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Como ejemplo del trabajo de interpolación que se puede realizar con las RBF, se propone hallar la función que interpola los puntos que se presentan en la Tabla 1

Tabla 1 coordenadas de puntos a interpolar

X	-2,1	-1,4	-0,5	1,6	3,1
Y	1,4	2,5	-0,8	2,3	2,2

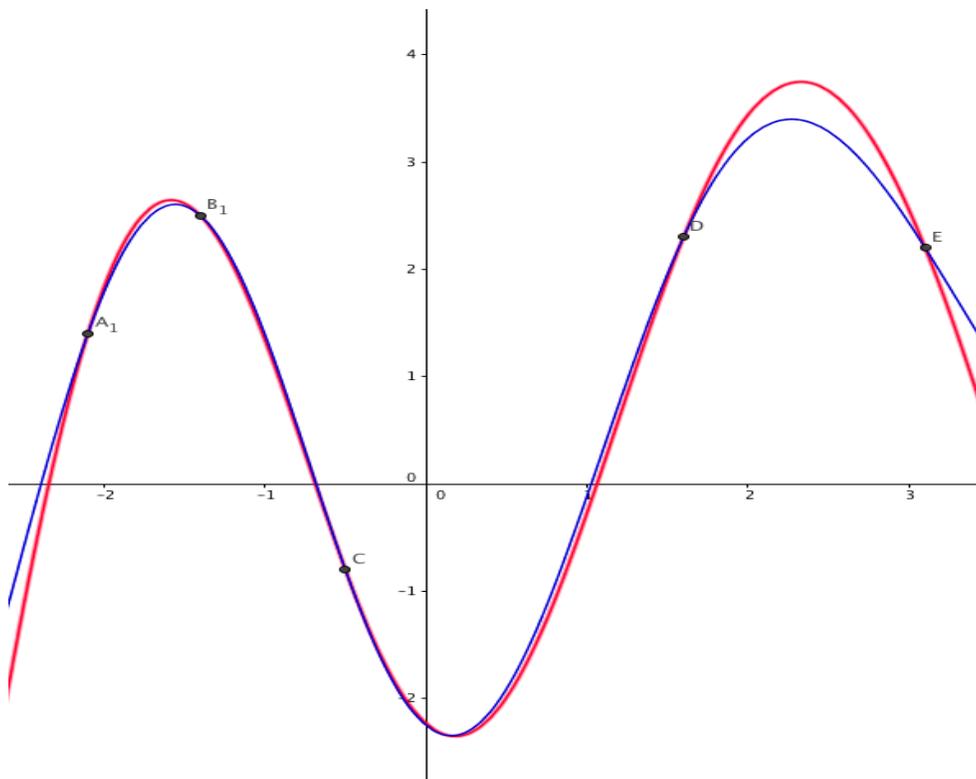
para hallar el polinomio interpolante, se usaron las ecuaciones (7) y (9), se realizaron simulaciones apoyado en el programa de Geogebra; se realizaron cambios en las coordenadas y el valor del parámetro de forma; en todas las simulaciones realizadas la curva se ajustó perfectamente a los puntos, creando superficies suaves, obteniendo las expresiones (15) para la función multicuadrática y (16) para la función inversa multicuadrática, el polinomio interpolante para un valor del parámetro de forma equivalente a uno.

$$s_1(x) = 10,15\sqrt{(x+2,1)^2+1} - 21,67\sqrt{(x+1,4)^2+1} + 14,64\sqrt{(x+0,5)^2+1} - 4,14\sqrt{(x-1,6)^2+1} + 1,12\sqrt{(x-3,1)^2+1} \quad (15)$$

$$s_2(x) = -3,99\frac{1}{\sqrt{(x+2,1)^2+1}} + 10,67\frac{1}{\sqrt{(x+1,4)^2+1}} - 8,15\frac{1}{\sqrt{(x+0,5)^2+1}} + 2,75\frac{1}{\sqrt{(x-1,6)^2+1}} + 1,29\frac{1}{\sqrt{(x-3,1)^2+1}} \quad (16)$$

El ajuste que presentan las funciones a los puntos dados se presenta en la Fig. 1

Fig. 1 interpolación de puntos con RBF, elaborado con Geogebra



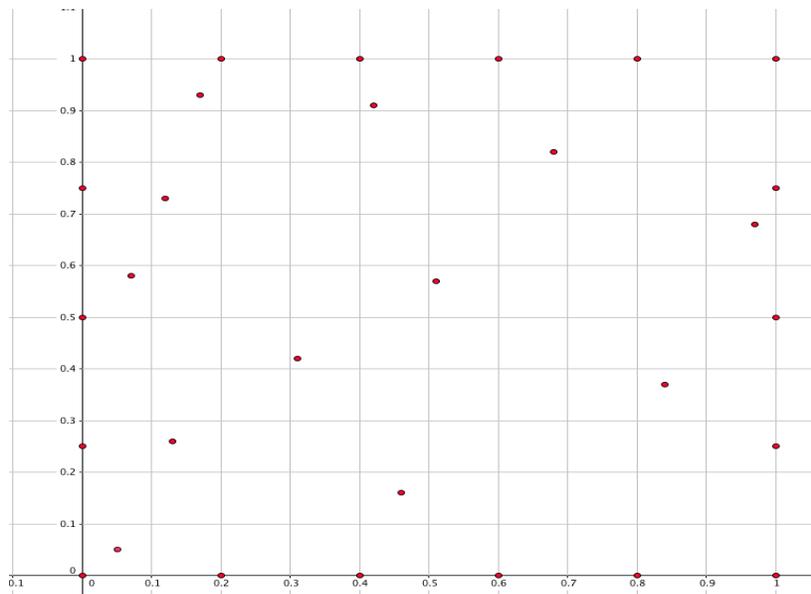
6.1.2. SOLUCIÓN DE EDP POR MEDIO DE RBFs

A continuación presentaré un ejemplo de solución de una EDP por método de Kansa tomado de [10]; la ecuación a solucionar es una ecuación elíptica bidimensional de Poisson dada por (17)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\lambda^2 + \mu^2) \exp(\lambda x + \mu y) \quad (17)$$

que está dada en una región cuadrada de lado igual a uno, donde se utilizaron 30 puntos de los cuales 18 se hallaban en el contorno de la figura y 12 al interior de la misma como se muestra en la Fig. 2

Fig. 2 región a interpolar, los puntos seleccionados están en rojo; elaborado en Geogebra



en el contorno de la región, se utilizó la condición de Dirichlet o de Neumann dadas en (18) y (19) respectivamente

$$f = \exp(\lambda x + \mu y) \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \exp(\lambda x + \mu y) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu \exp(\lambda x + \mu y) \quad (19)$$

para la solución de (17), se utiliza el reemplazo de la función f por la ecuación (20)

$$f(x) = a_1 + \sum_{j=2}^N \hat{g}(x-x_j) a_j \quad (20)$$

$$\hat{g}(x-x_j) = g(x-x_j) - g(x-x_1) \quad (21)$$

en (21) la función $g(x-x_j)$ se define como está en (7); después de tener definida la RBF a usar, se presentan la primer y segunda derivada parcial respecto a x , que se expresan como aparecen en (22) y (23)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = a_2 + \sum_{j=3}^N \left\{ \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x} \right\} a_j \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i = \sum_{j=3}^N \left\{ \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial x^2} \right\} a_j \quad (23)$$

Luego se obtienen las diferentes entradas que tendrá la matriz y el vector solución, los cuales están dados por (24) si los puntos están al interior de la superficie

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \end{array} \right) (a) = \left((\lambda^2 + \mu^2) \exp(\lambda x + \mu y) \right) \quad (24)$$

En (24), la primer columna está formada por ceros dados por la derivada de la constante a_1 , y las demás entradas del vector fila estará formada por las segundas derivadas parciales de la función respecto a x e y , como se visualiza en (23). Si por lo contrario, los puntos están en el contorno de la figura, se utiliza las condiciones dadas en (18) y (19), de estas solo mostraré los vectores fila que se forman al aplicar la condición dada en (18)

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hat{g}(x_i - x_j) \end{array} \right) (a) = \left(\exp(\lambda x + \mu y) \right) \quad (25)$$

En (25) la primer columna está formada por unos, por la componente de a_1 , las demás entradas del vector fila están formadas por la RBF que se tomó, la cual se iguala con la condición de Dirichlet dada en (18), es decir, la matriz a solucionar tendrá la estructura que se presenta en (26) donde la primer fila representa a un punto en el borde de la región, mientras la fila i y la fila N , representan a puntos en el interior de la región

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \hat{g}(x_1-x_2) & \hat{g}(x_1-x_3) & \cdots & \hat{g}(x_1-x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{i,2} & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{i,3} & \cdots & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{i,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{N,2} & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{N,3} & \vdots & \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial y^2} \right)_{N,N} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \exp(\lambda x_1 + \mu y_1) \\ \vdots \\ (\lambda^2 + \mu^2) \exp(\lambda x_i + \mu y_i) \\ \vdots \\ (\lambda^2 + \mu^2) \exp(\lambda x_N + \mu y_N) \end{array} \right) \quad (26)$$

al reemplazar los valores de $\lambda = 2$ y el de $\mu = 3$ en las matrices, se obtienen los valores mostrados en la Tabla 2 para la función (17)

Tabla 2 algunos valores hallados con método de Kansa comparado con los valores exactos de (17) tomado de [10]

x	y	Kansa	Exacto
0.0	0.0	1.000	1.000
0.0	0.25	2.117	2.117
1.0	0.50	33.12	33.12
1.0	0.75	70.11	70.22
0.05	0.05	1.299	1.284
0.46	0.16	3.988	4.055
0.51	0.57	14.61	15.33

los resultados que se pueden observar en Tabla 2 son solo una pequeña parte de los resultados mostrados en [10], pero con ellos se puede observar que el método de Kansa y en general las RBFs son una excelente alternativa a la hora de buscar un método numérico para solucionar EDPs.

Finalmente y respecto al creciente uso de las RBF, se puede afirmar que

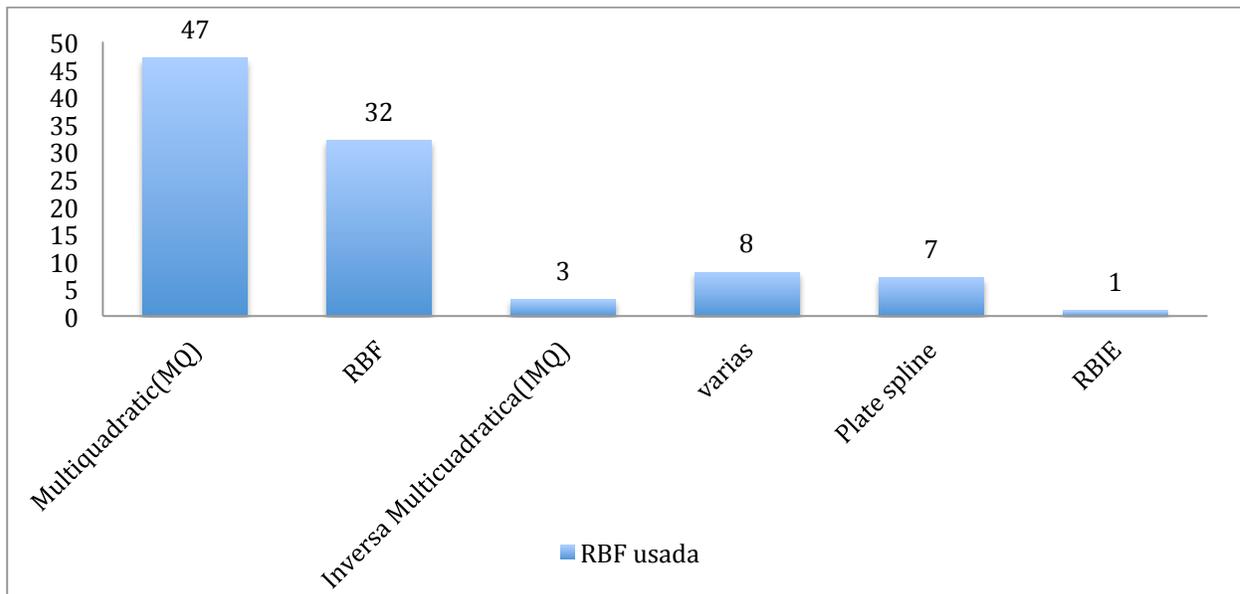
El método de función de base radial (RBF) es una de las herramientas principales en el análisis de la interpolación de datos dispersos multidimensionales. La capacidad de los métodos para manejar los datos dispersos de manera arbitraria, de generalizar fácilmente a varias dimensiones espaciales, y para proporcionar exactitud espectral la han hecho muy popular en varios tipos diferentes de aplicaciones. Algunas de los más recientes de estas aplicaciones incluyen cartografía, redes neuronales, imágenes médicas, y la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (PDE). [24]

6.2. PRESENTACIÓN GRAFICA DE LA REVISIÓN DE ARTÍCULOS

Con base en la investigación previa que se realizó, y en la matriz RAE (Resumen Analítico Especializado) que se construyó para elaborar un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos, se pueden presentar las siguientes gráficas estadísticas, que resumen la búsqueda realizada

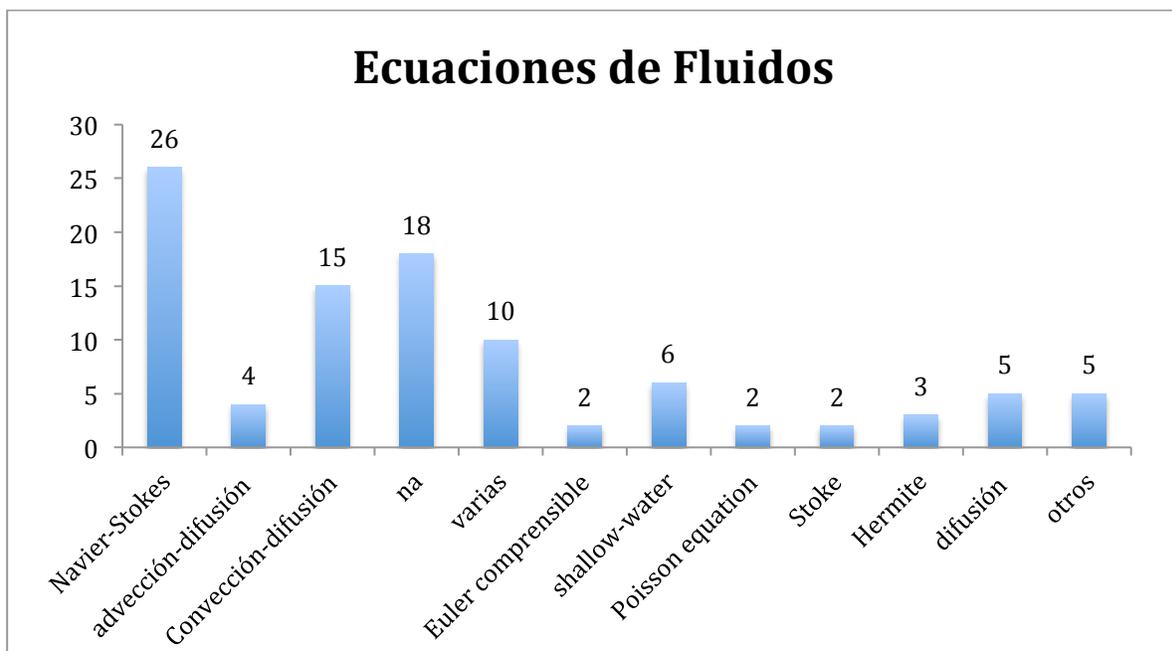
Con respecto a la RBFs usadas en los artículos analizados, se obtiene la Fig. 3, que resume la vigilancia tecnológica realizada

Fig. 3 RBF usadas en artículos analizados



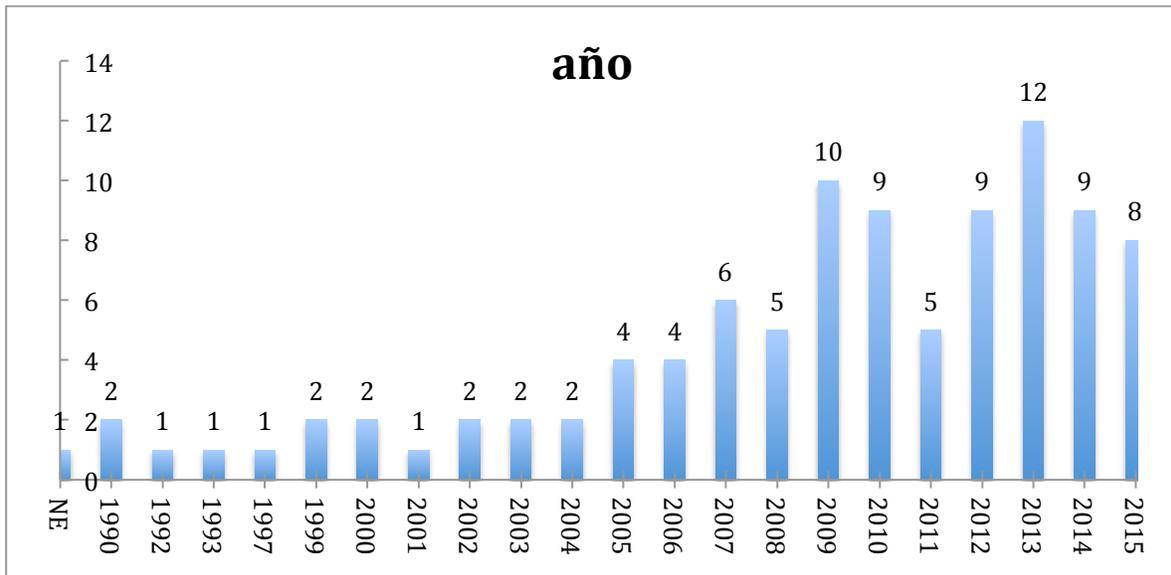
Al analizar los resultados obtenidos respecto a las ecuaciones hidrodinámicas utilizadas, se presenta la Fig. 4, en este gráfico aparecen referencias con na, esta etiqueta representa las entradas que dan sustentación matemática a las RBFs.

Fig. 4 gráfico ecuaciones hidrodinámicas utilizadas en artículos analizados



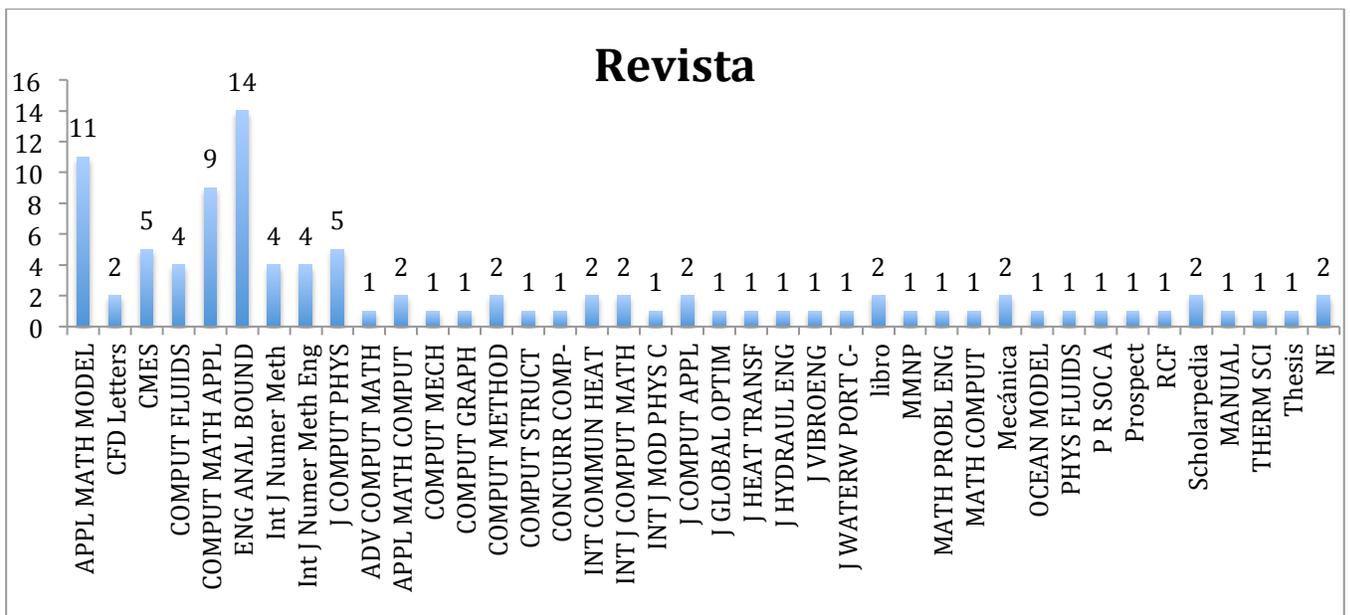
Respecto al año de publicación de los artículos analizados, se puede presentar la Fig. 5, en esta se puede observar una curva creciente de publicaciones desde el año 2005.

Fig. 5 gráfico año publicación de los artículos analizados



La búsqueda en las diferentes revistas académicas en las cuales se hallaron artículos relacionados con la temática arrojó los resultados que se observan en la Fig. 6, los nombres de las revistas presentan las abreviaturas aceptadas a nivel internacional.

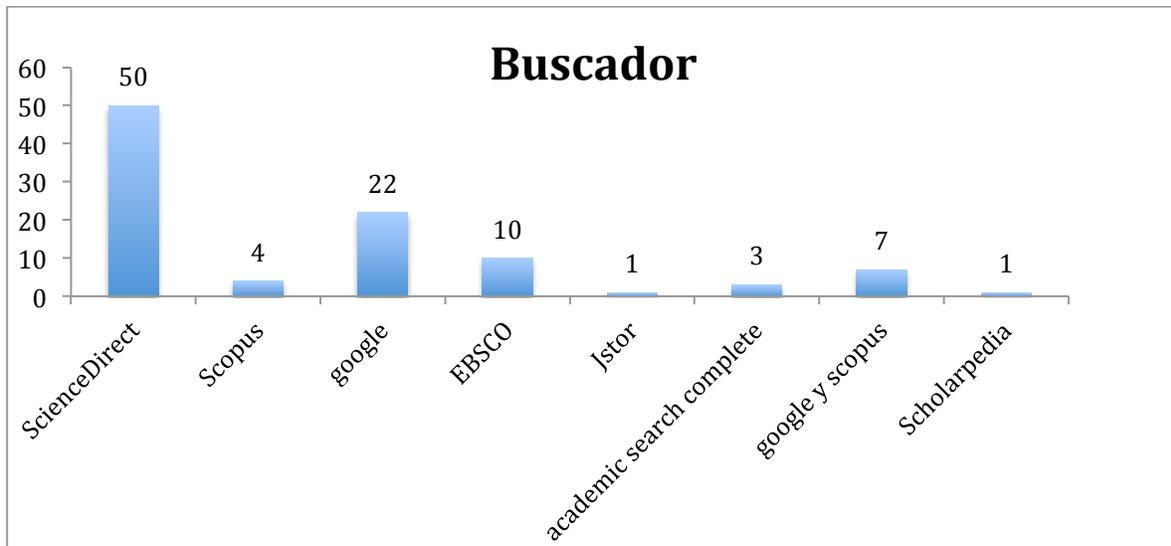
Fig. 6 gráfico revista donde se publicaron los artículos analizados



La información acerca de los recursos de información en los cuales se hallaron los diferentes artículos es muy importante, pues da una visión de los lugares preferidos por los autores de

investigaciones para publicar los resultados que obtienen, al respecto se sintetiza la información en la Fig. 7

Fig. 7 gráfico buscadores donde se hallaron los artículos analizados



Las RBF se implementan en los artículos que se presentan a continuación en forma directa en algunos casos y/o combinadas con otros métodos para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes, respecto a estas últimas se diseñan tres grandes subgrupos de artículos analizados de la siguiente forma.

6.3. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN LA FORMA VELOCIDAD-PRESIÓN

Un primer grupo de artículos en los que se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes en su formulación velocidad-presión que se describen a continuación en forma adimensional

$$\nabla u = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + f. \quad (28)$$

Estas ecuaciones son abordadas en [9], [11], [25]–[32] donde u representa el campo de velocidades (u_1 velocidad horizontal, y u_2 velocidad vertical); Re es el número de Reynolds ($\rho UL/\mu \equiv UL/\nu$) con viscosidades μ dinámica y ν cinemática del fluido, f representa el vector de fuerzas de cuerpo.

6.3.1. MÉTODO PURO

A continuación se presentan dos artículos en los cuales se utiliza el método de interpolación con RBFs puro para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma de velocidad-presión

6.3.1.1. Método puro para RBFS con colocación global

En [9], se combinan el método de las RBF (que realiza una discretización con el método de Kansas) con el método de Levenberg-Marquardt (que pertenece a la familia de métodos de mínimos cuadrados), esta combinación es única en este análisis y con ella se solucionan dos tipos de sistemas con fluido entre dos placas paralelas con flujo de Couette, que se estudia con y sin gradiente de presión, y en un canal de fluido con y sin obstáculo.

Las condiciones de frontera para cada uno de los problemas se resumen en la Tabla 3

Tabla 3 condiciones límite de los problemas de flujo de Couette y del canal con fluido

	Velocidad	Presión
Flujo de Couette		
Pared superior	$y=1, u_1=0, u_2=0$	
Entrada	$u_1=1, u_2=0$	
Pared inferior	$y=0, u_1=0, u_2=0$	
Canal con fluido		
Pared	$u_1=0, u_2=0$	$0 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_2, \text{ para } n_y \neq 0 \text{ y } n_x = 0$ $0 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u_1, \text{ para } n_x \neq 0 \text{ y } n_y = 0$
Entrada	$u_1=1, u_2=0$	$p=0$
Salida	$0 = \nabla u$	$0 = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u - u_i \nabla u$

Las condiciones límite de salida se establecen en ambos casos como el producto punto entre la ecuación de momento y el vector normal unitario saliente. El método de solución emplea Thin-plate Spline (TPS) como se muestra en (11) con $r=2$, la selección de TPS evita llevar a cabo un estudio de optimización respecto al parámetro de forma, además se presta para poder extender los análisis de 2D a 3D de ser necesario; con estas ecuaciones se analizan las condiciones de velocidad y presión a nivel global, definiéndolas de la siguiente forma

$$u_i = \sum_{a=1}^{NB+NI} \alpha_{ia} \Psi \left(\left\| \vec{r} - \vec{r}_a \right\| \right) \quad i = 1, 2 \quad (u^* = u_1 \text{ y } v^* = u_2) \quad (29)$$

$$p^* = \sum_{a=1}^{NB+NI} \alpha_{0a} \Psi \left(\left\| \vec{r} - \vec{r}_a \right\| \right) \quad (30)$$

donde los valores NB, NI son los puntos que están en la frontera de los canales y en el interior de los mismos respectivamente, α_i son los coeficientes de expansión y Ψ es la función de base radial; (29) y (30), y sus dos primeras derivadas se incrustan directamente en las ecuaciones Navier-Stokes para lograr la simulación del comportamiento al interior de los canales, en la frontera de la superficie se trabaja con (29) y (30), al interior de la superficie se genera un sistema de ecuaciones no lineales al trabajar con las ecuaciones de momentum y continuidad, estas se solucionan por el método de Levenberg-Marquardt; en todos los análisis realizados se utilizó un $\text{Re} = 100$, esto con base en los resultados obtenidos al usar diferentes números de Re .

En el análisis del flujo de Couette, se observaron los tres casos posibles para el gradiente de presión (positivo, negativo y cero), en todos ellos se obtienen resultados con un máximo de error del 0,17% con respecto al análisis analítico y una desviación estándar máxima del 3,23%, estas diferencias en los resultados se pueden considerar despreciables; lo cual muestra la precisión del método con RBF en el análisis de este tipo de fluido.

Las gráficas presentadas en Fig. 8 y en Fig. 9 muestran la concordancia de las simulaciones realizadas con RBF respecto a los resultados analíticos

Fig. 8 Vector velocidad sin gradiente al usar RBF vs la representación exacta tomado de [9]

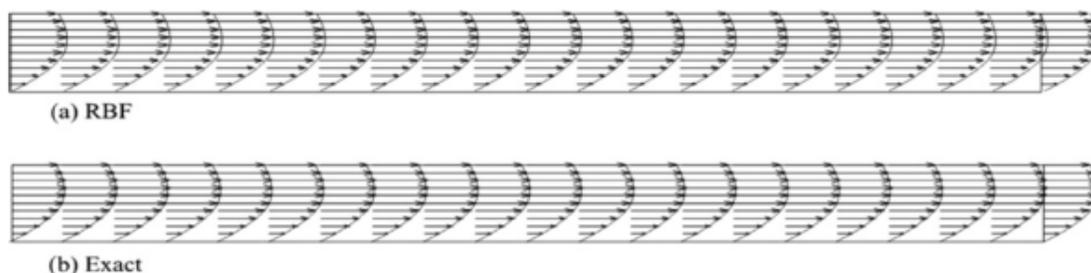
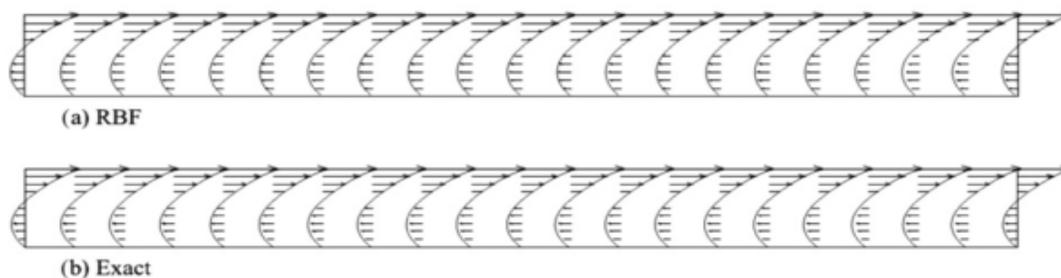


Fig. 9 vector velocidad con gradiente al usar RBF vs la representación exacta tomado de [9]

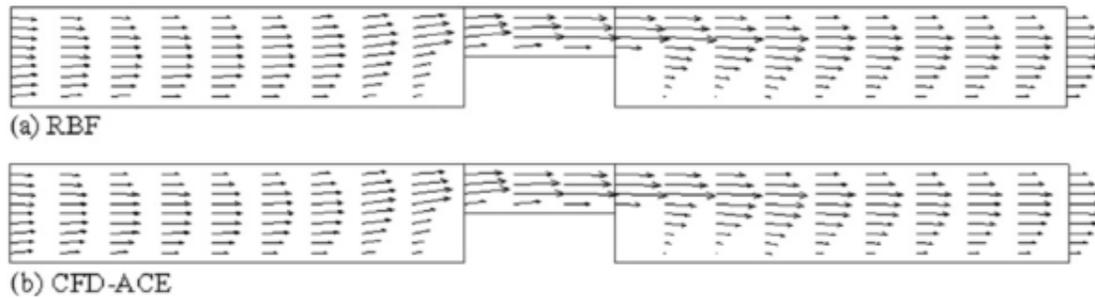


A continuación en Fig. 10 y Fig. 11 se muestran los resultados del método de RBF comparado con el software comercial para canales sin y con obstáculo respectivamente

Fig. 10 Canal sin obstáculo al usar RBF vs CFD tomado de [9]



Fig. 11 canal con obstáculo al usar RBF vs CFD tomado de [9]



En el flujo de Couette se predice a lo largo del canal el comportamiento del fluido y solo presenta una pequeña distorsión en la entrada, que es de esperarse, debido a la condición artificial impuesta en la pared de entrada. En el canal con obstáculo las RBF describen perfectamente el cambio de velocidad del fluido sobre el mismo, además predicen las zonas muertas cerca del obstáculo, debido a la turbulencia que se genera al llegar y pasar la obstrucción en el canal, en este último caso el error máximo que se presenta es del 1.719% con una desviación estándar del 3.06%.

En el documento analizado se especifica que las funciones de base radial predicen en forma acertada el comportamiento de “los fluidos de Couette con y sin gradiente de presión, en fluidos por canales 2D con y sin obstáculo”[9], además destaca la ventaja del uso de las RBF respecto a los CFD en problemas de geometría compleja, por no requerir la construcción de mallas.

6.3.1.2. Método puro para RBFS con colocación local

En [25] se plantea el uso de un método de localización para solucionar fluidos viscosos incomprensibles transitorios; en términos generales al comparar la forma en la cual se aproximan las derivadas, el método local procede de manera similar al de FD, pues se realiza un trabajo con los puntos que están alrededor del centro seleccionado. La RBF seleccionada para trabajar es la multicuadrática y para los problemas que se analizan con este método se determina un error máximo de 10^{-6} , los valores característicos de cada conjunto de puntos locales tiene la expresión característica dada en (13) para el caso específico de este problema, p es la base para el espacio de polinomios con grado menor al orden de la RBF, que en este caso es 1; generando una matriz ampliada como se muestra en (14), en esta expresión la matriz $[A]$ está formada por las diferentes RBF MQ, después de esto se implementa las derivadas del esquema RBF, en este caso el interpolador se representa de la forma

$$s(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \psi_j(\bar{x}) u(\bar{x}_j) \quad (31)$$

Se obtiene como expresión para $\psi_j(\bar{x})$, con el uso de la regla de Cramer la siguiente

$$\psi_j(\bar{x}) = \frac{\det(A_j(\bar{x}))}{\det(A)} \quad (32)$$

donde $A_j(\bar{x})$ es la matriz dada en (14) pero con la j-ésima columna cambiada por el vector resultante, esta implementación obtenida en las expresiones (13), (14), (31) y (32) permite usar las RBF para aproximar las derivadas de una función cualquiera en un punto dado, pero en el método planteado también se utilizan las RBF como operadores lineales en este proceso se aprovechan los resultados antes mencionados, por lo tanto el operador lineal se define como

$$\ell u(\bar{x}_i) \approx \sum_{j=1}^n c_j u(\bar{x}_j) \quad (33)$$

De la anterior definición y con base en (31) se definen los pesos de c_j de la siguiente forma

$$c_j = \ell \psi_j(\bar{x}_i), \quad j = 1, \dots, n_i \quad (34)$$

Para hallar los diferentes valores de c_j se genera un determinante que tiene por numerador a $\ell[A_j(\bar{x})]$ y por denominador el $\det(A)$, pero también se puede calcular por medio del sistema matricial dado por

$$\begin{pmatrix} \Xi & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = (\ell B(\bar{x}_i)) \quad (35)$$

Donde $B(x)$ está dado por la expresión

$$B(\bar{x}) = [\phi(\|\bar{x} - \bar{x}_1\|) \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_2\|) \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_3\|) \dots \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_n\|) / p_1(\bar{x})] \quad (36)$$

y Ξ , p es la misma componente que se presenta en (14); $\bar{\mu}$ es un vector ficticio correspondiente a γ , aunque la matriz dada en (35) también es densa, es más pequeña al comparar con el tamaño del método general, lo que permite que sea más estable para una gama más amplia de valores de ε .

El proceso de discretización temporal de la ecuación de momentum se genera por medio del esquema explícito de Euler por medio de la implementación del método de proyección, después de realizar las respectivas simplificaciones y acomodaciones (28) se reescribe de la siguiente forma

$$\bar{V}^{(n+1)} = \bar{V}^* + \Delta t (-\nabla P^n) \quad (37)$$

y luego se simplifica para satisfacer la ecuación de continuidad, queda expresada en términos de la presión como

$$\nabla^2 P^n = \frac{1}{\Delta t} \nabla \bar{V}^* \quad (38)$$

que es la ecuación de Poisson donde se tienen términos base diferentes de cero, de esta forma se realiza la implementación del algoritmo al hallar primero una velocidad intermedia, en este punto es donde se implementan las RBF al hacer los cambios propuestos en (36), el proceso de reemplazo se repite hasta llegar a la dimensión del problema al realizar las respectivas iteraciones de (33); con estas mismas ecuaciones y reemplazos se procede a solucionar (38) al actualizar el siguiente paso de tiempo para la velocidad y la presión; la matriz de coeficientes se soluciona aparte para así no tener que almacenar la información del

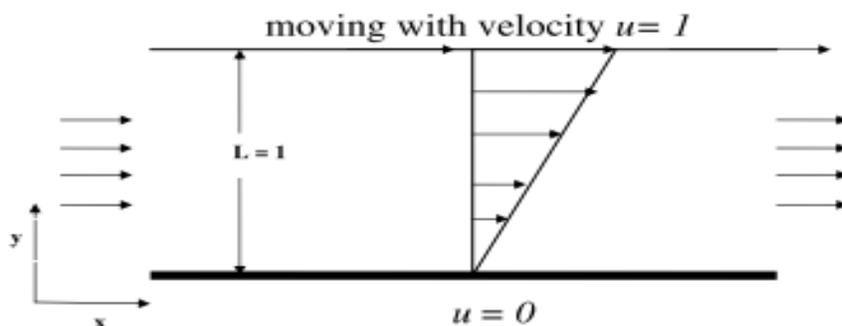
proceso de solución; para validar la efectividad del método descrito se solucionan dos problemas.

Los primeros problemas abordados son los de flujo de Couette y el de Poiseuille, estos problemas se toman con el fin de mirar la eficacia del sistema y elegir el parámetro de forma ε más adecuado. De estos dos problemas se mostrarán los resultados del flujo de Couette, en el que se destaca su simplicidad, puesto que es el más “simple de todos los flujos viscosos, y al mismo tiempo presenta características físicas de un flujo de capa límite, además soluciona exactamente de forma analítica las ecuaciones Navier-Stokes”[25], la ecuación analítica del flujo estudiado es:

$$u(y,t) = y + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\pi y) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{\text{Re}} t} \quad (39)$$

Desde la ecuación inmediatamente anterior se plantean las condiciones iniciales y las condiciones de contorno que se establecen desde soluciones analíticas que ya se conocían,

Fig. 12 esquema de flujo de Couette, tomado de [25]

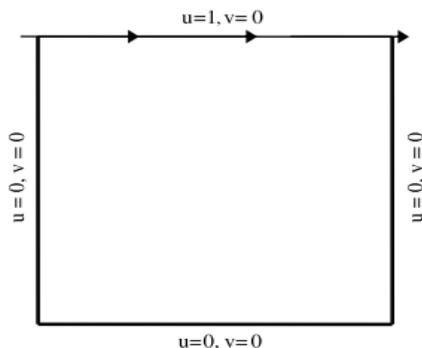


Las condiciones dadas para el dominio son valores entre 0 y 2 en el eje x ; y valores entre 0 y 1 para el eje y , los puntos se ubicaron con espaciado uniforme que varía entre 0,025 y 0,2; el número de Reynolds se fijó en 1 para que cumpla la condición de ser flujo laminar; el incremento de tiempo se fijó entre los valores de 0,00001 a 0,001 con el fin de obtener soluciones estables por el método de Euler y además para evitar que los errores de incremento de tiempo, interfieran con los errores al hacer incrementos de espacio, también se trabajó con dos dominios de 5 y 9 nodos, al considerar los puntos de contorno y los extremos del rectángulo. Para las simulaciones trabajadas el valor de $\varepsilon=1$, y para la presión, las condiciones de contorno se dan a partir de (37), con las condiciones descritas previamente, se obtuvieron errores para el tiempo del orden de 10^{-4} a 10^{-10} , con lo cual se comprueba que el método trabajado es robusto; además se realizan simulaciones para diferentes valores de ε con incrementos de tiempo de 0,6 y 1 respectivamente, en ambos casos se obtienen convergencias para dominios de 5 nodos para valores de ε entre 0,01 y 10; y en dominios de 9 nodos para valores de ε entre 0,3 y 5; también se presenta en ambos casos el mínimo error muy cercano al valor seleccionado de $\varepsilon=1$.

Se utilizó el lid-driven cavity para comprobar el esquema numérico, pues a pesar de tener una geometría simple conserva una gran física con regiones de recirculación en las esquinas y todo en función del número de Reynolds, el esquema del problema se define en una región

cuadrada de lado 1, el movimiento se induce por el deslizamiento de la pared superior como se observa en la Fig. 13.

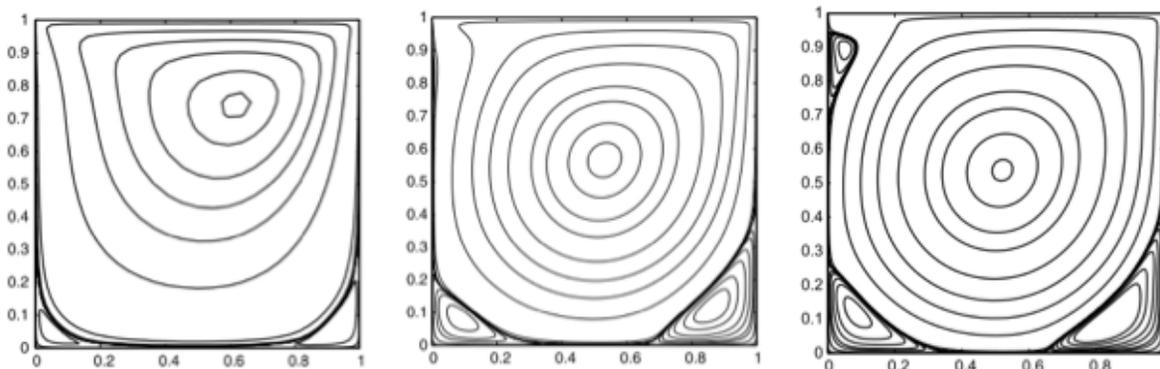
Fig. 13 esquema y condiciones de frontera para lid-driven cavity flow tomado de [25]



En este problema se toma como condición de presión la ecuación (37), en los antecedentes del trabajo con esta clase de problema se halla que han realizado simulaciones con una gran variedad de Re para distribuciones uniformes y aleatorias de puntos, los resultados obtenidos se analizaron con base en las componentes de velocidad, las funciones de corriente (ψ) y vorticidad (ω), donde las componentes de velocidad se relacionan con la función de corriente como aparece en (93) la vorticidad y la función de corriente se relacionan por (91) con base en las ecuaciones y las condiciones dadas para u y v , se concluye que ω debe ser constante en todas las paredes, para el problema analizado se tomó como cero. Después de solucionar las ecuaciones a través del método numérico, se procedió a comparar los resultados obtenidos con los ya existentes en literatura, las respuestas que se obtuvieron en ambos casos coincidieron hasta la segunda cifra significativa.

En todos los procesos realizados se obtuvo el comportamiento esperado de la formación de vórtices secundarios en las esquinas; como se puede ver en los gráficos que aparecen en la Fig. 14

Fig. 14 líneas de corriente par Re equivalente a 100, 1000 y 3200 respectivamente tomado de [25]



Con números de Reynolds altos se obtuvieron mejores resultados al realizar distribuciones aleatorias con mayor número de puntos en las esquinas, respecto a la distribución uniforme de puntos. En este problema al igual que en los problemas básicos se tomó a $\varepsilon=1$,

En conclusión, en el artículo se desarrolló una investigación acerca de la estrategia de colocación local de RBF para solucionar las ecuaciones en variables primitivas de Navier-Stokes, se probó con varias situaciones problema, con los más “simples” como el de flujo de Couette. Se fijó el parámetro de forma para utilizarlo en situaciones más complejas como el de lid-driven square cavity, el cual se predijo en forma precisa en un esquema de puntos con distribución no uniforme, inclusive al usar grandes números de Reynolds; el estudio se aplicó a problemas de flujo por separado y se obtuvieron resultados que concuerdan con las referencias disponibles, se llega a la conclusión que el esquema utilizado permite obtener resultados satisfactorios.

En [26] se presenta un esquema de las RBF localizadas al igual que en el artículo analizado anteriormente, en el caso específico se emplea la función multicuadrática para solucionar problemas de flujo de fluidos viscosos y acoplados, además de problemas de transferencia de calor que no se tienen en cuenta en el presente escrito, todas estas situaciones modeladas con las ecuaciones de Navier-Stokes. El uso de las RBF permite un gran ahorro respecto al tiempo al ser comparado con las otras técnicas de interpolación sin malla

Las ecuaciones a solucionar en el problema son (27) y (28), en este caso todas las variables están en términos de x y t . El método local utilizado es similar al que se empleó en el anterior problema, puesto que trabaja con esquemas de discretización del tiempo, el cual inicia con una condición inicial de velocidad que cumpla (27), con base en esta propuesta se desarrolla el trabajo de discretización en el cual f vale cero para facilitar el proceso en el cual se realiza una aproximación hacia atrás con el campo de velocidad dadas las condiciones de frontera necesarias que se presentan en la siguiente Tabla 4

Tabla 4 condiciones de frontera para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes tomado de [26]

Condiciones de frontera	Velocidad	Presión	ϕ
Pared	$V = 0$	$\frac{\partial p}{\partial n} = \left[\mu(\nabla^2 V) - \rho \frac{\partial V}{\partial t} \right] \cdot \hat{n}$	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$
Entrada	$V = \hat{V}$	$p = \hat{p}$	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$
Salida	$\frac{\partial V}{\partial t} + V_n \frac{\partial V}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial n} = \left[\mu(\nabla^2 V) - \rho \frac{\partial V}{\partial t} - \rho(V \cdot \nabla)V \right] \cdot \hat{n}$	$\phi = 0$

las cuales necesitan la inclusión del potencial de Helmholtz para realizar las correcciones necesarias para cumplir nuevamente la ecuación de continuidad; al solucionar la convergencia del campo de velocidad, se procede a solucionar el campo de presión, en este caso se realiza la discretización de la presión por medio de la expresión (38), donde la parte derecha de la ecuación se cambia por la expresión $f(x)$, y que se define en términos de ϕ , la interpolación del campo de variables se formula de la siguiente forma

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{N_I+N_B} \alpha_j X_j(x) \quad (40)$$

N_I y N_B son los puntos internos y los puntos del contorno respectivamente y α_j son los pesos indeterminados correspondiente a cada RBF; en esta se define ϕ como la RBF de la familia de funciones multicuadráticas de la siguiente forma

$$X_j(x) = [r_j^2(x) + c^2]^{n-(\frac{1}{2})} \quad (41)$$

que al igual que todas las RBF generan matrices mal acondicionadas que en el caso analizado se intentó solucionar por diferentes medios como pre acondicionamientos, descomposición de dominios, diferencias finitas entre otros; se obtienen los mismos procesos matriciales, finalmente los autores se inclinan por el uso de colocación local en lugar de un esquema global, pues mejora la implementación del método debido al uso de pequeños vectores en lugar de una matriz, esta propuesta se utiliza en el cálculo del campo de presión.

Para todas las simulaciones realizadas los autores trabajan con flujos laminares y se comparan los resultados obtenidos por medio de las RBF con los que se obtienen con el método de FVM que usan rejillas convergentes y se usa un esquema upwinding de segundo grado.

Se solucionan varios problemas para comprobar la consistencia y la robustez del método; en primera instancia se soluciona un problema de square cavity de 1 m de lado, el número de Reynolds usado es de 675 por medio del cual se comprueba la robustez del método, puesto que con 1681 puntos (41x41), logra dar resultados precisos del problema en comparación de los 13685 puntos que se usan en el método de FVM. El problema de lid-driven square cavity fue utilizado para observar la precisión y eficacia del método, se compararon los resultados que se obtienen respecto a FVM y literatura existente, para ello se utiliza un $Re = 68$ y un número de Prandtl (Pr) de 0,7 al comparar los tiempos necesarios para obtener los resultados buscados, muestra la eficiencia de las RBF, puesto que al tener la misma cantidad de puntos, el tiempo empleado es mucho menor respecto al necesario con el método de FVM, tal y como se puede observar en Tabla 5

Tabla 5 tiempos para el FVM y la solución localizada sin malla para diferentes distribuciones de puntos tomado de [26]

Distribución de puntos en la malla	FVM	Libre de malla localizada		
	Fluent 6.1 (1000 Δt)	Topologia	RBF calocación	Solución (1000 Δt)
26 x 26	264 s	< 1 s	< 1 s	5,19 s
51 x 51	326 s	< 2 s	< 1 s	27,86 s
101 x 101	970 s	< 8 s	< 3 s	164,14 s

Para comparar los resultados con literatura existente, se realizó un aumento en Re a 100 y 400 además se realizó un aumento en el número de puntos para formar una distribución de 129x129 puntos, también se halló concordancia como se puede observar en

Fig. 15 y Fig. 16.

Fig. 15 magnitud del vector velocidad y magnitud con FVM y meshless tomado de [26]

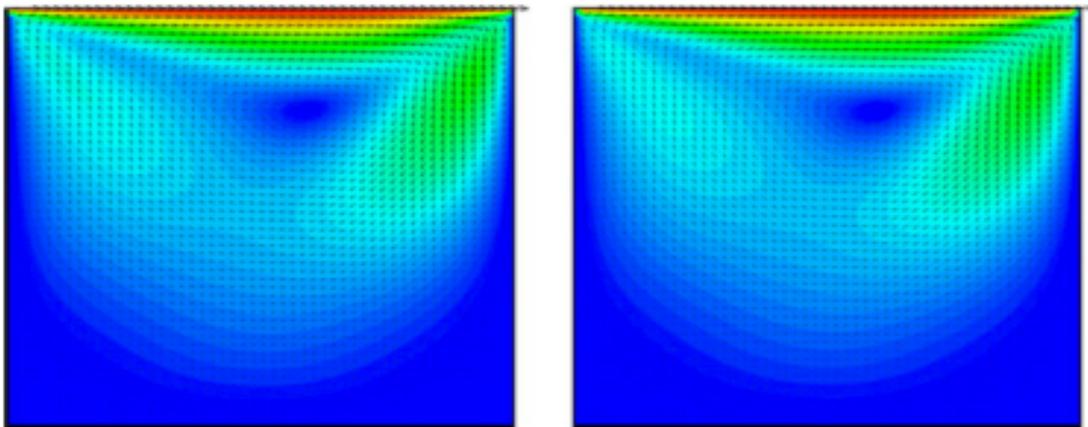
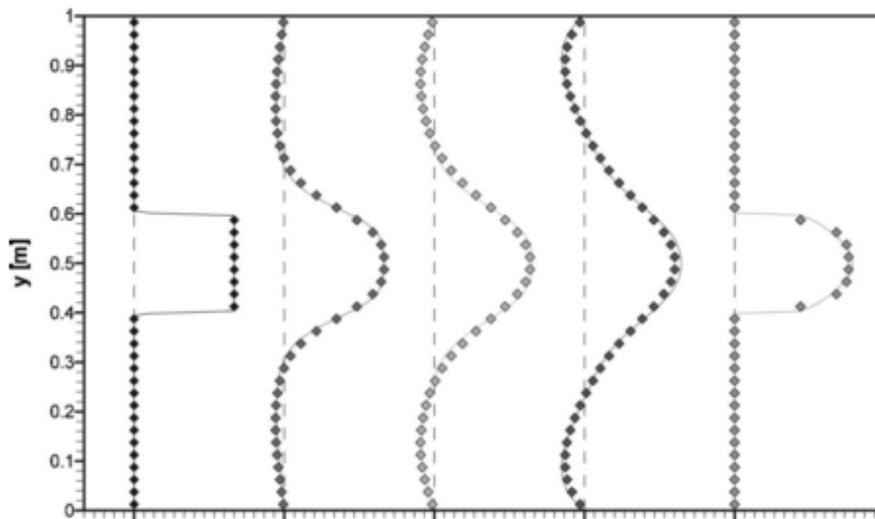


Fig. 16 perfil de velocidad distancias en $x=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ m FVM líneas continuas, meshless puntos tomado de [26]



Los resultados obtenidos se comparan con aquellos que se obtienen con un CFD, se puede decir a manera de conclusión que el método propuesto es consistente, pues da resultados precisos con un menor esfuerzo computacional y de preparación

6.3.2. MÉTODO DE COLOCACIÓN MAPS

6.3.2.1. Método de colocación MAPS Global

En [27], los autores dejan claro que en este artículo se usa un enfoque de colocación general sin malla el cual se basa en el método de soluciones particulares aproximadas (MAPS) para la solución de un sistema de ecuaciones Navier-Stokes bidimensional, en esta formulación de variables primitivas se muestra que es capaz de predecir el flujo de campos para un número moderado y alto Reynolds sin necesidad de una matriz con dificultades en las condiciones”[27]

Las condiciones de frontera para las ecuaciones de Navier-Stokes están dados en términos de los valores de la velocidad y la tracción de la superficie por las siguientes expresiones

$$u_i = u_{ib} \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_u \quad (42)$$

$$t_i = \sigma_{ij} \eta_j = -p \eta_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = t_{ib} \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_t \quad (43)$$

Para expresar la velocidad y el campo de presión en términos de una superposición lineal de soluciones particulares, en el método propuesto se plantea un sistema no homogéneo de ecuaciones de Stoke

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{u}'_i(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \hat{p}'(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial x_i} = \phi(r) \delta_{il} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}'_i(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial x_i} = 0 \quad (45)$$

donde ϕ es la ecuación multicuadrática y r es la distancia entre un punto del campo \vec{x} y un punto aleatorio $\vec{\xi}$, con esta propuesta se puede observar que el método MAPS es similar al IRBF método sobre el cual se analizaran trabajos que lo implementan más adelante, pero su principal diferencia se basa en la solución del sistema no homogéneo que se plantea desde (44) y (45) sin la necesidad de generar una malla; para determinar la expresión cerrada que es tan vital en este método, se recurrió a la fórmula de descomposición de Oseen, esto se logra a partir de la redefinición de la función de campo de velocidad. En términos de la función potencial ψ , de la siguiente forma

$$\hat{u}'_i(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial x_m \partial x_m} \delta_{il} - \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial x_i \partial x_l} \quad (46)$$

Con la finalidad de cumplir con la ecuación de continuidad, al quedar las funciones dadas originalmente en términos de la RBF ϕ :

$$\mu \frac{\partial^4 \psi(r)}{\partial x_m \partial x_m \partial x_k \partial x_k} = \phi(r) \quad (47)$$

$$\mu \frac{\partial^4 \psi(r)}{\partial x_m \partial x_m \partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial \hat{p}'(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial x_i} = 0 \quad (48)$$

Al integrar (47), se obtiene la expresión de ψ , la cual es

$$\psi(r) = \frac{1}{12\mu} \left[\frac{1}{75} (r^2 + c^2)^{3/2} (4r^4 + 48r^2c^2 - 61c^4) - c^3 \ln(c) r^2 - \frac{1}{5} (5r^2 - 2c^2) c^3 \ln \left(c + (r^2 + c^2)^{1/2} \right) \right] \quad (49)$$

con base en estas ecuaciones, se reemplaza (49) en (46) y (48) para determinar los campos de velocidad y presión, luego se realiza el trabajo computacional con N puntos de análisis, donde N_b son los puntos de la frontera y N_i son los puntos internos y $N = N_b + N_i$, este proceso permite obtener las soluciones aproximadas para los campos de velocidad y presión por medio de la superposición lineal de las soluciones particulares en cada punto de análisis, las ecuaciones resultantes del proceso de linealización al ser reemplazadas en (42) y (43) dan los dos primeros conjuntos de entradas de la matriz y los otros dos conjuntos de entradas se obtienen de la expresión

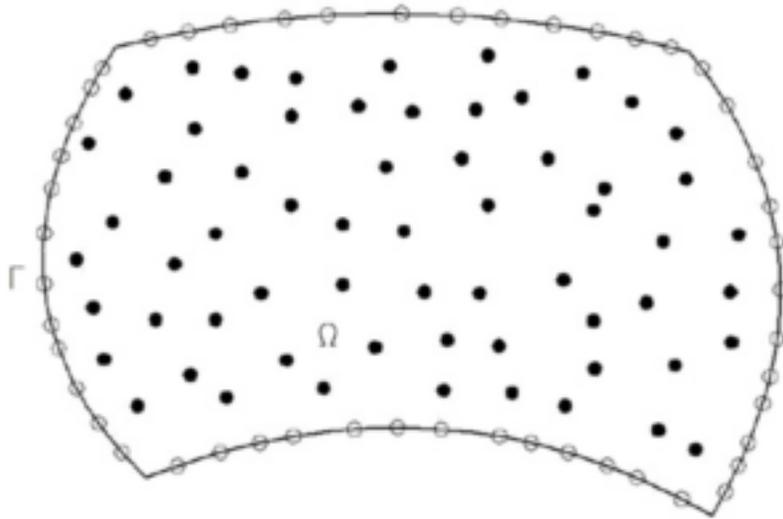
$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^l \left[\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^l(r_k)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \hat{p}^l(r_k)}{\partial x_i} - \rho u_j^* \frac{\partial \hat{u}_i^l(r_k)}{\partial x_j} \right] = \sum_{k=1}^N \alpha_k^l [\phi(r_k) \delta_{il} + \Theta^l(r_k, \bar{x})_i] = 0 \quad (50)$$

Lo cual genera la matriz que se presenta en (51)

$$\begin{pmatrix} B^1[\hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1, \hat{p}^1] & B^1[\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \hat{p}^2] \\ B^2[\hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1, \hat{p}^1] & B^2[\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \hat{p}^2] \\ [\phi + \Theta_1^1] & [\Theta_1^2] \\ [\Theta_2^1] & [\phi + \Theta_2^2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\alpha^1] \\ [\alpha^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [g(\bar{x})_1] \\ [g(\bar{x})_2] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (51)$$

La cual al ser solucionada para los coeficientes buscados, permite la discretización de los campos de velocidad y presión; a continuación se presentan los ejemplos a solucionar, con este método probado

Fig. 17 distribución de puntos en la superficie, oscuros internos y blancos frontera tomado de [27]



Al analizar el flujo de Kovasznay, cuyas soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier-Stokes están dadas por las expresiones (52) a (55)

$$u_1 = 1 - e^{\lambda x_1} \cos(2\pi x_2) \quad (52)$$

$$u_2 = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x_1} \sin(2\pi x_2) \quad (53)$$

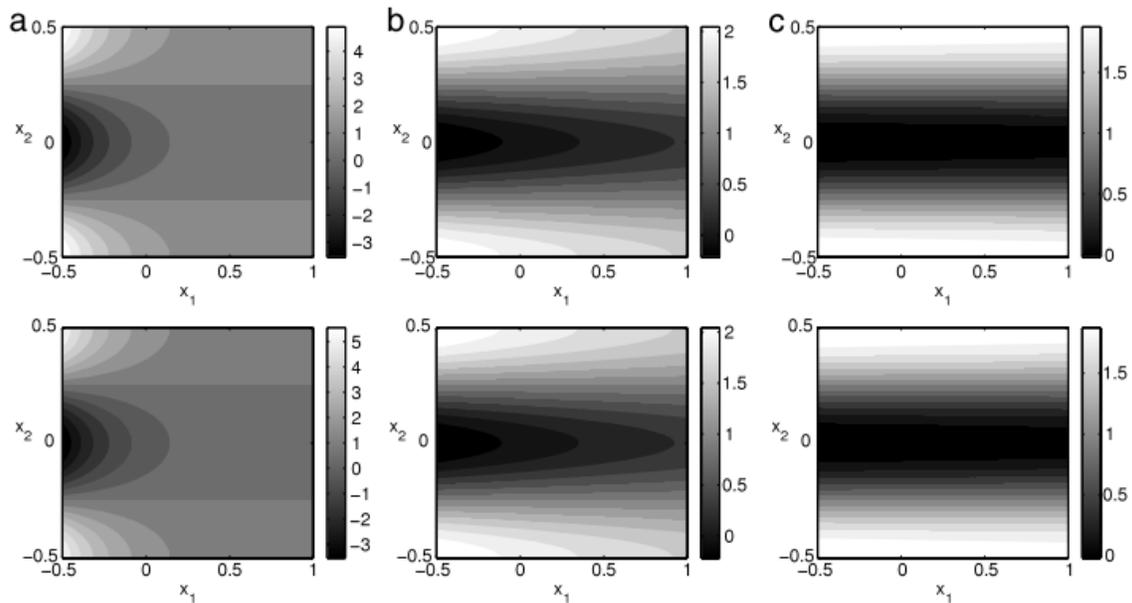
$$p = \frac{1}{2} (1 - e^{2\lambda x_1}) \quad (54)$$

$$\lambda = \frac{\text{Re}}{2} - \left(\frac{\text{Re}^2}{4} + 4\pi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

Se realiza el análisis de las anteriores ecuaciones en un dominio rectangular como se muestra en Fig. 18, al monitorear el tiempo que demora la CPU en dar una respuesta, además de las diferentes soluciones que se obtienen al variar el valor de la constante de Reynolds, es de resaltar las ventajas en el factor tiempo que proporciona el uso de las técnicas descritas en el artículo, según los autores al aplicar las RBF el tiempo empleado está comprendido entre el 0,0617% y el 0,2533%, que es muy pequeño comparado con otra técnicas que demoran entre el 50% y el 63% del tiempo en la generación de la matriz.

En este mismo caso se implementaron simulaciones en las cuales se realizó variación del parámetro de forma, se mantienen el número de puntos analizados en una distribución uniforme, se halla que al darse el valor de la velocidad denominada μ_1 para diferentes valores de Re

Fig. 18 componente μ_1 de velocidad, analítica(superior) numérica(inferior) para valores de Re= 10, 100, 1000 respectivamente tomado de [27]



los otros valores presentan un comportamiento similar; los valores del parámetro de forma se variaron para cada valor de Re lo que indica el ya señalado mal acondicionamiento de la matriz; además de esto se hacen pequeños los valores del parámetro cuando se incrementa Re y cuando el parámetro de forma tiende a cero, el algoritmo utilizado presenta una divergencia, por lo cual es de suma importancia la elección correcta del valor a utilizar, pues

en otras simulaciones con diferencias en los parámetros, se aleja un poco del ajuste que presenta para valores por ejemplo entre 1×10^{-4} y 1×10^{-2} ,

El artículo presenta otros ejemplos, en los cuales se comprueban las ventajas de la incorporación de las RBF en el planteamiento de las funciones de campo de velocidad y presión, pues la implementación en este caso particular de la función multicuadrática implica un gran ahorro en el costo con respecto al tiempo de análisis.

En [11] se inicia el análisis de la ecuación de Stokes a través del método de soluciones particulares aproximadas al usar una colocación global, en este artículo se realiza un desarrollo algorítmico similar al presentado en [27], aunque presenta el problema del mal acondicionamiento que genera el uso de las RBF, se propone como estrategia para superar esta dificultad, implementar el uso indirecto de RBF, se obtiene de esta forma una mayor precisión para una mayor cantidad de parámetros, esto debido al proceso de integración, que mejora la aproximación, al respecto se puede observar que “Chen y Fan propusieron un método integrado de RBF para el caso de una PDE lineal, con operador diferencial $L(\cdot(\vec{x}))$ o parte de ella que puede ser definido con componentes radiales”[11], en particular proponen los autores mencionados la expresión

$$L(u(\vec{x})) = L1_r(u(r)) + L2_x(u(\vec{x})) = f(\vec{x}) \quad (56)$$

En esta ocasión los autores proponen una RBF para $L1$, definiéndola de la siguiente forma

$$L1_r(u(r)) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(r_k) \quad (57)$$

Es ϕ la RBF a implementar; de otra parte la variable de campo se definió de la siguiente forma

$$u(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \hat{u}(r_k) \quad (58)$$

Al sustituir las ecuaciones (57) y (58) en (56), y al tener en cuenta las condiciones de contorno, se obtiene lo que Chen y Fan llaman método de soluciones particulares aproximadas (MAPS), que para el caso del problema de contorno lineal se cumple que

$$L(u(\vec{x})) = f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (59)$$

$$B(u(\vec{x})) = g(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Gamma \quad (60)$$

Donde Ω son los puntos internos de la superficie analizada y Γ los puntos del contorno, se presentan el sistema de ecuaciones a solucionar, en el cual se cumple que $N = N_b + N_i$, es N_b los puntos del contorno y N_i los puntos internos; que es el siguiente

$$\begin{pmatrix} B[\hat{u}(\vec{x}_1, \vec{\xi}_1)] & \cdots & B[\hat{u}(\vec{x}_1, \vec{\xi}_N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B[\hat{u}(\vec{x}_1, \vec{\xi}_1)] & \cdots & B[\hat{u}(\vec{x}_1, \vec{\xi}_N)] \\ \phi(\vec{x}_{N_{b+1}} - \vec{\xi}_1) & \cdots & \phi(\vec{x}_{N_{b+1}} - \vec{\xi}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\vec{x}_N - \vec{\xi}_1) & \cdots & \phi(\vec{x}_N - \vec{\xi}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N_b} \\ \alpha_{N_{b+1}} \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ g(\vec{x}_{N_b}) \\ f(\vec{x}_{N_{b+1}}) \\ \vdots \\ f(\vec{x}_N) \end{pmatrix} \quad (61)$$

El esquema de MAPS se plantea en el artículo analizado para solucionar dos problemas de contornos diferentes; el primer problema se basa en el análisis de la solución particular de problemas de flujo de Stokes.

En este problema, se presenta un número de Reynolds bajo, además un flujo arrastre, por lo cual las ecuaciones básicas de Navier-Stokes se reducen al sistema lineal de Stokes, cuyas ecuaciones son iguales a (27) y al realizar cambios en (28), se obtiene la siguiente forma

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (62)$$

Con (27) y (62) se completa el esquema del sistema lineal de Stokes. En el cual también se usa la función multicuadrática como RBF interpolante. La implementación del método MAPS se realiza con la implementación de las expresiones que se formulan de (42) a (49), es importante resaltar que en la matriz de ecuaciones resultante se presenta conservación de la masa “la propuesta MAPS se utiliza para solucionar problemas bidimensionales de flujo de Stokes en dominios acotados. Se consideran dos problemas de contorno con soluciones analíticas conocidas”[11], esto con el fin de ver la sensibilidad del parámetro de forma de la ecuación multicuadrática y tomar un único valor para el análisis de cada uno de los problemas de lid-driven cavity (cavidad de tapa impulsada) y backward facing step (paso retrospectivo), cuyos resultados se comparan con los obtenidos con un CFD, al mostrar que el método de MAPS genera resultados más precisos y estables para una alta gama de valores de parámetros de forma.

Para comprobar la efectividad del método, se dan las soluciones analíticas para las velocidades y presión, que son:

$$u_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 \right) \quad (63)$$

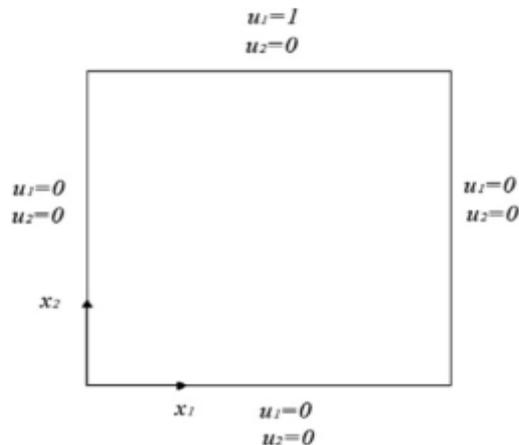
$$u_2 = -\frac{x_1 x_2}{4} \quad (64)$$

$$p = \mu x_1 \quad (65)$$

luego se imponen condiciones de contorno con lados de medida igual a una unidad para ambos problemas analizados, se determinan de esta forma los valores máximos que se dan en el punto de coordenadas (1,1), para ambas componentes de la velocidad estos valores son

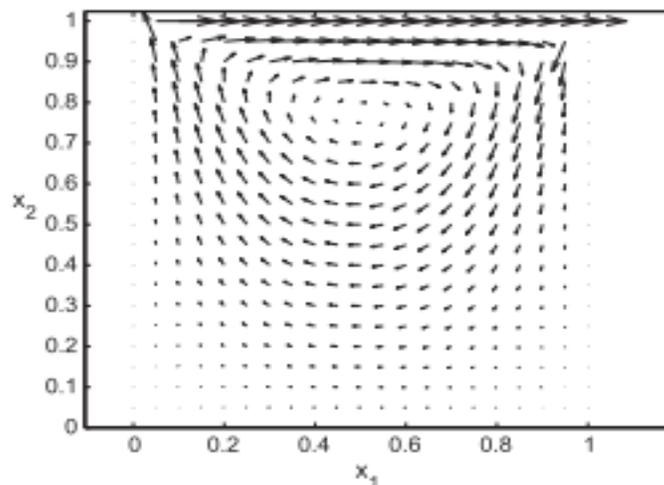
$u_1 = 0,5$ y $u_2 = 0,25$; el valor máximo para la presión se da a lo largo de la línea cuya componente $x_1=1$ y tiene un valor de $p = 1,0$; para medir la exactitud del método, se propone una expresión para el error relativo

Fig. 19 condiciones de contorno para la velocidad en el lid-driven cavity flow tomado de [11]



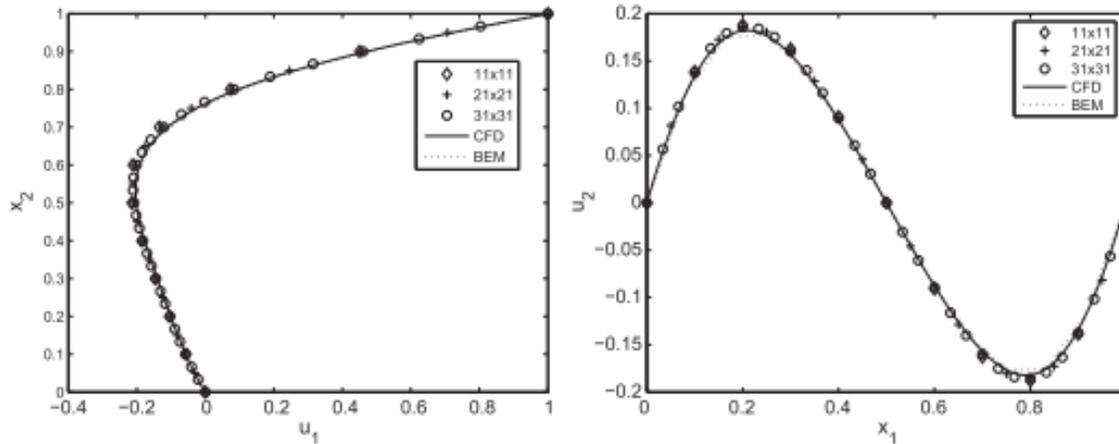
Solo se mostrará el análisis hecho sobre el flujo de lid-driven cavity en el cual las componentes de velocidad se hacen cero en todas las paredes, excepto en la tapa superior, en la cual la velocidad horizontal se hace equivalente a 1, y con una implementación de puntos distribuidos uniformemente (21x21) y un valor del parámetro de forma $c=0.01$ como se muestra en la Fig. 19. Con la configuración planteada se obtiene el campo de velocidad que se observa en la Fig. 20

Fig. 20 campo de velocidad para el lid-driven cavity flow, tomado de [11]



En forma similar, se puede observar la efectividad del método utilizado al realizar simulaciones con varios dominios diferentes de puntos (11x11, 21x21, 31x31), y el mismo valor para el parámetro de forma; y al comparar los resultados obtenidos con los que se obtuvieron con otros métodos y un software comercial CFD

Fig. 21 comparaciones de los valores de velocidad u_1 en $x_2=0,5$ y u_2 en $x_1=0,5$ entre varias distribuciones nodales y algunos métodos al aplicar CFD tomado de [11]



Como se observa en Fig. 21 se obtienen muy buenas aproximaciones de las velocidades aun con pequeñas distribuciones de puntos en el dominio y para un amplio rango de valores del parámetro de forma.

6.3.2.2. Método de colocación MAPS local

En [28] se propone el método de LMAPS, en este proceso de solución para evitar los problemas de condicionamiento de la matriz, se trabaja a nivel local en cada punto, al crear un subdominio respectivo; con esta propuesta de trabajo se soluciona el problema de cavidad impulsada, se consiguen resultados acordes a los conocidos en la literatura, con lo cual se muestra la eficiencia y alta precisión del método propuesto.

Este es un método de colocación local para aproximar las derivadas, con respecto al tiempo por medio del paso fraccionario al solucionar por separado la ecuación de momento y de Poisson.

El algoritmo utilizado tiene los siguientes pasos, lo primero es discretizar las ecuaciones, lo cual se logra por medio del método de proyección, que se sintetiza en (37) y (38), luego se supone que se cumplen las condiciones de frontera iniciales para la velocidad y la presión, con el fin de hallar la velocidad intermedia; como tercer paso se determina la presión al solucionar la ecuación de Poisson discreta por medio de la expresión

$$P^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta t} L^{-1} (A + B) U^* \quad (66)$$

En la cual L, A, B son matrices dispersas de orden n, y U^* un vector; con el valor que se obtiene en (66), se halla el valor de la velocidad por medio de

$$U^{(n+1)} = U^* - \Delta t A P^{(n+1)} \quad (67)$$

El proceso se repite desde el paso dos hasta que se llega al tiempo preestablecido.

Con el método de LMAPS se busca evitar las matrices de gran tamaño con problemas de condicionamiento para ello se sigue un proceso de construcción del método similar al realizado en las ecuaciones (141) a (144), se usa también en este artículo la RBF

multicuadrática, que se redefine para mejorar la aproximación debido al valor del parámetro de forma

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + (\tilde{c}r_0)^2} \quad (68)$$

Donde r_0 es la mayor distancia medida desde el punto centro del subdominio a los puntos que conforman el mismo, al realizar este proceso para la selección del parámetro de forma, se debe tener en cuenta que a mayor densidad de puntos, menor distancia entre los mismos lo que implica la necesaria elección de un parámetro con valor grande y viceversa.

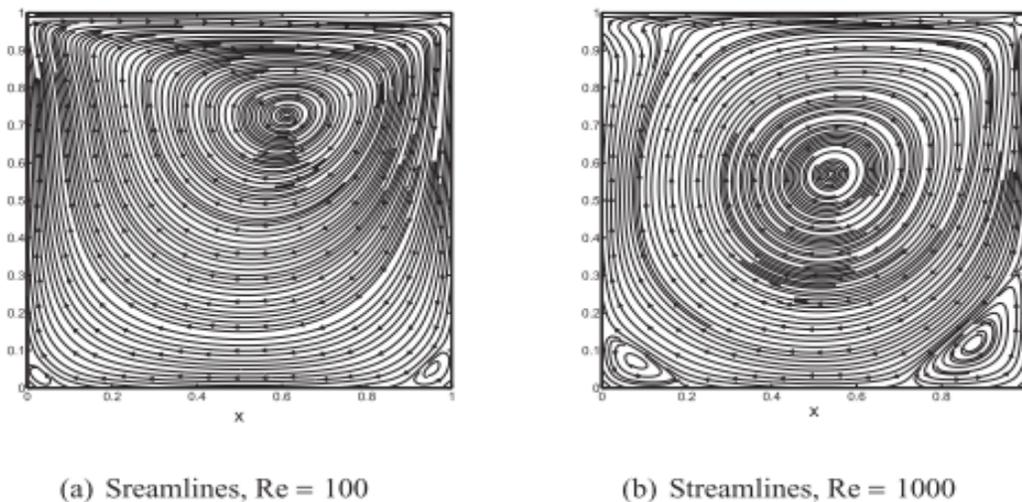
En la solución del lid-driven cavity flow cuyo dominio está dado para las direcciones x e y entre cero y uno en el cual los puntos se distribuyen uniformemente, se crean subdominios de cinco puntos, los cuales mostraron una alta precisión en especial en las regiones de frontera en donde las condiciones de contorno son para la tapa (pared superior) $u_1=1$ y $u_2=0$, en las demás paredes ambas componentes de la velocidad son cero, respecto a la presión se plantea la condición de Neuman para la frontera,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (69)$$

Los puntos de frontera se discretizan con un radio equivalente a $3r_0$, en esta.

En la simulación realizada se crean incrementos de tiempo de $0,00005s$ para distribuciones uniformes de puntos de 51×51 y se usa un $Re=100$, al parámetro de forma se le da un valor de $20r_0$, del análisis se concluye que se obtienen vórtices en un gran número de puntos en la frontera a medida que se aumenta el número de Reynolds, finalmente las velocidades obtenidas en el centro de la cavidad y en las componentes de velocidad se comparan con la información hallada en la literatura existente, en las comparaciones realizadas se puede observar que el método de LMAPS es consistente respecto a los resultados presentados en la literatura; con respecto a la diferencia que genera el cambio en el valor de Re , en la Fig. 22 se puede observar las líneas de campo que genera el aumento de Re de 100 a 1000 en los gradientes de velocidad de las componentes u y v .

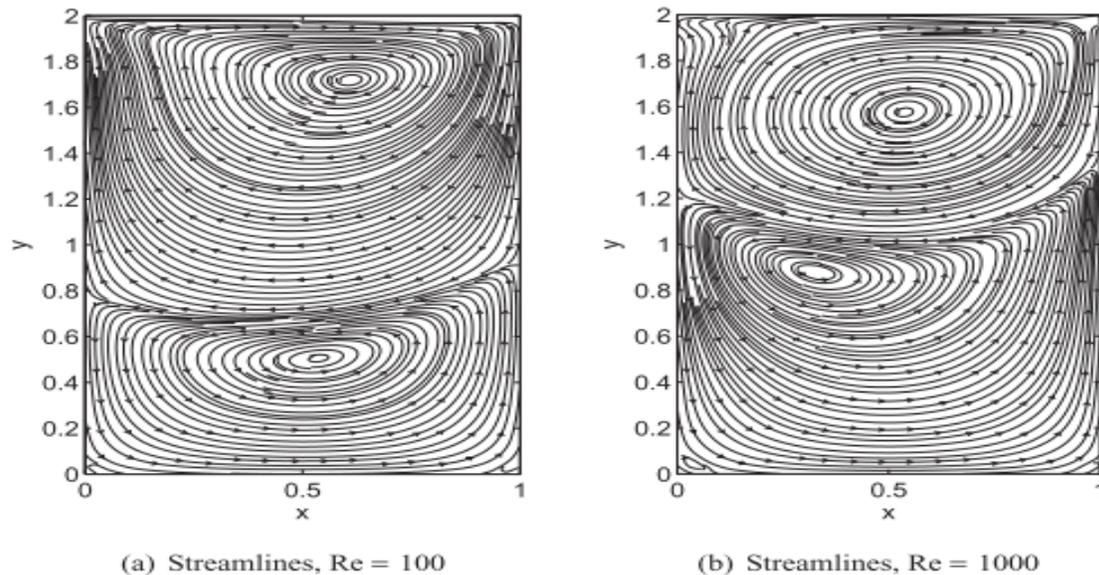
Fig. 22 líneas de corriente tomado de [28]



Es importante resaltar que al aumentar el número de Reynolds, el vórtice principal se desplaza hacia el centro de la cavidad; en la Fig. 23 se muestran los resultados obtenidos al

cambiar las dimensiones de la cavidad en una relación en la medida de los lados de 2:1, en este caso aparecen dos remolinos y al aumentar el Re , el remolino superior presenta el comportamiento que se muestra en la Fig. 22, pero el remolino inferior se expande para ocupar la mayor parte de la cavidad

Fig. 23 comportamiento del fluido en una relación de 2:1 tomado de [28]



6.3.3. MÉTODO DQ-RBF

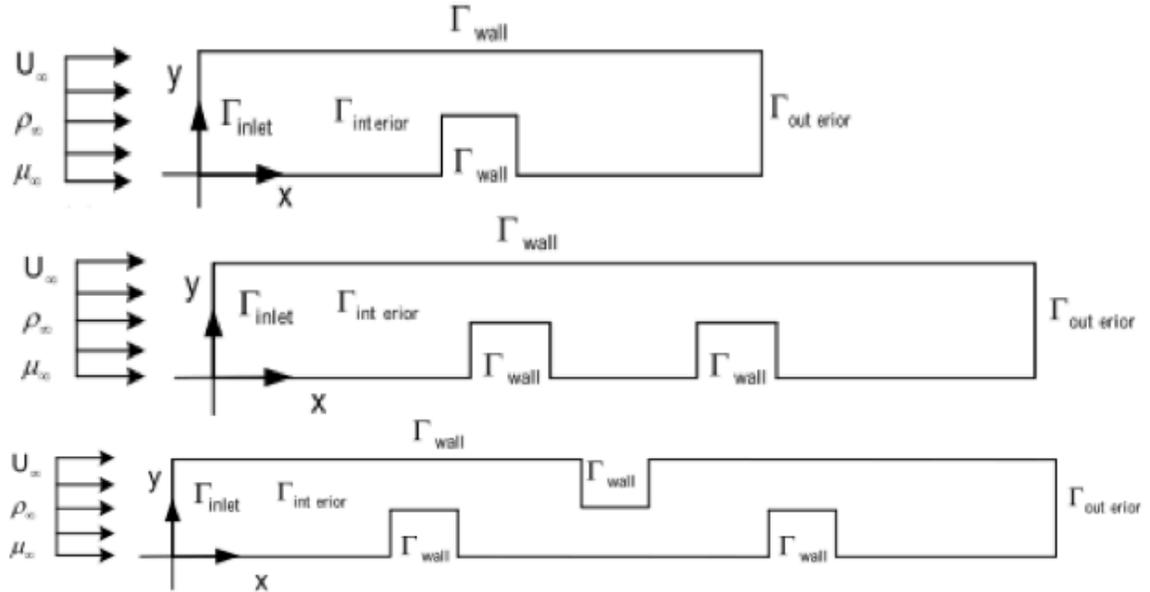
En [29] se propone un método diferencial de cuadratura (DQ) que se caracteriza por dar soluciones muy precisas a ecuaciones diferenciales con pocos puntos de referencia, pero su dificultad radica en que solo funciona en rejillas tomadas en regiones regulares, por lo tanto se adiciona un método upwind local RBF-DQ para dar solución a las ecuaciones Navier-Stokes, las ecuaciones de emplazamiento se solucionan al utilizar el método de Levenberg-Marquardt.

En la propuesta analizada se plantea la posibilidad de solucionar problemas lineales y no lineales pues combina la alta precisión de las RBF y la aproximación a la derivada dada por la DQ, lo cual permite mejorar el campo de aplicación de ambos métodos, además de lograr ingresar el mecanismo de upwind en el análisis, con este método se logra la solución exacta y estable de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las condiciones de frontera se suponen paredes no deslizantes; para la velocidad y la presión del canal están dadas por los términos que aparecen en la Tabla 3, varía la condición de salida para la presión, haciéndola solamente $\nabla p=0$,

Para la implementación del método se presentan tres situaciones diferentes, que se pueden apreciar en la Fig. 24

Fig. 24 diferentes canales con obstáculos usados en el análisis del método upwind RBF-DQ tomado de [29]



La salida se ubica lo suficientemente lejos del ingreso ($L=10H$, es H el diámetro del canal) igual que en [9]; con el fin de asegurar que el flujo se desarrolle completamente al interior del canal y así suponer que las líneas de corriente sean completamente rectas, de esta forma los gradientes de todas las variables se hacen cero en la dirección del flujo el cual se supone es constante, viscoso e incompresible

En esencia la DQ es una aproximación de las derivadas parciales de una función desconocida respecto a una variable independiente, mediante una suma lineal que pondera los valores de la función en cada uno de los puntos donde es evaluado el método como se especifica a continuación

$$f'_x(x_i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^m f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (70)$$

en (70), los x_j son los puntos del dominio analizado, $f(x_j)$ y $w_{ij}^{(m)}$ son los valores de la función y los coeficientes de ponderación en los puntos del dominio respectivamente.

La RBF usada en el trabajo analizado es la TPS (Thin-Plate Splines) esto se hace según los autores para evitar el parámetro de forma, el cual no tiene una técnica precisa para calcular el valor óptimo, la ecuación tiene la forma dada en (11) con un valor para $k=4$, al implementar la función de base radial en el método de DQ, se plantea la siguiente ecuación

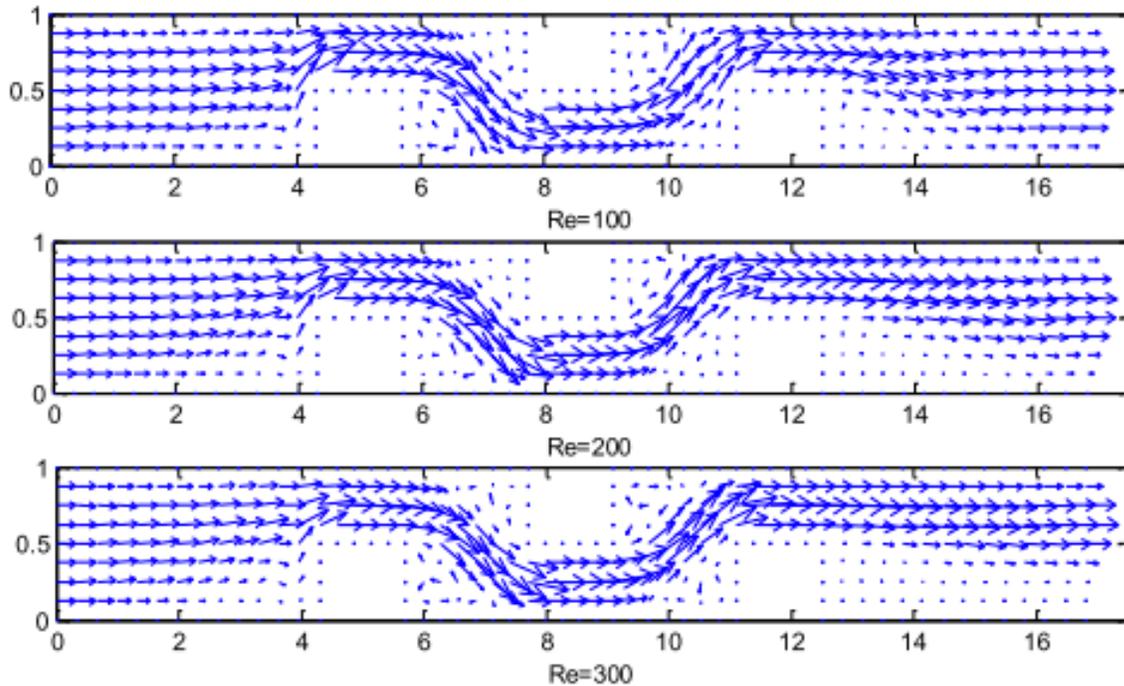
$$\frac{\partial \varphi(x_l)}{\partial x} = \sum_{j=0}^{N_l} w_{l,j}^{(1,x)} \varphi_k(x_j^l), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_l \quad (71)$$

Es $\varphi(x)$ la RBF utilizada en el método, con base en (71) se genera la matriz no singular que aparece en (72), la cual depende directamente de la función utilizada.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_0(x_I)}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2(x_I)}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{NI}(x_I)}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\left\{ \frac{\partial \varphi(x_I)}{\partial x} \right\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_0(x_I^0) & \varphi_0(x_I^1) & \cdots & \varphi_0(x_I^{NI}) \\ \varphi_1(x_I^0) & \varphi_1(x_I^1) & \cdots & \varphi_1(x_I^{NI}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{NI}(x_I^0) & \varphi_{NI}(x_I^1) & \cdots & \varphi_{NI}(x_I^{NI}) \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} w_{I,0}^{(1,x)} \\ w_{I,1}^{(1,x)} \\ \vdots \\ w_{I,NI}^{(1,x)} \end{bmatrix}}_{\{w\}} \quad (72)$$

Para determinar los valores que satisfacen las variables primitivas en las NS, se tomó en cuenta el método de Levenberg-Marquardt para solucionar el sistema de ecuaciones no lineales; los términos de velocidad, presión; la primera y segunda derivada de ambas cantidades se introducen en las ecuaciones de NS, el método de DQ tienen problemas con las características de contraviento por ello el método upwind RBF-DQ se desarrolla de manera local; para validar el método propuesto se trabaja con valores Re de 100, 200 y 300, los resultados obtenidos se observan en la Fig. 25, al comparar estos resultados con los que arroja el mismo problema al abordarse desde el método FVM solucionado con un paquete comercial CFD al implementar mallas de diferentes tamaños, tres en total para cada situación con los diferentes valores de Re, y al realizar varias simulaciones se observa que el porcentaje de error en la desviación estándar y la media aritmética disminuyen a medida que aumenta el número de puntos, de la misma forma se observa que el método upwinding pierden estabilidad al incrementarse la distancia de separación entre los puntos, pero a la vez da mejores resultados al compararse con los resultados obtenidos con el software comercial, se verifica que el tiempo que demora la CPU para procesar el método sin malla depende del número de puntos seleccionados, pero esta parte se viene mejorando continuamente debido a los avances que se han logrado respecto al uso de las RBF; el método logra la simulación en los puntos de las zonas de aceleración del fluido, la zona de menor velocidad se presenta al salir de los obstáculos y al acercarse a la salida el flujo recupera el perfil con el cual ingresó al canal; que de hecho es ideal. En las simulaciones realizadas, se observó que al aumentar el Re aparece recirculaciones en las zonas muertas que se dan después del obstáculo; la presión presenta un comportamiento similar con ambos métodos.

Fig. 25 vector de velocidad para el canal con tres obstáculos y diferentes valores de Re , tomado de [29]



al analizar el documento y el problema solucionado, se puede decir que se plantea el método local upwind RBF-DQ para la solución de las ecuaciones NS, el método planteado se válida para el flujo de canales 2D con varias situaciones donde se presenta uno o más obstáculos, los resultados obtenidos se comparan con los que arroja un paquete comercial; se demuestra que el método planteado representa en forma correcta regiones irregulares y que es consistente, además es posible que se pueda extender a problemas 3D.

6.3.4. MÉTODO IRBF

En [30] se estudia el impacto del método de IRBF para el flujo bidimensional de estado estacionario, viscoso e incompresible en lugar de polinomios interpolantes de orden inferior, el método que se propone se emplea en varios problemas, por ejemplo en problemas lineales en el flujo de Stokes y no lineales como el lid-driven cavity flow. Los resultados que se obtuvieron muestran que el IRBF es superior respecto a la exactitud de la solución y converge más rápidamente respecto a las diferencias finitas, y el tratamiento en la frontera de la presión es más apropiada en la forma de Dirichlet con respecto a la condición de contorno de Neumann.

Las ecuaciones hidrodinámicas que se trabajaran son las Navier-Stokes similares a las presentadas en (27) y (28), las cuales se solucionan al implementar el método de proyección que presenta dos pasos de solución vitales como se muestra en (37) y (38), al realizar la revisión del esquema de IRBF, se define una función f cuyas derivadas de segundo orden se reemplazan por RBF mas explícitamente la multicuadrática, como aparece en (73)

$$\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = \sum_{i=1}^m w_i G_i(\eta) \quad (73)$$

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = \sum_{i=1}^m w_i H_i(\eta) + c_1 \quad (74)$$

$$f(\eta) = \sum_{i=1}^m w_i \bar{H}_i(\eta) + c_1 \eta + c_2 \quad (75)$$

Donde m es la cantidad de RBF a implementar, $G_i(\eta)$ son las RBF, y las w_i son los coeficientes que se deben determinar; la primer derivada y la función se obtienen por medio de integración en (73), las expresiones de estas dos funciones se muestran en (74) y (75), donde $H_i(\eta) = \int f(\eta) d\eta$; $\bar{H}_i(\eta) = \int H_i(\eta) d\eta$; c_1 y c_2 son constantes de integración, al lograr expresar la función f en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{f}_b \end{pmatrix} = \bar{H} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

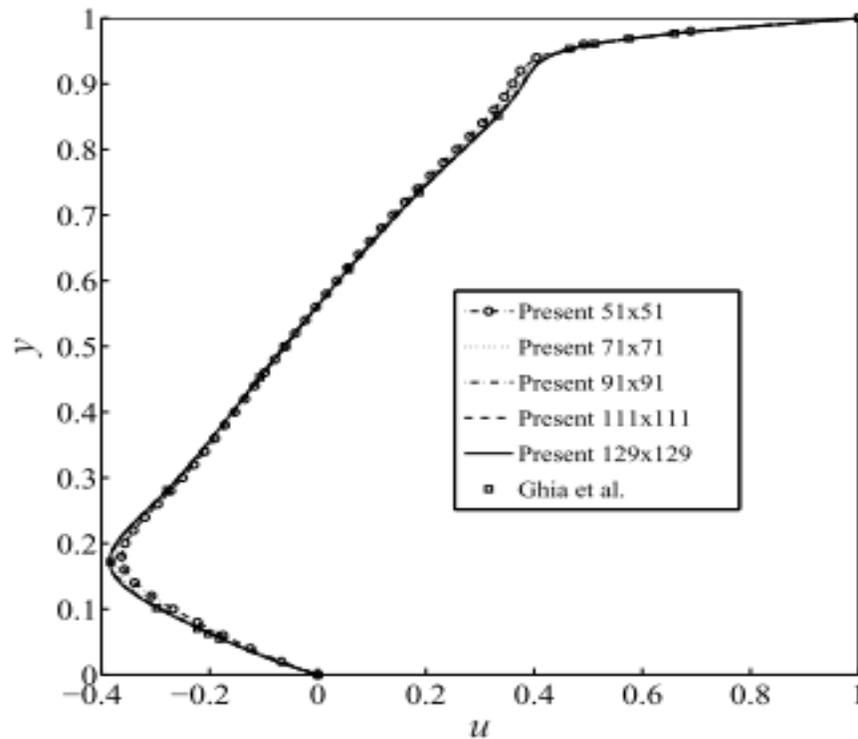
Es $\hat{f} = (f_1, f_2, \dots, f_q)^T$, $\hat{f}_b = (f_{b1}, f_{b2})^T$, $\hat{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$, $q = m - 2$ y \bar{H} es la matriz dada en (77)

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1(\eta_1) & \dots & \bar{H}_m(\eta_1) & \eta_1 & 1 \\ \bar{H}_1(\eta_2) & \dots & \bar{H}_m(\eta_2) & \eta_2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{H}_1(\eta_q) & \dots & \bar{H}_m(\eta_q) & \eta_q & 1 \\ \bar{H}_1(\eta_{b1}) & \dots & \bar{H}_m(\eta_{b1}) & \eta_{b1} & 1 \\ \bar{H}_1(\eta_{b2}) & \dots & \bar{H}_m(\eta_{b2}) & \eta_{b2} & 1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

Para lograr la correcta implementación se proponen dos implementaciones, en la primera se imponen las condiciones de contorno de Neumann para el campo de presión y en la segunda se dé un cambio de las condiciones de contorno de Neumann por las condiciones de Dirichlet en el cual se aplica el IRBF en una dimensión.

Entre los diferentes problemas estudiados en el artículo analizado se soluciona una ED para poder realizar una buena elección del parámetro de forma se tiene un espectro de elección entre 2 y 100, se observó que a medida que se incrementaba el valor del parámetro se disminuía el valor del error, pero a mayor valor, se presenta inestabilidad en el proceso por lo cual se opta por trabajar con un valor de parámetro igual a ocho; aunque se observó un rango entre 20 y 60, en el cual el IRBF presenta un buen funcionamiento; en la solución de la ED se toma un incremento de tiempo de 0,5s y se observa que a mayor incremento de tiempo, se presenta una convergencia más rápida los resultados obtenidos al solucionar la ED con el método propuesto son superiores respecto a los obtenidos en el FDM en cuanto a la precisión y convergencia.

Fig. 26 velocidad horizontal en la línea central vertical , para $Re= 1000$, tomado de [30]



Luego de comprobar el método y determinar el valor del parámetro de forma se soluciona un problema de lid-driven cavity flow, en el cual se da la velocidad de tapa $u_l = 1$, en este problema se utilizaron incrementos de tiempo desde 0,00025 hasta 0,1 es importante resaltar que a mayor número de Re y a mayor densidad de puntos, el incremento de tiempo es menor. Los resultados obtenidos con el IRBF se comparan respecto a los reportados en la literatura, al observar el comportamiento que presentan las diferentes variables analizadas se observa concordancia en los resultados, pero el método IRBF presenta la ventaja de necesitar mallas más pequeñas para obtener resultados iguales y óptimos con un costo a nivel computacional y temporal menor como se observa en Fig. 26 y Tabla 6.

Tabla 6 perfil de la velocidad horizontal mínima a lo largo del línea vertical central para $Re= 1000$, el error relativo se tomó con base a la solución de Benchmark , tomado de [30]

Método	Malla	u_{min}	Error (%)
IRBF	51 x 51	- 0,3629562	6,59
IRBF	71 x 71	- 0,3755225	3,36
IRBF	91 x 91	- 0,3815923	1,80
IRBF	111 x 111	- 0,3840354	1,17
IRBF	129 x 129	- 0,3848064	0,97
FDM (ψ - ω)[Ghia]	129 x 129	- 0,38289	1,46
FDM (\hat{u} - p)[Bruneau]	256 x 256	- 0,3764	3,13
FVM (\hat{u} - p) [Deng]	128 x 128	- 0,38511	0,89
Benchmark [Botella]		-0,3885698	

6.3.5. MÉTODO IB

En [32] se propone el método de limite inmerso basado en las RBF, para los procesos de interpolación de difusión, el esquema que se propone también puede tener en cuenta las condiciones de Dirichlet y Neumann, para comprobar la veracidad del método propuesto se propone la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en un cilindro de geometría bidimensional con condiciones de contorno de Dirichlet.

Para poder aplicar el método de IB(limites inmersos), se define un conjunto de nodos de Lagrange en la superficie sumergida, el cual está rodeado por puntos vecinos, la idea principal del método es hallar la velocidad del fluido en cada uno de los puntos que se toman en la superficie, para hallar así las fuerzas localizadas que permite hallar las condiciones de velocidad deseadas, básicamente la idea de los métodos que utilizan el IB es la transferencia de un campo de fuerzas de la función de Lagrange a los nodos de Euler y viceversa; la relación entre la fuerza singular y las fuerzas de Euler está dado por la expresión

$$F = Wf \quad (78)$$

Donde $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ es el conjunto de fuerzas singulares, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ son las fuerzas de Euler y W es la matriz cuyas entradas dependen de la RBF aplicada, la matriz debe cumplir que la suma de sus columnas debe ser igual a la unidad, es decir $\sum_i W_{i,k} = 1$ por lo tanto se cumple que

$$\sum_i F_i = \sum_i \sum_k W_{i,k} f_k = \sum_k f_k \sum_i W_{i,k} = \sum_k f_k \quad (79)$$

En la anterior ecuación se reemplazan las entradas de W por la IMQ- RBF, la cual se representa exactamente como aparece en (8). Con base en este proceso se plantea el valor interpolado en cada punto X_l de la siguiente forma

$$F_l = \sum_{j=1}^n \omega_j f_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \lambda_{j,k} \phi(\|X_l - x_k\|) + \gamma_j \right] f_j, \quad F_l = F(X_l), \quad f_j = f(x_j) \quad (80)$$

En la anterior ecuación ω_j es el peso correspondiente a cada interpolación que se reemplaza por la respectiva RBF utilizada y donde los λ_j, γ_j son los coeficientes que se desean hallar; los autores imponen en cada nodo la siguiente condición para los coeficientes

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{j,k} \phi_{j,k} + \gamma_j = \delta_{j,k} \quad (81)$$

Con $\delta_{j,k}$ igual a la función de Kroeneker, con base en esta condición se plantea el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{j,1} & \cdots & \phi_{j,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{n,1} & \cdots & \phi_{n,n} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{j,1} \\ \cdots \\ \lambda_{j,j} \\ \cdots \\ \lambda_{j,n} \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (82)$$

Donde $\phi_{j,k}$ son las IMQ-RBF para cada punto, para el caso de este trabajo el parámetro de control que se usa siempre es mayor a uno, con este proceso se determina la importancia de los diferentes coeficientes que serán las entradas de la matriz W, en el trabajo analizado se muestra las bondades de este proceso, puesto que los valores de lambda que se obtienen pueden ser usados para aproximar el valor de la derivada o de un operador lineal.

Para mejorar la solución de las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes es la implementación del método de proyección continua, por ejemplo para la ecuación de momentum se usa la expresión

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -N_l(u^n, u^{n-1}) - G\phi^{n-1} + \frac{1}{\text{Re}}L(u^*, u^n) \quad (83)$$

y para el valor del proyector que hace las veces de Pseudo presión,

$$L\phi = \frac{1}{\Delta t} Du^* \quad (84)$$

Que cumple las condiciones de libre convergencia por medio de

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t G\phi^n \quad (85)$$

En las ecuaciones (83) a (85), u^* es el campo de velocidad predicho, u^n es campo de velocidad obtenido en el n-ésimo paso de tiempo, Δt es el incremento de tiempo, y N_l , G y D son respectivamente la aproximación de la diferencia discreta finita no lineal, el gradiente y el operador divergente, L es el Laplaciano discreto y ϕ es una variable de proyección que generalmente están definidos en un sistema de red escalonada.

Para poder aplicar las condiciones de Dirichlet en la frontera Γ , la secuencia de tiempo es modificada mediante el avance de tiempo en la ecuación de momentum, dicho proceso se realiza en dos pasos, la primera parte se realiza en forma explícita sin tener en cuenta la fuerza corporal, el campo de velocidad que se predice u^* conduce fielmente a el campo de fuerza predicho por $u^*/\Delta t$, después de esto se procede a determinar la cantidad de fuerza por unidad de área necesaria para cumplir las condiciones de contorno.

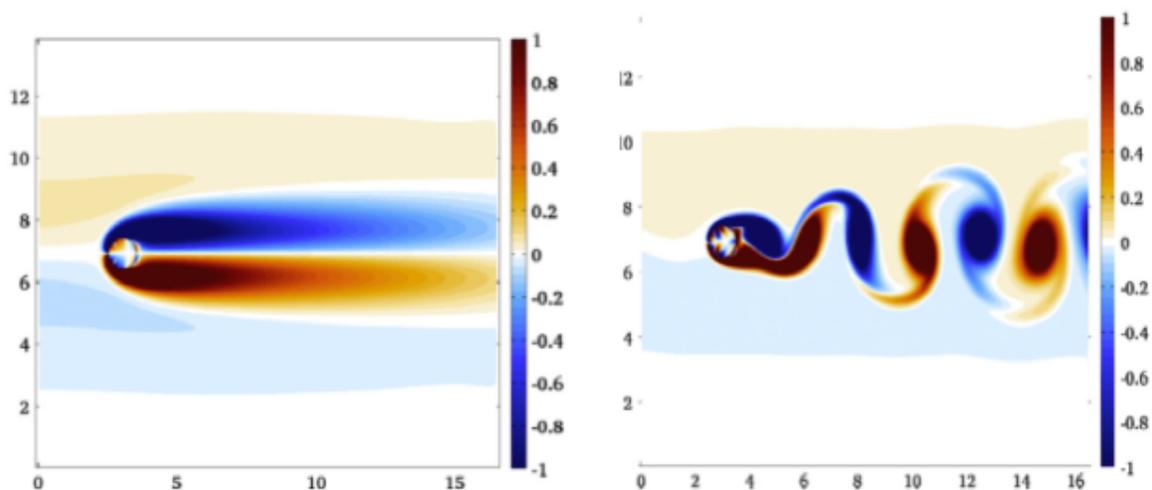
$$F = \frac{U^o}{\Delta t} - \frac{I(u^*)}{\Delta t} \quad (86)$$

En la anterior ecuación U^o es la distribución de velocidad deseada inmersa en la frontera e I es el operador de interpolación, cuando se halla la fuerza F, se procede a buscar la corrección en la ecuación de momentum por medio de la inclusión de fuerzas singulares f en cada nodo de interpolación para así poder recuperar los valores de F en el contorno dados en la ecuación inmediatamente anterior.

En el análisis del trabajo, se definen circunferencias de radio igual a Δr , los nodos que están inmersos dentro del círculo son los nodos de Euler, para tener los nodos de Lagrange se amplía la selección a una cantidad que triplica los puntos internos del círculo esto con base en experimentos numéricos en los cuales se mejora la estabilidad y la exactitud de los cálculos con esta relación de puntos; el mejor valor para el radio del círculo se hace con $\Delta r = \Delta x$, con base en este radio y al tomar el número de Reynolds entre 25 y 250; se toma como parámetro de control el que se determina por $\varepsilon = \text{Re}/\Delta x$, este valor se da aleatoriamente, pero en las simulaciones realizadas muestra una buena adaptación a la superficie en la cual se trabaja, con base en estas condiciones se halló que los puntos de Euler externos, pero

cercanos al círculo con distancia menor a $0,1\Delta r$ produce inestabilidad numérica, este impase se soluciona al tomar puntos con la misma velocidad.

Fig. 27 contornos de velocidad para $Re= 30$ y $Re= 185$ respectivamente, tomado de[32]



Al momento de validar los métodos se fijaron para el análisis dos números de Reynolds que son 30 y 185, y se halló que el método propuesto reproduce en forma correcta el flujo al interior del cilindro, y que los resultados concuerdan perfectamente con la literatura existente.

Para validar el método propuesto en el artículo estudiado, se analizó el caso de flujo alrededor de un cilindro circular cuyo diámetro es D , con dos números de Reynolds diferentes que son 30 y 185 respectivamente, lo que hallaron los autores fue que el método propuesto reproduce con gran éxito las características que tiene el flujo para ambos números de Reynolds, esto con base en los resultados presentados en la literatura existente; en especial para el número de Reynolds más pequeño, los datos observados como las distancias, el ángulo de influencia y otros, están en plena concordancia con tres trabajos previos que se analizan en el documento y se presentan en Tabla 7

Tabla 7 comparación de los datos experimentales con tres referencias pertenecientes a la literatura para $Re= 30$, tomado de [32]

	l/D	a/D	b/D	θ	C_D
Documento analizado	1,71	0,56	0,53	47,93	1,78
Referencia 1	1,70	0,56	0,52	48,05	1,80
Referencia 2	1,55	0,54	0,54	50,00	-
Referencia 3	-	-	-	-	1,74

6.3.6. MÉTODO FD

En [31] se aclara que el método a usar es una variación de las RBF en el modo de diferencias finitas para dar solución a las ecuaciones en forma primitiva de Navier-Stokes, en el trabajo analizado se utilizan dos esquemas uno implícito y otro explícito, el primero de estos esquemas presenta mayor precisión y estabilidad con respecto al segundo esquema que pierde más precisión en lugares con pendientes más grandes, en este trabajo se aplica el concepto de parámetro de forma adaptativa (ASP) el cual permite tener una mejor distribución de puntos para obtener una mayor precisión en los resultados, se examinan varios problemas con el método propuesto y se compara con literatura existente.

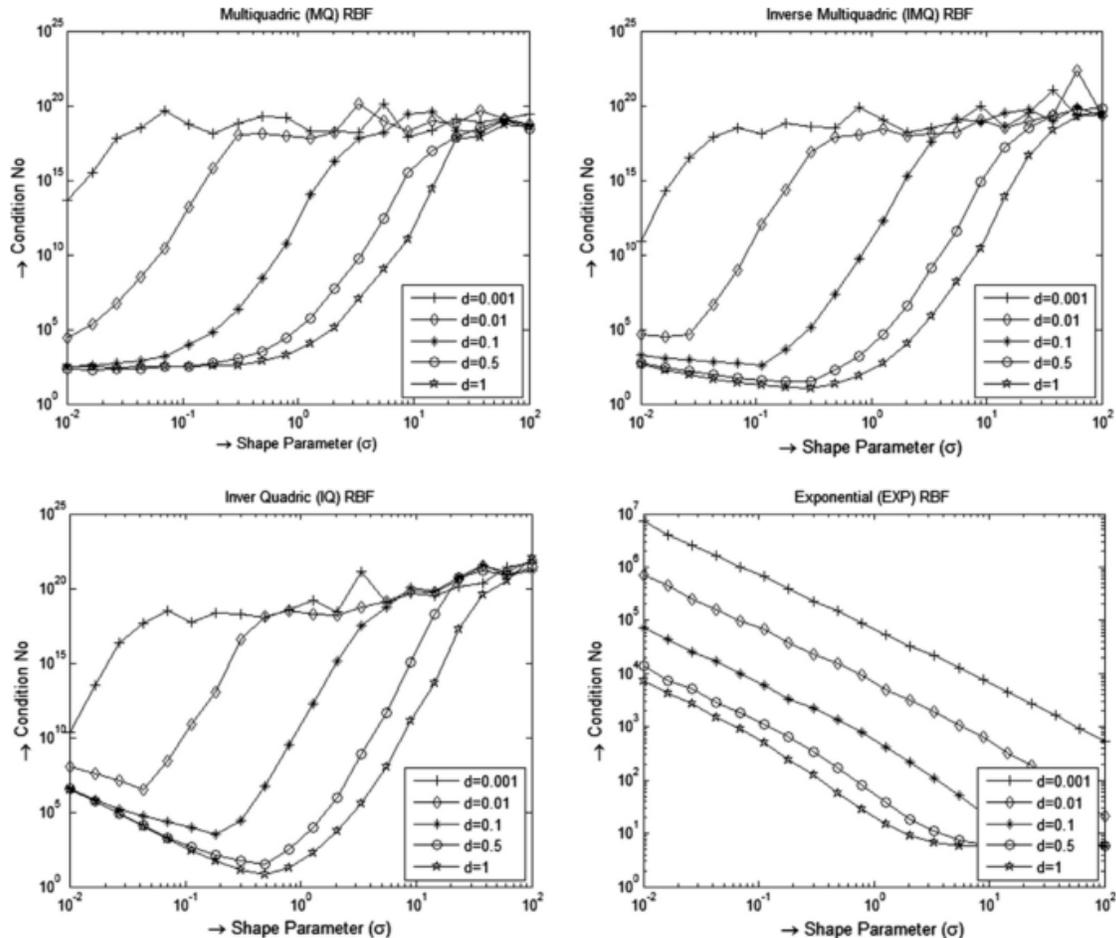
La dificultad de la técnica de solución con RBF ha radicado en la forma en que se presenta la matriz de coeficientes, la cual presenta malos acondicionamientos a medida que aumenta el número de puntos a interpolar, al respecto de esta dificultad se han propuesto en la literatura varias alternativas como la utilización de las RBF local, de estos métodos uno de los más interesantes y usados es el RBF-FD, por medio de este método se realiza una discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes presentadas en (27) y (28), por medio del proceso que se describe en (37) y (38), el cual permite una matriz con un menor problema de acondicionamiento; el método RBF-FD, es básicamente, la generalización del método de diferencias finitas, solo que en puntos distribuidos en forma aleatoria, por lo tanto las derivadas a plantear se discretizan con expresiones similares a la planteada en (33), para este caso el valor de n representa a los puntos contenidos en el subdominio de i -ésimo punto, este proceso lleva a una matriz local similar a (14) de esta forma se obtiene directamente los valores de los diferenciales planteados en las Navier-Stokes.

En el proceso de discretización se utilizaron esquemas explícitos e implícitos; el primer esquema se muestra al realizar un paso intermedio de velocidad en (28), luego de esta situación se comprueba que la velocidad cumpla la ecuación de continuidad, aunque este esquema presenta gran eficiencia en el cómputo de las soluciones, la desventaja del esquema es su exactitud puesto que solo es de primer orden y se ve afectada en regiones con grandes gradientes en las cuales se debe hacer un apilamiento de una gran cantidad de nodos. En el segundo esquema se tiene una exactitud de segundo orden, en él se utiliza el método de Adams-Bashforth para discretizar el término convectivo y el método de Crank-Nicholson se usa para la discretización del término viscoso de (28), el método implícito permite unos saltos de tiempo mayores, por lo cual se da un ahorro de tiempo y una mejora de la eficiencia computacional.

Una de las principales preocupaciones en el uso de las RBF es la correcta elección del parámetro de forma, aunque se han adelantado varias investigaciones al respecto, aun no existe un proceso o técnica estandarizada que permita la correcta elección del mismo, para el caso del artículo analizado se optó por el uso de un parámetro de forma adaptativo, en lugar de usar los parámetros que se toman en otros problemas analizados, esto se realiza con el fin de mantener la matriz bien condicionada. Se emplearon varios valores para el parámetro de forma, en cuatro RBF diferentes como se observa en la Fig. 28, en todas ellas se nota una divergencia en los resultados obtenidos, lo que demuestra la importancia del valor del

parámetro, además resalta la necesidad de variarlo, pues independiente de la función utilizada, siempre muestra resultados diferentes.

Fig. 28 simulaciones con varios parámetros de forma y varias RBF, tomado de [31]



Es por ello que se sugiere que al usar una misma función en la interpolación de un grupo de puntos, se realice variación en los valores del parámetro utilizado, con base en el número de puntos y distribución de puntos vecinos; en el artículo analizado se opta por calcular el parámetro de forma con base en la expresión $\sigma = 1,25D/N$ donde N son los puntos en el subdominio alrededor del i -ésimo punto seleccionado, D es el diámetro del círculo mínimo que encierra todos los N puntos. Esta estrategia permite una variación del valor del parámetro con base en la densidad de los puntos que se distribuyen dentro del subdominio que también es variable; de esta forma el valor es exclusivo para el i -ésimo punto.

Se realizaron pruebas de precisión para el método implícito de las RBF-FD con el fin de dar espacial y temporal orden de precisión, para tal fin los autores del artículo eligen un problema de vorticidad que posee solución analítica y cuyas soluciones están dadas por las siguientes ecuaciones

$$u_1(x, y, t) = -\cos(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y) e^{(-2\pi^2 t / \operatorname{Re})} \quad (87)$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-2\pi^2 t / \operatorname{Re})} \quad (88)$$

$$p(x, y, t) = -0,25(2\pi x + \operatorname{sen}(2\pi y)) e^{(-2\pi^2 t / \operatorname{Re})} \quad (89)$$

el número de Reynolds se define como $\operatorname{Re} = \rho UL / \mu$, para aplicar las ecuaciones (87) a (89) se toma un dominio computacional cuadrado, cuyos valores para x e y estarán entre $-0,5$ y $0,5$; y se distribuyen los nodos de forma aleatoria al redistribuirse los puntos de la malla uniforme, la distribución aleatoria se restringe al 20% de los puntos con el fin de evitar agrupaciones excesivas de puntos, en este caso las condiciones iniciales se dan por medio de las soluciones analíticas de la velocidad y presión; el número de Reynolds se establece en $\operatorname{Re}=10$, y el incremento de tiempo se establece en 10^{-4} s.

El método propuesto se utiliza para solucionar un problema de lid-driven cavity flow, en el cual se han usado varios números de Reynolds en tres tipos diferentes de distribuciones de nodos, uno completamente uniforme donde se mantuvo en todo momento el espacio entre los puntos, otro no uniforme en el cual se varia la ubicación de los puntos de manera controlada, al dejar mayor densidad de los mismos en las partes donde se presenta mayor gradiente de campo para mejorar la precisión y usar una menor cantidad de puntos con una relación de 2,5 entre el punto central y la esquina seleccionada; y la tercer distribución completamente aleatoria en la cual se utilizó una secuencia para ubicar los puntos interiores, pues los puntos de frontera se distribuyeron en forma uniforme.

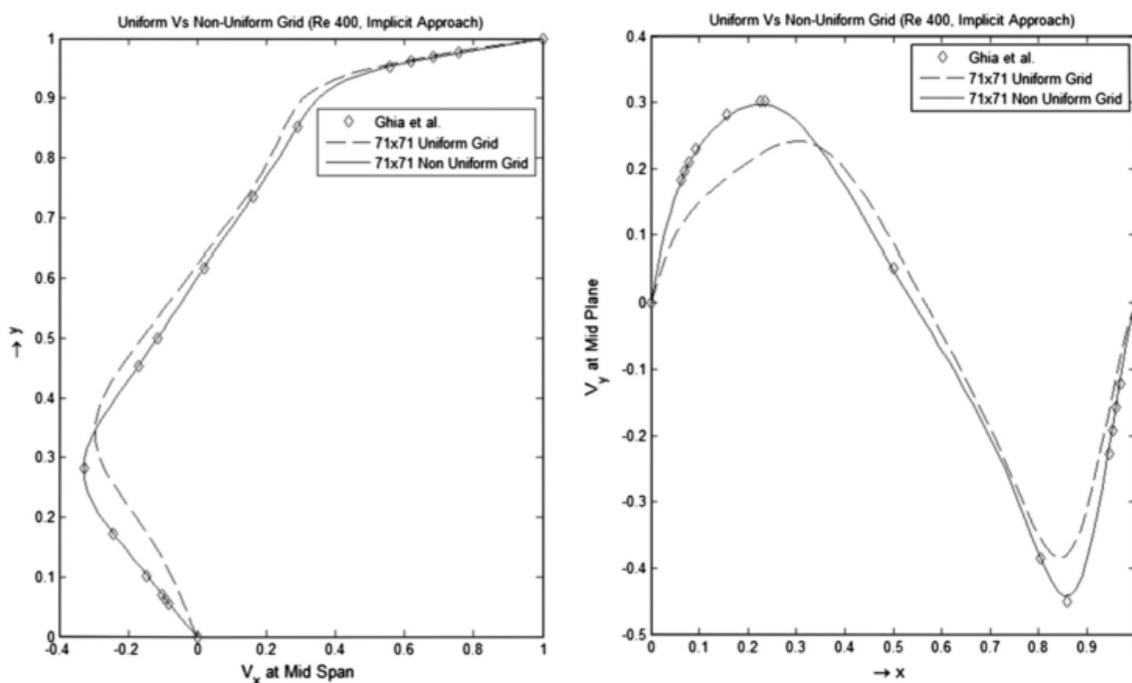
Las condiciones de frontera para la velocidad se obtienen directamente de las limitantes físicas del problema, la velocidad normal en las cuatro paredes se toma igual a cero, para asegurar que no existe ingreso de flujo por las paredes; los números de Reynolds utilizados son 100, 400 y 1000; al comparar la eficiencia de los esquemas planteados se observó que en el método explícito el incremento de tiempo se estableció en 5×10^{-4} s y en el método implícito el incremento se estimó en 10^{-3} s, en todos los casos con ambos métodos, la configuración en la distribución de los puntos de la malla se mantuvo para poder realizar contrastes validos en los resultados obtenidos, además el parámetro de forma se dejó constante para que sobresalieran los efectos que generan los métodos planteados, en los resultados obtenidos se ve la eficiencia de ambos métodos, pero sobresale el método implícito como el mejor, porque presenta el uso de una menor cantidad de puntos para obtener resultaos más ajustados a la literatura existente, esto implica además que en el cómputo de las soluciones se utilizará menos tiempo, el cual se calcula en un factor de cinco respecto al tiempo empleado al emplear el esquema explícito, acompañado además de la posibilidad de usar una incrementos de tiempo mayores, adicionalmente el esquema implícito elimina la dificultad de las restricciones de estabilidad viscosa, las cuales dificultan el trabajo cerca de la frontera y con números de Reynolds pequeños, esto respecto a los resultados obtenidos en la Tabla 8, en la cual se muestran las dimensiones optimas de las mallas para lograr una mejor simulación con cada método.

Tabla 8 malla óptima para lograr el resultado con la mejor exactitud tomado de [31]

Numero de Reynolds	Dimensión de malla necesaria	
	Método explícito	Método implícito
100	91 x 91	71 x 71
400	121 x 121	71 x 71
1000	151 x 151	101 x 101

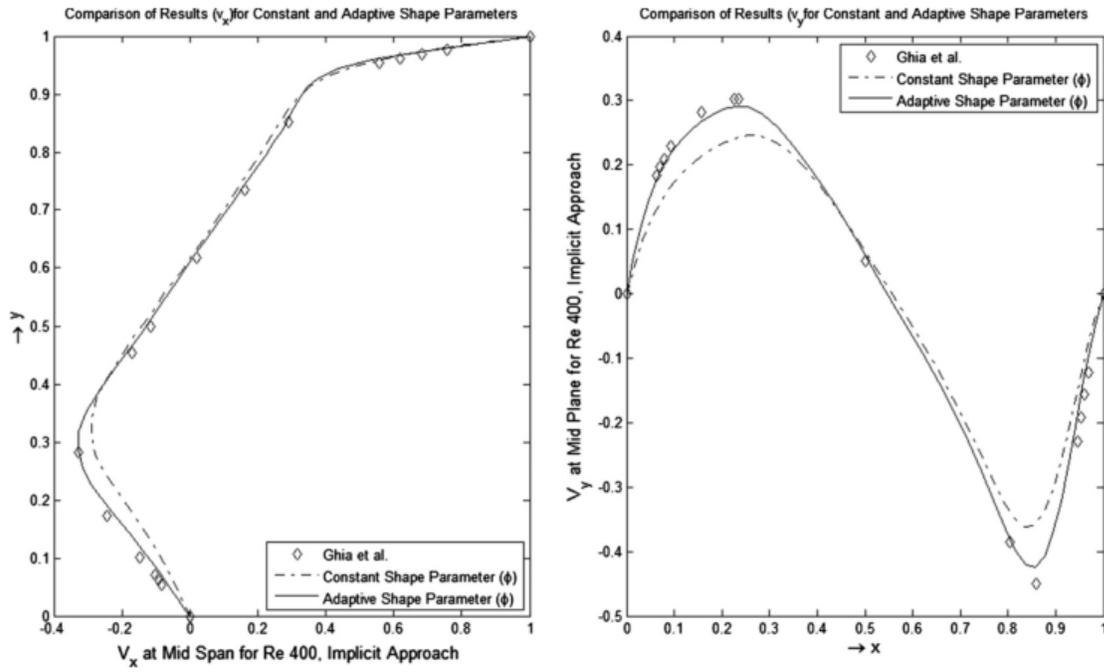
Con respecto a la distribución de los puntos, se empleó el método implícito al usar redes uniformes y aleatorias; como se observa en Fig. 29, al comparar los resultados obtenidos con literatura existente, se observa una mejor concordancia en la distribución aleatoria, esto debido a la facilidad de hacer una acumulación de puntos en zonas más complejas de analizar.

Fig. 29 campo de velocidad en rejillas uniforme y aleatoria comparado con literatura existente, tomado de [31]



Al realizar la adaptación del parámetro de forma se toma una rejilla aleatoria de dimensiones 51×51 con un $Re=400$ y otra malla de 101×101 con un $Re=1000$, en ambos casos se obtuvo una mejor relación en la separación entre los nodos del centro y extremo el cual se puede ampliar hasta 4 y no solo hasta 2,5 como se planteó previamente, la mejora en los resultados obtenidos se puede observar en Fig. 30, donde se puede apreciar que el uso de ASP permite obtener resultados que no acondicionan mal la matriz de interpolación, y adicionalmente permite aumentar el número de puntos cerca de la frontera.

Fig. 30 comparación parámetro fijo y ASP respecto a la literatura existente, tomado de [31]



6.4. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES EN LA FORMA FUNCIÓN DE CORRIENTE-VORTICIDAD.

El segundo grupo de artículos está regido por las ecuaciones de Navier-Stokes con formulación de vorticidad y función de corriente, cuya forma adimensional está dada por las expresiones.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \nabla \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega, \quad x, y \in \Omega \quad (90)$$

$$-\nabla^2 \psi = \omega, \quad x, y \in \Omega \quad (91)$$

$$\nabla^2 u_1 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \nabla^2 u_2 = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad x, y \in \Omega \quad (92)$$

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (93)$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad x \in \partial \Omega \quad (94)$$

en este grupo de ecuaciones ω es la vorticidad, ψ es la función de corriente, u_1 es la velocidad en la componente horizontal y u_2 la velocidad en la componente vertical; este grupo de ecuaciones se abordan en los artículos [7], [33]–[35].

6.4.1. MÉTODO PURO PARA RBFS CON COLOCACIÓN GLOBAL

En [35] se analizan las ecuaciones de NS para flujos incompresibles e inestables desde la función de vorticidad y corriente, para ello se utilizan las RBF, estas permiten una precisión óptima que se verifica por medio de ejemplos, la condición de frontera, establecidas son las más simples, es decir el campo de velocidad en el contorno equivale a cero; pero las ecuaciones Navier-Stokes en 2D, en términos de la función de vorticidad y corriente son presentadas como están en (90) a (94).

En el documento se presenta el desarrollo matemático que se realiza para llegar a los métodos propuestos, que se basa en la fórmula de diferenciación hacia atrás y los métodos de Adams, el desarrollo generado no se analizará en este escrito pues se considera fuera del alcance propuesto para el presente, las conclusiones obtenidas son los tres métodos siguientes

$$\Delta \psi^{n+1} = f_r^n + \Delta t [(\alpha v) \Delta f_r^n + g_r^n] + \dots + (\Delta t)^r [(\alpha v)^r \Delta^r f_r^n + (\alpha v)^{r-1} \Delta^{r-1} g_r^n] \quad (95)$$

$$\Delta \psi^{n+1} = f_1^n + \Delta t [(\alpha v) \Delta f_1^n + g_1^n] \quad (96)$$

$$\Delta \psi^{n+1} = f_2^n + \Delta t [(\alpha v) \Delta f_2^n + g_2^n] + (\Delta t)^2 [(\alpha v)^2 \Delta^2 f_2^n + (\alpha v) \Delta g_2^n] \quad (97)$$

El método general se plantea en (95), en (96) se plantea la expresión si es de primer orden, y en (97) la expresión de segundo orden, además se presenta una forma alternativa para el

método planteado en (95), para valores de r mayores o iguales a tres, que tiene la siguiente forma

$$(1 - \alpha \Delta t v \Delta) \Delta \psi^{n+1} = f_r^n + \Delta t g_r^n \quad (98)$$

Que es la ecuación de Poisson para la función de corriente, en donde las condiciones de frontera se dan con base en la expresión (99)

$$\psi^{n+1} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (99)$$

la cual es válida para las cuatro expresiones anteriores (95) a (98); con base en las funciones de vorticidad y corriente, se procede a solucionar un problema de fluido, en el cual se da un dominio cuadrado comprendido entre cero y uno para ambas componentes dimensionales, el problema abordado posee solución analítica determinada por las siguientes expresiones

$$\psi = -\text{sen}(t) \text{sen}^2(\pi x) \text{sen}^2(\pi y) \quad (100)$$

$$\omega = -\pi^2 \text{sent}(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y - 2 \cos 2\pi x \cos 2\pi y) \quad (101)$$

$$u = \pi \text{sen}(t) \text{sen}(2\pi y) \text{sen}^2(\pi x) \quad (102)$$

$$v = -\pi \text{sen}(t) \text{sen}(2\pi x) \text{sen}^2(\pi y) \quad (103)$$

La solución numérica se halla al implementar la siguiente RBF, que tiene parecido a la inversa MQ, pero cambia en el exponente

$$\phi(r) = \left(1 + \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \right)^{\beta} \quad (104)$$

donde α y β son parámetros, con la implementación de los métodos desarrollados se observa que al comparar los métodos desarrollados en (96) y en (97), el segundo método da mejores resultados que el primero, si al elegir el parámetro α este es demasiado grande o pequeño lleva a dar soluciones inadecuadas, como generar matrices singulares si es muy grande o limitar la exactitud si es demasiado pequeño; con respecto al parámetro β se recomienda por parte de los autores no hacerlo entero, para el caso particular el valor asignado fue de $-1,5$

Tabla 9 resultados y errores al implementar el método numérico dado en (97) tomado de [35]

α	β	n	Δt	Error u	Error v	Error ω	Error ψ
0.8	-1.5	81	0.01	0.0102	0.0111	0.0231	0.0062
0.8	-1.5	81	0.005	0.0089	0.0091	0.0122	0.0051
0.8	-1.5	81	0.0025	0.0047	0.0046	0.0110	0.0038
0.8	-1.5	121	0.001	0.0033	0.0033	0.0105	0.0026
0.8	-1.5	121	0.0005	0.0025	0.0028	0.0089	0.0015

En el artículo analizado se proporcionó un nuevo método libre de malla para flujos incompresibles mediante el uso de las RBF que se pueden usar en cualquier dominio y es aplicable en cualquier dimensión, el método se corrobora al comparar las soluciones analíticas de un dominio cuadrado con los resultados numéricos obtenidos.

En [7] se plantean las RBF para solucionar las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes, con este método se trabaja en dominios de nodos dispersos y una región de confianza para

solucionar problemas no lineales, para trabajar las condiciones de contorno o deslizante se implementan puntos fantasmas, para verificar la eficiencia del método se solucionan tres problemas, de los cuales se destacan el driven cavity flows en contornos cuadrados y rectangulares, los resultados que se obtuvieron son comparables con los que se obtuvieron en la literatura existente.

En el artículo analizado se dará solución a las ecuaciones de Navier-Stokes respecto a la función de corriente y vorticidad, como están planteadas en (91) y (90), esta última unida a la sustitución de (93) en (94); en la literatura existente se presenta cierta incertidumbre en los valores del contorno especialmente cuando este no es deslizante, pero esta dificultad se puede evitar si se sustituye la ecuación de vorticidad en la de corriente, con lo cual se obtiene una ecuación biarmónica no lineal solo en términos de la ecuación de corriente así

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - \text{Re} \left[u \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] = 0 \quad (105)$$

La ecuación (105) se debe completar con la siguiente condición frontera

$$B\psi = g(x, y) \quad (106)$$

en la cual B puede ser Dirichlet, Neumann o un operador diferencial mixto, solucionar la ecuación (106) por el método de diferencias finitas implicaría un gran costo a nivel de cálculos y tiempo, pero con las RBF se facilita el análisis numérico pues a medida que se trabaja con las mismas, el problema no se vuelve más complejo como sucede con el método de diferencias finitas; adicionalmente se toma como apoyo la fórmula de iteración de Newton; esta fórmula toma una solución inicial con la cual se inicia la secuencia para obtener la i -ésima interacción que está dada por la expresión

$$\psi^i = \psi^{i-1} + \xi \quad (107)$$

En donde ξ es la corrección, que se halla por medio de la siguiente PDE

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi - \text{Re} \left[\left(\frac{\partial \psi^{i-1}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \xi) + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi^{i-1}) \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \psi^{i-1}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \xi) + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi^{i-1}) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right] = -R(\psi^{i-1}) \quad (108)$$

En la anterior expresión $R(\psi^{i-1})$ se determina por medio de la expresión

$$R(\psi^{i-1}) = \frac{\partial^4 \psi^{i-1}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi^{i-1}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^{i-1}}{\partial y^4} - \text{Re} \left[\frac{\partial \psi^{i-1}}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi^{i-1}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi^{i-1}}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi^{i-1}}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi^{i-1}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi^{i-1}}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \quad (109)$$

la función de corriente está definida como aparece en (40), lo cual permite que las derivadas desconocidas se trabajen por medio de un operador diferencial lineal como se presenta en (57), pero en el caso del trabajo analizado en lugar de plantearlo para $u(r)$, se plantea para $\psi(x)$; también en este caso N es el número total de puntos al interior del dominio y en el contorno, al autor del artículo analizado se inclinan por el uso de la función multicuadrática en el momento de la implementación de la RBF. Al aplicar este método a los operadores lineales aparecen cuatro funciones debido a las iteraciones previas y que están dadas por las expresiones (110) a (113)

$$a(x) = \operatorname{Re} \frac{\partial \psi^{(i-1)}}{\partial y} \quad (110)$$

$$b(x) = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla^2 \psi^{(i-1)} \right) \quad (111)$$

$$c(x) = \operatorname{Re} \frac{\partial \psi^{(i-1)}}{\partial x} \quad (112)$$

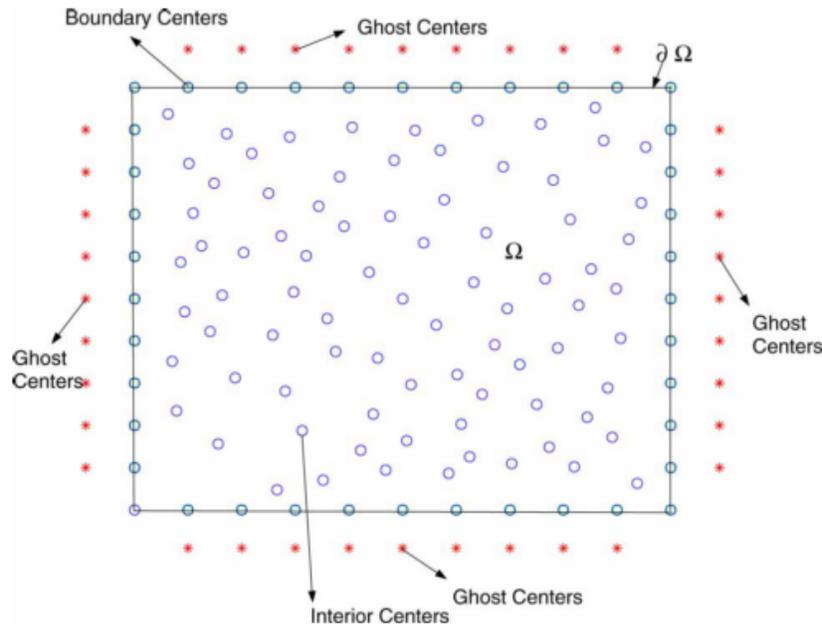
$$d(x) = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla^2 \psi^{(i-1)} \right) \quad (113)$$

En esta parte del trabajo se introducen los “puntos fantasma” los cuales se pueden apreciar en la Fig. 31 y que serán tantos como los puntos que se tienen en el contorno del dominio con el fin de mejorar la simulación numérica de los mismos, además se dan condiciones de frontera para cada punto del contorno con base en la siguiente expresión

$$\psi = c_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = c_2 \quad (114)$$

Donde c_1 y c_2 son constantes y n es la dirección normal hacia fuera, la función de corriente se reescribe con base en los puntos fantasmas insertados, la función de corriente se reescribe en forma similar a (40), pero se reescribe el límite superior por $N+G$, donde N son todos los puntos del dominio y G son los puntos fantasma incluidos en el análisis del trabajo

Fig. 31 representación del esquema del método tomado de [7]



Luego de esto se redefine la función biarmónica dada en (105) de la siguiente forma

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = F(x, y) \quad (115)$$

y $F(x,y)$ que es la función de prueba se define de la siguiente forma

$$F(x,y) = 16\pi^4 [4\cos(2\pi x)\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)] \quad (116)$$

Al obtener la solución exacta para la función de corriente dada por la expresión

$$\psi = 4\text{sen}^2(\pi x)\text{sen}^2(\pi y) \quad (117)$$

Con la estrategia de puntos fantasmas, se logró mejor precisión en los resultados de simulación respecto a los resultados que se obtienen con el de mínimo cuadrados, se ve una dispersión del error que los autores atribuyen al parámetro de forma, cuyo valor seleccionado puede ser poco acertado para los problemas que se solucionan, el artículo que se analizó usa la relación que aparece a continuación

$$\sigma^i = \beta \bar{d} \quad (118)$$

Es β un número positivo el cual se ajusta en cada incremento de tiempo, al iniciar por 1, y \bar{d} la distancia mínima entre dos puntos del dominio, por ejemplo al solucionar el problema de square driven cavity, delimitada para x e y entre cero y uno para ambas coordenadas, las condiciones de fronteras para u_1 y u_2 se transforman para aplicar la función de corriente en la siguiente forma

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad (119)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \quad (120)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad y = 1 \quad (121)$$

Se consideran distribuciones uniformes de puntos que van desde una región de 11x11 hasta una de dimensión 61x61, también se comprobó el método con distribuciones aleatorias al perturbar al azar los puntos interiores de las regiones homogéneas, para estas regiones y distribuciones se considera un conjunto de cinco valores diferentes de Reynolds 0, 100, 400, 1000, 3200; en la simulación con cada número de Reynolds se utiliza como valor inicial el obtenido en la simulación del número de Reynolds anterior, es importante resaltar que el primer número utilizado es $Re=0$, en todo el experimento se ve la efectividad del algoritmo de Newton, pues las soluciones se consiguen en un intervalo que esta entre los 10 y 15 pasos, esto en comparación con simulaciones del mismo problema que esta documentado en la literatura existente, de hecho el método permite obtener resultados con gran precisión para todos los números de Re, incluso en la frontera de la región seleccionada, la cual se muestra en la Fig. 31 pero esto se puede realizar con una menor cantidad de puntos, la dificultad del método planteado se da en la matriz que se genera puesto que contiene una gran cantidad de puntos, debido a que se generan una gran cantidad de condiciones.

Fig. 32 contorno de función de corriente y vorticidad para distribución uniforme de 31x31 puntos para $Re=0$, tomado de [7]

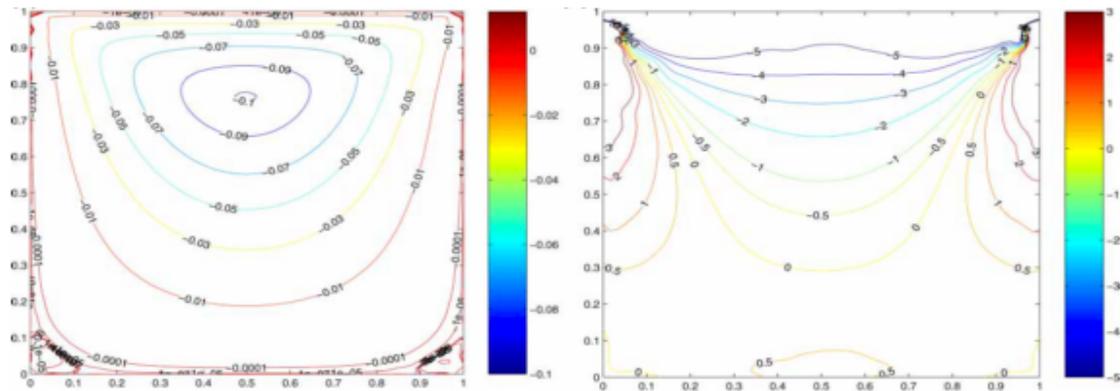
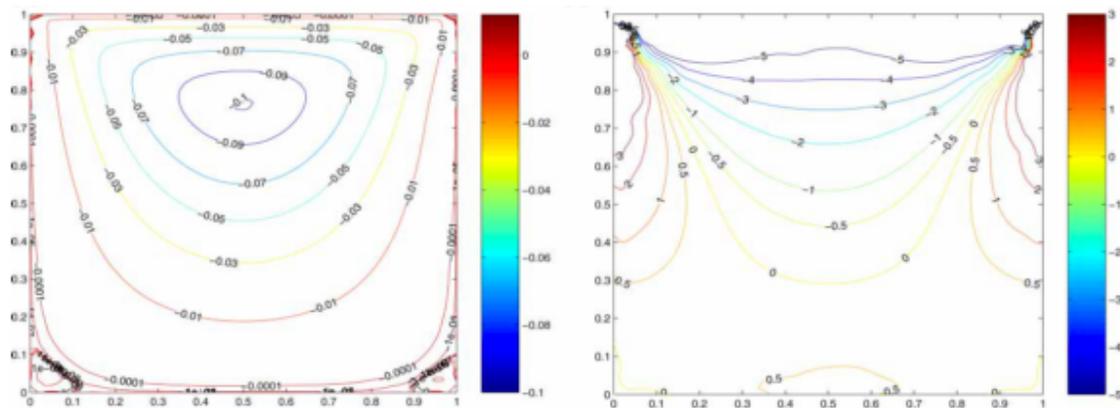


Fig. 33 contorno de función de corriente y vorticidad para distribución aleatoria de 31x31 puntos para $Re=0$, tomado de [7]



En las figuras Fig. 32 y Fig. 33 se puede ver como la función de corriente y la vorticidad dan las mismas simulaciones para una distribución de 31x31 puntos para un $Re=0$, para distribuciones aleatoria y uniforme de puntos, por lo tanto se comprobó que las RBF son capaces de solucionar numéricamente las ecuaciones incompresibles de NS en la función de corriente en distribuciones uniformes o aleatorias de puntos, con la inclusión de puntos fantasmas se evade la dificultad de plantear condiciones de contorno de vorticidad, al comparar las soluciones obtenidas con la literatura existente al respecto se evidencia correspondencia en los resultados, la dificultad del método se halla en la generación de matrices densas de coeficientes que pueden generar altos costos al momento de solucionarlas, pero ante esto se genera la ventaja de necesitar pocos puntos respecto a los métodos basados en mallas; los parámetros de forma pueden también generar altos costos de solución, por lo cual está abierta la puerta de la investigación al respecto.

6.4.2. MÉTODO DQ-RBF

En [33] se trabaja con el método que combina las funciones de base radial con la diferencia de cuadratura(DQ), este método funciona de una manera similar al método de diferencias finitas respecto a la forma de discretizar el espacio y la interacción con los puntos vecinos, la función de base radial usada en este trabajo es la multicuadrática, pues presenta una convergencia exponencial, además se estudia los efectos del parámetro de forma en la exactitud de la solución numérica de las EDP; después de comprobar la validez del método se solucionan las ecuaciones de Navier-Stokes incomprensibles en una distribución de puntos aleatorios; los resultados obtenidos permiten observar que el método es preciso y potente para solucionar las ecuaciones diferenciales parciales.

La ventaja de la combinación de ambos métodos es que la diferencia de cuadratura por si sola se puede elaborar en una línea recta, por lo cual al combinar con las RBF, se amplía a una distribución de puntos aleatoria; las expresiones para las n-ésimas derivadas respecto a “x”, y la m-ésima derivada respecto a “y” se define de una función suave y de manera similar a (70), adicionalmente la función φ se define como se presenta en (122),

$$f(x) \cong \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi(\|x - x_j\|_2) + \psi(x) \quad (122)$$

donde N es el número total de puntos, las λ_j son los coeficientes desconocidos, ϕ es la RBF y λ_j es una constante, de esta forma se plantea un sistema de ecuaciones que se resume en el siguiente sistema matricial de ecuaciones

$$[G][W^n]^T = \{G_x\} \quad \text{donde,} \quad (123)$$

$$[W^n] = \begin{bmatrix} w_{1,1}^{(n)} & w_{1,2}^{(n)} & \cdots & w_{1,N}^{(n)} \\ w_{2,1}^{(n)} & w_{2,2}^{(n)} & \cdots & w_{2,N}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N,1}^{(n)} & w_{N,2}^{(n)} & \cdots & w_{N,N}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varphi_1(x_1, y_1) & \varphi_1(x_2, y_2) & \cdots & \varphi_1(x_N, y_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(x_1, y_1) & \varphi_N(x_2, y_2) & \cdots & \varphi_N(x_N, y_N) \end{bmatrix}$$

$$[G_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_x^n(1,1) & \varphi_x^n(1,2) & \cdots & \varphi_x^n(1,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_x^n(N,1) & \varphi_x^n(N,2) & \cdots & \varphi_x^n(N,N) \end{bmatrix}$$

El parámetro de forma que aparece en la RBF se ve afectado por la cantidad de puntos del subdominio y el tamaño de la región a trabajar, para mejorar el valor que se debe trabajar en

el parámetro de forma, se realiza una normalización al tomar como base un círculo unitario, para lograrlo se realiza la transformación de coordenadas en la siguiente forma

$$\bar{x} = \frac{x}{D_i}, \bar{y} = \frac{y}{D_i} \quad (124)$$

D_i es el diámetro mínimo del círculo centrado en el i -ésimo punto y con circunferencia unitaria en los puntos alrededor del mismo; con este cambio de coordenadas, el parámetro de forma se establece como

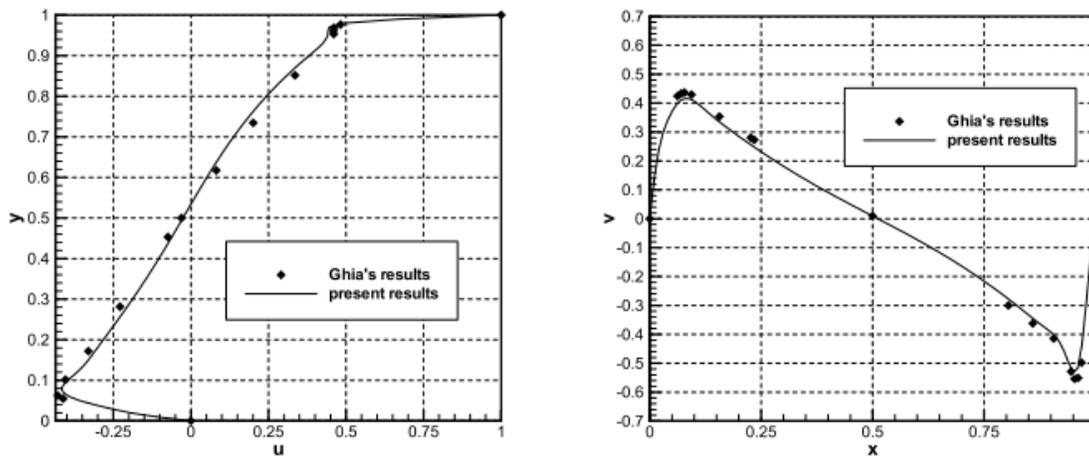
$$\bar{c} = \frac{c}{D_i} \quad (125)$$

Por medio de las ecuaciones se solucionan las Navier-Stokes en términos de la vorticidad y la función de corriente como se especifica en (90), además la ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (126)$$

Se define que u_1 y u_2 son las velocidades en las direcciones x e y respectivamente de manera similar a la que se presenta en (93), las ecuaciones de Navier-Stokes se discretizan con el método de MQ-DQ, con base en esta discretización se da solución a dos problemas que son de flujo impulsado en cavidad cuadrada (flow driven in a square cavity) el cual se simuló con diferentes números de Reynolds y se comparó con literatura existente, se obtuvo una excelente concordancia como se observa en la Fig. 34 para la cual se utilizó una distribución de 9573 puntos y un $Re=5000$

Fig. 34 perfil de velocidad en las componentes x e y , MQ-DQ vs Ghia tomado de [33]



6.4.3. MÉTODO IRBFN

En [34] se utiliza el método de colocación de RBF para analizar problemas de flujo de fluidos bidimensionales, para mejorar la estabilidad de la respuesta los autores construyeron redes de funciones de base radial(RBFN) basándose en las integración, para resaltar dos temas que son las constantes de integración en la solución de las Navier-Stokes y el empleo de las integraciones locales de RBFN para manejar flujos de estructuras finas, con el fin de

comprobar la veracidad de la propuesta del artículo, se plantean tres problemas a solucionar que son lid-driven cavity, thermally-driven viscous flow(flujo viscoso impulsado térmicamente) y non rectilinear viscoelastic flows (flujo visco elástico no rectilíneo).

Las redes de funciones de base radial, son una herramienta de gran alcance para la aproximación de datos dispersos, la matriz de interpolación que se plantea con este método es no singular, sin importar el número de puntos que se tomen, además de contar con RBF como la multicuadrática y la Gaussiana que presentan una gran amplitud de valores de convergencia, en [34] se utilizó IRBFN para simular un problema de flujo incompresible estacionario en 2D, en el análisis se opta por las ecuaciones de Navier-Stokes de corriente y vorticidad para evitar la variable de la presión, el bajo número de ecuaciones y además porque la ecuación de continuidad se satisface inmediatamente; adicionalmente el método facilita la obtención de condiciones de fronteras para la vorticidad.

El esquema propuesto IRBFN lo que intenta es descomponer la n -ésima derivada de una función $f(x)$ en RBF de la siguiente forma

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_{i=1}^{N_i} w_i \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{N_i} w_i I_i^{(n)}(x) \quad (127)$$

Donde w_i representa a los puntos ponderados en la malla y $\phi(x)$ son las RBF, la función f se obtiene por medio de integración, quedado expresada de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_i} w_i I_i^{(0)}(x) + c_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + c_2 \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} + \dots + c_{n-1} x + c_n \quad (128)$$

En esta última ecuación $I_i^{(n-1)}(x) = \int I_i^{(n)}(x) dx$, $I_i^{(n-2)}(x) = \int I_i^{(n-1)}(x) dx, \dots, I_i^{(0)}(x) = \int I_i^{(1)}(x) dx$ y (c_1, c_2, \dots, c_p) son las constantes de integración.

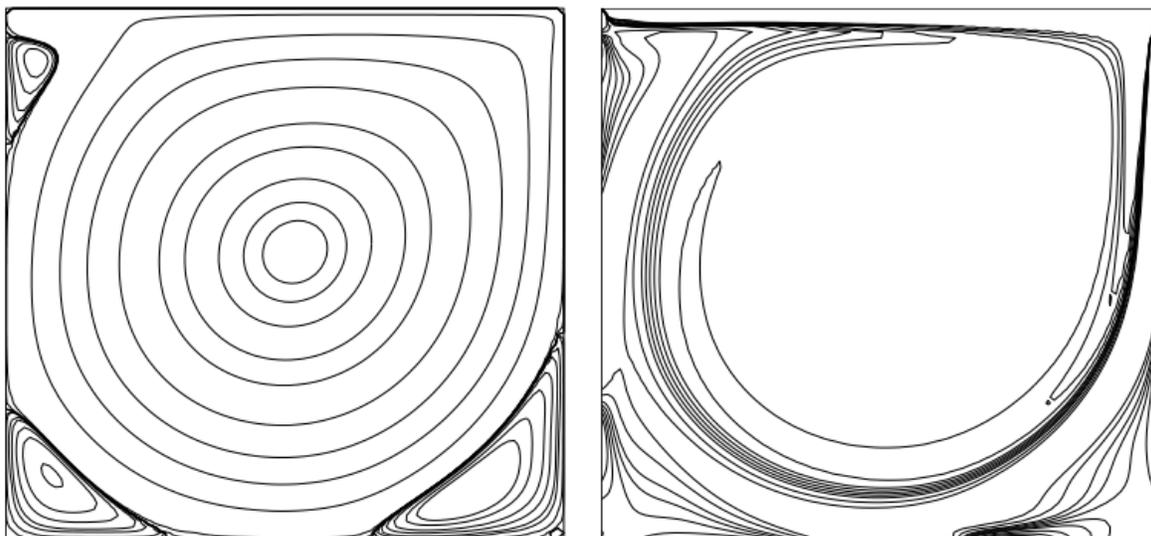
Al solucionar el problema de Lid-driven cavity viscous flow los autores se inclinan por el uso de las ecuaciones de vorticidad y corriente que son exactamente iguales a las ecuaciones (90) y (91), al realizar los respectivos reemplazos de u_1 y u_2 como se definen en la ecuación (93), en el artículo analizado se presenta una nueva técnica para obtener las condiciones de contorno para la vorticidad, pero para ello se define un cuadrado de 1 unidad de medida y tapa superior deslizante hacia la derecha a una velocidad estándar de 1, se dan tres condiciones de fronteras, las dos primeras son exactamente iguales a las presentadas en (119) y (120) en (121) se presenta un cambio en la ecuación diferencial que ya no es igual a uno, sino que equivale a cero.

En el análisis del problema se trabajó una variada cantidad de valores de Re , y aproximadamente 10 rejillas de diferentes dimensiones e incrementos de tiempo que van desde 0,0005 hasta 0,1; los incrementos de tiempo más pequeños se emplearon para los valores mayores de Re y las mallas más densas.

Los resultados obtenidos se compararon con análisis previos realizados con las técnicas de FDM y Benchmark, el método demostró consistencia en los resultados de u_1 , u_2 , ω , ψ , especialmente para mallas más densas, para valores de $Re= 1000$ se presentaban errores cercanos al 0,3%; con mallas poco densas se presentan resultados con errores cercanos al 30% para u_1 y u_2 ; los valores obtenidos son más cercanos a las soluciones obtenidas por el método pseudo-espectral, una de las ventajas de la técnica implementada es que no requiere

trabajo especial en las esquinas, y además permite el trabajo con mallas distribuidas uniformemente

Fig. 35 simulaciones de la función de corriente y la vorticidad respectivamente para un $Re= 3200$ en una malla de 91×91 , tomado de [34]



Del análisis realizado se resalta la importancia de la presentación de la técnica IRBFN global, la cual posee un gran potencial para la solución de fluidos computacionales, debido a su fácil implementación y el alto nivel de precisión cuando se usa una rejilla gruesa debido a que RBFN con la función multicuadrática no requiere mallas subyacentes para los puntos del contorno, los problemas de convergencia asociados a los enfoques relacionados con la diferenciación son superados, y finalmente las condiciones de contorno se implementan de una manera exacta.

6.4.4. MÉTODO FD

En [36] se aplica el método de RBF-FD para solucionar las ecuaciones Navier-Stokes planteadas en (90), (91) y (93); para mostrar la efectividad del método se soluciona el problema del Square driven cavity flow, al utilizar en el contorno la estrategia de puntos fantasmas para mejorar la simulación del extremo, el proceso matemático que se implementa se realiza de manera similar al que se especifica en [31], pero en este solo se utiliza el método implícito en una distribución de puntos uniforme y aleatoria, al emplear el esquema de Crank-Nicholson para discretizar la variable temporal, en este artículo solo se implementa el uso de la RBF-MQ; el proceso de discretización de las derivadas paso por las expresiones (13) y (31), para llegar a plantear la matriz que se presenta en (35), las condiciones de contorno para la velocidad se plantean en (119) a (121).

En el proceso de discretización se plantea la estrategia de puntos fantasmas, con el fin de ajustar mejor las condiciones en el contorno de la superficie analizada, esta es una

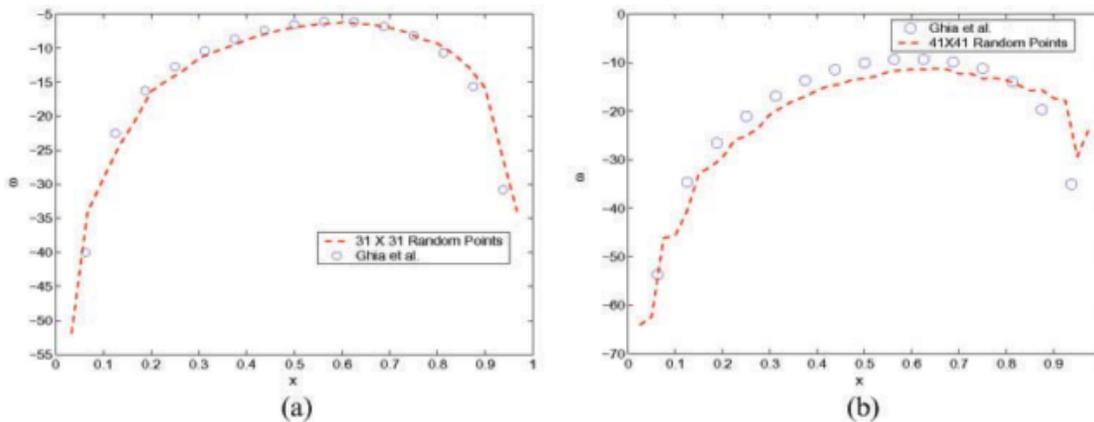
contrapropuesta respecto a la implementación de contorno antideslizante la función de corriente respecto en los puntos que están en el límite se determina por medio de la expresión

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^N w_{(i,j)}^{(\vec{n})} \psi_j + w_{(i,\text{fantasma})}^{(\vec{n})} \psi_{\text{fantasma}} \quad (129)$$

Donde N es el número de puntos ubicados en el contorno y al interior de la superficie, en los puntos fantasmas se determina la función de corriente por medio de (114), la vorticidad en el contorno se halla por medio de la aplicación del método propuesto en cada punto del mismo por medio de (91).

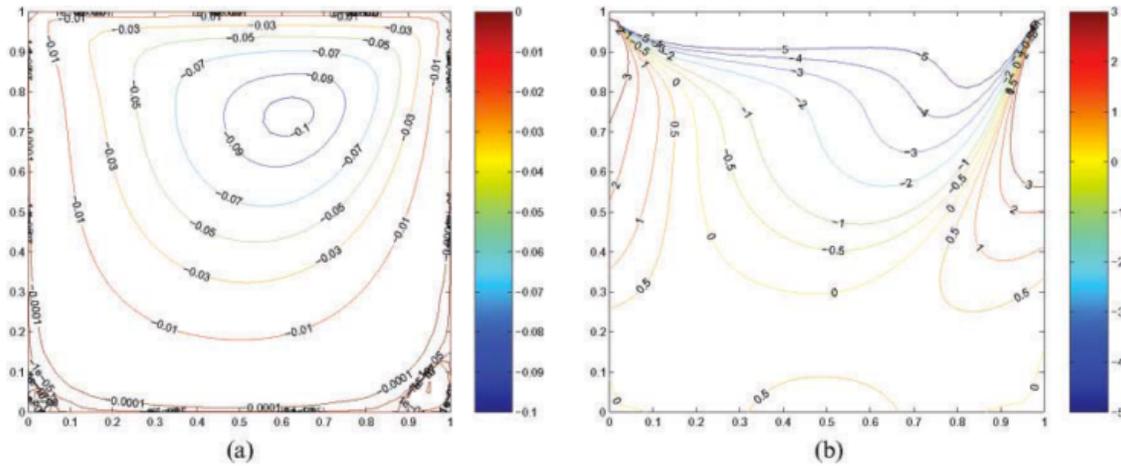
Para comprobar la efectividad del método se soluciona un problema de lid-driven cavity flow que se define en un dominio cuadrado de lado igual a 1, las condiciones limite para el problema se dan en (119) a (121), con un incremento de tiempo de 0,01s; y para tres números de Reynolds diferentes 100, 400 y 1000. Al implementar el RBF-DF se toman nueve puntos de soporte en cada subdominio para llevar a cabo los cálculos de las derivadas de las funciones el parámetro de forma se calcula por medio de la estrategia de optimización de leave-one-out; para comprobar la propuesta de puntos fantasma se soluciona un problema con dos números de Re diferentes y se compara con literatura existente como se muestra en Fig. 36.

Fig. 36 vorticidad en el contorno al usar puntos fantasmas, tomado de [36]



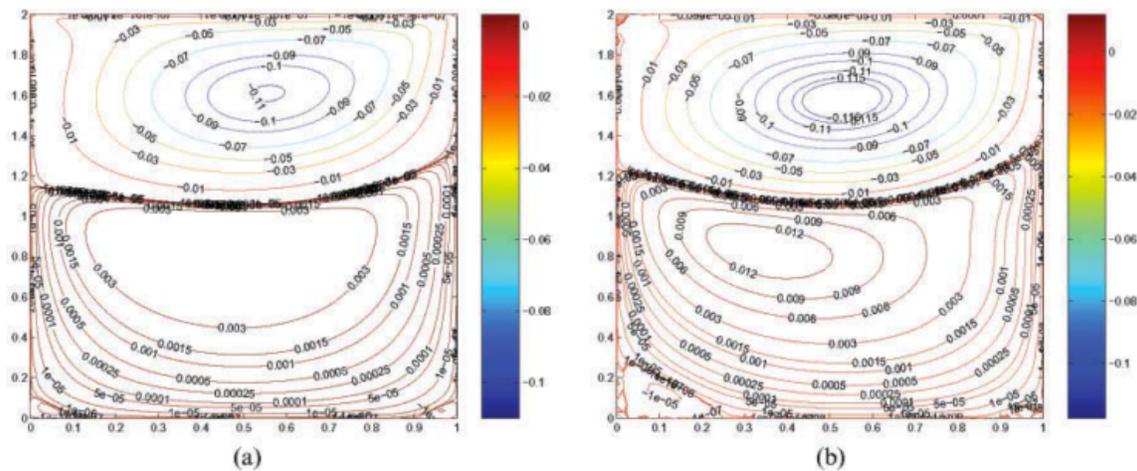
al realizar las simulaciones con el RBF-FD, los resultados obtenidos con un $Re=100$ concuerdan perfectamente con los resultados esperados con base en la literatura existente, incluso si se compara con los resultados obtenidos en [7] los cuales se pueden observar en la Fig. 32, se observan resultados similares aunque en este último el valor de $Re=0$, la solución detallada de la función de corriente y la vorticidad se muestran en Fig. 37.

Fig. 37 (a) función de corriente y (b) vorticidad para el RBF-FD con un $Re=0$, tomado de [36]



el comportamiento esperado para la función de corriente y la vorticidad para los valores de $Re= 400$ y 1000 con base en la literatura existente, concuerda perfectamente con los resultados obtenidos mediante el método de RBF-DF, pero el costo computacional del presente método es menor al compararlo con el método global trabajado en [7], adicionalmente se trabajó con el problema anterior en una región rectangular cuyo ancho es el doble del largo, con los tres valores de Re planteados en el problema anterior, al comparar con literatura existente se halla correspondencia respecto a los vórtices esperados, estos resultados también concuerdan con los que se obtienen en [28], como se observa en la Fig. 38, es de anotar que las mallas utilizadas en las simulaciones están compuestas por distribuciones uniformes de 81×161 puntos para $Re= 400$ y 101×201 puntos para $Re= 1000$.

Fig. 38 líneas de corriente para (a) $Re= 400$ y (b) $Re= 1000$ con el RBF-FD método, tomado de [36]



6.5. ECUACIONES NAVIER-STOKES EN LA FORMA VORTICIDAD-VELOCIDAD

El tercer grupo de artículos solucionan las ecuaciones Navier-Stokes en su forma adimensional de vorticidad-velocidad dada por (90), además de la expresión

$$\nabla^2 u = -\nabla \times \omega \quad (130)$$

esta forma de las ecuaciones se trabajan en los artículos [37]–[39]

6.5.1. MÉTODO DE DQ-RBF

En [37] se analizan las ecuaciones de Navier-Stokes, reducida a las ecuaciones de Stokes en una cavidad circular irregular al usar las RBF basado en el método de cuadratura diferencial (DQ), las RBF en especial han demostrado alta eficiencia, buena calidad de resultados y un manejo más simple de puntos dispersos. Por ello en este artículo se introduce la función multicuadrática, y se define una función $f(x)$ que es la combinación lineal de las diferentes RBF, similar a la ecuación (122), pero con la diferencia que en lugar de aparecer λ_j , aparece la función $\psi(x)$ que se define de la siguiente forma

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i P_i(x) \quad (131)$$

En esta ecuación $m=(q-1+d)!/(d!(q-1)!)$; y los P_i son los polinomios base, para poder determinar los coeficientes λ y ξ , se necesitan m ecuaciones extras a las N que ya teníamos. En el método de cuadratura diferencial (DQ), la idea es aproximar la derivada de la función por medio de sumas lineales de valores funcionales en toda la malla, por ello se define una función $f(x)$ como se presenta en (70), la principal ventaja de este método al usarse a nivel global es la capacidad de generar resultados con alta exactitud, esto se da al usar mallas pequeñas al compararlas con respecto al tamaño de las que se usan en los métodos de FVM y FDM.

Con base en el método descrito y al usar las RBF, los autores proponen el MQ-DQ método local que será una combinación de ambas técnicas, el cual inician con el planteamiento de una ecuación $g_j(x,y)$ multicuadrática, al introducir esta última función en la ecuación (70), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \sum_{k=1}^N w_{i,k}^{(m)} \quad (132)$$

$$\frac{\partial^m g_j(x_i, y_i)}{\partial x^m} = \sum_{k=1}^N w_{i,k}^{(n)} g_j(x_k, y_k), \quad j = 1, 2, \dots, N, \text{ pero } j \neq i \quad (133)$$

el cual se puede solucionar por un sistema matricial en forma directa o iterativamente para los coeficientes de las derivadas de x e y , respecto al parámetro de forma que presenta la función multicuadrática, a este parámetro, en los problemas analizados se le dio un valor de 0,12; con base en este método se presenta el problema a solucionar el cual se base en las ecuaciones Navier-Stokes en su forma dimensional y continua para un fluido Newtoniano, viscoso con densidad y viscosidad constante; la primer ecuación es similar a las ecuaciones

(27) , la diferencia radica en que en este caso se trabaja en el vector velocidad $u=(u_1, u_2)$, y aunque la segunda ecuación es similar a (28), se presentan algunas modificaciones, por lo cual se mostrará la variación que sufre (28)

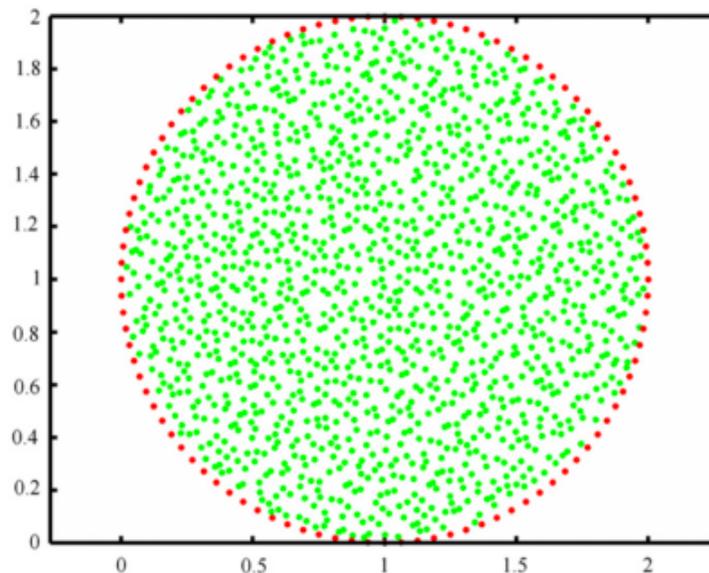
$$St \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -Eu \nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + \frac{1}{Fr^2} g \quad (134)$$

En la anterior ecuación, St, Eu, Re, Fr son los números de Strouhal, Euler, Reynolds y Froude respectivamente, P es la presión y g es la fuerza externa; al realizar las consideraciones necesarias para convertir el problema en un flujo de Stokes, es decir al considerar a $Re < 1$, y además $St \times Re \ll 1$, además de $Fr \ll 1$, al realizar el cambio a la forma velocidad-vorticidad donde la primera es

$$\nabla^2 \omega = 0 \quad (135)$$

y las otras dos son dadas mediante (130), con base en ellas se inicia la solución del problema planteado; lo primero que se soluciona es la ecuación de velocidad de Poisson dada en (130), mediante el RBF-DQ se hallan las velocidades y las derivadas de la velocidades en cada punto del dominio con base en los resultados que se obtienen, se determinan las condiciones en el límite para la ecuación de Laplace de vorticidad, luego de verificar el cumplimiento de (135), se calcula la vorticidad en todos los puntos del dominio; para así calcular el vector vorticidad, y mirar si cumple las restricciones dadas; para poder dar una distribución aleatoria de los puntos se utilizó la secuencia de Halton, y con la aplicación del método MQ-DQ, se mostró que los resultados obtenidos concuerdan perfectamente con los resultados obtenidos en la literatura existente al usar diferentes técnicas, para las componentes de velocidad u_1 y u_2 , y para la vorticidad; en Fig.39 se muestra la distribución de puntos en el dominio

Fig.39 nodos irregulares para el método de MQ-DQ tomado de [37]



De manera global se puede indicar que se analizaron dos problemas de Stokes en una forma geométrica irregular a nivel numérico para la velocidad y el contorno de la vorticidad por medio de RBF-DQ, los resultados obtenidos se compararon con los que se conocían por los

métodos de FE y el BEM, y se concluye que la técnica trabajada es muy “atractiva en términos de precisión, capacidad y flexibilidad en la programación, incluso para límites irregulares complejos”[37]

6.5.2. MÉTODO LMAPS

En [38] se implementan una serie de funciones de base radial para dar soluciones particulares y homogéneas a los fluidos viscosos incompresibles, las RBF que son implementadas en el uso de la combinación del método de soluciones fundamentales (MFS) y el método de reciprocidad dual. De los diferentes métodos sin malla que existen, en este trabajo se utilizó el método localizado de soluciones particulares aproximadas (LMAPS) que es el más prometedor hasta la fecha de publicación del artículo para solucionar la ecuación de velocidad-vorticidad de Navier-Stokes, con el enfoque que se trabaja en el artículo se evitan las dificultades que se pueden presentar con las condiciones de presión en la frontera, además el análisis se puede extender con cierta facilidad a problemas tridimensionales.

En el artículo analizado, se busca evitar los problemas con la presión en la frontera, para evitar esta dificultad, en las Navier-Stokes se realiza un cambio al tener en cuenta las ecuaciones de vorticidad y la ecuación de continuidad (90) es conocida como la ecuación de transporte de vorticidad y (130) es la ecuación de velocidad de Poisson; la condición de contorno que se dio a la vorticidad esta dada por la ecuación (94) donde $\partial\Omega$ es toda la frontera del dominio; es importante resaltar que las condiciones dadas para las componentes de velocidad, y la vorticidad se pueden definir de forma diferente para cada problema analizado.

El método numérico planteado en este artículo es completamente novedoso, y se trata de una combinación de esquemas libre de malla, combinados con LMAPS, el método implícito de Euler y el método de Newton para solucionar la ecuación de velocidad-vorticidad de Navier-Stokes

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + u^{n+1} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega^{n+1} \quad (136)$$

$$\nabla^2 u^{n+1} = - \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} \quad (137)$$

$$\nabla^2 v^{n+1} = \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} \quad (138)$$

Donde los superíndices n+1 y n denota las variables entre los pasos n y n+1. Δt es el incremento de tiempo entre dos pasos, a excepción de la derivada temporal, todas las variables están en el n+1 paso; en el paso n se conocen todas las variables y en el paso n+1, no se conocen por la discretización temporal, al crear un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales parciales que se discretizarán por medio de LMAPS.

Para poder realizar esta discretización los autores usan una ecuación de convección-difusión con coeficientes variables

$$k\nabla^2 q + a \frac{\partial q}{\partial x} + b \frac{\partial q}{\partial y} + cq = f \quad (139)$$

En esta ecuación $q = q(x)$ es una variable desconocida. $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ son coeficientes dados y k es una constante, al despejar el Laplaciano en la ecuación anterior, se forma una nueva expresión que es

$$\nabla^2 q = \frac{1}{k} \left(f - a \frac{\partial q}{\partial x} - b \frac{\partial q}{\partial y} - cq \right) = F(x) \quad (140)$$

Donde $F(x)$ se redefine con la RBF multicuadrática

$$F(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\|x - s_j\|) \quad (141)$$

Donde $\|\bullet\|$ es la norma euclidiana, y los $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ son los coeficientes desconocidos y N es el número de bases de RBFs; $\phi(\bullet)$ es la RBF and s_j es el espacio coordenado de las j -ésima RBF, el término de forzamiento se expande por medio de un conjunto de RBFs, que se pueden demostrar de la siguiente forma.

$$\hat{q}(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\|x - s_j\|) \quad (142)$$

Donde $\hat{q}(x)$ es la solución particular, $\Phi(\bullet)$ es la correspondiente RBF, que en este caso es la función multicuadrática (MQ)

$$\nabla^2 \Phi = \phi \quad (143)$$

Al integrar la ecuación (143), se obtiene la expresión que representa la función Φ que es la siguiente

$$\Phi(r) = \frac{1}{9} \left(4c^2 + r^2 \right) \sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3} \ln \left(c + \sqrt{c^2 + r^2} \right) \quad (144)$$

donde c es el parámetro de control el cual se determina de forma manual, y r es la distancia entre los nodos del campo y la j -ésima RBF, con lo cual se produce un sistema de ecuaciones lineales al tener en cuenta todos los puntos, tanto los internos como los que conforman el contorno, este sistema de ecuaciones crea la matriz densa y con dificultades en el condicionamiento, la cual puede ser solucionada con métodos computacionales tradicionales; para evitar la dificultad del condicionamiento, se incluye la localización a la técnica de MAPS al obtener la técnica de LMAPS la cual se aproxima a la derivada parcial de cada nodo del dominio y subdominio; en este parte del método es donde aparece la MQ redefinida, se obtiene una nueva expresión para Φ que se denota por

$$\Phi(r) = \frac{R_i^2}{9} \left(4c^2 + \left(\frac{r}{R_i} \right)^2 \right) \sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{R_i} \right)^2} - \frac{R_i^2 c^3}{3} \ln \left(c + \sqrt{c^2 + \left(\frac{r}{R_i} \right)^2} \right) \quad (145)$$

Donde R_i es la máxima distancia entre un punto central y otro punto en un subdominio circular, por lo cual la solución particular será dada por la expresión

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n_s} \beta_{i,j} \Phi(r_j) \quad (146)$$

Los $\{\beta_{i,j}\}_{j=0}^{n_s}$ son los coeficientes desconocidos, y r_j es la distancia entre un punto en el campo y la j -ésima RBF en el subdominio. Esta última ecuación es parecida a la ecuación (142), la única diferencia es que la primera ecuación es válida en todo el dominio y la ecuación (146) solo en el subdominio tomado, de esta última ecuación se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\{q\} = [A]\{\beta^i\} \quad (147)$$

$$\{\beta^i\} = [A]^{-1}\{q\} \quad (148)$$

Donde $[A]$ es la matriz solución de la ecuación (146), la derivada de segundo orden en el i -ésimo nodo se puede obtener de forma directa de la siguiente forma

$$\left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_i = \sum_{j=0}^{n_s} \beta_{i,j} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_i = \left\{ \left. \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} \right|_i \right\}^T \{\beta^i\} = \left\{ \left. \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x} \right|_i \right\}^T [A]^{-1} \{q\} = \sum_{j=0}^{n_s} w_{xx_{ij}} q_{ij} \quad (149)$$

Donde la expresión $\{w_{xx_{ij}}\}_{j=0}^{n_s}$ representa los coeficientes ponderados correspondientes al i -ésimo nodo para la segunda derivada respecto a x , de forma análoga se pueden obtener las expresiones similares a la ecuación (149), para la primera derivada respecto a x e y ; la segunda derivada respecto a y con las siguientes expresiones

$$\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_i = \sum_{j=0}^{n_s} w_{x_{ij}} q_{ij} \quad (150)$$

$$\left. \frac{\partial q}{\partial y} \right|_i = \sum_{j=0}^{n_s} w_{y_{ij}} q_{ij} \quad (151)$$

$$\left. \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right|_i = \sum_{j=0}^{n_s} w_{yy_{ij}} q_{ij} \quad (152)$$

Donde $\{w_{x_{ij}}\}_{j=0}^{n_s}$, $\{w_{y_{ij}}\}_{j=0}^{n_s}$ y $\{w_{yy_{ij}}\}_{j=0}^{n_s}$ son los coeficientes de ponderación en el i -ésimo punto, en cada punto la primer y segunda derivada pueden ser expresadas como un combinación lineal de las funciones de los puntos cercanos, con este proceso muy parecido al LRBF-CM se demuestra que el LMAPS es más insensible al parámetro de forma en la ecuación MQ.

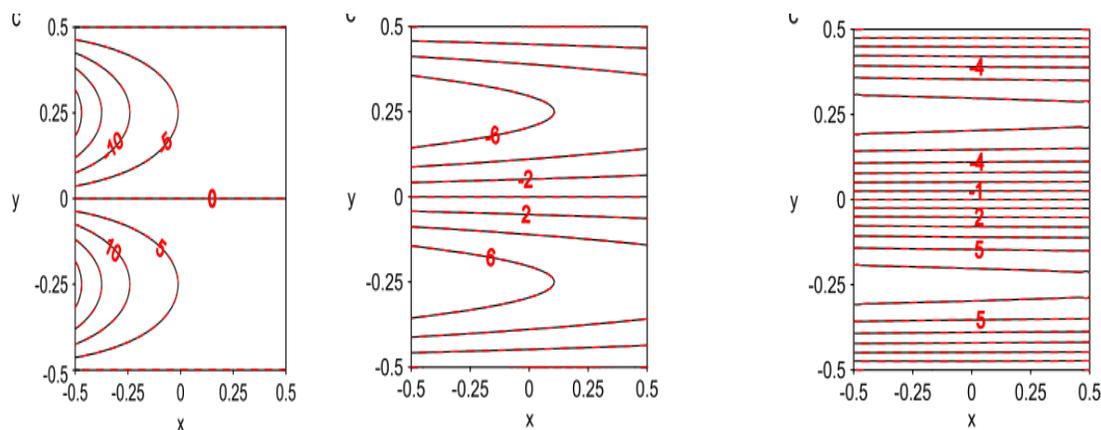
Con base en esta sustentación, se realizan tres ejemplos para comprobar el método numérico sin malla, los campos de flujo de Kovasznay, los vórtices de descomposición de Taylor y los lid-driven square cavity, en todos ellos el parámetro de forma se controló para valores entre 0,5 y 1,5.

En el problema de campo de flujo de Kovasznay se utilizaron las ecuaciones (52) a (55) como base; para el problema en [38] se cambian las expresiones x_j por x simplemente, x_2 por

y, y la expresión para λ viene sin raíz cuadrada y se toma en un dominio computacional cuadrado, cuyos valores para x e y estarán entre $-0,5$ y $0,5$, las condiciones límite se toman con base en las ecuaciones (52) y (53), los flujos de Kovaszny poseen soluciones de estado estacionario, por lo tanto las condiciones iniciales de velocidad y vorticidad son iguales a cero; los parámetros que se utilizaran en este problema son: el número máximo de puntos 2601, el parámetro de forma $c=0,8$, el número de nodos en el subdominio 30, incremento de tiempo de $0,1$.

Se utilizan tres valores para Re que son 10, 100 y 1000 como se observa en Fig. 40; con estos valores en las simulaciones, se encuentra que las soluciones analíticas y las obtenidas con el método numérico son casi iguales solo se presentan pequeñas diferencias cuando $Re=1000$, los errores más pequeños se obtienen cuando se usan más nodos, con base en este análisis se concluye que el método utilizado es consistente

Fig. 40 vorticidad para $Re=10, 100$ y 1000 respectivamente problema de Kovaszny, tomado de [38]



Como conclusión se propone que el método LMAPS el cual es un esquema simple completamente libre de malla que reduce el problema de matrices densas y mal acondicionadas, es un método apropiado para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma de velocidad-vorticidad; para ello se proponen tres ecuaciones diferenciales parciales temporales y espaciales; los resultados se comparan con las soluciones analíticas y con otros resultados numéricos que demostraron la eficiencia y exactitud del método usado; además para darle confiabilidad a los resultados obtenidos se realizaron cambios en el número de puntos en el dominio y en el subdominio, y se usaron diferentes Re , con base en estos cambios se sugiere el uso de este método por su simplicidad. Aunque el método se afecta poco por el parámetro de forma, se debe investigar más acerca del mejor valor para el mismo, este método se puede extender a problemas de campos de flujo en tres dimensiones.

6.5.3. MÉTODO IRBF

En [39] los problemas de flujo incompresibles bidimensional regidas por las funciones de velocidad y vorticidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se solucionan al usar el método de ecuación integral de base radial (RBIE) que es un elemento libre de malla basado en un contorno multidominio con subdominios superpuestos, el método se verifica con una situación con solución analítica conocida, además de trabajar con dos problemas de referencia que son el lid-driven cavity flow y el thermally driven cavity flow.

Con el planteamiento de las ecuaciones de velocidad-vorticidad de Navier-Stokes se evita la búsqueda de la presión que se hace engorroso en los puntos de frontera de la superficie, pero se debe calcular el límite de la vorticidad para dar una buena solución a las NS, para ello se define el vector vorticidad de la siguiente forma

$$\omega_i = \nabla \times u \quad (153)$$

donde ω_i es vector de vorticidad, u es el vector velocidad y $\nabla \times$ es el operador de rizo, aunque existe una amplia variedad de métodos especialmente sin malla, el método desarrollado en el artículo analizado se parece al método de LBIE en la forma en la cual se implementa ambos métodos por ello es que en el RBIE se crean subdominios circulares alrededor de cada punto del dominio y la frontera que pueden tener diferentes radios que permiten extender los círculos más allá de la frontera, pero ambos métodos difieren en tres aspectos, el primer aspecto es que el RBIE utiliza las RBF para aproximar las variables de campo desconocidas, entre las cuales se encuentran los gradientes de las mismas, lo que permite crear matrices cuya solución facilita obtener soluciones numéricas; el segundo aspecto es que no requiere un límite global cuando se ubican los nodos, pues las variables desconocidas se extrapolan por medio de las RBF que evitan la discretización lo cual hace que el método sea completamente libre de malla, el tercer aspecto es que el RBIE determina en cada punto la variable de potencial y las derivadas espaciales, lo cual facilita el uso de (153), y que por ende evita el uso de las diferencias finitas.

Entre las desventajas que presenta el método es el planteamiento de seis ecuaciones diferentes en cada punto, las cuales se solucionan simultáneamente, lo cual genera una matriz de gran tamaño, al crear limitaciones en la variedad de problemas que se pueden solucionar por medio del método de RBIE.

En la implementación de las RBF se optó por la función poliarmónica de la forma dada en (11) el RBIE presenta resultados satisfactorios cuando se toma el valor de $k=4$, y para asegurar la convergencia de la RBF, se adiciona un polinomio de la forma

$$p(r) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 \quad (154)$$

en el cual cada a_i es un coeficiente desconocido que se debe determinar, por facilidad a nivel computacional se eligieron los mismos puntos, 25 en total para determinar las variables de campo y los términos fuente de las integrales de dominio; los puntos se distribuyeron en la superficie analizada de manera uniforme además con el fin de reducir el error en la extrapolación cerca de la frontera, la distancia radial se hizo igual a la decima parte respecto al nodo más cercano, en el interior de la superficie el radio se tomó igual a la distancia al punto más cercano respecto al punto centro, en la simulación se tomaron rejillas de 20 y

400(20x20) puntos de Gauss el aumento en el número de puntos generó cambios insignificantes en los resultados obtenidos.

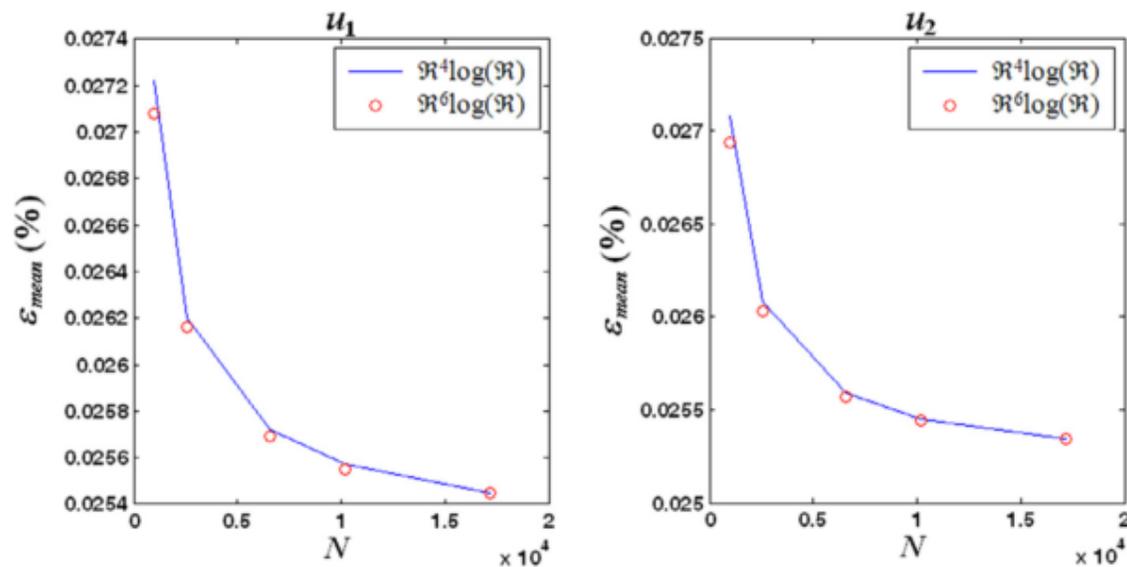
Las ecuaciones de Navier-Stokes planteadas tienen la forma de (130) y (90); adicional al trabajo numérico realizado se toma un problema analítico como referencia para constatar la convergencia del esquema numérico, las soluciones analíticas que se consideran están dadas por las expresiones

$$u_1 = \frac{1}{\text{Re}} - e^{(x_1+x_2)} \quad (155)$$

$$u_2 = \frac{1}{\text{Re}} + e^{(x_1+x_2)} \quad (156)$$

Estas soluciones se obtuvieron al usar $\text{Re}=1000$ en una región cuadrada de lado 0,25 y al usar las condiciones de frontera de Dirichlet, en este problema de control se obtuvieron resultados más precisos con la RBF poliarmónica en la cual $k=6$, pero las diferencias al usar la misma función al hacer $k=4$ fueron poco significativas como se observa en Fig. 41

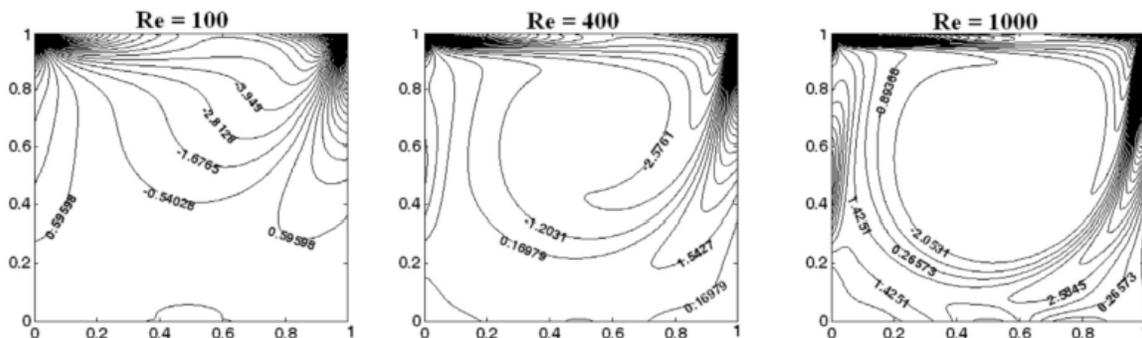
Fig. 41 porcentaje de error promedio para u_1 y u_2 contra numero de puntos, tomado de [39]



Al solucionar el problema de lid-driven cavity flow, no se especificaron condiciones de fronteras en las cuatro paredes, se dan condiciones estacionarias en tres de las cuatro paredes, y en la cuarta de ellas que es la tapa superior, se presenta un movimiento horizontal con velocidad de uno, esta velocidad es la que permite el movimiento interno; se consideraron problemas con tres Re diferentes 100, 400 y 1000, que se trabajaron en rejillas uniformes de 101x101, 141x141 y 181x181 puntos respectivamente, aunque una distribución de 51x51 dio respuesta perfecta al usar $\text{Re}=100$, cuyas soluciones al tener velocidad y vorticidad nula se tomaron como condiciones iniciales para el problema con $\text{Re}=400$, de igual forma las respuestas con las mismas condiciones para este último valor se usaron como punto de partida para el $\text{Re}=1000$, el valor de tolerancia dada a todas las simulaciones fue de 10^{-6} .

Para todos los valores dados de Re se presentaron las respuestas obtenidas en estado estacionario como se observa en Fig. 42, los tiempos para obtener el equilibrio en las respuestas fue de 10, 20 y 35 seg en los Re mencionados de menor a mayor, los incrementos de tiempo se establecieron inicialmente en 0,05s, el cual se modificó manualmente luego para los dos valores mayores de Re a 0.1, 0.2, 0.5 seg, en este problema específico la RBF se toma con el valor de $k=6$; en la distribución uniforme de puntos se observa claramente que al aumentar el número de puntos los resultados obtenidos se acercan más a aquellos que existen en la literatura, por lo cual se puede inferir que el método es consistente. Para el $Re=1000$ se presenta poca precisión con la distribución uniforme, pues se necesitan casi 30000 puntos para ver soluciones que concuerdan con la teoría existente, por lo cual se opta por una distribución aleatoria al ubicar una mayor cantidad de puntos cerca de las esquinas y el contorno de la superficie, en este caso se utilizaron dos rejillas de 81×81 y 101×101 nodos, los resultados que se obtienen presentan mayor concordancia con la literatura previa, cuando se usa la rejilla más pequeña en la distribución aleatoria se obtienen mejores resultados respecto a la rejilla de 101×101 distribuida uniformemente.

Fig. 42 formación de vórtices con diferentes Re , tomado de [39]



La simplicidad del método se debe al cálculo de los gradientes espaciales y la variable de potencial en cada punto, lo que evita realizar varios pasos adicionales propuestos por otros autores; aunque el método RBIE se plantea para solucionar las ecuaciones en 2D, se dan bases para solucionar las ecuaciones en 3D.

7. CONCLUSIONES

Al observar cuales de las ecuaciones de mecánica de fluidos son la más ampliamente trabajadas con las RBF, aparecen las ecuaciones de Navier-Stokes, esto debido en parte a su capacidad de solucionar problemas simples y complejos y modelar gran variedad de fenómenos.

La ecuación multicuadrática es la más utilizada entre las RBF en principio por el impulso dado por Hardy y Kansas, más tarde por adaptarse más fácilmente a los diferentes fenómenos que se han deseado modelar a través de las RBF

El uso de las RBF toma una gran relevancia en el análisis que se realiza con diferentes métodos numéricos, esto se puede determinar al mirar el crecimiento en el número de artículos publicados en los últimos 10 años sobre el tema, el crecimiento se identifica en especial en los últimos dos años.

Las RBF mejoran los procesos de solución para diferentes problemas por las facilidades que permiten al procesar información de puntos distribuidos de forma ordenada o aleatoria.

Las RBF son funciones de interpolación que tienen actualmente una gran importancia en la solución de problemas de fluidos, esto se hace evidente al analizar las soluciones numéricas que se proponen a problemas donde se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes, ecuaciones de aguas poco profundas, ecuaciones de convección-difusión, el flujo de Stokes entre otras.

La mayor parte de los artículos que se hallaron en la presente investigación se obtuvieron de la Base de datos Science Direct, herramienta que ofrece actualidad, credibilidad y confiabilidad en sus publicaciones.

El método puro RBF a nivel global y local para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes presenta gran efectividad y factibilidad, pues logra la simulación de los fluidos de una manera muy acertada, al usar una menor cantidad de puntos respecto a otras técnicas meshfree y de mallado, en los artículos analizados se observa algo común y es el ahorro de tiempo en la simulación y la ventaja que presenta el trabajo sin malla en dichas simulaciones, que genera además facilidad en el análisis previo, que en algunas ocasiones es engorroso y difícil cuando se generan mallas, particularmente cuando se presentan geometrías de alta complejidad

El método global MAPS y local LMAPS, generan excelentes simulaciones de flujo que se expresan por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes, en los artículos analizados donde se implementaron estas técnicas, se ve la efectividad del método, pues logra de una manera simple la simulación de problemas como el de Kovasznay y el lid-driven square cavity, obteniéndose resultados similares a los conocidos en la literatura al aplicar diferentes métodos de solución y al realizar las soluciones analíticas, es importante resaltar que el

método local en principio parece ser más apropiado con relación al global por facilidad, simplicidad y exactitud en las simulaciones realizadas.

El método de RBF-DQ es una propuesta novedosa que integra el ya conocido método de DQ con las RBF, lo cual permite la solución de distribuciones de puntos aleatorios; por estar basado en el método de DQ, el método propuesto es netamente local y presenta semejanza al método de FD. En los diferentes problemas solucionados presenta una gran consistencia en los resultados al ser comparado con la literatura existente y con simulaciones realizadas con métodos tradicionales.

El método de RBF-FD es una “generalización” del método de FD a una distribución de puntos aleatorios, que muestra ser consistente en las soluciones que se obtienen de las ecuaciones de Navier-Stokes, esto queda claro al ser comparado con la literatura existente y con los análisis realizados en el presente escrito; aunque el método permite trabajar con modelos explícitos e implícitos, estos últimos presentan una mejor capacidad de solucionar los problemas planteados, además ofrecen una importante ventaja como lo es mejorar el costo computacional respecto a los diferentes métodos sin malla basados en RBF.

Los diferentes métodos de resolución de EDP analizados en el presente trabajo muestran consistencia en los resultados obtenidos para los diferentes problemas abordados, básicamente se obtuvieron resultados similares con cada método al abordar el mismo problema, la diferencia se marca en el número de puntos que se utilizan para lograr un resultado óptimo.

8. RECOMENDACIONES

Los parámetros de forma son hasta el momento, el gran interrogante a solucionar en el uso de las RBF, se han planteado varias alternativas para hallar el “parámetro apropiado” como en [33] donde el valor óptimo se halla con base en las distancias mínimas de las circunferencias que contiene a todos los puntos del subdominio en cada nodo central seleccionado, en [31] donde se halla con base en el diámetro que encierra los puntos que conforman la vecindad del punto central, y en [40] que al adicionarla a la primera propuesta, también plantea hallar el valor óptimo con base en el número de puntos que componen la región a discretizar; pero ninguna de las propuestas realizadas hasta este momento es completamente eficiente al momento de solucionar las RBF en las cuales aparece este parámetro, por ello este tópico está abierto a investigaciones sobre cuál debe ser la forma de seleccionar el valor más óptimo para el parámetro de forma.

La manera en la cual se acondicionan los sistemas matriciales a solucionar al aplicar las RBF, también son otro campo a desarrollar, aunque a nivel local se mejora el mal acondicionamiento que estas presentan, a nivel global no se ha solucionado, por lo cual este es otro de los campos en los cuales se puede profundizar a futuro.

A futuro se pueden generar nuevos estados del arte que se enfoquen en diferentes ecuaciones de fluidos solucionadas por estos mismos métodos, o que se centren en un método específico para investigar las diferentes ecuaciones analizadas, entre otras temáticas. En definitiva la cantidad de temas relacionados con esta revisión bibliográfica es amplia.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Q. Liu, Y. Gu, P. Zhuang, F. Liu, and Y. Nie, "An implicit RBF meshless approach for time fractional diffusion equations.," *Comput. Mech.*, vol. 48, no. 1, pp. 1–12, Jul. 2011.
- [2] G. E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*. Illinois, 2007.
- [3] L. Mai-cao, "Meshless Radial Basis Function," vol. 2008, no. December 2008, 2009.
- [4] G. E. Fasshauer, "Meshfree Methods," *Theoretical and Computational Nanotechnology*. [Online]. Available: <http://www.math.iit.edu/~fass/MeshfreeNano.pdf>.
- [5] S. G. Ahmed and M. L. Mekey, "A collocation and Cartesian grid methods using new radial basis function to solve class of partial differential equations.," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 87, no. 6, pp. 1349–1362, May 2010.
- [6] D. Pepper, "Meshless methods for PDEs," *Scholarpedia*. p. 9838, 2010.
- [7] P. P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, and P. B. Nair, "Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier-Stokes equations.," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 84, no. 10, pp. 1509–1521, Oct. 2007.
- [8] E. J. Kansa, "MULTIQUADRICS--A SCATTERED DATA APPROXIMATION SCHEME WITH APPLICATIONS TO COMPUTATIONAL FLUID-DYNAMICS--I," *Comput. Math. whit Apl.*, vol. 19, no. 8, pp. 127–145, 1990.
- [9] G. Demirkaya, C. Wafo Soh, and O. J. Ilegbusi, "Direct solution of Navier–Stokes equations by radial basis functions," *Appl. Math. Model.*, vol. 32, no. 9, pp. 1848–1858, Sep. 2008.
- [10] E. J. Kansa, "MULTIQUADRICS--A SCATTERED DATA APPROXIMATION SCHEME WITH APPLICATIONS TO COMPUTATIONAL FLUID-DYNAMICS--II," *Comput. Math. whit Apl.*, vol. 19, no. 8, pp. 147–161, 1990.
- [11] C. A. Bustamante, H. Power, Y. H. Sua, and W. F. Florez, "A global meshless collocation particular solution method (integrated Radial Basis Function) for two-dimensional Stokes flow problems," *Appl. Math. Model.*, vol. 37, no. 6, pp. 4538–4547, Mar. 2013.
- [12] G. Gutierrez and W. Flórez, "ISSUES OF THE LOCAL RADIAL BASIS COLLOCATION METHOD IMPLEMENTATION FOR SOLVING SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION," *Mecánica Comput.*, vol. XXVII, pp. 2241–2252, 2008.
- [13] N. D. Caruso and M. Portapila, "Utilizacion de rbfs para la interpolacion de datos batimetricos," *Mecánica Comput.*, vol. XXVIII, pp. 2373–2383, 2009.
- [14] S. J. Baxter, H. Power, K. A. Cliffe, and S. Hibberd, "Three-dimensional thin film flow over and around an obstacle on an inclined plane.," *Phys. Fluids*, vol. 21, no. 3, p. 32102, Mar. 2009.
- [15] M. Esmailbeigi and M. M. Hosseini, "A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method," *Appl. Math. Comput.*, vol. 249, pp. 419–428, Dec. 2014.
- [16] G. Pang, W. Chen, and Z. Fu, "Space-fractional advection–dispersion equations by the Kansa method," *J. Comput. Phys.*, vol. 1, pp. 1–17, Jul. 2014.
- [17] P. González, "Metodos de funciones de Base Radial para la solucion de EDP," pp.

1–34, 2008.

- [18] R. Schaback and Z. Wu, “Operators on radial functions,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 73, no. 1–2, pp. 257–270, Oct. 1996.
- [19] J. Bradley and C. Baxter, “THE INTERPOLATION THEORY OF RADIAL BASIS FUNCTIONS,” Cambridge, 1992.
- [20] M. D. Buhmann, “Radial Basis Functions : Theory and Implementations,” First, C. University, Ed. New York, 2003, p. 258.
- [21] M. D. Buhmann, “A NEW CLASS OF RADIAL BASIS FUNCTIONS WITH COMPACT SUPPORT,” *Math. Comput.*, vol. 70, no. 233, pp. 307–318, 2000.
- [22] M. D. Buhmann, “Radial basis function,” *Scholarpedia*. 2010.
- [23] S. K. Vanani and A. Aminataei, “ON THE NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.,” *Math. Comput. Appl.*, vol. 17, no. 2, pp. 140–151, Aug. 2012.
- [24] G. B. Wright, “Radial Basis Function Interpolation: Numerical and Analytical Developments,” phdthesis, University of Colorado at Boulder, Boulder, CO, USA, 2003.
- [25] Y. V. S. S. Sanyasiraju and G. Chandhini, “Local radial basis function based gridfree scheme for unsteady incompressible viscous flows,” *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 20, pp. 8922–8948, Oct. 2008.
- [26] E. Divo and A. J. Kassab, “An Efficient Localized Radial Basis Function Meshless Method for Fluid Flow and Conjugate Heat Transfer,” *J. Heat Transfer*, vol. 129, no. 2, p. 124, 2007.
- [27] C. A. Bustamante, H. Power, and W. F. Florez, “A global meshless collocation particular solution method for solving the two-dimensional Navier–Stokes system of equations,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 65, no. 12, pp. 1939–1955, Aug. 2013.
- [28] X. Zhang, M. Chen, C. S. Chen, and Z. Li, “Localized method of approximate particular solutions for solving unsteady Navier-Stokes problem,” *Appl. Math. Model.*, 2015.
- [29] D. Sun, Y. Ai, W. Zhang, and J. Yang, “Direct solution of Navier-Stokes equations by using an upwind local RBF-DQ method,” *J. Vibroengineering*, vol. 16, no. 1, pp. 78–89, Feb. 2014.
- [30] N. Thai-Quang, K. Le-Cao, N. Mai-Duy, and T. Tran-Cong, “A high-order compact local integrated-RBF scheme for steady-state incompressible viscous flows in the primitive variables,” *C. Comput. Model. Eng. Sci.*, 2012.
- [31] A. Javed, K. Djijdeli, and J. T. Xing, “Shape adaptive RBF-FD implicit scheme for incompressible viscous Navier–Stokes equations,” *Comput. Fluids*, vol. 89, pp. 38–52, Jan. 2014.
- [32] F. Toja-Silva, J. Favier, and A. Pinelli, “Radial basis function (RBF)-based interpolation and spreading for the immersed boundary method,” *Comput. Fluids*, vol. 105, pp. 66–75, Dec. 2014.
- [33] C. Shu, H. Ding, and K. S. Yeo, “Computation of incompressible Navier-Stokes equations by local RBF-based differential quadrature method,” *C. - Comput. Model. Eng. Sci.*, vol. 7, no. 2, pp. 195–205, 2005.
- [34] N. Mai-Duy and T. Tran-Cong, “Integrated radial-basis-function networks for computing Newtonian and non-Newtonian fluid flows,” *Comput. Struct.*, vol. 87,

- no. 11–12, pp. 642–650, Jun. 2009.
- [35] Z. Yun-Xin and T. Yong-Ji, “Meshless schemes for unsteady Navier–Stokes equations in vorticity formulation using radial basis functions,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 192, no. 2, pp. 328–338, Aug. 2006.
- [36] K. Djidjeli, P. P. Chinchapatnam, P. B. Nair, and M. Tan, “A compact RBF-FD based meshless method for the incompressible Navier-Stokes equations,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part M-Journal Eng. Marit. Environ.*, vol. 223, no. M3, pp. 275–290, 2009.
- [37] S. S. Kutanaei, N. Roshan, A. Vosoughi, S. Saghafi, A. Barari, and S. Soleimani, “Numerical solution of stokes flow in a circular cavity using mesh-free local RBF-DQ,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 36, no. 5, pp. 633–638, May 2012.
- [38] C.-M. Fan, C.-H. Yang, and W.-S. Lai, “Numerical solutions of two-dimensional flow fields by using the localized method of approximate particular solutions,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 57, pp. 47–57, Aug. 2015.
- [39] E. H. Ooi and V. Popov, “Meshless solution of two-dimensional incompressible flow problems using the radial basis integral equation method,” *Appl. Math. Model.*, vol. 37, no. 20–21, pp. 8985–8998, Nov. 2013.
- [40] C. Shu, H. Ding, and K. . Yeo, “Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, no. 7–8, pp. 941–954, Feb. 2003.