

**ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE TÉCNICAS DE DISEÑO DE
SISTEMAS DE CONTROL CLÁSICO Y MODERNO.
APLICACIÓN AL MODELADO Y CONTROL DE UN SISTEMA
DE TANQUES**

EDWIN HERREÑO CASTELLANOS



**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
ESPECIALIZACIÓN EN CONTROL E INSTRUMENTACIÓN
INDUSTRIAL
BUCARAMANGA
2012**

**ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE TÉCNICAS DE DISEÑO DE
SISTEMAS DE CONTROL CLÁSICO Y MODERNO.
APLICACIÓN AL MODELADO Y CONTROL DE UN SISTEMA
DE TANQUES**

EDWIN HERREÑO CASTELLANOS

**Monografía de Grado presentada como requisito para optar al
título de Especialista en Control e Instrumentación Industrial**

**Director
LUIS ÁNGEL SILVA
PhD en Robótica y Visión por Computador**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA
ESPECIALIZACIÓN EN CONTROL E INSTRUMENTACIÓN
INDUSTRIAL
BUCARAMANGA
2012**

Nota de aceptación

Firma del Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bucaramanga, junio de 2012

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. OBJETIVOS	10
1.1 OBJETIVO GENERAL	10
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	10
2. MARCO CONCEPTUAL	11
2.1 CONTROLABILIDAD	15
2.2 OBSERVABILIDAD	17
2.3 LINEALIZACIÓN	20
3. ANÁLISIS DE SISTEMA DE TANQUES INTERCONECTADOS	23
3.1 ANÁLISIS CLÁSICO	23
3.1.1 Análisis del funcionamiento dinámico del tanque 1	24
3.1.2 Análisis funcionamiento dinámico del tanque 2	25
3.1.3 Linealización de ecuaciones mediante la serie de Taylor	27
3.1.4 Estado estacionario tanque 1	28
3.1.5 Estado estacionario tanque 2	30
3.1.6 Unidades del Sistema	34
3.1.7 Diseño de los controladores: Especificaciones de operación	35
4. ANÁLISIS A TRAVES DE LAS VARIABLES DE ESTADO	45
4.1 MODELADO	45
4.1.1 Modelo no lineal (Ecuación diferencial)	45
4.1.2 Modelo de Estado (No lineal)	45
4.1.3 Linealización a partir del Modelo de Estado	49
4.2 ANÁLISIS DE CONTROL	53
4.2.1 Matriz de Controlabilidad y Matriz de Observabilidad	53
4.2.2 Matriz de realimentación K (Asignación de Polos)	54
4.2.3 Eliminación del error de estado estacionario	60

4.2.4 Diseño del Observador de Estado	63
4.2.5 Observador de Estado con Integrador	67
4.2.6 Observador de Estado discretizado con Integrador	68
4.3 ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE LAS DOS (2) TÉCNICAS DE DISEÑO: CLÁSICA Y DE VARIABLES DE ESTADO	74
CONCLUSIONES	76
BIBLIOGRAFÍA	77

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Sistemas de control realimentados.	16
Figura 2. Linealización de una función.	22
Figura 3. Sistema de tanques acoplados	23
Figura 4. Sistema con respuesta $H_2(t)$ compensado, en sisotool.	36
Figura 5. Sistema con respuesta $H_2(t)$ compensado, en simulink.	38
Figura 6. Sistema con respuesta $H_2(t)$, compensador discreto, en simulink.	39
Figura 7. Sistema con respuesta $H_1(t)$ compensado, en sisotool y simulink.	40
Figura 8. Sistema con respuesta $H_1(t)$, compensador discreto, en simulink.	42
Figura 9. Sistema con respuesta $H_2(t)$, compensador discreto y ruido agregado, en simulink.	43
Figura 10. Sistema no lineal, en simulink.	47
Figura 11. Sistema linealizado, en simulink.	52
Figura 12. Sistema en variables de estado, con controlador, simulink.	57
Figura 13. Variables de estado del sistema linealizado, en simulink.	58
Figura 14. Sistema en variables de estado con controlador e integrador continuos.	61
Figura 15. Variables de estado continuas, del sistema con controlador e integrador.	62
Figura 16. Sistema en variables de estado, con controlador y observador continuos.	64
Figura 17. Sistema en variables de estado, con controlador, integrador y observador continuos.	67
Figura 18. Sistema en variables de estado con controlador, integrador y observador discretos.	68
Figura 19. Variables de estado, continuas y discretas.	69
Figura 20. Sistema en variables de estado con controlador, ruido agregado, integrador y observador discretos.	73

RESUMEN GENERAL DEL TRABAJO DE GRADO

TITULO: ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE TÉCNICAS DE DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL CLÁSICO Y MODERNO. APLICACIÓN AL MODELADO Y CONTROL DE UN SISTEMA DE TANQUES.

AUTOR: EDWIN HERREÑO CASTELLANOS

FACULTAD: ESPECIALIZACIÓN EN CONTROL E INSTRUMENTACIÓN INDUSTRIAL

DIRECTOR: LUIS ÁNGEL SILVA

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrollará, el diseño de sistemas de control mediante el análisis clásico y el análisis moderno, de los niveles de un sistema de tanques acoplados mediante una válvula, además de una válvula de salida, ambas con fluido de comportamiento turbulento. Elaborando con ello, un ejemplo de un proceso secuencial para el análisis de sistemas de comportamiento no lineal, alrededor de un punto de operación específico. El análisis del sistema se desarrolla, a partir de los comportamientos dinámicos del fluido en cada uno de los dos tanques, los comportamientos de modo turbulento que tiene el fluido en cada una de las dos válvulas, el comportamiento de los estados estacionarios de los tanques, del análisis clásico y del análisis moderno de la teoría de control, alrededor de un punto de operación del sistema con el respectivo desarrollo de controladores continuos, controladores discretos para los niveles diferenciales del fluido alrededor del punto de operación mencionado. El análisis moderno se desarrolla, a partir de un sistema de estados no lineal, posteriormente de uno linealizado, además del desarrollo de un controlador, un integrador y un observador de estado, seguidos de la discretización del integrador y observador de estado, para terminar con un análisis comparativo entre las dos técnicas de análisis de control de sistemas. Permitiendo concluir la mayor robustez de los sistemas de control diseñados a través de la técnica de variables de estado.

PALABRAS CLAVE: sistemas de control, punto de operación, niveles diferenciales, controladores, flujo turbulento, sistema de estados, integrador, observador de estados.

V° B° DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO

ABSTRACT OF THESIS PROJECT

TITLE: COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN MODERND AND CLASSICAL TECHNIQUES DESIGN OF CONTROL SYSTEMS. APPLICATION TO MODENLING AND CONTROL OF TANKS SYSTEM

AUTHOR: EDWIN HERREÑO CASTELLANOS

DEPARMENT: SP. CONTROL AND INDUSTRIAL INSTRUMENTATION

DIRECTOR: LUIS ÁNGEL SILVA

ABSTRACT

In this thesis, it will develop, the control systems design through classical and modern analysis, of the coupled tank system levels through of a valve, besides an outlet valve, both, with turbulent behavior. Thereby preparing, an example of a sequential process for nonlinear systems behavior analysis, about a point, of specific operation. Systems analysis was developed, from dynamics behavior fluid inside each tank, behaviors of a turbulent way, fluid has on each valves, the stationary states behavior tanks, of classical and modern control analysis theory, around an operation point of system, with a development of continuous controllers, discrete controllers, to differential fluid levels, from mentioned operation point. Modern analysis is developed, from a nonlinear states system, afterwards from a linearized system, besides a controller development, an integrator and a state observer, it followed of discretization integrator and state observer, finally with a comparative analysis between both techniques of control systems analysis. Concluding sturdiness grater from control systems design through state variables technique.

KEY WORDS: control systems, operation point, differential levels, controllers, turbulent fluid, states system, integrator, states observer.

V° B° THESIS DIRECTOR

INTRODUCCIÓN

Actualmente la teoría de control, tiene básicamente dos formas diferentes con las que eventualmente puede abordar el proceso de controlar un sistema. Estas son la teoría de control clásico y la teoría de control moderno, aunque la primera con la gran limitación de ser aplicada a procesos que tengan una sola entrada y una sola salida, la segunda sin esta limitante, pero con un manejo matemático un poco más elevado y con el hecho de cubrir falencias presentes en la primera.

Además de lo anterior, se debe tener en cuenta, que los sistemas de control modernos son obviamente complejos, los cuales poseen muchas entradas y muchas salidas que están relacionadas entre sí, a veces de manera complicada. Por tal motivo analizar y expresar matemáticamente las relaciones existentes entre las entradas y las salidas, es complejo, en consecuencia se debe tratar de manejar estos procedimientos de la manera más simple y directa posible, siendo el análisis en variables de estado una importante herramienta para ello, pues esto permite usar notación matricial, con lo cual se expresan las relaciones mencionadas anteriormente de una forma compacta.

Teniendo en cuenta lo expresado en las líneas anteriores, se abordará un caso de estudio, correspondiente al flujo de líquido en un sistema de tanques, cuyo comportamiento es no lineal, para con ello, realizar un análisis comparativo de las técnicas de control clásico y moderno. Para comenzar se realizará un breve repaso conceptual, sobre los conceptos de controlabilidad y observabilidad, que permita tener un aporte teórico sobre el problema a abordar, el cual consiste en un análisis comparativo de las técnicas de control clásico y moderno para un sistema de tanques. Seguidamente se realizarán los análisis correspondientes a la teoría clásica del control, no sin antes realizar las respectivas linealizaciones del comportamiento de los fluidos en el respectivo punto de operación y teniendo en cuenta las expresiones que gobiernan los comportamientos turbulentos en las válvulas de interconexión y de salida del estudio de caso que se presenta en este trabajo.

Se finalizará con el análisis en variables de estado, no sin realizar las respectivas linealizaciones y se concluirá con una comparación de los resultados de las dos técnicas de control para el estudio puntual del caso abordado.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Realizar un análisis comparativo de los diseños de sistemas de control, elaborados a través de técnicas de control clásico y moderno, para los niveles diferenciales de líquido, alrededor de un punto de operación, de un sistema de tanques.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Modelar el comportamiento de las variables diferenciales de los niveles de líquido, alrededor de un punto de operación, en un sistema de tanques con flujo turbulento.
- Diseñar controladores para los niveles diferenciales del líquido de los tanques, uno (1) y dos (2) del sistema interconectado, a través del análisis clásico de sistemas de control.
- Modelar el comportamiento de las variables diferenciales de niveles de líquido, alrededor de un punto de operación, en un sistema de tanques con flujo turbulento, a través del análisis en variables de estado, tanto en su estado no lineal como en su estado linealizado.
- Diseñar controlador y observador de estado para el sistema de tanques, a través del análisis moderno de sistemas de control.

2. MARCO CONCEPTUAL

Para poder abordar de una manera sólida el análisis de diseño de los sistemas de control necesarios para la realización de este trabajo, se revisarán conceptos utilizados en el mismo, tales como, controlabilidad, observabilidad, linealización, los cuales son presentados a continuación.

2.1 CONTROL PID¹

Un controlador automático compara el valor de la salida de un sistema con la entrada de referencia, determina la desviación y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina acción de control.

En este orden de ideas se pueden enunciar los diferentes tipos de controles tales como son los controles de dos posiciones, proporcionales, integrales, proporcionales-integrales, proporcionales-derivativos, proporcionales-integrales-derivativos.

Acción de control de dos posiciones o de encendido y apagado (on/off). En un sistema de control de dos posiciones, el elemento de actuación solo tiene dos posiciones fijas que, en muchos casos, son simplemente encendido y apagado.

Supongamos que la señal de salida del controlador es $u(t)$ y que la señal de error es $e(t)$. En el control de dos posiciones, la señal $u(t)$ permanece en un valor ya sea máximo o mínimo, dependiendo de si la señal de error es positiva o negativa. De este modo,

$$u(t) = u_1 \text{ para } e(t) \geq 0 \quad (1)$$

$$u(t) = u_2 \text{ para } e(t) < 0 \quad (2)$$

en donde u_1 y u_2 son constantes. Por lo general, el valor mínimo de u_2 es cero o $-u_1$.

Acción de control proporcional. Para un controlador con acción de control proporcional, la relación entre la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error $e(t)$ es:

¹ OGATA K, Ingeniería de control moderna. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. 2003

$$u(t) = Kp * e(t) \quad (3)$$

en donde Kp se considera la ganancia proporcional. Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es, en esencia, un amplificador con una ganancia ajustable.

Acción de control integral. En un controlador con acción de control integral, el valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a una razón proporcional a la señal de error $e(t)$. Es decir,

$$u(t) = Ki * \int e(t) * dt \quad (4)$$

en donde Ki es una constante ajustable. Si se duplica el valor de $e(t)$, el valor de $u(t)$ varía dos veces más rápido. Para un error de cero, el valor de $u(t)$ permanece estacionario. En ocasiones, la acción de control integral se denomina control de reajuste (reset).

Acción de control proporcional-integral. La acción de control de un controlador proporcional-integral (PI) se define mediante

$$u(t) = Kp * e(t) + \frac{Ki}{Ti} * \int e(t) * dt \quad (5)$$

en donde Kp , es la ganancia proporcional y Ti se denomina tiempo integral. Tanto Kp como Ti son ajustables. El tiempo integral ajusta la acción de control integral, mientras que un cambio en el valor de Kp afecta las partes integral y proporcional de la acción de control.

Acción de control proporcional-derivativa. La acción de control de un controlador proporcional-derivativa (PD) se define mediante

$$u(t) = Kp * e(t) + Kp * Td * \frac{de(t)}{dt} \quad (6)$$

en donde Kp es la ganancia proporcional y Td es una constante denominada tiempo derivativo. Tanto Kp como Td son ajustables. La acción de control derivativa, ocurre donde la magnitud de la salida del

controlador es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error.

El tiempo derivativo T_d es el intervalo de tiempo durante el cual la acción de la velocidad hace avanzar el efecto de la acción de control proporcional. La acción de control derivativa tiene un carácter de previsión.

Aunque la acción de control derivativa tiene la ventaja de ser de previsión, tiene las desventajas de que amplifica las señales de ruido y puede provocar un efecto de saturación en el actuador. La acción de control derivativa no se usa nunca sola, debido a que solo es eficaz durante periodos transitorios.

Acción de control proporcional-integral-derivativa. La combinación de una acción de control proporcional, una acción de control integral y una acción de control derivativa se denomina acción de control proporcional-integral-derivativa (PID). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de control individuales. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se obtiene mediante

$$u(t) = K_p * e(t) + \frac{K_i}{T_i} * \int e(t) * dt + K_p * T_d * \frac{de(t)}{dt} \quad (7)$$

en donde K_p es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral y T_d es el tiempo derivativo.

2.2 ESPACIO DE ESTADOS²

Actualmente existe la tendencia en los sistemas de ingeniería s hacia una mayor complejidad, debido principalmente a los requerimientos de las tareas complejas y la elevada precisión. Los sistemas complejos pueden tener entradas y salidas múltiples y pueden variar en el tiempo.

Debido a la necesidad de alcanzar metas cada vez más restrictivas en el desempeño de los sistemas de control, al aumento en la complejidad de lo sistemas y a los avances computacionales, se ha podido desarrollar la

² *Ibíd.*

teoría de control moderna, que es un enfoque del análisis y diseño de sistemas de control complejos, dicho enfoque se basa en el concepto de estado, el cual ha existido durante largo tiempo en el campo de la dinámica clásica.

La teoría de control moderna es diferente de la teoría de control convencional, en que la primera se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser lineales o no lineales, en tanto que la segunda sólo se aplica a sistemas lineales con una entrada y una salida e invariantes con el tiempo. La teoría del control moderna es esencialmente un enfoque en el dominio del tiempo, en tanto que la teoría de control convencional es un enfoque complejo en el dominio de la frecuencia. Es en el enfoque de la teoría de control moderna que surgen conceptos como, variables de estado, vector de estado y espacio de estados.

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (variables de estado) de modo que el conocimiento de estas variables en $t=t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$. Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de dicho sistema.

Si se necesitan al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n , para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado. Las variables de estado no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente. Las variables que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables pueden seleccionarse como variables de estado. Tal libertad al elegir las variables de estado es una ventaja de los métodos de espacio de estados, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado.

Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x , este vector se

denomina vector de estado. Por tanto un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , el eje x_2, \dots , el eje x_n , se denomina espacio de estados

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por tanto, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado. La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

2.3 CONTROLABILIDAD³

La controlabilidad y la observabilidad son aspectos que juegan un papel de vital importancia en los aspectos tanto teóricos como prácticos del análisis del control moderno. Ambos aspectos, son los gobernantes de la existencia de una solución a un problema de control óptimo. Esta es la diferencia fundamental existente entre las dos teorías del control, la teoría del control clásico y la teórica del control óptimo.

En la teoría del control clásico se puede concluir claramente, que las técnicas de diseño de solución a un problema son dominadas por los métodos de prueba y error, por lo que si se tiene un conjunto de especificaciones de diseño, el diseñador desconoce en el inicio si existe una solución al problema planteado.

La Controlabilidad de un sistema está íntimamente relacionada con la existencia de soluciones de la realimentación de estado con el fin de establecer los valores característicos del sistema en forma arbitraria. Lo cual se convierte básicamente en hallar la matriz constante de ganancia de realimentación K . Para ilustrar mejor el concepto anterior, se analiza un sistema con la dinámica del proceso descrito por,

³ Kuo B.C. Sistemas de Control Automático. Séptima Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN 968-880-723-0. Año 1996

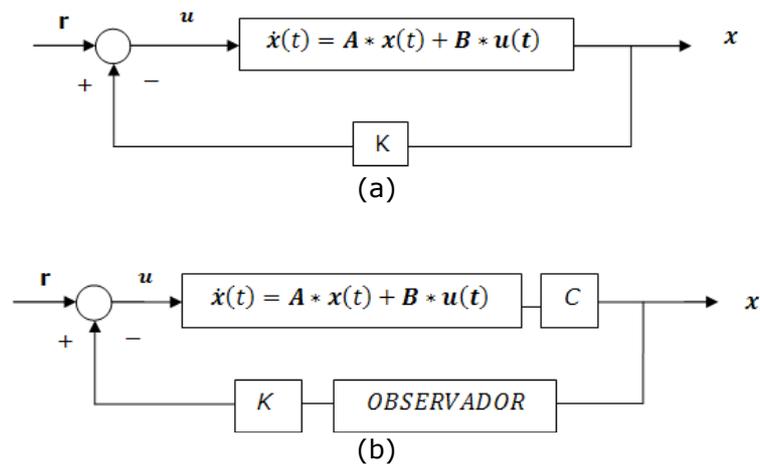
$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t) \quad (8)$$

En donde,

A es la matriz de estado , $x(t)$ es el vector de estado, B es la matriz de entrada, $u(t)$ vector de entrada

El cual está esquematizado en la figura 1a, seguido por el sistema con observador y realimentación, esquematizado en la figura 1b.

Figura 1. Sistemas de control realimentados. (a). Sistema de Control con realimentación de estado. (b). Sistema de control con observador y realimentación de estado



Fuente: KUO B.C. Sistemas de Control Automático. Séptima Edición.

donde,

$$u = -Kx(t) + r(t) \quad (9)$$

en consecuencia

$$\dot{x}(t) = (A - B * K) * x(t) + B * r(t) \quad (10)$$

El anterior problema se conoce como diseño también como diseño por ubicación de polos mediante la realimentación del estado. En este caso, el objetivo de diseño es por supuesto encontrar la matriz de realimentación K , en donde los valores característicos del sistema en lazo cerrado, tengan ciertos valores prescritos.

Se puede afirmar que el proceso es completamente controlable si cada variable de estado del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito, a través de algún control no restringido $u(t)$. En consecuencia, si una de las variables de estado es independiente del control $u(t)$, no habría forma de dirigir esta variable de control. Por tanto se dice que este estado en particular es no controlable, y que el sistema no es completamente controlable, o simplemente es no controlable, mientras exista por lo menos un estado no controlable. Si se considera un sistema lineal e invariante con el tiempo se describe mediante la ecuación (8) y la ecuación (11)

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (11)$$

en donde $x(t)$ es el vector de estado de $n \times 1$, $u(t)$ es el vector de entrada de $r \times 1$, y el vector de salida $y(t)$ es de $p \times 1$, A , B , C , D son los coeficientes de las dimensiones apropiadas. Se dice que el estado $x(t)$ es controlable en $t=t_0$ si existe una entrada continua por intervalos $u(t)$ que moverá al estado a cualquier estado final $x(t_f)$ en un tiempo finito $(t-t_0) \geq 0$. Si cada estado $x(t_0)$ del sistema es controlable en un intervalo de tiempo finito, se dice que es un sistema de estado completamente controlable.

A continuación se presenta un método de prueba para la controlabilidad del estado. Para que el sistema descrito por la ecuación (1) sea de estado completamente controlable, es necesario y suficiente que la siguiente matriz de controlabilidad de $n \times nr$ tenga rango n :

$$S = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (12)$$

Ya que las matrices A y B están involucradas, algunas veces se dice que el para $[A, B]$ es controlable lo que implica que S es de rango n .

2.4 OBSERVABILIDAD⁴

Con el diseño de lazo cerrado ya realizado, ahora se debe enfrentar el problema práctico de implantar la realimentación de las variables de

⁴ Ibíd.

estado. Hay básicamente dos problemas prácticos en la implantación del control por realimentación del estado. El primero se basa en el hecho que el número de variables de estado puede ser excesivo, por los que el costo de detectar cada una de estas variables de estado puede resultar prohibitivo.

El otro gran inconveniente es que no todas las variables de estado puede llegar a ser físicamente accesible, por lo que podría ser necesario diseñar y construir un Observador que estime el vector de estado a partir del vector de salida del sistema $y(t)$. En la figura 2 se puede ver laramente el diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado con un observador.

Si se tiene un sistema lineal e invariante con el tiempo que se describe mediante las ecuaciones (8) y (11), se dice que el estado $x(t_0)$ es observable si dada cualquier entrada $u(t)$, existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$ tal que el conocimiento de $u(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_f$, las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} y la salida $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_f$ son suficientes para determinar $x(t_0)$. Si cada estado del sistema es observable para un t_f finito, se dice que el sistema es completamente observable o simplemente observable. Para la observabilidad también se tiene, al igual que para la controlabilidad un método de prueba, que se describe a continuación. Para que el sistema descrito por las ecuaciones (8) y (11) sea completamente observable, es necesario y suficiente que la matriz de observabilidad de $n \times np$ tenga un rango n .

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

La condición también se conoce como que el par $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ es observable. En particular, si el sistema tiene sólo una salida, \mathbf{C} es una matriz reglón de $1 \times n$, \mathbf{V} es una matriz cuadrada $n \times n$. Entonces el sistema es completamente observable si \mathbf{V} es no singular.

2.5 ASIGNACIÓN DE POLOS⁵

Suponiendo que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su realimentación. Se puede afirmar que, si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden colocar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una adecuada matriz de ganancias de la realimentación del estado.

La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria y/o las especificaciones de la respuesta en frecuencia, tales como la velocidad, razón de amortiguamiento, o ancho de banda, al igual que los requisitos en estado estacionario.

Se supone que se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en $s=\mu_1, s=\mu_2, \dots, s=\mu_n$. Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para realimentación del estado, es posible hacer que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema original sea de estado completamente controlable. También se puede afirmar que una condición necesaria y suficiente para que los polos en lazo cerrado se puedan localizar en cualquier posición arbitraria en el plano s es que el sistema sea de estado completamente controlable.

En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseña un controlador (compensador) tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan una razón de amortiguamiento ζ y una frecuencia natural no amortiguada ω_n deseada. En este método, el orden del sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. En este método supone que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son despreciables.

En lugar de especificar sólo los polos dominantes en lazo cerrado, se pueden especificar todos los polos en lazo cerrado, mas sin embargo existe un costo asociado con colocar todos los polos en lazo cerrado, debido a que hacer esto, requiere tener buenas medidas de todas las variables de estado, o bien incluir un observador de estado en el

⁵ OGATA K, Ingeniería de control moderna. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. 2003

sistema. También existe un requisito por parte del sistema para que los polos en lazo cerrado se puedan situar en posiciones elegidas de forma arbitraria, al exigencia es que el sistema sea de estado completamente controlable.

2.6 OBSERVADOR DE ESTADO⁶

En las líneas anteriores se supuso que todas las variables de estado estaban disponibles para su realimentación. Sin embargo en la práctica no todas las variables de estado están accesibles para poder realimentarse. Entonces, se necesita estimar las variables de estado que no están disponibles.

La estimación de variables de estado no medibles se denomina normalmente observación. Un dispositivo o un programa de computador que estima u observa las variables de estado se llama observador de estado, o, simplemente, un observador.

Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas están disponibles por medición directa, se denomina observador de estado de orden completo. Hay ocasiones en las que un observador de este tipo no es necesario ya que sólo se requiere la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que también se miden directamente. Por ejemplo, como las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no se necesita observar todas las variables de estado, sino sólo $n-m$ variables de estado, donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida. Un observador de estado estima las variables de estado basándose en las mediciones de las variables de salida y de control.

2.7 LINEALIZACIÓN⁷

Cuando se analizan sistemas no lineales, un gran inconveniente se presenta debido a la naturaleza misma del sistema, al hecho de que sea no sea lineal y en consecuencia no pueda ser expresado mediante ecuaciones lineales. Para que una ecuación sea lineal, cada uno de sus términos no debe contener más de una variable (la cual debe ser de

⁶ OGATA K, Ingeniería de control moderna. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall. 2003

⁷ CORRIPIO C.A., SMITH A.B. Control Automático de Procesos. Teoría y Práctica. Primera Edición. Editorial Limusa. ISBN 968-18-3791-6. 1991.

primer orden) o derivada. Además la transformada de Laplace, necesaria para el desarrollo del presente trabajo, es una herramienta que solo puede ser utilizada para el análisis de sistemas lineales, también se puede tener en cuenta que no existe una técnica conveniente para sistemas no lineales, de manera tal que pueda ser generalizada para una amplia variedad de sistemas físicos.

Mediante la linealización es posible, aproximar las ecuaciones no lineales que representan un sistema, a ecuaciones lineales. que pueden ser analizadas a través de la transformada de Laplace.

La suposición básica es que la respuesta del proceso de linealización consiste en que la respuesta de aproximación lineal, representa la respuesta del sistema en la región cercana al punto de operación, alrededor del cual se realiza la linealización.

El manejo de las ecuaciones linealizadas se facilita, en gran medida con la utilización de las variables de desviación, las que se pueden definir como la diferencia entre el valor de la variable y su valor en el punto de operación, por lo tanto

$$X(t) = x(t) - xa \tag{14}$$

donde, $X(t)$ es la variable de desviación, $x(t)$ es la variable absoluta, xa es el valor $x(t)$ en el punto de operación. Además puesto que el valor base de una variable de desviación es una constante, las derivadas de las variables de desviación son siempre iguales a las derivadas de las variables correspondientes.

Se puede considerar ahora la aplicación de los conceptos de linealización presentados a las series de Taylor. Para mayor claridad se puede considerar una función ecuación diferencial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] + k \tag{15}$$

Donde $f[x(t)]$ es una función no lineal de $x(t)$ y k es una constante. La expansión por series de Taylor de $f[x(t)]$ alrededor del valor xa , está dada por

$$f[x(t)] = f(xa) + \frac{df(xa)}{dx} * [x(t) - xa] + \frac{1}{2!} * \frac{d^2f(xa)}{dx^2} * [x(t) - xa]^2 \dots \dots \dots \tag{16}$$

La aproximación lineal consiste en eliminar todos los términos de la serie exceptuando los dos primeros, en consecuencia,

$$f[x(t)] = f(xa) + \frac{df(xa)}{dx} * [x(t) - xa]$$

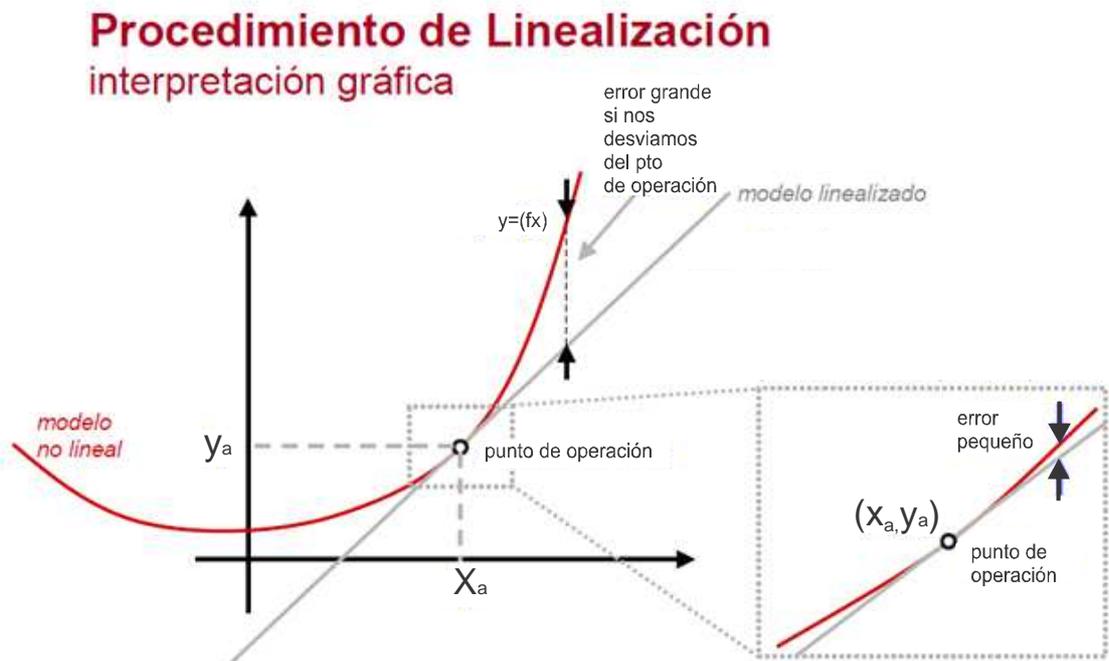
Por lo tanto,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(xa) + \frac{df(xa)}{dx} * [x(t) - xa] + k \quad (17)$$

En la figura 2 se muestra la interpretación grafica de ésta aproximación. La aproximación lineal es una recta que pasa por el punto (xa, ya) con pendiente $df(xa)/dx$, esta línea es por definición tangente a la curva $df(x)/dx$ en xa . Se debe tener en cuenta que la diferencia entre la aproximación lineal y la función real es menor en el punto de operación (xa, ya) y mayor cuando se aleja de éste.

Es difícil definir la región en la cual la aproximación lineal, es lo suficientemente precisa como para representar la función no lineal, dado que entre más pronunciada sea la característica de no linealidad de una función, menor es la región de la función sobre la cual la aproximación lineal es precisa.

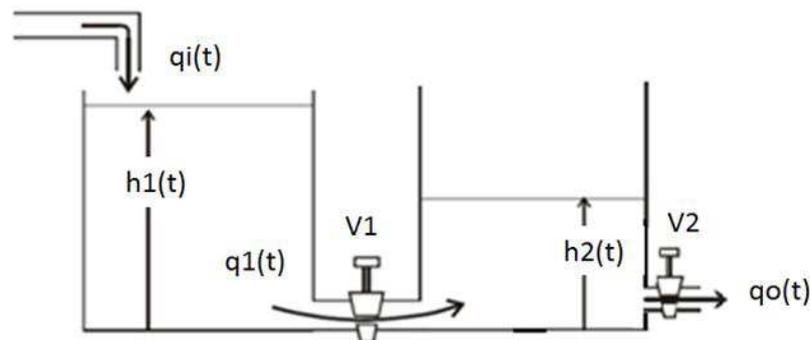
Figura 2. Linealización de una función.



3. ANÁLISIS DE SISTEMA DE TANQUES INTERCONECTADOS

La figura 3 muestra un sistema de dos tanques. El tanque 1 con altura de líquido $h_1(t)$ y el tanque 2 con altura de líquido $h_2(t)$, acoplados por medio de la válvula V_1 , con flujo de líquido $q_1(t)$ del tanque 1 al tanque 2. Además el tanque 2 con salida de líquido $q_o(t)$ y el tanque 1 con entrada de líquido $q_i(t)$. Se desea obtener el modelo, de la altura del líquido del tanque 1 con respecto de la entrada $q_i(t)$, además el modelo de la altura del líquido del tanque 2 con respecto de la entrada $q_i(t)$. Los modelos tendrán como marco referencial el sistema internacional de medidas MKS.

Figura 3. Sistema de tanques acoplados



Fuente: Autor

3.1 ANÁLISIS CLÁSICO

A continuación, se presenta el desarrollo de las relaciones de las variables diferenciales (linealizadas a través de las series de Taylor) de nivel de los tanques respecto de la entrada del sistema. Para este fin, en principio se modelará el comportamiento del dinámico de las cantidades de líquido existente en cada uno de los tanques, además de los estados estacionarios de cada uno de los tanques, después se realizará el análisis del comportamiento del flujo turbulento (no lineal) de un fluido como el agua, a través de cada una de las válvulas. Lo anterior para desarrollar expresiones que permitan aplicar el análisis clásico de control a cada una de las variables diferenciales de los niveles de líquido, en un sistema de tanques que está funcionando alrededor de un punto específico de operación.

3.1.1 Análisis del funcionamiento dinámico del tanque 1. Para evaluar, la altura $h_1(t)$ del tanque 1 (el cual es cilíndrico con área A_1 en su base), con respecto de la entrada $q_i(t)$. Se analizará el funcionamiento dinámico del contenido tanque 1, el cual está dado por

$$\rho * q_i(t) - \rho * q_1(t) = \rho * A_1 * dh_1(t)/dt \quad (18)$$

La ecuación (18) establece que masa de flujo del líquido entrante al tanque 1 en un instante dado, menos la masa de flujo del líquido saliente del tanque 1 en ese mismo instante, es igual a la densidad del flujo ρ multiplicada por un diferencial de volumen de líquido, que se establece en el tanque en ese instante, además como el área del tanque es constante, al igual que la densidad del líquido (en este caso agua a 4° Celsius), por lo tanto el diferencial de masa es debido al cambio en la altura en el nivel del tanque.

Ahora se analizará el funcionamiento dinámico del flujo (turbulento) de la válvula 1, el cual está dado por

$$q_1(t) = C_{va} * \sqrt{\Delta P / G} \quad (19)$$

donde,

C_{va} = Coeficiente de caudal de la válvula

ΔP = Caída de presión a través de la válvula

G = Gravedad específica del líquido que fluye por la válvula (adimensional).

$$\Delta P(t) = P_{11} - P_{12} \quad (20)$$

Con P_{11} como la presión a la izquierda de válvula V1 debida al tanque 1 y P_{12} como la presión a la derecha de la válvula V1, la cual es debida al tanque 2,

$$\Delta P(t) = P + \rho * g * h_1(t) - P_{12} \quad (21)$$

donde P es igual a la presión atmosférica en Pascales, ρ es la densidad del líquido que fluye por la válvula en Kg/m^3 , g es la aceleración de la gravedad en m/s^2 , más exactamente $9,82 m/s^2$ y $h_1(t)$ en metros. Ahora analizando la presión del tanque 2 sobre la misma válvula 1 y con $h_2(t)$, también en metros. Se tiene que,

$$P_{12} = P + \rho g h_2(t) \quad (22)$$

Por lo tanto,

$$\Delta P(t) = P + \rho * g * h_1(t) - P - \rho * g * h_2(t)$$

$$\Delta P(t) = \rho * g * h_1(t) - \rho * g * h_2(t) \quad (23)$$

Y

$$q_1(t) = C_{va} * \sqrt{\rho * g / G} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad (24)$$

Con $C_{v1} = C_{va} * \sqrt{\rho * g / G}$, el coeficiente de caudal de la válvula 1 se define como $C_{va} = F_1 / \sqrt{\Delta P_1 / G}$, donde ΔP_1 es la diferencia de presión del lado de más baja presión, respecto del lado de más alta presión de la válvula 1, a un determinado flujo F_1 constante, con lo que se tiene,

$$q_1(t) = C_{v1} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad (25)$$

3.1.2 Análisis del funcionamiento dinámico del tanque 2. Para evaluar, la altura $h_2(t)$ del tanque 2, el cual es cilíndrico con área A_2 en su base, con respecto de la entrada $q_1(t)$. Se analizará el funcionamiento dinámico del tanque 2, por medio del establecimiento de la ecuación que describe este funcionamiento, teniendo en cuenta nuevamente que el líquido a utilizar será agua a 4° Celsius. A continuación se presenta la ecuación antes referenciada

$$\rho * q1(t) - \rho * qo(t) = \rho * A2 * dh2(t)/dt \quad (26)$$

La ecuación (26) establece que masa de flujo del líquido entrante al tanque 2 en un instante dado, menos la masa de flujo del líquido saliente del tanque 2 en ese mismo instante, es igual a la densidad del flujo ρ multiplicada por un diferencial de volumen de líquido, que se establece en el tanque en ese instante, además como el área del tanque es constante, al igual que la densidad del líquido (en este caso agua a 4° Celsius), entonces el diferencial de masa es debido al cambio en la altura en el nivel del tanque.

La ecuación que describe el comportamiento del flujo (turbulento) en la válvula V2, es también es muy similar al de la válvula V1, solo que en esta ocasión depende de una sola variable $h2(t)$. Con Cvb como el coeficiente de caudal la válvula V2.

$$qo(t) = Cvb * \sqrt{\Delta P/G} \quad (27)$$

$$qo(t) = Cvb * \sqrt{(P + \rho * g * h2(t) - P)/G} \quad (28)$$

En este caso

$$qo(t) = Cvb * \sqrt{\rho g/G} * \sqrt{h2(t)} \quad (29)$$

Con $Cv2 = Cvb * \sqrt{\rho * g/G}$ donde el coeficiente de caudal de la válvula 2 se define como $Cvb = F2/\sqrt{\Delta P2/G}$, donde $\Delta P2$ es la diferencia de presión del lado de baja alta presión respecto del lado de más alta presión de la válvula 2, a un determinado flujo $F2$ constante, con lo que se tiene,

$$qo(t) = Cv2 * \sqrt{h2(t)} \quad (30)$$

3.1.3 Linealización del modelo mediante la serie de Taylor. Una vez obtenida la ecuación que representa el comportamiento no lineal se debe realizar el proceso de linealización de la ecuación (18). Dividiendo por ρ a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$q_i(t) - q_1(t) = A_1 * dh_1(t)/dt \quad (31)$$

Ahora linealizando la ecuación (25), respecto de un punto (h_{1a}, h_{2a}) de operación del sistema (siendo h_{1a} el nivel del liquido del tanque 1 y siendo h_{2a} el nivel del liquido del tanque 2), a través de la serie de Taylor, se tiene que

$$q_1(t) \cong Cv_1 * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}} + Cv_1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} * (h_1(t) - h_{1a}) + Cv_1 * \frac{1}{2} * \frac{-1}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} * (h_2(t) - h_{2a}) \quad (32)$$

$$q_1(t) \cong Cv_1 * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}} + Cv_1 * \frac{1}{2} * \frac{(h_1(t) - h_{1a}) - (h_2(t) - h_{2a})}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} \quad (33)$$

Reemplazando la ecuación (33) en la ecuación (18) se tiene que

$$q_i(t) - Cv_1 * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}} + \frac{Cv_1}{2} * \frac{(h_1(t) - h_{1a}) - (h_2(t) - h_{2a})}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} = \frac{A_1 * dh_1(t)}{dt} \quad (34)$$

Ahora, para la ecuación (30), se aplica el mismo procedimiento de linealización a través de las series de Taylor, con respecto al mismo punto de operación del sistema que se utilizó para la linealización de la ecuación (25). Por lo tanto, se tiene que

$$q_o(t) \cong C_{v2} * \sqrt{h_{2a}} + C_{v2}/(2 * \sqrt{h_{2a}}) * (h_2(t) - h_{2a}) \quad (35)$$

Ahora reemplazando nuevamente la ecuación (33), pero esta vez en la ecuación (26), ésta última se convierte en,

$$C_{v1} * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}} + \frac{1}{2} * \frac{C_{v1}}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} * (h_1(t) - h_{1a}) + \frac{1}{2} * \frac{-C_{v1}}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} * (h_2(t) - h_{2a}) - q_o(t) = \frac{A_2 * dh_2(t)}{dt} \quad (36)$$

Pero si se reemplaza la ecuación (35) en la ecuación (36) y se simplifica, esta última se convierte en

$$C_{v1} * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}} + C_{v1} * \frac{1}{2} * \frac{(h_1(t) - h_{1a}) - (h_2(t) - h_{2a})}{\sqrt{h_{1a} - h_{2a}}} - C_{v2} * \sqrt{h_{2a}} - \frac{C_{v2}}{2 * \sqrt{h_{2a}}} * (h_2(t) - h_{2a}) = \frac{A_2 * dh_2(t)}{dt} \quad (37)$$

3.1.4 Estado estacionario tanque 1. Si se toma, una ecuación de estado estacionario alrededor de ese mismo punto (h_{1a}, h_{2a}) del sistema se tiene que

$$q_i(t) - q_1(t) = 0 \quad (38)$$

$$q_i = q_1$$

Donde el flujo a través de la válvula V1 es $q_1 = C_{v1} * \sqrt{h_{1a} - h_{2a}}$, alrededor del punto (h_{1a}, h_{2a}) de operación del sistema, mas sin

embargo, si se tiene en cuenta, que se está evaluando es un estado estacionario, también $q_i = Cv1 * \sqrt{h1a - h2a}$ alrededor del punto $(h1a, h2a)$. Además si para simplificar los cálculos, se considera una variable de desviación $Q_i(t) = q_i(t) - q_i$ o su ecuación equivalente, la cual podría describirse como $Q_i(t) = q_i(t) - Cv1 * \sqrt{h1a - h2a}$ y también otras dos variables de desviación, que se pueden denominar como $H1(t) = h1(t) - h1a$ y $H2(t) = h2(t) - h2a$ y donde se pueden simplificar aún más los coeficientes como $C1 = 1/2 * Cv1/\sqrt{h1a - h2a}$. Tomando en cuenta las anteriores consideraciones en la ecuación (31), se tiene que

$$q_i(t) - Cv1 * \sqrt{h1a - h2a} + \frac{1}{2} * \frac{Cv1}{\sqrt{h1a - h2a}} * (h1(t) - h1a) + \frac{1}{2} * \frac{-Cv1}{\sqrt{h1a - h2a}} * (h2(t) - h2a) = \frac{A1 * dh1(t)}{dt} \quad (39)$$

la cual, una vez simplificada se convierte en,

$$Q_i(t) - C1 * H1(t) + C1 * H2(t) = A1 * dh1(t)/dt \quad (40)$$

Pero si se tiene en cuenta, que la derivada de una constante es cero se puede alterar la ecuación (40) de la siguiente forma.

$$Q_i(t) - C1 * H1(t) + C1 * H2(t) = A1 * dh1(t)/dt - 0$$

$$Q_i(t) - C1 * H1(t) + C1 * H2(t) = A1 * dh1(t)/dt - d(A1 * h1a)/dt$$

$$Q_i(t) - C1 * H1(t) + C1 * H2(t) = A1 * d(h1(t) - h1a)/dt$$

Realizando de nuevo la consideración $H1(t) = h1(t) - h1a$, se tiene que

$$Qi(t) - C1 * H1(t) + C1 * H2(t) = A1 * dH1(t)/dt$$

Y al aplicar la transformada de Laplace se convierte en,

$$Qi(s) - C1 * H1(s) + C1 * H2(s) = A1 * S * H1(s)$$

$$H1(s) * (S * A1 + C1) = Qi(s) + C1 * H2(s)$$

$$H1(s) = \frac{Qi(s)}{(S * A1 + C1)} + \frac{C1}{(S * A1 + C1)} * H2(s) \quad (41)$$

3.1.5 Estado estacionario tanque 2. Si se considera un estado estacionario alrededor de ese mismo punto ($h1a, h2a$) de operación del sistema y evaluando las variables $q1(t)$ y $qo(t)$ en este punto, tal y como se hizo anteriormente, se tiene que

$$q1(t) - qo(t) = 0 \quad (42)$$

$$q1(t) = qo(t)$$

$$Cv1 * \sqrt{h1a - h2a} = Cv2 * \sqrt{h2a} \quad (43)$$

De la ecuación (37)

$$Cv1 * \sqrt{h1a - h2a} + Cv1 * \frac{1}{2} * \frac{(h1(t) - h1a) - (h2(t) - h2a)}{\sqrt{h1a - h2a}} - Cv2 * \sqrt{h2a} - \frac{Cv2}{2 * \sqrt{h2a}} * (h2(t) - h2a) = \frac{A2 * dh2(t)}{dt}$$

y teniendo en cuenta que $Cv1 * \sqrt{h1a - h2a} = Cv2 * \sqrt{h2a}$ para el estado estacionario del punto $(h1a, h2a)$, la ecuación (37) se convierte en

$$Cv1 * \frac{1}{2} * \frac{(h1(t) - h1a) - (h2(t) - h2a)}{\sqrt{h1a - h2a}} - \frac{Cv2}{2 * \sqrt{h2a}} * (h2(t) - h2a) = \frac{A2 dh2(t)}{dt} \quad (44)$$

el primer y el tercer término del lado izquierdo de la ecuación (37) son iguales pero de signo distinto, estos se anulan. Si nuevamente se asume $C1 = 1/2 * Cv1/\sqrt{h1a - h2a}$ y $C2 = Cv2/2 * \sqrt{h2a}$, $H1(t) = (h1(t) - h1a)$ y $H2(t) = (h2(t) - h2a)$, la ecuación (34) se puede simplificar de la siguiente manera,

$$C1 * H1(t) - C1 * H2(t) - C2 * H2(t) = A2 * dh2(t)/dt \quad (45)$$

Pero teniendo en cuenta que la derivada de una constante es cero se puede alterar la ecuación de la siguiente forma,

$$C1 * H1(t) - C1 * H2(t) - C2 * H2(t) = A2 * dh2(t)/dt - 0$$

$$C1 * H1(t) - C1 * H2(t) - C2 * H2(t) = A2 * dh2(t)/dt - dh(A2 * h2a)/dt$$

Con $A2 * h2a$ siendo una constante

$$C1 * H1(t) - C1 * H2(t) - C2 * H2(t) = A2 * d(h2(t) - h2a)/dt$$

Realizando de nuevo la consideración $H2(t) = h2(t) - h2a$ se tiene que la ecuación se convierte en

$$C1 * H1(t) - C1 * H2(t) - C2 * H2(t) = A2 * dH2(t)/dt$$

Aplicando la transformada de Laplace,

$$C1 * H1(s) - C1 * H2(s) - C2 * H2(s) = A2 * S * H2(s)$$

$$C1 * H1(s) = (A2 * S + C1 + C2) * H2(s)$$

$$H2(s) = C1 * H1(s)/(A2 * S + C1 + C2) \quad (46)$$

Siguiendo con el análisis de las ecuaciones (41) y (46), para simplificar su análisis, se podrían agrupar las constantes de la siguiente manera

$$K1 = \frac{C1}{C1 + C2} \quad K2 = \frac{A2}{C1 + C2}$$

$$K3 = \frac{1}{C1} \qquad K4 = \frac{A1}{C1}$$

Reemplazando K1 y K2 en

$$H2(s) = \frac{C1 * H1(s)}{(A2 * S + C1 + C2)}$$

Se tiene que

$$H2(s) = \frac{K1 * H1(s)}{(K2 * S + 1)}$$

O también

$$H1(s) = (K2 * S + 1) * H2(s) / K1 \qquad (37)$$

y reemplazando K3, K4 y la ecuación (47) en la ecuación (39) se tiene que

$$\frac{(K2 * S + 1) * H2(s)}{K1} = \frac{K3 * Qi(s)}{(K4 * S + 1)} + \frac{1}{(K4 * S + 1)} * H2(s)$$

O también

$$\frac{H2(s)}{Qi(s)} = \frac{K3 * K2}{S^2 K2 * K4 + S * (K2 + K4) + (1 - K1)} \qquad (48)$$

La ecuación (38) es la relación $H2(s)/Qi(s)$ en lazo abierto, para el punto de operación ($h1a, h2a$) que se mencionó con anterioridad. Realizando exactamente el mismo procedimiento anterior utilizado para H2, pero en esta oportunidad para H1, se tiene que

$$H1(s) = \frac{K3 * Qi(s)}{(K4 * S + 1)} + \frac{1}{(K4 * S + 1)} * H2(s)$$

Y más simplificada en

$$\frac{H1(s)}{Qi(s)} = \frac{K3 * K2 * S + K3}{S^2 K2 * K4 + S * (K2 + K4) + (1 - K1)} \quad (49)$$

La ecuación (49) es la relación $H1(s)/Qi(s)$ en lazo abierto, para el punto de operación ($h1a, h2a$) que se mencionó con anterioridad.

3.1.6 Unidades del Sistema. Se muestran a continuación las unidades de las variables y constantes involucradas en el análisis de control realizado en el trabajo, estas unidades y constantes, como se había mencionado con anterioridad tienen como marco referencial el sistema internacional MKS.

$qi(t)[m^3/s]$	$q1(t)[m^3/s]$	$Qi[m^3/s]$	$Q1(t)[m^3/s]$	$h1a[m]$
$h2a[m]$	$C1[m^2/s]$	$C2[m^2/s]$	$A1[m^2]$	$A2[m^2]$
$h1(t)[m]$	$h2(t)[m]$	$H1(t)[m]$	$H2(t)[m]$	G [adimensional]
$\Delta P(t)$ [Pascal]	P_{11} [Pascal]	P_{12} [Pascal]	$g[m/s^2]$	$Cva[\frac{m^3}{s*(pascal)^{\frac{1}{2}}}]$
$Cvb[\frac{m^3}{s*(pascal)^{\frac{1}{2}}}]$	$Cv1[m^{\frac{5}{2}}/s]$	$Cv2[m^{\frac{5}{2}}/s]$	$\rho[kg/m^3]$	$K1$ [adimensional]
$K2[s]$	$K3[s/m^2]$	$K4[s]$		

3.1.7 Diseño de los controladores: Especificaciones de operación.

Se necesita conocer los controladores que permitan que el sistema tenga un tiempo de establecimiento de diez (10) segundos y un overshoot menor al 5% para la altura diferencial de líquido contenido en el tanque 1, la altura diferencial del líquido del tanque 2, ambos con respecto de la entrada del flujo diferencial de líquido del tanque 1. La entrada de flujo de líquido al tanque 1 en el sistema es de $q_i(t)=2.5 \text{ m}^3/\text{s}$ (sin controlador), los tanques son de cinco (5) y cuatro (4) metros de altura respectivamente. El área de la base del tanque uno (1) $A_1=8.7 \text{ m}^2$, área de la base del tanque 2 $A_2=7.7 \text{ m}^2$, el punto de operación es de $h_{1a}=0.9355 \text{ m}$ y $h_{2a}=0.4901 \text{ m}$ y el flujo diferencial incremental del líquido, en este caso agua a 4° Celsius es $Q_i(t) = 50$ litros por segundo, equivalentes a un flujo de $0.050 \text{ m}^3/\text{s}$. Además la válvula uno (1) tiene una diferencia de presión de 700 pascales por m^3/s de flujo y la válvula dos (2) tiene una diferencia de presión un 10% más alta, de 770 pascales por m^3/s de flujo. Para la resolución de este problema se utilizarán los recursos `sisotool` (el cual será indicado cada vez que se utilice) y el `simulink` de Matlab®.

Teniendo en cuenta los datos anteriores se tiene que

$$C_{va}=0.036 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s} \cdot (\text{pascal})^{\frac{1}{2}}} \right] \quad C_{vb}=0.0378 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s} \cdot (\text{pascal})^{\frac{1}{2}}} \right] \quad C_{v1}=3.7455 [\text{m}^{\frac{5}{2}}/\text{s}]$$

$$C_{v2}=3.5712 [\text{m}^{\frac{5}{2}}/\text{s}] \quad C_1=2.8061 [\text{m}^2/\text{s}] \quad C_2=2.5506 [\text{m}^2/\text{s}]$$

$$K_1=0.5238 \quad K_2=1.4375 [\text{s}] \quad K_3=0.3564 [\text{s}/\text{m}^2]$$

$$K_4=3.1004 [\text{s}]$$

Tomando en cuenta la ecuación (34) que relaciona la altura diferencial del tanque 2 que esta alrededor del punto de operación mencionado, con el flujo diferencial de entrada en el tanque 1. La relación en lazo abierto en el dominio de la frecuencia compleja, para las condiciones de operación dadas en 3.1.7, es la siguiente

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{0.5123}{4.457s^2 + 4.538s + 0.4762}$$

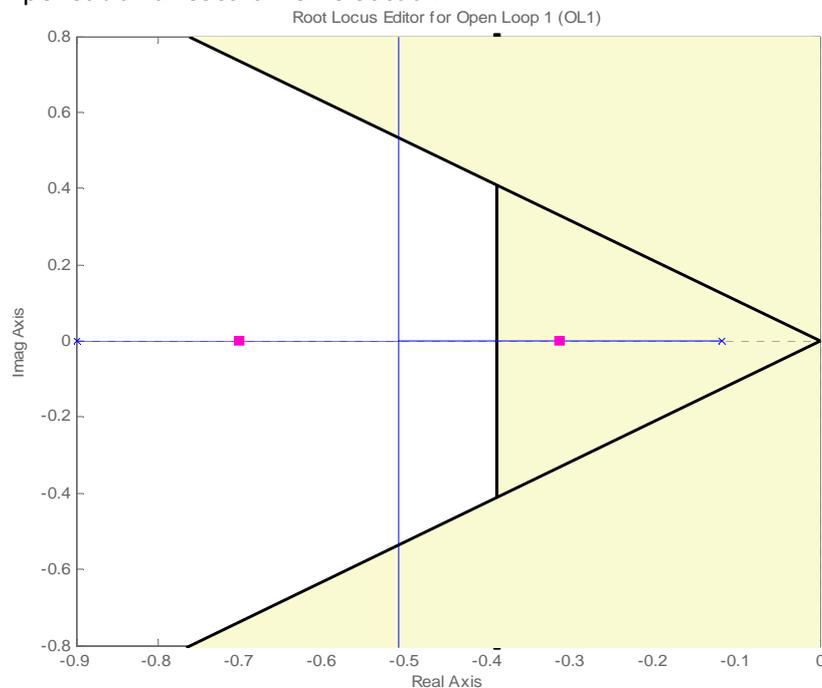
Introduciendo esta última ecuación en el `sisotool` y suministrando un flujo de $0.050 \text{ m}^3/\text{s}$ como variable de desviación $Q_i(t)$, se obtiene el compensador $G_{c2}(s)$, que le permite al sistema descrito por la función de transferencia $H_2(s)/Q_i(s)$ cumplir las condiciones de operación

requeridas, que es válido alrededor del punto de operación ($h1a$, $h2a$) y está descrito por,

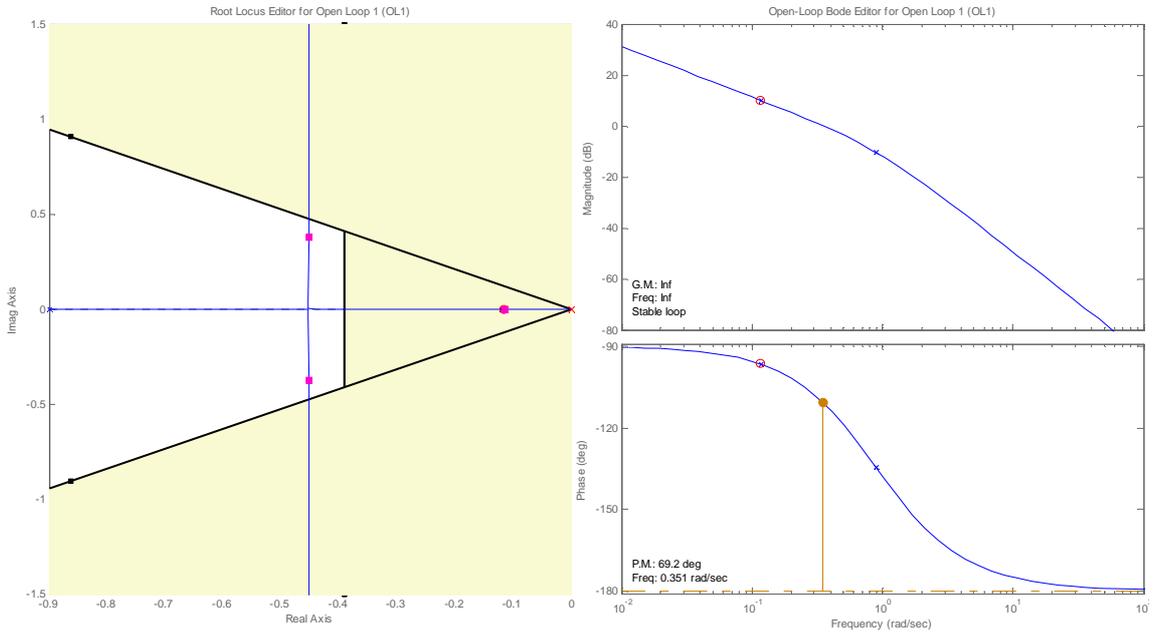
$$Gc2(s) = 2.958 * \frac{s + 0.1149}{s}$$

La figura (4a) muestra el lugar de las raíces con los polos en lazo cerrado, para el sistema $H2(s)/Qi(s)$ sin compensador, el cual como es obvio aún no cumple los requerimientos exigidos pues tiene un polo en la región limitante (sombreada). En la figura (4b) se observan dos polos de lazo cerrado en el área no limitante, de acuerdo a los requerimientos de overshoot y de tiempo de establecimiento. Pero además existe un polo que no está ubicado dentro dicha región, mas sin embargo este polo está siendo anulado por un cero, con lo cual se cumplen sin inconveniente alguno los requerimientos para el sistema. Seguidamente en la figura (4c) se puede visualizar la respuesta del sistema en sisotool ante una entrada escalón de $0.050 \text{ m}^3/\text{s}$, para el sistema con controlador, en la que se muestra discriminadamente que el sistema cumple con los requerimientos de overshoot y tiempo de establecimiento, además de seguir la entrada de forma plena después de 14 segundos.

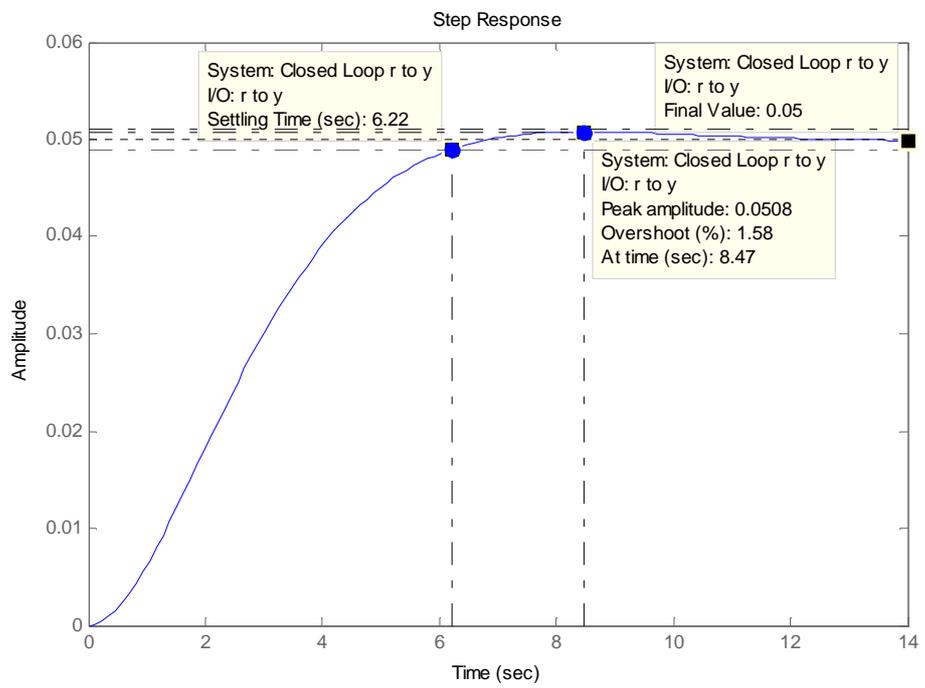
Figura 4. Sistema con respuesta $H2(t)$ compensado, en sisotool. (a) Lugar de las raíces sin compensador. (b) Lugar de las raíces con compensador. (c) Respuesta del Sistema ($H2$) con compensador al escalón en sisotool.



(a)



(b)



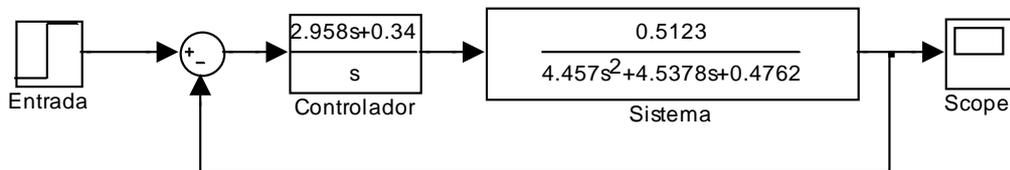
(c)

Fuente: Autor

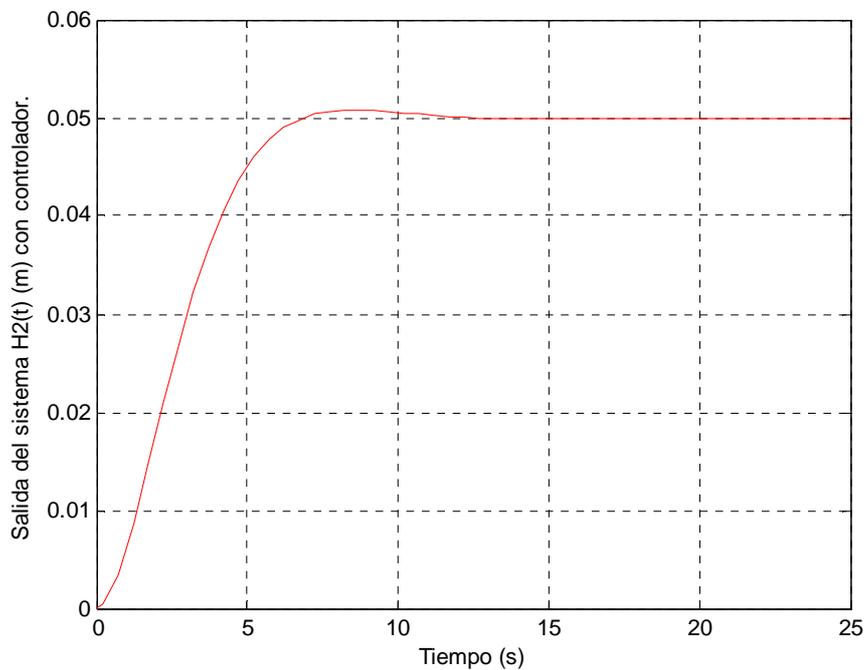
Una vez implementado el controlador del sistema con ayuda del sisotool, se procede a realizar una nueva evaluación de este sistema compensado a través del uso del simulink.

En la figura (5b) se muestra la salida $H_2(t)$ (con una entrada diferencial $Q_i(t)$ de $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ al sistema) con respecto al tiempo en segundos. En ésta se verifica, que ante el cambio de flujo diferencial mencionado, el cambio en la altura alcanza 0.05 m equivalente a 5 cm , estableciéndose en este punto y siguiendo plenamente a la entrada.

Figura 5. Sistema con respuesta $H_2(t)$ compensado, en simulink. (a) Esquema del sistema con compensador. (b) Respuesta del Sistema (H_2) con compensador al escalón.



(a)

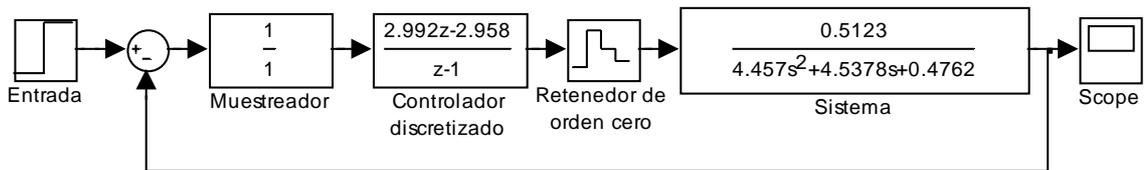


(b)

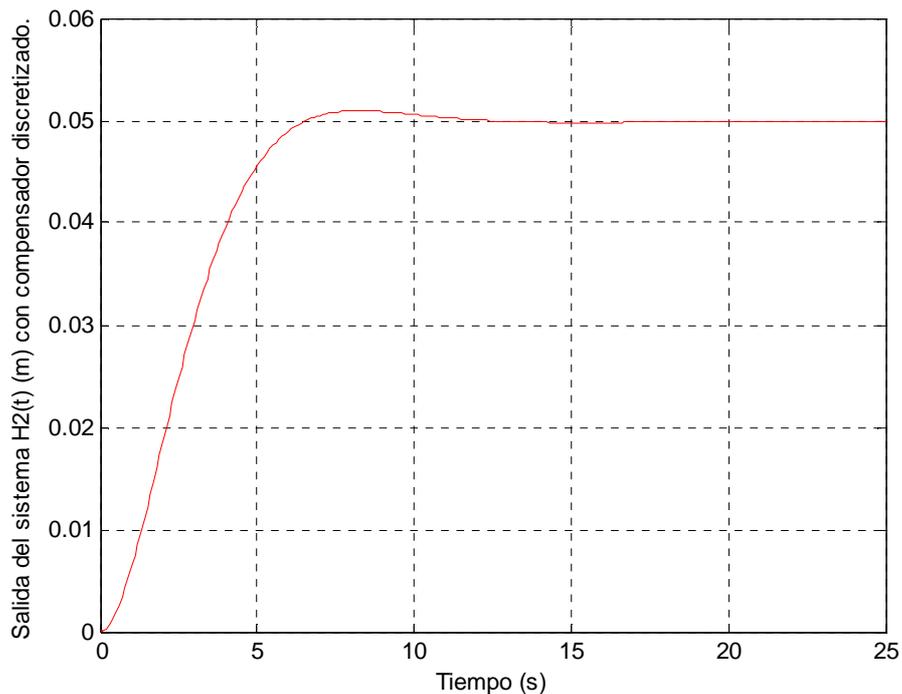
Fuente: Autor

En la figura (6a) se muestra el sistema con el compensador discretizado a través del método de diferencia atrás, con $T=0.1$ s. Este tiempo, dado que se permite como tiempo de establecimiento $t_s=10$ segundos $T=10/5$ s, con lo que $T=2$ s y se toma como $T= \tau/20=0.1$ s. La figura (6b) muestra la respuesta del sistema con compensador el discreto.

Figura 6. Sistema con respuesta $H_2(t)$, compensador discreto, en simulink. (a) Esquema del sistema con compensador discretizado. (b) Respuesta (H_2) al escalón con compensador discretizado.



(a)



(b)

Fuente: Autor

Para una segunda ecuación de transferencia $H_1(s)/Q_i(s)$, se siguen los mismos pasos que para la primera. Aunque en esta ocasión tomando en cuenta la ecuación (35), la cual relaciona la altura $H_1(t)$ del tanque 1 con el flujo $Q_i(t)$ de entrada en el tanque 1, en lazo abierto es

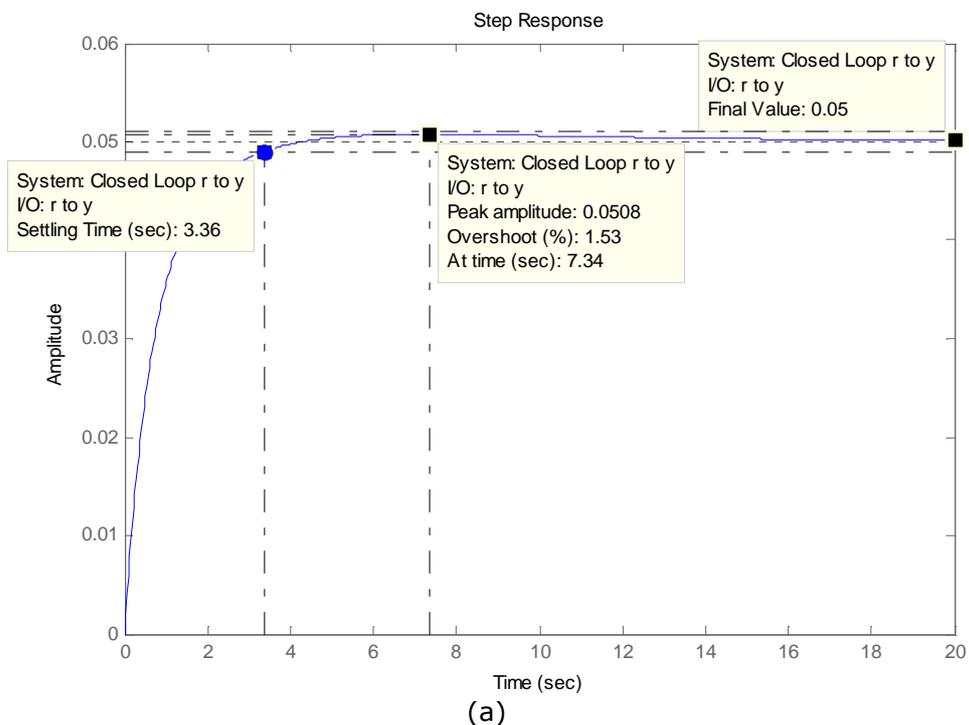
$$\frac{H1(s)}{Qi(s)} = \frac{0.5123 * s + 0.3564}{4.457 * s^2 + 4.538 * s + 0.4762}$$

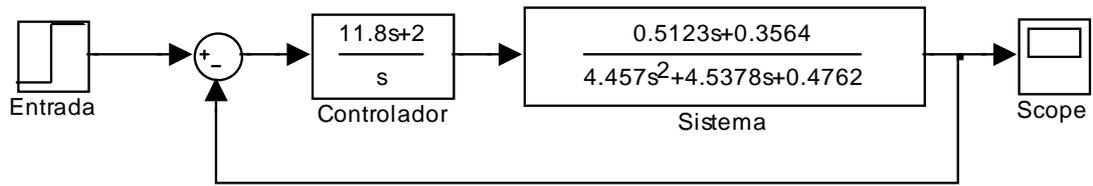
Nuevamente se calcula el compensador en sisotool para tener una aproximación al diseño en simulink. Introduciendo esta última ecuación en el sisotool, con un flujo de 0.05 m³/s como variable de desviación a la entrada, el compensador está descrito por $Gc1(s)$.

$$Gc1(s) = 11.8 * \frac{s + 0.1695}{s}$$

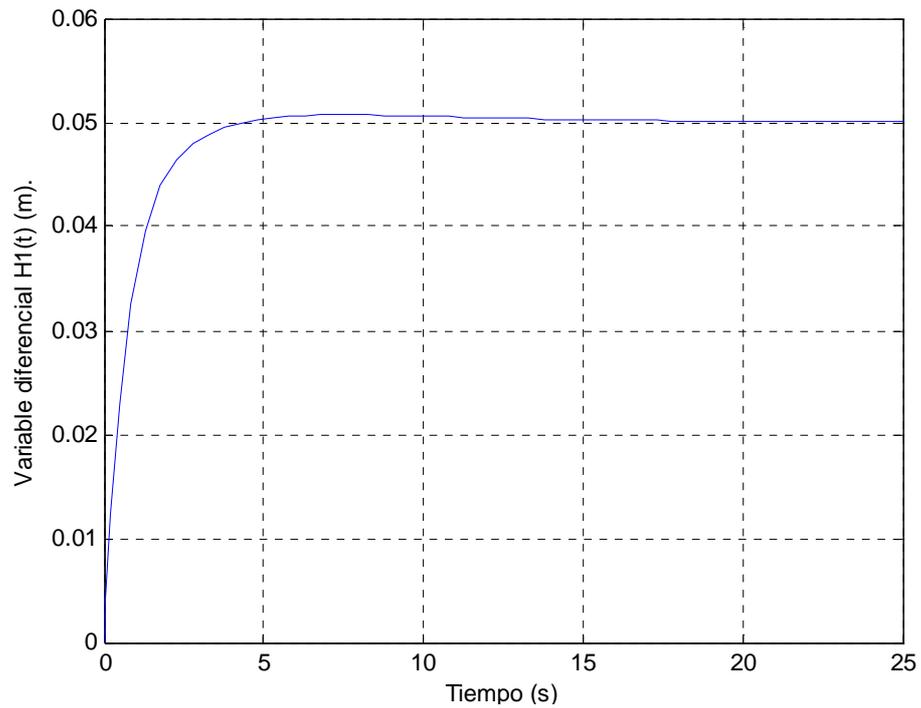
La figura (7a) muestra la respuesta del sistema en sisotool ante una entrada escalón de 0.050 m³/s, para el sistema con controlador, en la que se muestra con discriminación que el sistema cumple con los requerimientos de overshoot y tiempo de establecimiento, además de seguir la entrada de forma plena después de 20 segundos estableciéndose a una altura de 0.05 m. La figura (7c) muestra la respuesta en simulink con los mismos datos utilizados para el sisotool, lo que genera la misma respuesta con esta herramienta de análisis.

Figura 7. Sistema con respuesta H1(t) compensado, en sisotool y simulink. (a) Respuesta con compensador al escalón en sisotool. (b) Esquema del sistema con compensador. (c) Respuesta del sistema (H1) con compensador al escalón.





(b)

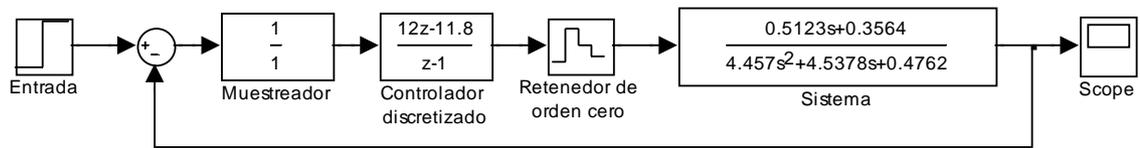


(c)

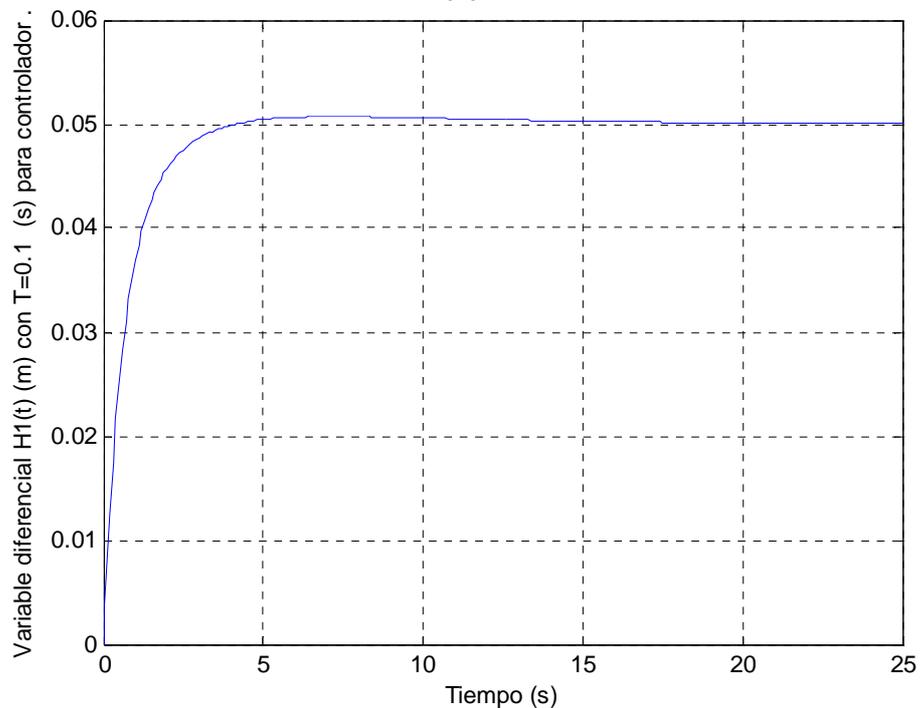
Fuente: Autor

Ahora se discretiza el compensador con el método de diferencia atrás, nuevamente con $T=0.1$ segundos. Se observa en la figura (8b) que la discretización del compensador no genera prácticamente ningún tipo de cambio respecto de salida del sistema, si se compara con el caso en donde el controlador es continuo.

Figura 8. Sistema con respuesta $H1(t)$, compensador discreto, en simulink. (a) Esquema del sistema con compensador discreto. (b) Respuesta ($H1$) al escalón con compensador discreto.



(a)



(b)

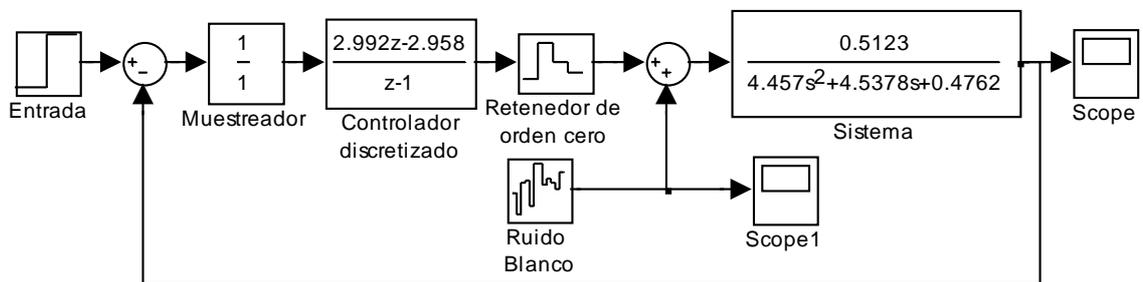
Fuente: Autor

Una vez se han realizado los análisis al sistema sin ruido, se procede a agregar ruido blanco al sistema y a mostrar las consecuencias de la incidencia de este elemento en la salida del sistema.

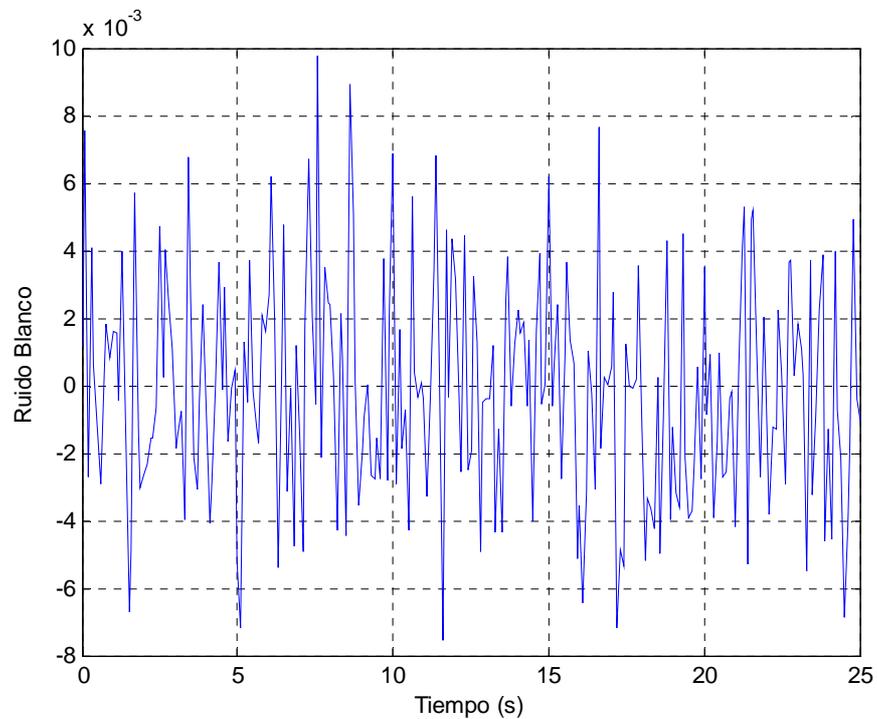
En la figura (9c) se presenta la respuesta del sistema, con compensador discreto y realimentado negativamente, con la inclusión de ruido blanco para probar la robustez del controlador del sistema, la cual en este caso resulto bastante alta debido a que con valores de ruido

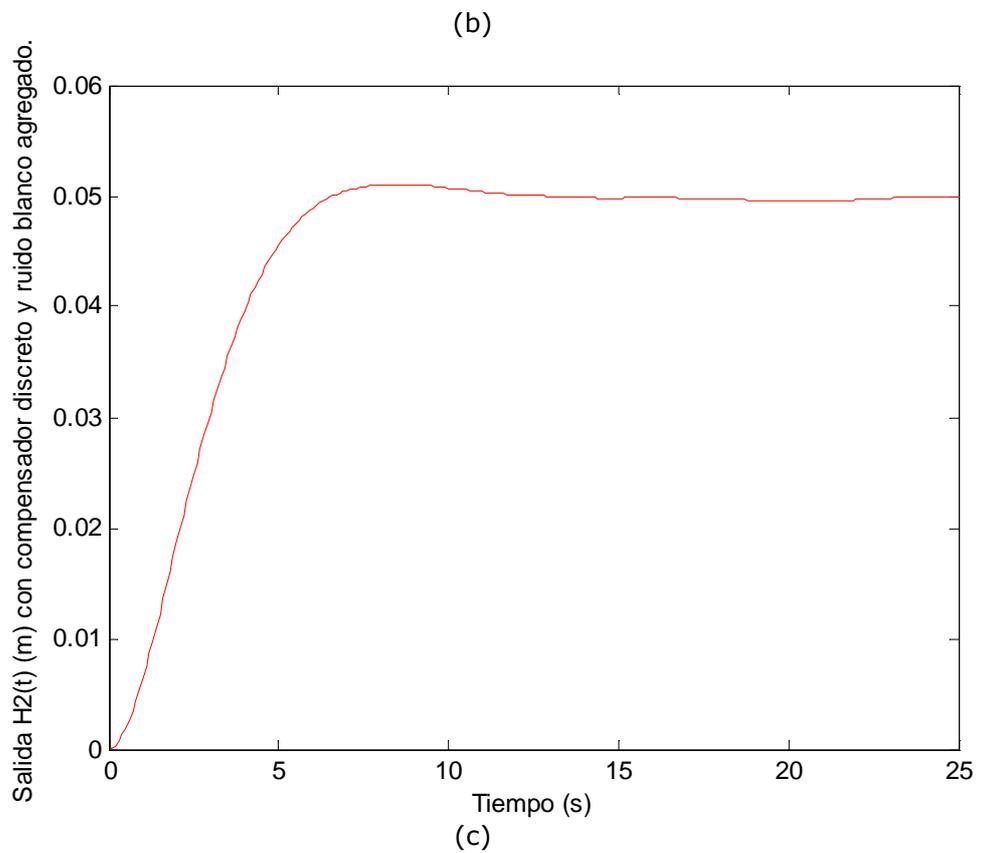
cercanos al muy 20% y con frecuencias iguales a las del tiempo de muestreo del compensador, solo se generan diferencias en el punto de operación cercanas al 1%, por lo tanto se puede afirmar que este controlador le confiere gran robustez al sistema.

Figura 9. Sistema con respuesta $H_2(t)$, compensador discreto y ruido agregado, en simulink. (a) Respuesta al escalón con ruido blanco. (b) Ruido Blanco agregado al sistema. (c) Salida del sistema con ruido blanco agregado.



(a)





Fuente: Autor

Se tiene hasta este punto el análisis clásico de sistemas de control para el sistema de tanques, en el que se puede observar los procesos de simulación tanto en sisotool, como en simulink, ambos para el caso del controlador continuo, para el caso discreto se presentan en simulink. Se puede apreciar, que en el diseño de los controladores ha llegado a puntos óptimos ya que se han cumplido satisfactoriamente los requisitos de diseño.

4. ANÁLISIS A TRAVÉS DE LAS VARIABLES DE ESTADO

Nuevamente se aborda el diseño del control del sistema de tanques, desde el análisis en variables de estado, para comenzar, se debe tener en cuenta nuevamente que, dado que el flujo a través de las válvulas es un flujo turbulento, se debe linealizar respecto de un punto, en consecuencia se opta, no por las variables simples sino por variables de desviación, las cuales son válidas alrededor del punto en cuestión.

4.1 MODELADO

Inicialmente se realiza el planteamiento del modelo no lineal, seguido del modelo linealizado a través del método del Jacobiano⁸, modelándose ambos, a través del simulink y mostrando los resultados de los mismos, para llegar a establecer, las eventuales diferencias entre los dos comportamientos.

4.1.1 Modelo no lineal (Ecuación diferencial)

Retomando las ecuaciones (18), (26), (25) y (30) se tiene que

$$q_i(t) - q_1(t) = \frac{A_1 * dh_1(t)}{dt}$$

$$q_1(t) - q_o(t) = \frac{A_2 * dh_2(t)}{dt}$$

$$q_1(t) = C_{v1} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$$

$$q_o(t) = C_{v2} * \sqrt{h_2(t)}$$

4.1.2 Modelo de Estado (No lineal). Obtención del modelo de estado no lineal. Reemplazando la ecuación (25) en la ecuación (18) se obtiene

⁸ LEWIS P.H., YANG C. Sistemas de Control en Ingeniería. Primera Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN 978-84-8322-124-2. 1999.

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{Cv_1}{A_1} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + \frac{qi(t)}{A_1}$$

reemplazando la ecuación (25) y la ecuación (30) en la ecuación (26) se obtiene,

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{Cv_1}{A_2} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{Cv_2}{A_2} * \sqrt{h_2(t)}$$

el modelo de estados no lineal está compuesto por las dos anteriores ecuaciones resultantes, las que se expresan como

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{Cv_1}{A_1} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} + \frac{qi(t)}{A_1} \quad (50)$$

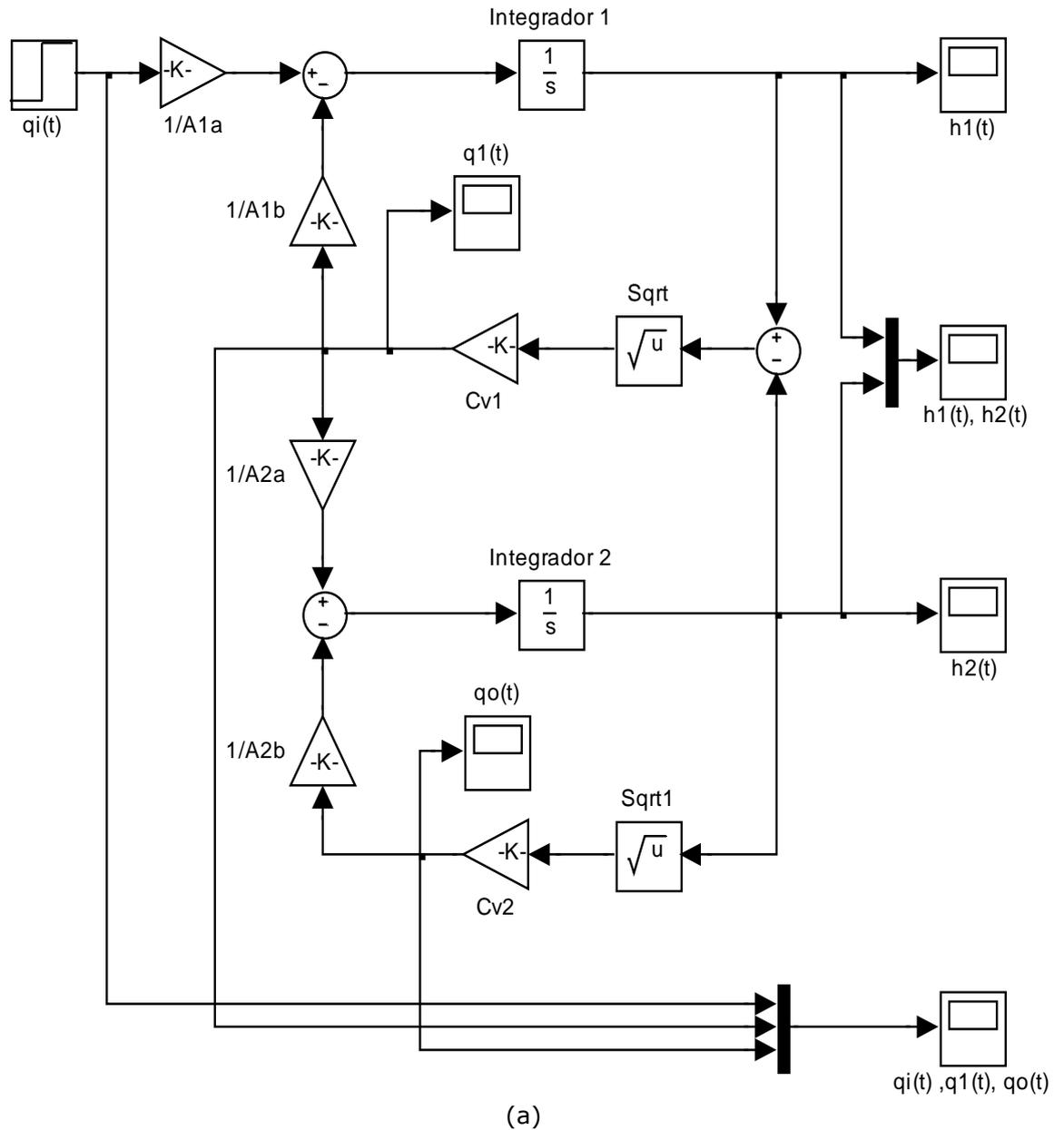
$$\dot{x}_2(t) = \frac{Cv_1}{A_2} * \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{Cv_2}{A_2} * \sqrt{h_2(t)} \quad (51)$$

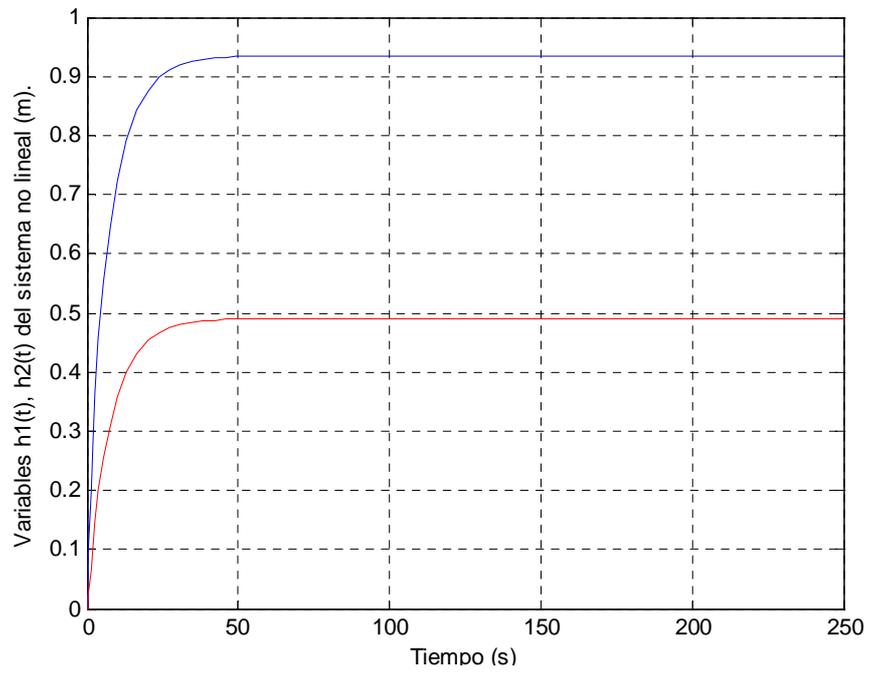
En la figura (10a) se muestran cuatro constantes correspondientes a los inversos de las áreas, cabe aclarar que aunque tengan nomenclaturas diferentes las constantes $1/A_{1a}$ y $1/A_{1b}$ son de la misma magnitud pues corresponden al inverso del área 1, igual sucede con las constantes inversas del área 2, que en este caso serían $1/A_{2a}$ y $1/A_{2b}$, el sistema mide la altura de los niveles de los líquidos de los tanques en m y se le suministra una entrada de flujo de 2.5 m^3 por segundo.

En la figura (10b) el nivel del líquido del tanque uno (1), la variable $h_1(t)$, es de color azul la cual tiene un nivel de operación estable en $h_1(t)=0.9355$ (m), con un tiempo de establecimiento de 30.07 (s) que se sucede cuando el líquido alcanza los 0.9168 m de altura en el nivel del tanque. El nivel del líquido del tanque dos (2) el cual está indicado por la variable $h_2(t)$, la que tiene un nivel de operación estable en $h_2(t)=0.4901$ (m), con un tiempo de establecimiento de 31.47 (s) que se sucede cuando el líquido alcanza los 0.4803 (m) de altura en el nivel del tanque dos (2).

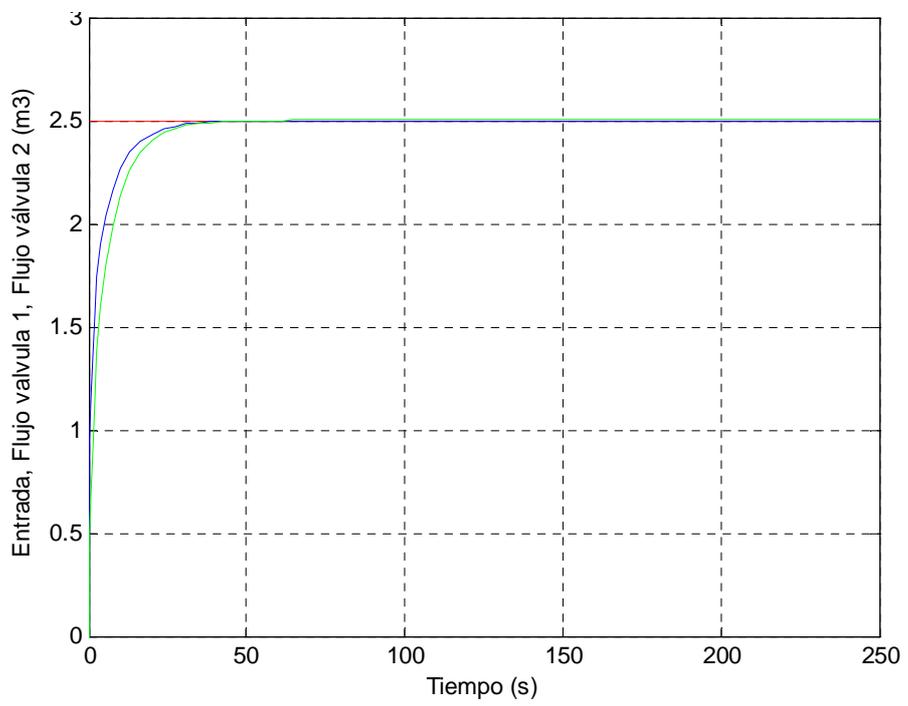
En la figura (10c) se observa color rojo la entrada, el flujo de la válvula 1 de color azul y el flujo a través de la válvula 2 de color verde.

Figura 10. Sistema no lineal, en simulink. (a) Esquema del sistema de estados no lineal. (b) Variables del sistema de estados no lineal. (c) Flujo de entrada y en las válvulas del sistema no linealizado. .





(b)



(c)

Fuente: Autor

4.1.3 Linealización a partir del Modelo de Estado. Después de obtener el modelo de estado no lineal, se procede a obtener su aproximación lineal aplicando el concepto de matriz Jacobiana, para con ello obtener la matriz A, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f1}{\partial h1} & \frac{\partial f1}{\partial h2} \\ \frac{\partial f2}{\partial h1} & \frac{\partial f2}{\partial h2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

En consecuencia,

$$a_{11} = \frac{\partial \left(-\frac{Cv1}{A1} * \sqrt{h1(t) - h2(t)} + \frac{qi(t)}{A1} \right)}{\partial h1}$$

$$a_{11} = -\frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}}$$

$$a_{12} = \frac{\partial \left(-\frac{Cv1}{A1} * \sqrt{h1(t) - h2(t)} + \frac{qi(t)}{A1} \right)}{\partial h2}$$

$$a_{12} = \frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}}$$

$$a_{21} = \frac{\partial \left(\frac{Cv1}{A2} * \sqrt{h1(t) - h2(t)} - \frac{Cv2}{A2} * \sqrt{h2(t)} \right)}{\partial h1}$$

$$a_{21} = \frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}}$$

$$a_{22} = \frac{\partial \left(\frac{Cv1}{A2} * \sqrt{h1(t) - h2(t)} - \frac{Cv2}{A2} * \sqrt{h2(t)} \right)}{\partial h2}$$

$$a_{22} = - \frac{Cv1}{A2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}} - \frac{Cv2}{A2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h2(t)}}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}} & \frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}} \\ \frac{Cv1}{A2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}} & -\frac{1}{2} * \frac{Cv1}{A2} * \frac{1}{\sqrt{h1(t) - h2(t)}} - \frac{Cv2}{A2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h2(t)}} \end{bmatrix}$$

Reemplazando el punto (h1a, h2a), se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1a - h2a}} & \frac{Cv1}{A1} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1a - h2a}} \\ \frac{Cv1}{A2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{h1a - h2a}} & -\frac{1}{2} * \frac{Cv1}{A2} * \frac{1}{\sqrt{h1a - h2a}} - \frac{Cv2}{A2} * \frac{1}{\sqrt{h2a}} \end{bmatrix}$$

Con los valores A1=8.7 m², A2=7.7 m², Cv1=3.7455[m⁵/s], Cv2=3.5712 [m⁵/s], h1a=0.9355 m, h2a= 0.4901 m, se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix}$$

De esta manera se obtiene el sistema linealizado en variables de estado

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dH1(t)}{dt} \\ \frac{dH2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} H1(t) \\ H2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1149 \\ 0 \end{bmatrix} * Qi(t)$$

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t)$$

$$[H2(t)] = [0 \quad 1] * \begin{bmatrix} H1(t) \\ H2(t) \end{bmatrix} + [0] * Qi(t)$$

Con lo que se tiene, en la figura (11a) el siguiente esquema en simulink para el sistema linealizado mediante el uso Jacobiano, tal y como fue desarrollado en las líneas anteriores.

De figura (11b) se puede inferir, que al linealizar el sistema a través del método del Jacobiano, se obtuvo un sistema diferencial (valido alrededor del punto de operación $(h1a, h2a)$) de similar comportamiento. Por ejemplo, si se observa el Ts1 (tiempo de establecimiento de la variable diferencial 1) se nota en el simulink, que este se alcanza cuando la altura del tanque alcanza 0.0367 (m), en 33.25 (s).

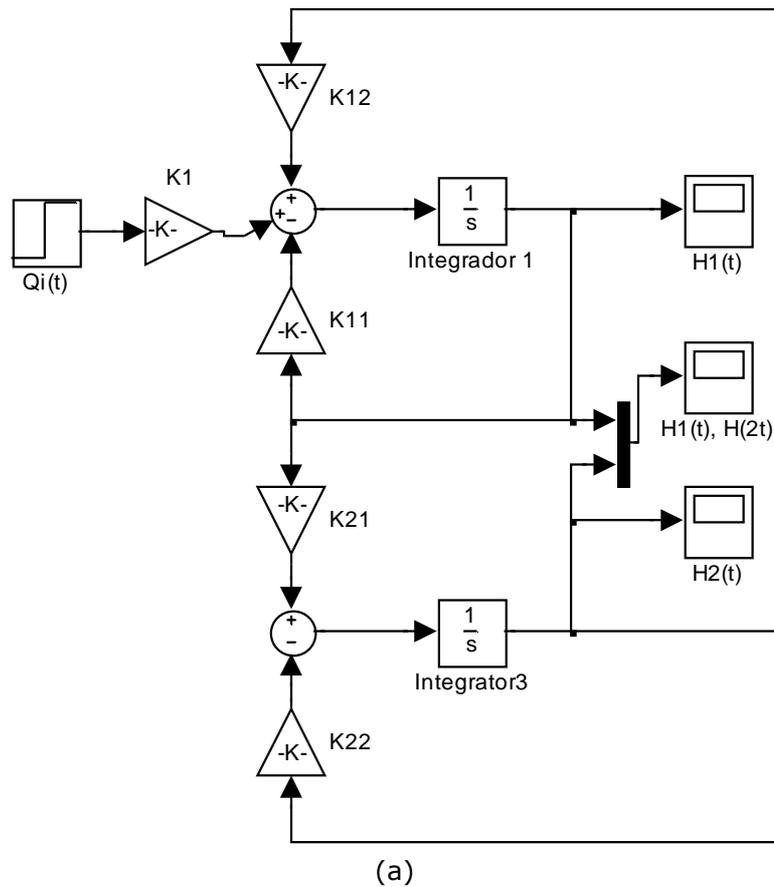
Igual sucede con el Ts2 (tiempo de establecimiento de la variable diferencial 2), se aprecia en el modelo de simulink, que este se alcanza en cuando la altura del tanque alcanza 0.0192 (m), en 33.8 (s). En consecuencia ante una entrada diferencial constante de cincuenta (50) litros por segundo equivalentes a 0.050 m³/s, el punto de operación definitivo de las alturas diferenciales es de H1a(t)=3.74 cm equivalente a 0.0374 (m) y el de H2a(t)=1.96 (cm) equivalente a 0.0196 (m).

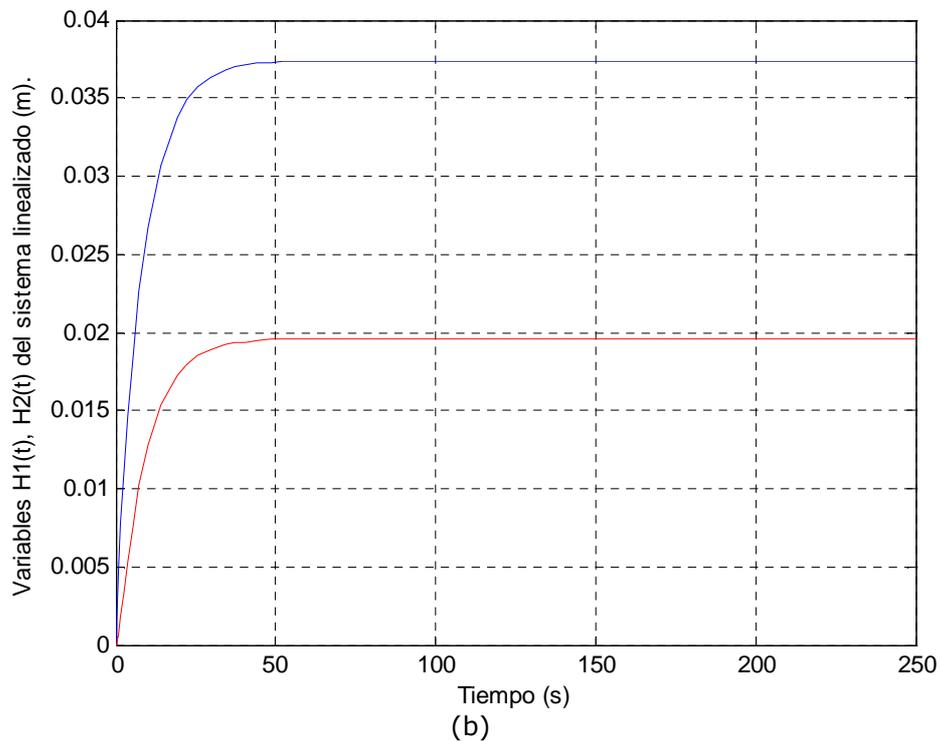
Por lo tanto se puede realizar un cálculo bastante aproximado de los volúmenes de agua que fluyen en el sistema, antes de este estabilizarse

completamente, pues una vez estabilizado, los flujos diferenciales en las dos válvulas y el flujo de la entrada son iguales, obviamente.

De esta manera se puede ver que los diferenciales de volumen se incrementarán de la siguiente manera, en $Vd1=8.7 \text{ (m}^2\text{)}*0.0374 \text{ (m)}=0.3254 \text{ (m}^3\text{)}$ y para el caso de $Vd2$, $Vd2=7.7 \text{ (m}^2\text{)}*0.0196 \text{ (m)}=0.1509 \text{ (m}^3\text{)}$, sumando ambos se podría afirmar que aproximadamente (dado que las dos variables no se estabilizan exactamente en el mismo instante) en 50 segundos que tarda en estabilizarse el sistema, se ingresan $2.5 \text{ (m}^3\text{)}$ de agua y se aumenta el volumen de liquido del sistema en $Vd1+Vd2=0.4763 \text{ (m}^3\text{)}$ de agua, lo que indica que aproximadamente en los primeros 50 (s) salen del sistema $2.0237 \text{ (m}^3\text{)}$ de agua, una vez sucede esto el sistema se estabiliza completamente y el volumen de agua que ingresa es el mismo volumen de agua de sale del sistema.

Figura 11. Sistema linealizado, en simulink. Esquema de forma no matricial en simulink del sistema de variables de estado linealizado. (b) variables diferenciales de estado linealizadas.





Fuente: Autor

4.2 ANÁLISIS DE CONTROL

A continuación se evalúan los conceptos de controlabilidad, observabilidad, se realiza el cálculo de la matriz de realimentación.

4.2.1 Matriz de Controlabilidad y Matriz de Observabilidad.

Matriz de Controlabilidad

$$Cm = [B \ A * B] \quad (54)$$

$$Cm = \begin{bmatrix} 0.1149 & -0.0371 \\ 0 & 0.0419 \end{bmatrix}$$

Claramente se puede deducir, que hay dos columnas linealmente independientes con lo que se puede afirmar que su rango es dos (2), por lo tanto el sistema es controlable.

Matriz de Observabilidad

$$Om = \begin{bmatrix} C \\ C * A \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$Om = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix}$$

Al igual que en el caso anterior el rango de la matriz es dos (2) por lo que el sistema es observable.

4.2.2 Matriz de realimentación K (Asignación de Polos).⁹ Con el modelo linealizado a través de la matriz Jacobiana, se expresa el sistema en variables de estado de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = A * x(t) + B * u(t)$$

Con

$$A = \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, dado que el sistema lineal solo es válido alrededor de un punto, nuevamente se toman como variables de estado las variables de desviación de las alturas del líquido en los tanques 1 y 2, las cuales se denominarán H1(t) y H2(t).

$$\begin{bmatrix} \frac{dH1(t)}{dt} \\ \frac{dH2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} H1(t) \\ H2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1149 \\ 0 \end{bmatrix} * Qi(t)$$

Para la salida se realiza el mismo procedimiento.

$$y(t) = C * x(t) + D * u(t)$$

⁹ NISE N.S. Control Systems Engineering. Quinta Edición. Editorial John & Sons. ISBN 978-0-471-79475-2. 2008

$$[H2(t)] = [0 \quad 1] * \begin{bmatrix} H1(t) \\ H2(t) \end{bmatrix} + [0] * Qi(t)$$

Cálculo de la matriz de control

$$K = [k1 \quad k2] \quad (56)$$

$$|sI - (A - BK)| \quad (57)$$

Desarrollando $|sI - (A - BK)|$

$$\left| s * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1149 \\ 0 \end{bmatrix} * [k1 \quad k2] \right|$$

$$\left| \begin{bmatrix} s + (0.3225 + 0.1149 * k1) & -(0.3225 - 0.1149 * k2) \\ -0.3644 & s + 0.6957 \end{bmatrix} \right|$$

$$s^2 + (1.082 + 0.1149 * k1) * s + (0.0419 * k2 + 0.0799 * k1 + 0.1068) \quad (56)$$

La ecuación (49) se denomina ecuación característica y es la que permite junto con los requerimientos de diseño hallar las constantes del vector K. Se ubican los polos dependiendo de los requerimientos exigidos al controlador, que en el caso planteado con el sisotool y el simulink fue de diez (10) segundos como tiempo de establecimiento y de 5% como porcentaje de overshoot, para poder hallar los valores k1, k2

$$\zeta = \frac{\left[-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right) \right]}{\sqrt{\left[\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right) \right]}} \quad (59)$$

$$\zeta = 0.6901$$

$$Wn = \frac{\left[-\ln(0.02 * \sqrt{1 - \zeta^2}) \right]}{\left[\zeta * Ts \right]} \quad (60)$$

Con $Wn = 0.6137 \text{ Rad/s}$

$$s^2 + 2 * \zeta * Wn * s + Wn^2 \quad (61)$$

$$s^2 + 0.8471 * s + 0.3767$$

$$(s + 0.4235 - j * 0.4442) * (s + 0.4235 + j * 0.4442)$$

Igualando con la ecuación característica que contiene el $k1$ y el $k2$, se tiene que el vector K , o también se puede hallar K mediante la utilización del comando *acker* de matlab se tiene que

$$k1 = -1.49$$

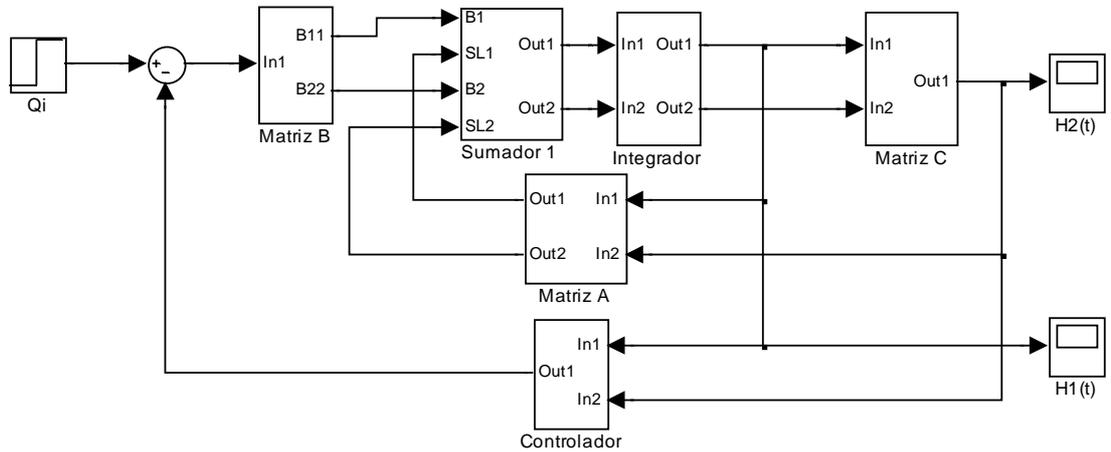
$$k2 = 9.289$$

Con lo que,

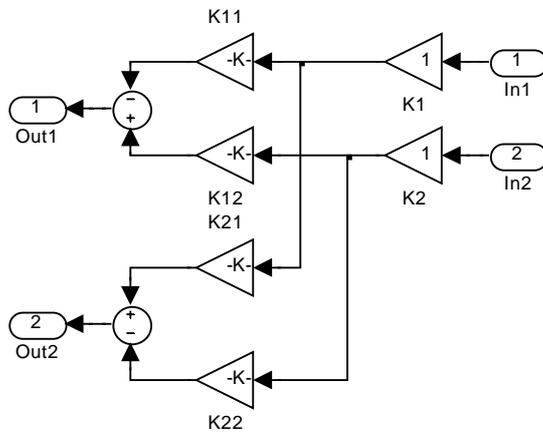
$$K = [-1.49 \ 9.289]$$

La figura (12a) muestra el sistema con controlador, en el cual la variable diferencial $H1(t)$ se puede observar directamente. El objetivo de este controlador es que la salida del sistema tenga un comportamiento satisfactorio para las exigencias del diseño, en lo referente a tiempo de establecimiento y overshoot. Aunque en su magnitud la salida no sea equiparable con la entrada. Para solucionar este inconveniente, se tendrá obviamente que recurrir a un integrador y de esta manera se podrá establecer una señal de salida que siga a la señal de entrada. Cabe aclarar que las figuras (12b), (12c), (12d), (12e), (12f) representan los esquemas de cada uno de los bloques o subsistemas que se muestran en la figura (12a). Específicamente la figura (12b), representa la matriz linealizada a través del método del Jacobiano y está dispuesta de esta manera debido a que la operación realizada sobre ella es de tipo matricial.

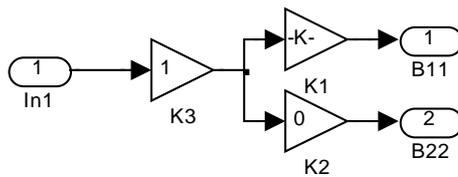
Figura 12. Sistema en variables de estado, con controlador, simulink. (a) Esquema en simulink de forma matricial con controlador. (b) Esquema en simulink de la matriz A del sistema. (c) Esquema matriz B del sistema. (d) Esquema matriz del sistema. (e) Esquema del controlador del sistema. (f) Esquema de sumador del sistema.



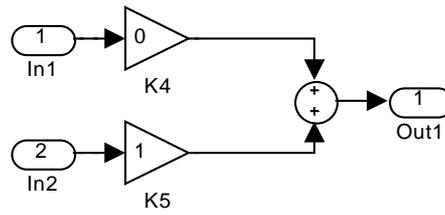
(a)



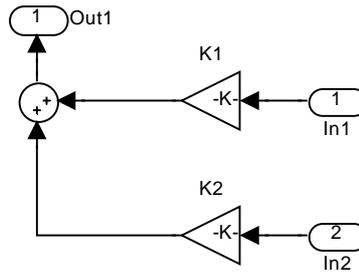
(b)



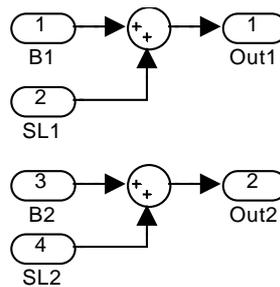
(c)



(d)



(e)

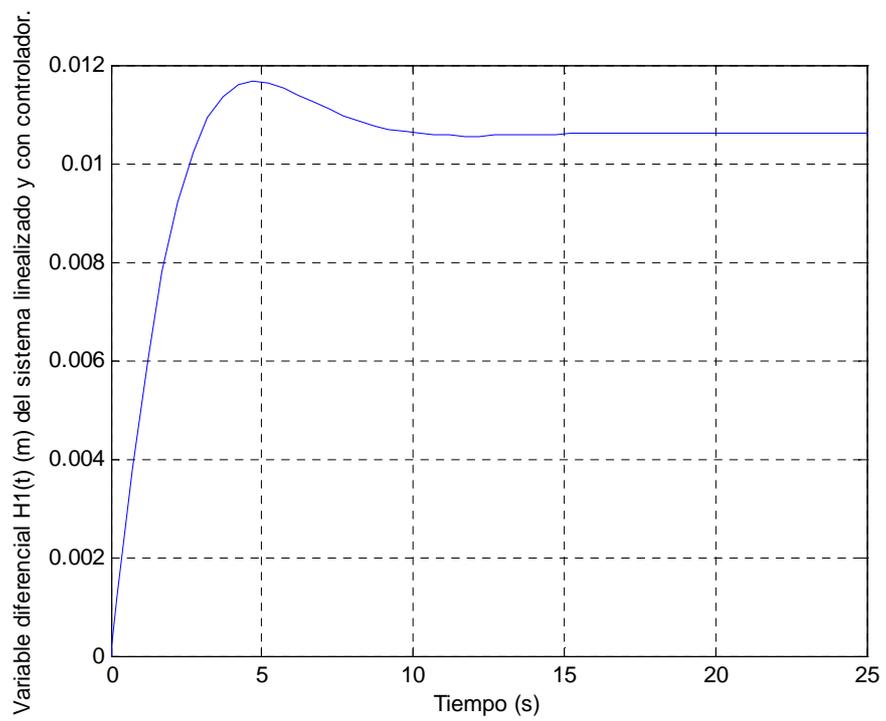
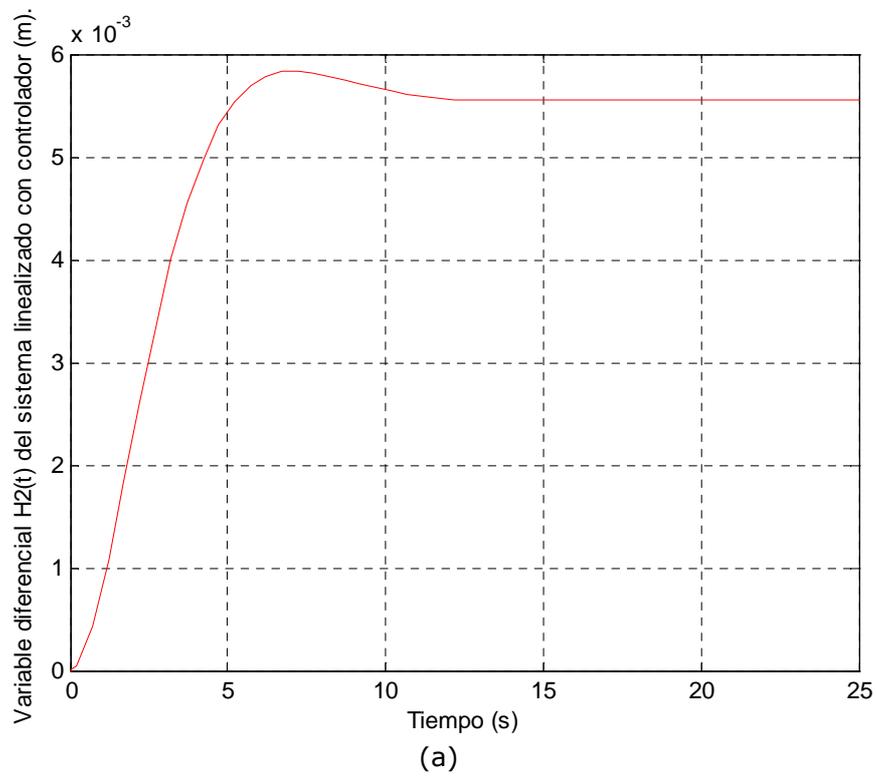


(f)

Fuente: Autor

En la figura (13a) se observa que el sistema cumple con el requerimiento de overshoot, pues la respuesta tiene como punto máximo $H_2(t)=0.005835$ m y se estabiliza en 0.005558 m con lo cual se tiene un overshoot de 4.98%, además el tiempo de establecimiento es de establecimiento que se da en 9.76 segundos cuando el $H_2(t)$ alcanza 0.00567 m, con lo que también cumple con el objetivo del diseño en cuanto a tiempo de establecimiento, aunque dista en magnitud de seguir la entrada por tal motivo se debe adicionar un integrador que reduzca el margen de error con respecto de la entrada.

Figura 13. Variables de estado del sistema linealizado, en simulink. (a) Salida del sistema linealizado ante la entrada diferencial constante. (b) Variable diferencial del sistema linealizado, con controlador.



Fuente: Autor

4.2.3 Eliminación del error de estado estacionario. En este como en la mayoría de sistemas la salida debe seguir la entrada, una solución efectiva es la introducción de un integrador tal como se realiza cuando se introduce un integrador PI, lo anterior junto obviamente con la realimentación de estado, por tal motivo se debe calcular la magnitud del integrador. Retomando nuevamente las tres matrices A, B, C, se tiene,

$$A = \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix}$$

$$B = [0.1149 \quad ; \quad 0 \quad]$$

$$C = [\quad 0 \quad \quad 1 \quad]$$

Se crean las matrices ampliadas para poder hallar la magnitud del integrador

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.3225 & 0.3225 \\ 0 & 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix}$$

$$B_i = [\quad 0 \quad ; \quad B \quad]$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1149 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora como se debe que asignar no dos sino tres polos, se asignan los dos (2) polos del cálculo realizado para ecuación característica y un (1) polo adicional, más rápido, pero por simplicidad se establece sobre el eje real y en este caso aproximadamente, cuatro (4) veces más rápido, que es el polo menos rápido que permite cumplir los requerimientos. En consecuencia se tiene una ecuación característica con tres (3) polos

$$(s + 0.4235 - j * 0.4442) * (s + 0.4235 + j * 0.4442) * (s + 1.7)$$

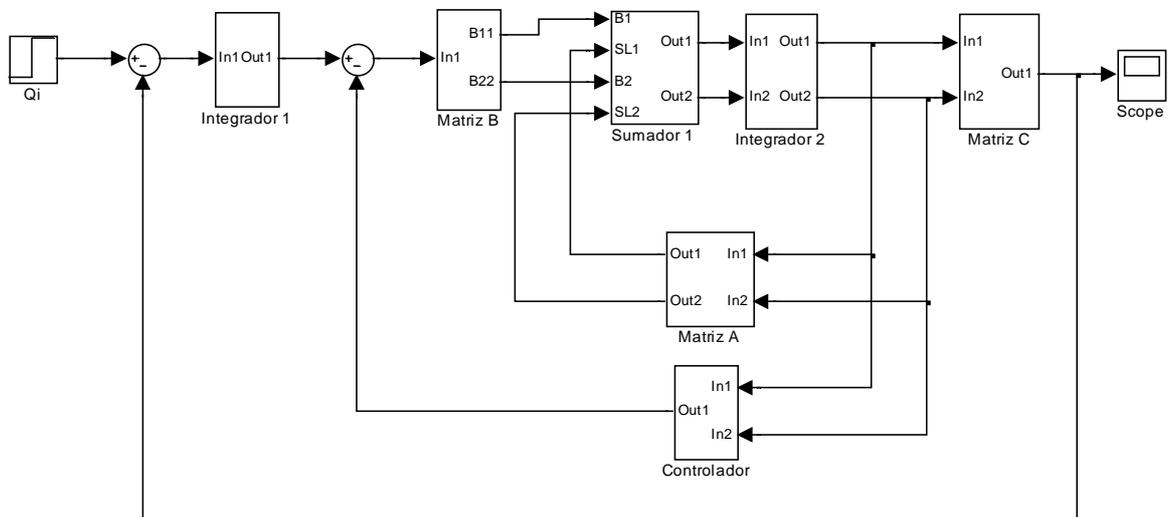
Siguiendo un procedimiento similar al realizado para la obtención de los valores de K, para el controlador anterior se tiene que

$$K_i = \text{acker}(A_i, B_i, \text{polos}), \quad K_i = [16.0781 \quad 13.3055 \quad 16.0805].$$

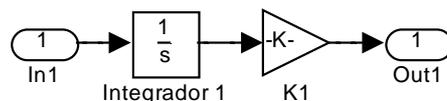
Donde $K_i = 16.0781$ y el vector $K = [13.3055 \quad 16.0805]$.

A continuación se muestra el esquema en simulink con matriz de control de realimentación K y el integrador con su respectiva magnitud KI, junto con respectiva simulación. La figura (14a) muestra la implementación del integrador del sistema para la eliminación del error de estado estacionario, se muestra que el sistema esta realimentado, posee un integrador (con ganancia), el cual en este caso es denominado integrador 1 y está alimentado por el error del sistema, pero además el subsistema controlador, posee otros dos valores diferentes a los del controlador del sistema que no posee realimentación.

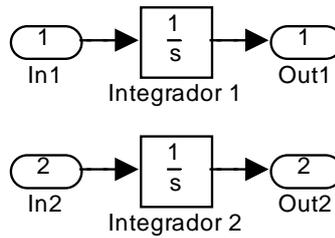
Figura 14. Sistema en variables de estado con controlador e integrador continuos. (a) Esquema del sistema en variables de estado linealizado, con integrador y matriz de control K. (b) Esquema del primer integrador. (c) Esquema del segundo integrador.



(a)



(b)

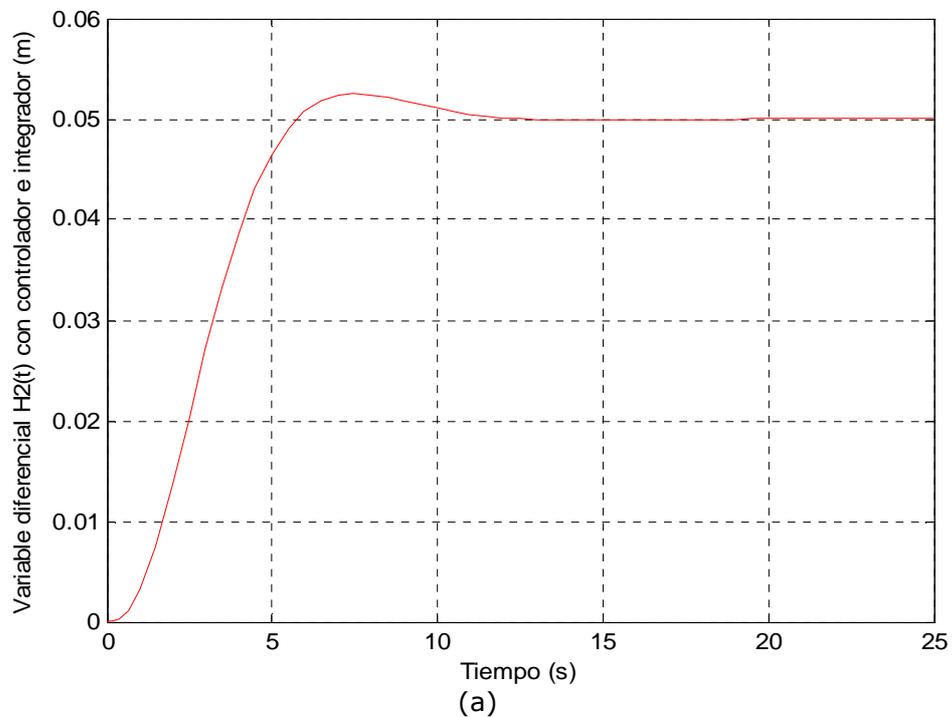


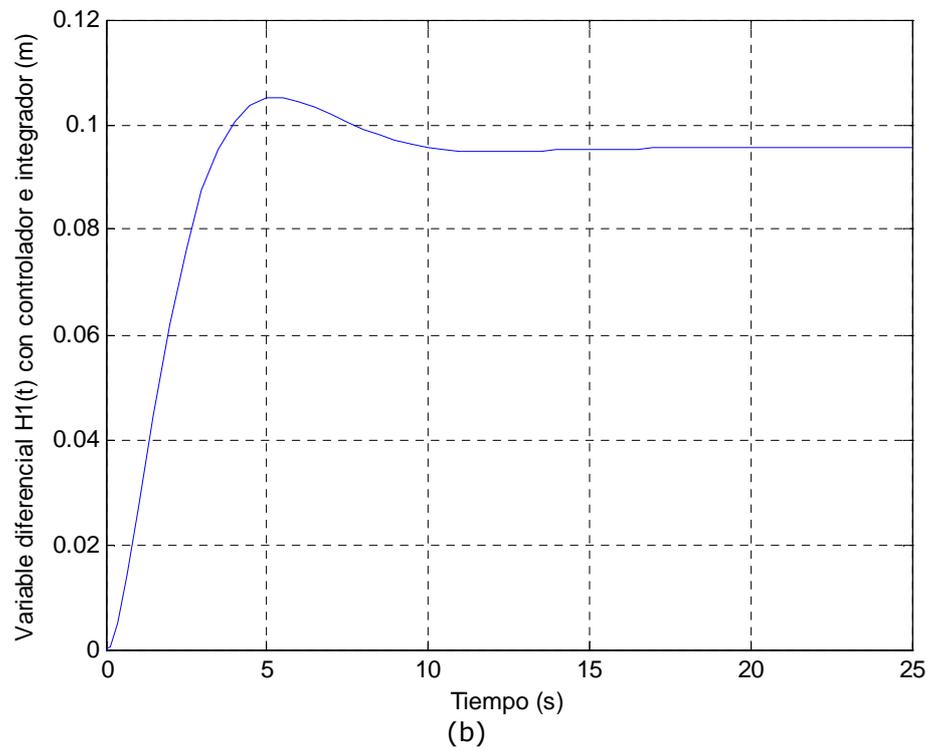
(c)

Fuente: Autor

En la figura (15a) se observa, que se cumplen en el límite tanto los requerimientos del overshoot como los del tiempo de establecimiento, excediéndose este último por cerca de 4 centésimas de segundo, lo que es apenas comprensible con los truncamientos y aproximaciones que se han dado en los procedimientos algebraicos realizados.

Figura 15. Variables de estado continuas, del sistema con controlador e integrador. (a) Salida (H2) en simulink de sistema de variables de estado linealizado con integrador. (b) Variable diferencial H1(t) del sistema con controlador e integrador.





Fuente: Autor

4.2.4 Diseño del Observador de Estado.¹⁰

Ahora se calcula el observador de estado L

$$|sI - (A - LC)| \quad (62)$$

Desarrollando $|sI - (A - LC)|$

$$\left| s * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 \\ 0.3644 & -0.6957 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L1 \\ L2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right|$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.3225 & 0.3225 - L1 \\ 0.3644 & -0.6957 - L2 \end{bmatrix} \right|$$

¹⁰ NISE N.S., Op. Cit.

$$\begin{bmatrix} s + 0.3225 & L1 - 0.3225 \\ -0.3644 & s + L2 + 0.6957 \end{bmatrix}$$

$$s^2 + (0.1.082 + L2) * s + (0.3225 * L2 + 0.3644 * L1 + .01068)$$

Se calcula una nueva ecuación característica solo con polos reales para mayor facilidad de construcción del observador, diez (10) veces más rápidos se tiene que

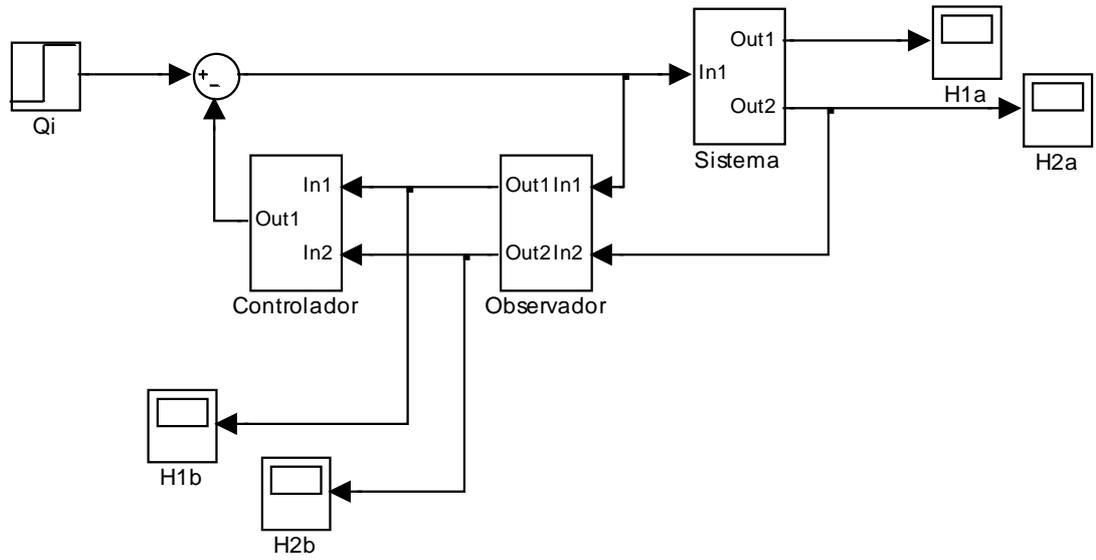
$$s^2 + 8.7 * s + 18.92$$

Ahora se utiliza, no el comando *acker*, sino el *place* ya que los polos de la ecuación característica no son repetidos, se tiene que

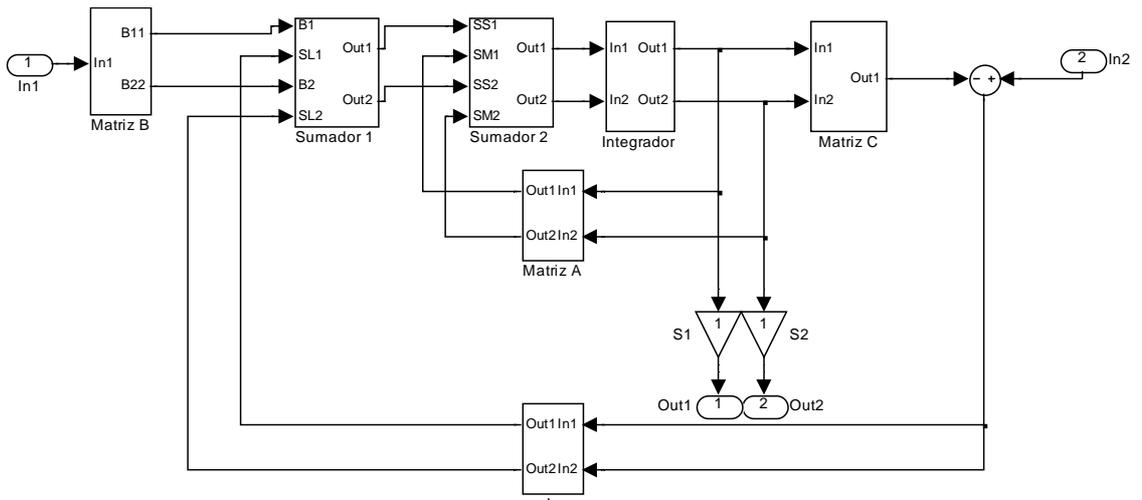
$$L = \begin{bmatrix} 44.8292 \\ 7.6818 \end{bmatrix}$$

A continuación se realiza la simulación del observador de estado con el respectivo controlador pero sin un integrador, que lleve la salida a seguir la entrada. Por lo tanto, en ésta simulación se obtienen los mismos resultados de la figura (13), solo que esta vez se introduce un observador de estado. Este último se utiliza en los sistemas, para poder para visualizar las variables de estado, en este caso se permitió al sistema tener discriminadas las dos variables que se denominaron H1a y H2a, para compararlas con las dos variables de estado a la salida del observador de estado, que se denominaron H1b y H2b. Obviamente las variables H2a y H2b son idénticas, ocurre lo mismo con H1a y H2b.

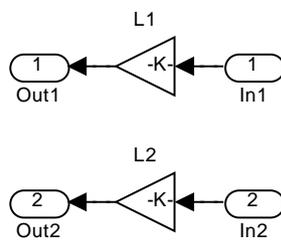
Figura 16. Sistema en variables de estado, con controlador y observador continuos. (a) Esquema en simulink del sistema de variables de estado linealizado con observador. (b) Esquema en simulink del observador de estado. (c) Esquema en simulink de las ganancias del observador. (d) Variable H2(t) en variables de estado mediante el observador de estado. (e) Variable H1(t) en variables de estado mediante el observador de estado.



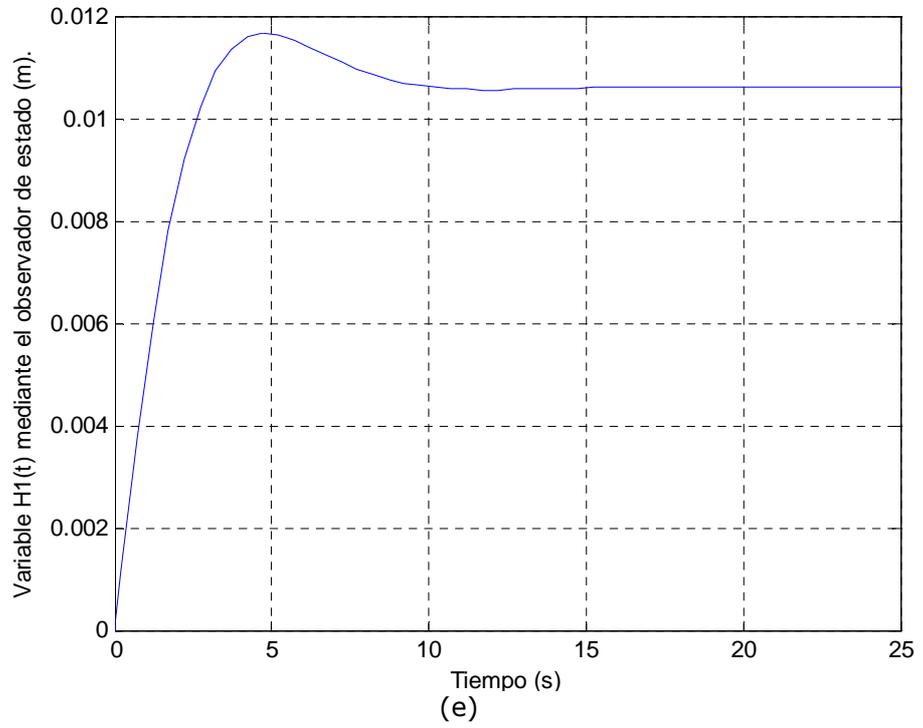
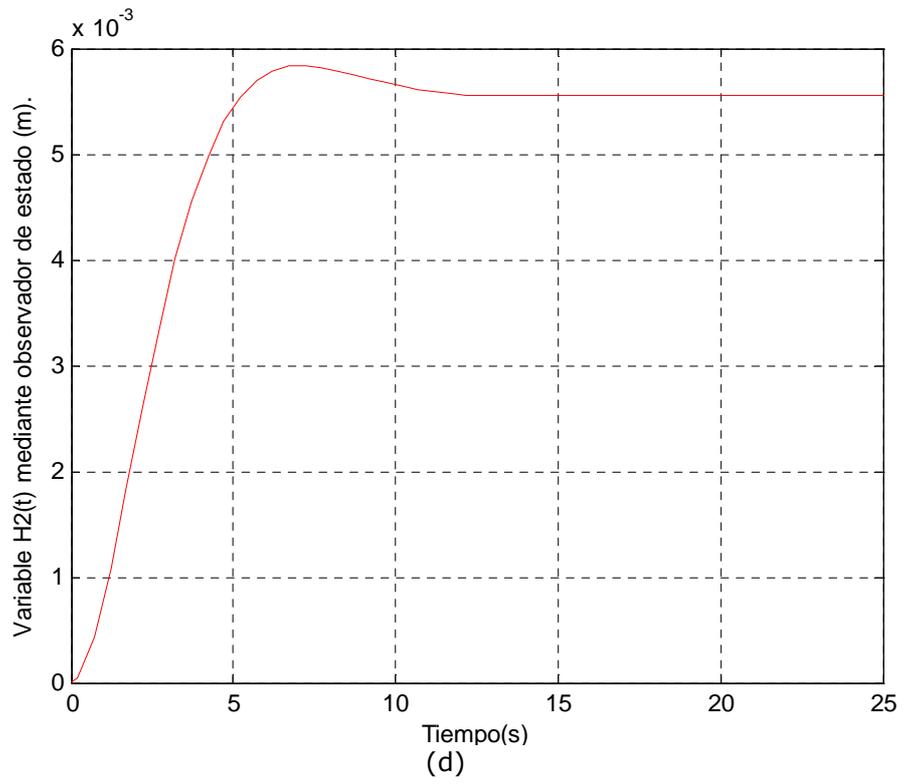
(a)



(b)



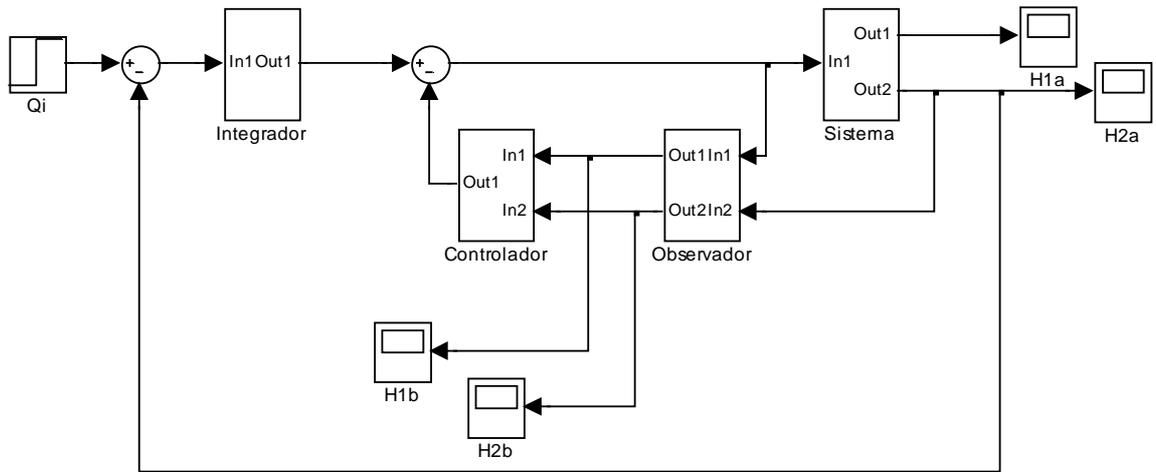
(c)



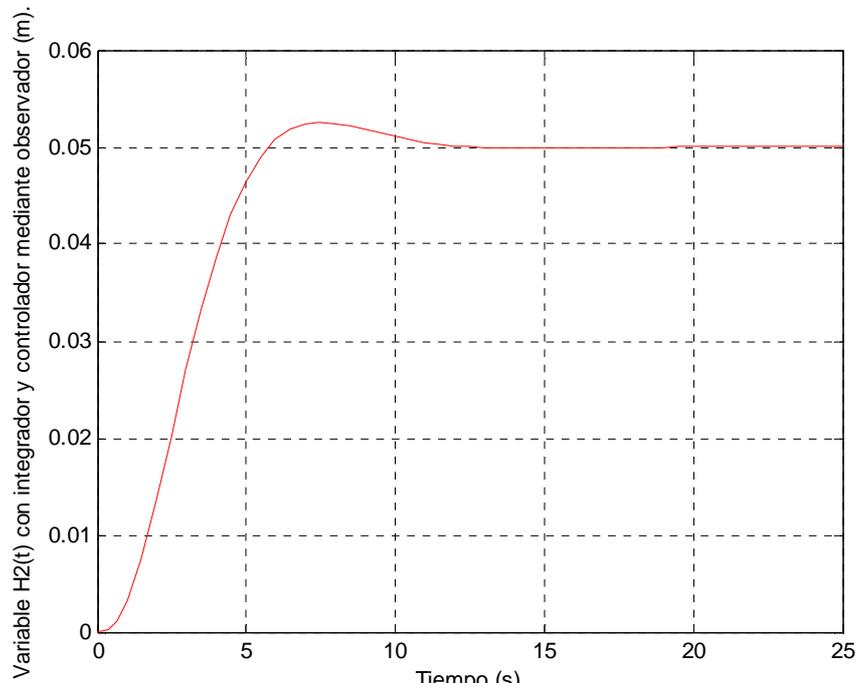
Fuente: Autor

4.2.5 Observador de Estado y controlador e integrador. A continuación se realiza la simulación en simulink del observador de estado con integrador.

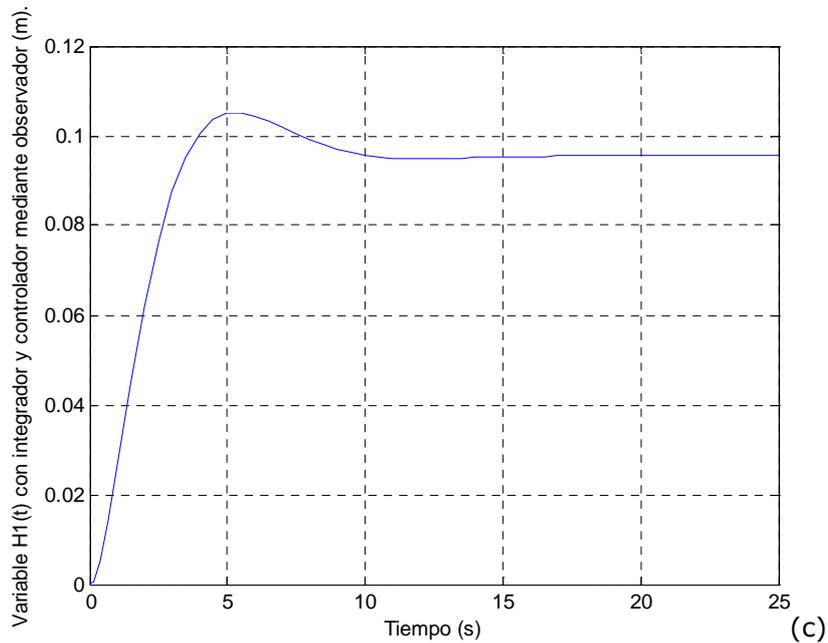
Figura 17. Sistema en variables de estado, con observador e integrador continuos. (a) Esquema en simulink del sistema de variables de estado con observador e integrador. (b) Variable diferencial $H2(t)$ con integrador y controlador obtenida mediante el observador de estado. (c) Variable diferencial $H2(t)$ con integrador y controlador obtenida mediante el observador de estado.



(a)



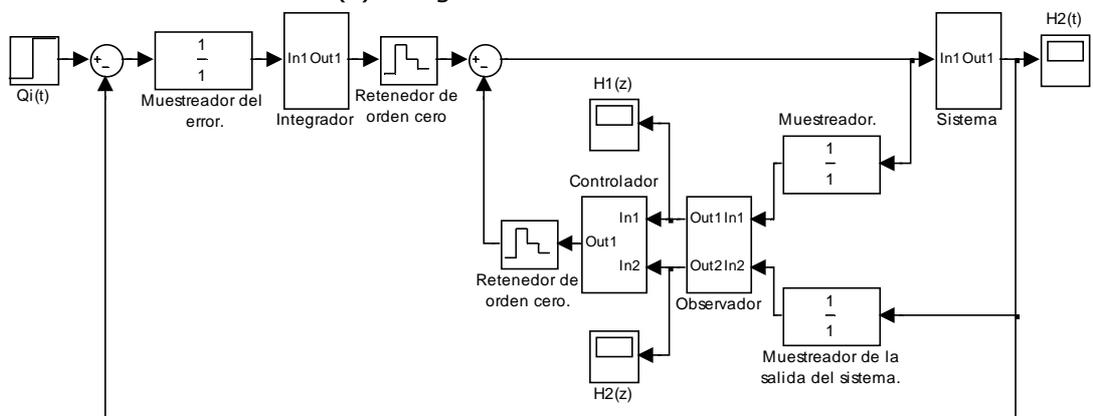
(b)



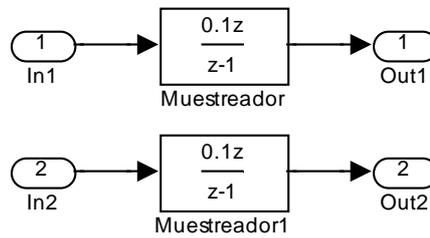
Fuente: Autor

4.2.6 Observador de Estado e integrador discretizados y controlador. A continuación se realiza la simulación en simulink del observador de estado discretizado y controlador con acción integral. Donde la salida $H2(t)$ es la variable de estado que se ha elegido como salida del sistema, la variable discreta $H1(z)$ que se obtiene mediante el observador, y la variable $H2(z)$ la cual también como se aprecia en la figura (18a), se obtiene del observador cuyos integradores han sido discretizados.

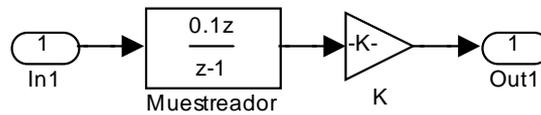
Figura 18. Sistema en variables de estado con controlador, integrador y observador discretos. (a) Sistema con variables de estado discretas. (b) Integrador discretizado de las señales del observador. (c) Integrador discretizado del sistema.



(a)



(b)



(c)

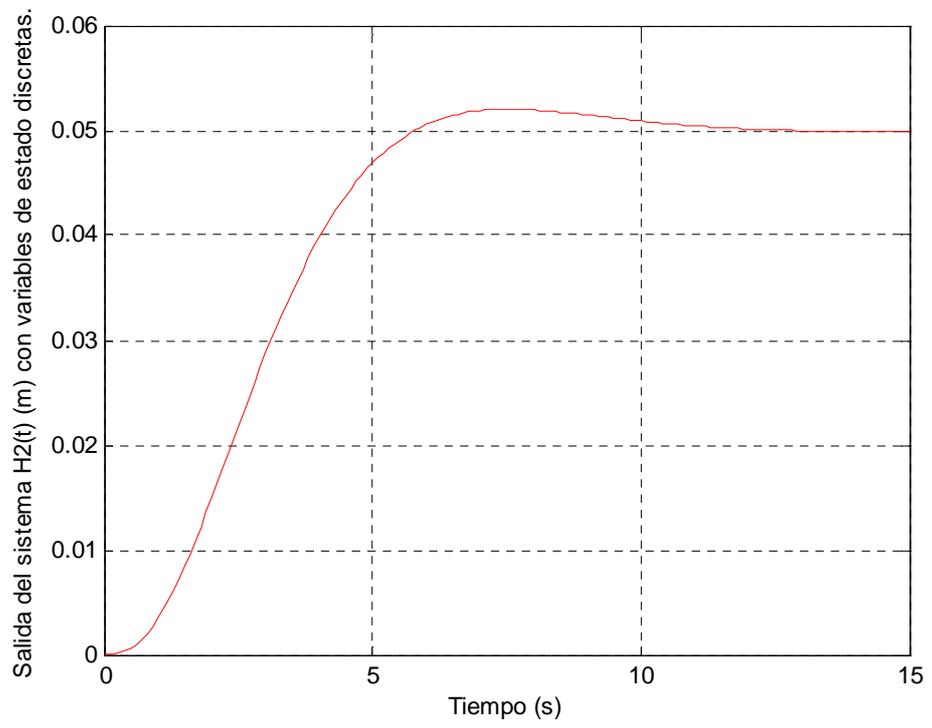
Fuente: Autor

En la figura (19) se muestran los comportamientos de las variables que han sido obtenidas de los esquemas. Aunque para el caso de la variable $H1(t)$ no siempre pueda ser posible captarla sin la ayuda de un observador de estado, como sucedió en este caso.

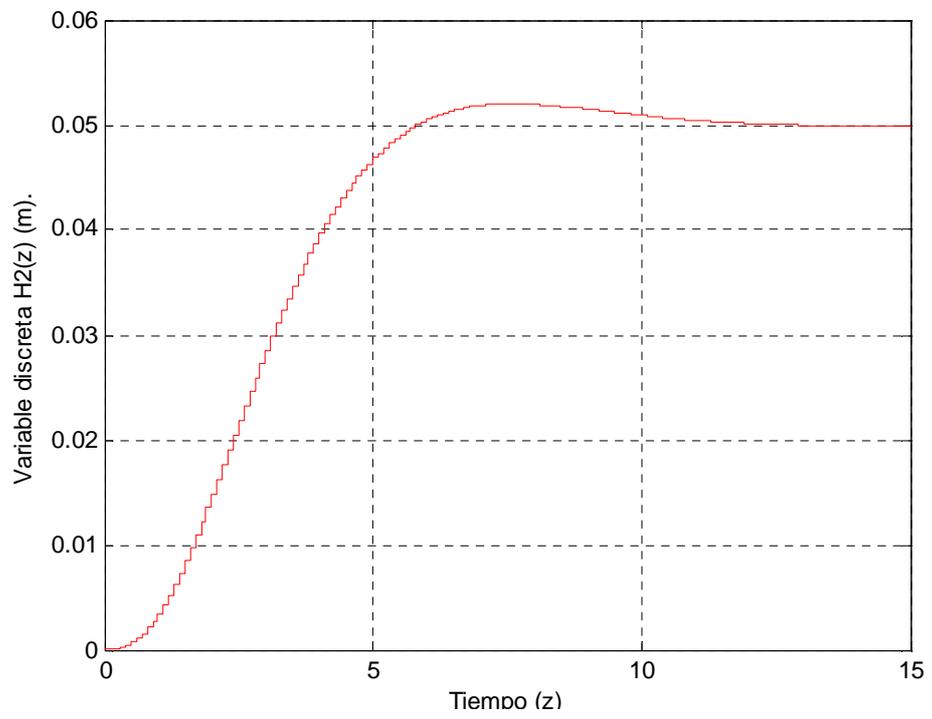
De todos modos, tanto en el caso de $H1(t)$ como en el caso de $H2(t)$, se observa que las variables de estado discretas $H1(z)$ y $H2(z)$, que permitió captar el observador no distan mucho en su comportamiento, del comportamiento las variables de estado del sistema continuo.

Seguidamente se presentan las gráficas del esquema del sistema con ruido blanco agregado (del mismo tipo, frecuencia y magnitud del análisis clásico) y la respuesta del mismo la cual tiene variaciones del 0.2%, lo que muestra que el controlador le suministra gran estabilidad al sistema.

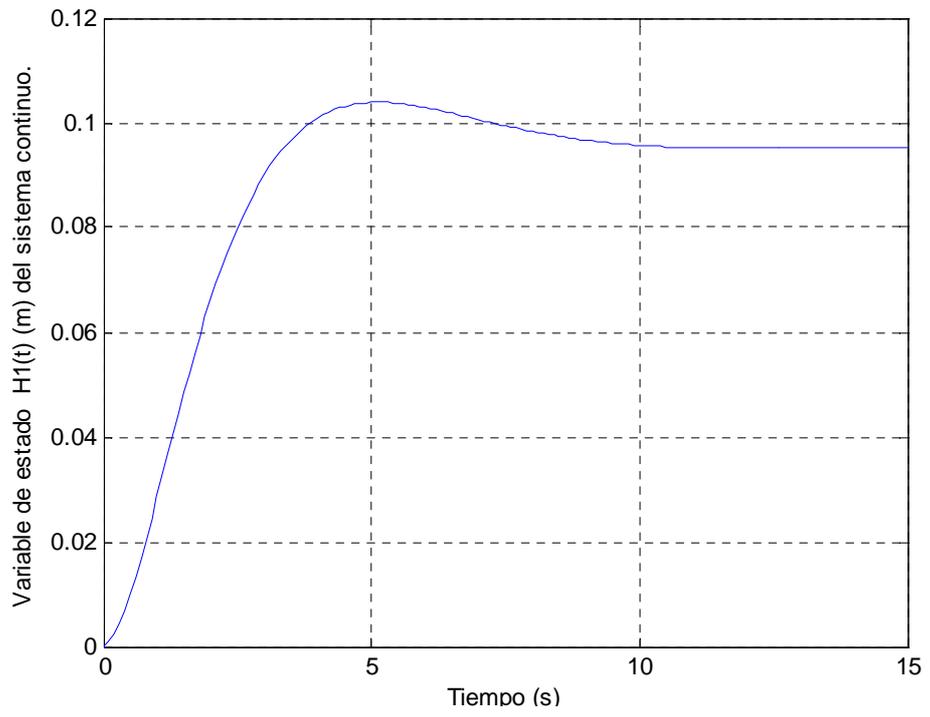
Figura 19. Variables de estado, continuas y discretas. (a) Salida $H2(t)$ del sistema. (b) Variable de estado $H2(z)$ discreta. (c) Variable de estado $H1(t)$ obtenida al interior del sistema continuo. (d) Variable de estado $H1(z)$ discreta. (e) Sistema con variable de estado $H1(t)$.



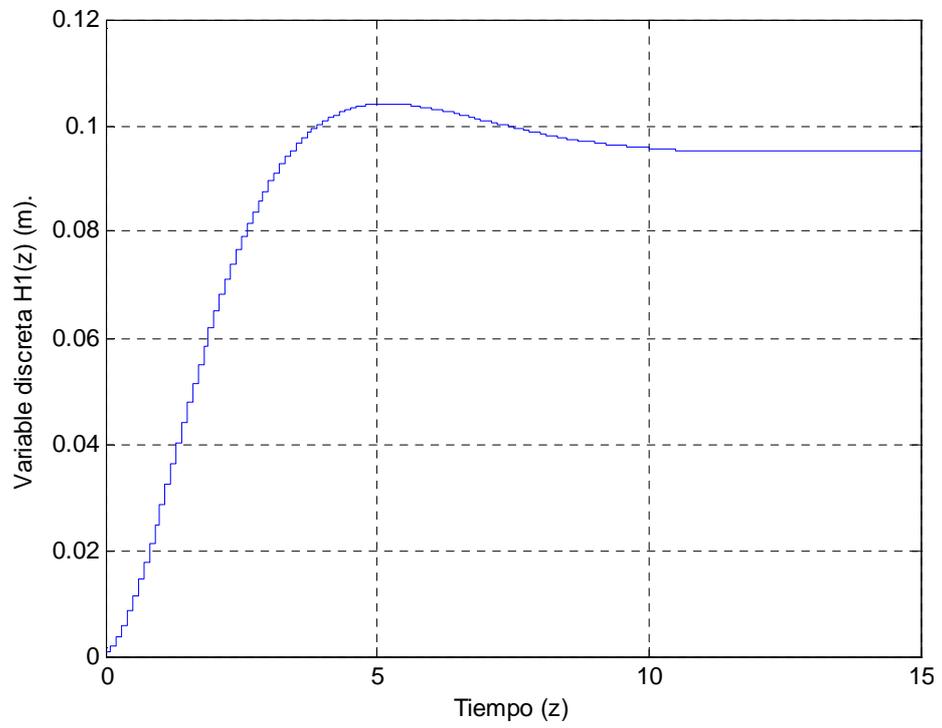
(a)



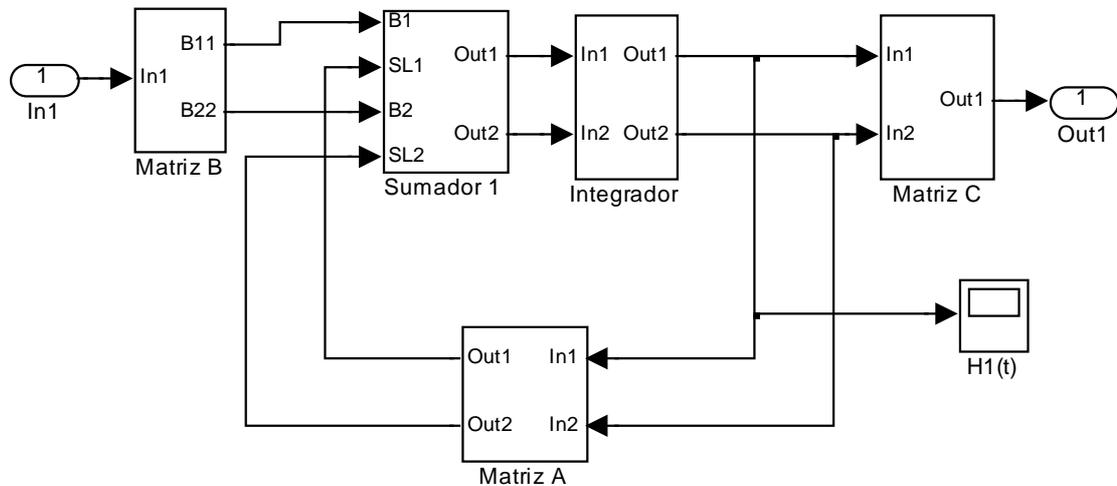
(b)



(c)



(d)



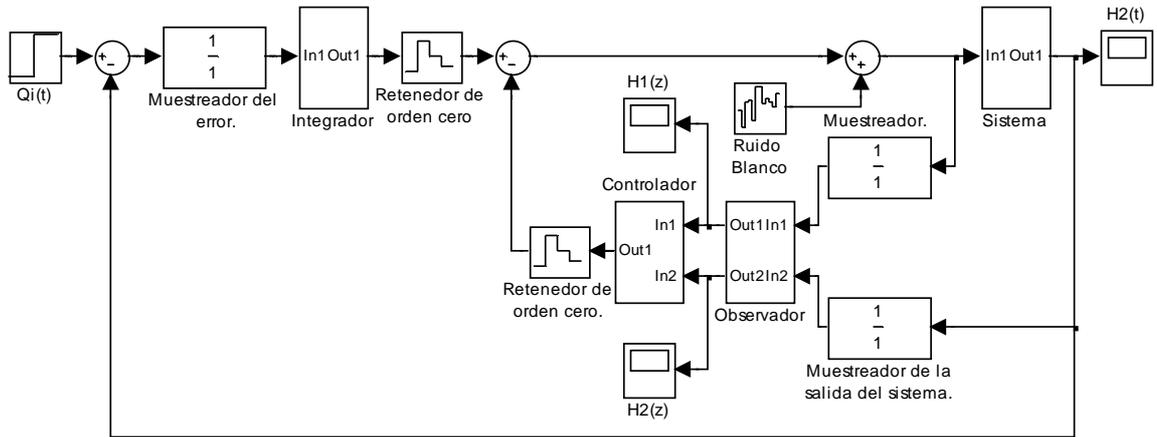
(e)

Fuente: Autor

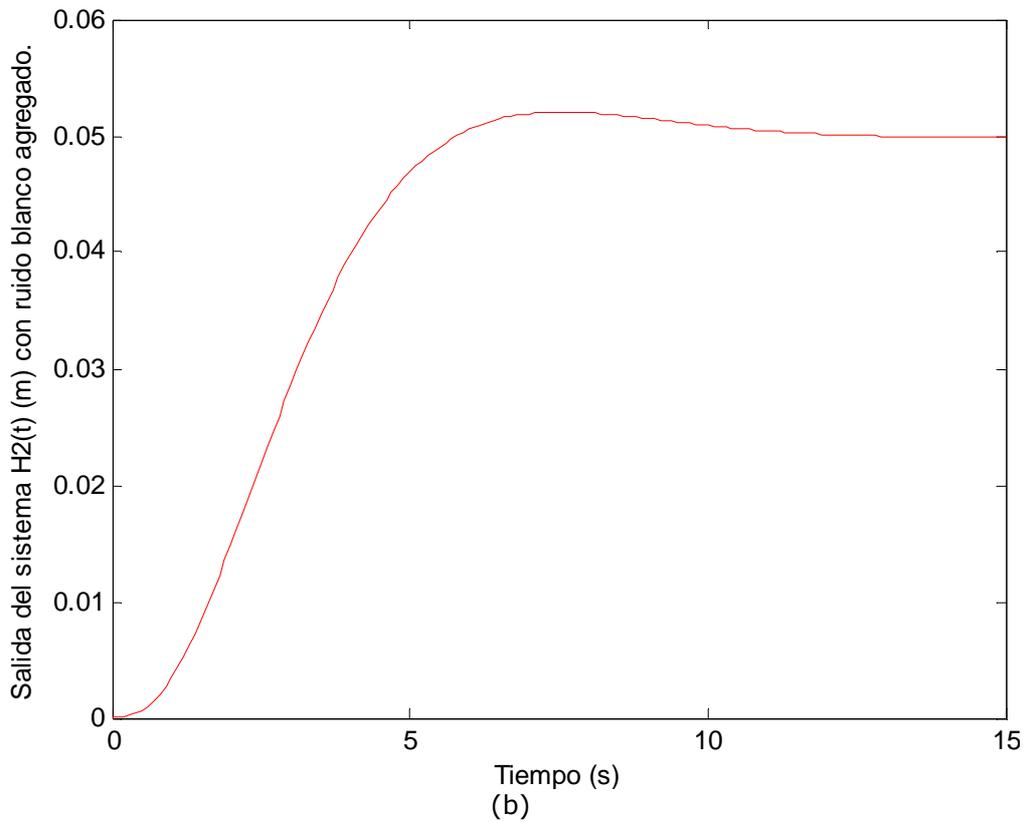
La figura (20a) muestra el sistema con controlador, además del observador e integrador de estado discretos, a través del método de diferencia atrás, así como también los retenedores de orden cero para transformar en señales continuas las señales discretas que posee el sistema. Además se ha agregado ruido blanco de la misma potencia y frecuencia que el agregado en el análisis clásico, en un punto que se pudiera considerar equivalente, pues está a la entrada del sistema, para de esta forma, poder comparar la robustez del controlador obtenido en ambos análisis para el caso de la salida $H_2(t)$.

En la figura (20b) se observa la salida $H_2(t)$ del sistema, en donde se comprueba la robustez del controlador obtenido a través del análisis en variables de estado, cuando se ha agregado ruido blanco (de una frecuencia igual a la utilizada en la discretización del integrador y observador de estado), dado que los cambios en la salida del sistema son casi imperceptibles. Esto último se pudo afirmar ya que su valor final solo tiene valores que difieren como máximo en un 0.2%.

Figura 20. Sistema en variables de estado con controlador, ruido agregado, integrador y observador discretos. (a) Sistema en variables de estado discretas, con controlador, observador e integrador y con ruido blanco agregado. (b) Salida del sistema en variables de estado discretizado, con controlador, observador e integrador y con ruido blanco agregado.



(a)



Fuente: Autor

4.3 ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE LAS DOS (2) TÉCNICAS DE DISEÑO: CLÁSICA Y DE VARIABLES DE ESTADO

- La técnica de variables de estado permite, que con solo ganancias e integradores se pueda llegar a una solución óptima, aunque se necesite realizar una cantidad de cálculos mayor a la requerida con el análisis clásico, para con ello poder hallar el observador y poder tener todas las variables de estado discriminadas a la entrada del controlador a diferencia del análisis clásico que solo manipula la señal de error.
- Cuando se calculan mediante el método clásico los controladores de las variables que hay en el sistema, se obtienen controladores no tan eficientes respecto de la realidad, debido a que con el análisis clásico se puede llegar a calcular controladores que lleven a algunas variables, a estados no deseados, en cuanto que no sea necesario llevarlas a comportamientos cercanos a el comportamiento que debe tener la variable de salida, la cual si debe tener un comportamiento cercano al de la de entrada del sistema.
- En este estudio de caso, mientras que el sistema en el análisis clásico obtiene una señal la cual tiene integrado todo el error, en el sistema de variables de estado, aunque también se integra todo el error de la salida comparada con la entrada, posteriormente se resta parte de ese error (aunque no integrado, sino afectado en su magnitud por el controlador), en el punto de salida del controlador del sistema.
- Se puede afirmar que los controladores obtenidos por ambos métodos fueron muy robustos, mas sin embargo el controlador obtenido con variables de estado, permitió que el sistema fuera más robusto, que con el controlador obtenido a través del método clásico, en una proporción de cinco (5) a uno (1), evidenciando las ventajas del análisis en variables de estado.
- Para este análisis en particular, los controladores obtenidos a través del análisis clásico pueden llevarse a formas muy óptimas, mas sin embargo cuando el sistema tiene más de una variable involucrada y se desea conocer por alguna circunstancia, el método de variables de estado facilita en gran manera este proceso, cumpliendo las especificaciones, aunque sus controladores calculados, no lleguen a ser tan óptimos como con el análisis clásico.

- También debe anotarse que a través del análisis en variables de estado no es necesario la implementación de compensadores que permitan el establecimiento de ceros, dado solo es necesario la implementación de integradores y ganancias.
- Puede observarse que en el análisis a través de variables de estado el número de muestreadores se triplica y el número de retenedores se duplica, con respecto del método de análisis clásico.

CONCLUSIONES

- Se reitera con este trabajo una vez más, la no linealidad de procesos reales y el hecho de que los procesos deben cambiar los valores de sus controladores, cada vez que se cambia de punto de operación del proceso.
- Una manera eficiente corroborar el funcionamiento de un sistema alrededor de un punto de operación, es mediante el establecimiento de variables de desviación.
- En este proceso se pudieron establecer controladores, que permiten que las variables controladas del proceso cumplan con los requerimientos del sistema, que por ejemplo prácticamente no presenten overshoot, que se cumplan holgadamente los tiempos de establecimiento.
- Para este sistema de ejemplo, en particular que no involucra variación de temperatura, ni cambios en las cualidades físicas del líquido, ni variación parcial en la apertura de las válvulas, ni cambios en los diámetros de los tanques, se da, como era de esperarse, un comportamiento similar aunque no indistinto, en las dinámicas de orden diferencial, cuando se realizan obviamente, variaciones diferenciales en el flujo de entrada.
- La técnica de variables de estado resuelve la desventaja del método clásico, respecto del cálculo de compensadores variable por variable, cuando se calculan de esta manera, todos ellos hacen que dichas variables tiendan a seguir la entrada, lo cual en modo alguno se aleja de la realidad de alguna manera, ya que las variables internas de un sistema tienen su propio comportamiento y no siempre deben seguir la entrada con la precisión que lo debe hacer la salida del sistema.
- La técnica de variables de estado permite el hecho de que solo con ganancias e integradores, se pueda tener un conocimiento del comportamiento de las variables de estado y que solo con ganancias, se pueda controlar el comportamiento del sistema, aunque respecto de las magnitud de este comportamiento no sea el deseable, pues como es obvio se necesita del integrador para alcanzar ese objetivo.

BIBLIOGRAFÍA

CORRIPIO C.A., SMITH A.B. Control Automático de Procesos. Teoría y Práctica. Primera Edición. Editorial Limusa. ISBN 968-18-3791-6. 1991.

KUO B.C. Sistemas de Control Automático. Séptima Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN 968-880-723-0. 1996.

LEWIS P.H., YANG C. Sistemas de Control en Ingeniería. Primera Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN 978-84-8322-124-2. Año 1999.

NISE N.S. Control Systems Engineering. Quinta Edición. Editorial John & Sons. ISBN 978-0-471-79475-2. 2008.

OGATA K. Ingeniería de Control Moderna. Tercera Edición. Editorial Prentice Hall. ISBN 970-17-0048-1. 1998.