

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE ROBOT PARALELO 3RRR

HÉCTOR FRANCISCO HOYOS DÍAZ

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERIAS Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE INGENIERIA MECANICA
MONTERIA-CORDOBA**

2020

MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE ROBOT PARALELO 3RRR

HÉCTOR FRANCISCO HOYOS DÍAZ

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO
DE INGENIERO MECANICO**


Asesores:

**RICHARD ADOLFO CRAWFORD VIDAL
INGENIERO ELECTRONICO**

**CLAUDIA MARCELA PEREZ MADRID
INGENIERA MECANICA**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA
ESCUELA DE INGENIERIAS Y ARQUITECTURA
PROGRAMA DE INGENIERIA MECANICA
MONTERIA-CORDOBA**

2020

 Universidad Pontificia Bolivariana	PRESENTACIÓN INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO	VICERRECTORIA ACADÉMICA FO-IP-007
---	---	---

Este formato aplica para las siguientes modalidades de **trabajo** de grado: trabajo de investigación, monografía y práctica empresarial.

DOCUMENTACION REQUERIDA

- Aval firmado por el director del trabajo
- El proyecto en formato electrónico, con la siguiente información:

INFORMACION GENERAL (máximo dos páginas)

Título del trabajo de grado	Modelamiento y Simulación de Robot Paralelo 3RRR
Estudiantes de Trabajo de Grado	Héctor Francisco Hoyos Díaz
Director(es):	Richard Adolfo Crawford Vidal Claudia Marcela Perez Madrid
Unidad académica	
Empresa donde realizó el trabajo	
Fecha de inicio	
Fecha de finalización	
Costo total del proyecto (incluyendo descargas – pago de personal -).	
Montos de contrapartida (Entidad o dependencia que cofinanciación).	
Línea de trabajo o área del conocimiento en la cual se inscribió el trabajo	Robótica

PRESENTACIÓN DE INFORME FINAL – TRABAJOS DE GRADO

Cada ejemplar de trabajo de grado deberá incluir, como uno de sus preliminares, la siguiente nota: “Declaro que este trabajo de grado no ha sido presentado para optar a un título, ya sea en igual forma o variaciones, en esta o en otra universidad” (Art.82.Acuerdo No.116 CD- de Mayo 26 de 2000)

DEDICATORIAS

CONTENIDO

RESUMEN	6
ABSTRACT	7
1. INTRODUCCIÓN	8
2. ESTADO DEL ARTE	11
3. MODELAMIENTO Y SIMULACION.	15
3.1. Análisis cinemático de las ecuaciones relacionadas con la posición, velocidad y aceleración del robot en la trayectoria deseada.	15
3.1.1. Trayectoria C ₁ : Parametrización.....	17
3.1.2. Comportamiento del ángulo θ_1	20
3.1.3. Comportamiento del ángulo θ_2	23
3.1.4. Comportamiento del Angulo θ_7	24
3.1.5. Dinámica Inversa.....	24
3.2. Diagrama de Modelación y Simulación	27
RESULTADOS Y DISCUSIÓN	29
CONCLUSIONES	37
4. BIBLIOGRAFÍA	40
5. ANEXOS	42

RESUMEN

El proyecto consistió en modelar y simular un robot paralelo 3RRR que sigue trayectorias paramétricas, en función del tiempo, obtenidas por splines cúbicos al definir puntos por los cuales desea que pase el efector final. Se esquematizó el comportamiento de la posición de los elementos del manipulador, así como las curvas que definen el comportamiento del torque a realizar por los motores en las juntas actuadas. La esquematización del comportamiento de estas variables se pudo graficar gracias a las ecuaciones obtenidas del desarrollo de la cinemática inversa y dinámica inversa aplicada al robot paralelo 3RRR.

En este proyecto no se desarrolló el sistema de control para el robot paralelo, solo se brindó gran cantidad de puntos de las funciones de par-motor, a los cuales se deben hacer seguimiento, para lograr pasar por ciertos puntos a una aceleración específica tanto en el x como en el eje y deseadas.

A partir del modelo teórico y las simulaciones obtenidas de los diferentes códigos desarrollados, se definieron las dimensiones de cada uno de los eslabones; Así como de la plataforma. Cabe resaltar que el robot solo podrá realizar movimientos en el plano, no se modelo para realizar movimientos en el espacio.

ABSTRACT

1. INTRODUCCIÓN

La primera revolución industrial se basó en grandes cambios a nivel social y económico, los cuales permitieron pasar de una economía basada en la agricultura a la invención y adopción de maquinaria para la consolidación de la industria. Se resalta que, aunque estos procesos siguen vigentes, el avance de la tecnología ha hecho que se establezcan nuevos retos, en dónde las TIC, la biotecnología y los algoritmos se están posicionando cada vez con mayor fuerza, razón por la cual, ya no se habla de una primera sino de una cuarta revolución industrial (Perasso, 2016).

Según Schwab (2016) "Estamos al borde de una revolución tecnológica que modificará fundamentalmente la forma en que vivimos, trabajamos y nos relacionamos; en su escala, alcance y complejidad, la transformación será distinta a cualquier cosa que el género humano haya experimentado antes". Es decir, esta revolución planteará tantos retos a la población en todos los aspectos del desarrollo social, económico, ambiental y de innovación tecnológica, que permitirá la industrialización de nuevos procesos. Por ello, es de vital importancia estar en disposición de adoptar estos cambios y evolucionar con ellos.

Cabe resaltar que, en la actualidad un gran porcentaje de las empresas industriales implementan en el desarrollo de sus operaciones los robots de tipo serial. No obstante, esta tendencia está variando y los manipuladores paralelos han adquirido mayor importancia en el mercado gracias a sus características y propiedades particulares, tales como mayor velocidad y la capacidad de soportar cargas superiores a su peso debido a la cantidad de puntos de apoyo (Tovar & Torres, 2015)

Por su parte, Díaz, Quintero, Mejía, Holguin, Herrera, Mesa & Daraviña (2018) aseguran que "la principal ventaja de los robots paralelos viene dada por la capacidad de distribuir las cargas aplicadas sobre el elemento terminal entre las piernas o cadenas cinemáticas abiertas que unen la plataforma móvil a la plataforma

base”, donde, las cadenas cinemáticas o lazos cerrados suministran una mayor rigidez al robot. No obstante, es limitado al espacio de trabajo por las restricciones que se tienen en cuenta en su configuración, aunque, esto no se considera un limitante para su aplicación en el sector industrial.

De este modo, resulta fundamental que los estudiantes de facultades como Ingeniería mecánica, desarrollen habilidades que le permitan adquirir conocimientos respecto a temas como la inteligencia artificial, la biotecnología y la robótica; de tal forma que, se promueva la cooperación para la creación de máquinas y elementos innovadores como los robots paralelos, los cuales necesitan la contribución de áreas como la electrónica para su diseño y elaboración (Ojeda, 2018). Además, los robots paralelos y en serie han sido ampliamente investigados, por lo cual, se cuenta con bases teóricas para sustentar diversos diseños. Representando una oportunidad para ampliar los temas desarrollados en el área investigativa de la Universidad, debido a que no hay muchos trabajos relacionados con robótica en la facultad.

Se resalta que la robótica influye en los avances tecnológicos de la humanidad, por ende, es vital desarrollar investigaciones que sirvan como referente bibliográfico para futuros proyectos que tengan como objetivo diseñar elementos robóticos que contribuyan al sector industrial del departamento de córdoba (Cusco & Quishpe, 2018).

Por ello, la Universidad Pontificia Bolivariana (Montería) desde la facultad de ingeniería mecánica orienta sus investigaciones al foco energías alternativas. Además, cuenta con maquinaria especializada de gasificación que facilita el proceso de investigación y que permite la integración de gran parte del conocimiento que se desarrolla a lo largo de la carrera universitaria de ingeniería mecánica, así como, enlazando otras áreas de estudio como lo es ingeniería electrónica (UPB, 2019).

Sin embargo, los inventarios de los laboratorios de ingeniería mecánica de la Universidad Pontificia Bolivariana (Montería) no cuentan con robots paralelos o en serie, que permitan a los estudiantes de la facultad de ingeniería hacer uso de los diversos conocimientos adquiridos relacionados con el control y diseño de maquinaria; de tal manera que, puedan refinar sus habilidades para diseñar y optimizar estos elementos. Lo cual representa una gran oportunidad para que la facultad adelante trabajos en un área poco explorada y con mucho potencial, especialmente con la facultad de Ingeniería Electrónica.

De acuerdo con lo anterior, este trabajo tiene como objetivo modelar y simular un robot paralelo 3RRR que pase por puntos específicos dentro del espacio de trabajo siguiendo una trayectoria que permita investigar el desarrollo y la implementación a diversas aceleraciones en los puntos de interés. Por lo cual, se pretende en primer lugar realizar el análisis cinemático que permita encontrar las ecuaciones relacionadas con la posición, velocidad y aceleración del robot para las trayectorias deseadas.

Luego, con el objetivo de crear el código del modelo dinámico para las trayectorias resultantes del desarrollo de los splines cubico por medio de Matlab, se definen las dimensiones de cada uno de los elementos del robot paralelo 3RRR, obteniendo las funciones del torque en cada uno de los actuadores y finalmente se implementa la simulación digital del robot 3RRR permitiendo la modificación específica de barras y ángulos.

Cabe resaltar que este trabajo está basado en técnicas de recolección de datos como la revisión documental y observación, donde, se recopila información objetiva centrada en ecuaciones y valores que han aportado diversos autores en artículos y libros, para abordar la temática y darle respuesta al problema establecido.

2. ESTADO DEL ARTE

MANIPULADOR PARALELO PLANO 3RRR-(RRR)_v CON ACTUACIÓN VIRTUAL INDIRECTA

Autor: Patricio Martínez Zamudio (2015)

Palabras Claves: Robots híbridos, robots paralelos, cadena virtual, cinemática.

En robots paralelos, la cinemática inversa consiste en encontrar las variables de las juntas activas y pasivas en función de las coordenadas del efector final del robot y puede ser utilizada para controlar su posición, mientras que, en la directa el problema es determinar la posición del efector final en función de las juntas activas. Por lo cual, esta investigación propone un método para obtener la representación cinemática, en el espacio de estados, de un robot paralelo 3RRR-(RRR)_v, para actuarlo indirectamente por medio de su manipulador virtual (RRR)_v, el cual sigue una trayectoria predefinida.

Se resalta que, el proyecto presenta un enfoque novedoso para obtener el modelado de la cinemática diferencial de un robot manipulador paralelo 3RRR plano en función de una cadena virtual, presentando tanto la postura del robot como la cinemática diferencial de un manipulador 3RRR-(RRR)_v, la cadena virtual de un manipulador (RRR) y el modelo cinemático de un manipulador 3RRR-(RRR)_v.

De esta forma, se concluyó que el trabajo mostró un nuevo enfoque en el análisis de la cinemática de los robots manipuladores serie y paralelo, al utilizar, por un lado, sus modelos en variables de estado y, por el otro, en función de su cadena virtual, donde, esto último promete ser una herramienta novedosa para resolver manipuladores paralelos complejos, como el caso de robots manipuladores paralelos redundantes o híbridos. Por lo cual, este trabajo sirve como propuesta de un esquema de control para el manipulador.

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN BRAZO ROBÓTICO DE 4 GRADOS DE LIBERTAD PARA EL LABORATORIO DE CONTROL DE LA UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA.

Autor: Heller Farid Velásquez Flórez (2017)

Palabras claves: Cinemática, Manipulador, Robótica.

La investigación tiene como objetivo diseñar e implementar un software de control para un brazo robótico de 4 grados de libertad, con una interfaz de usuario asistida por computador cuya función sea la de ejercer un completo manejo sobre el prototipo. Por lo cual, se realizó un estudio documental de los modelos matemáticos más importantes referentes a la temática; así como un análisis cinemático. Además, se desarrolló una interfaz de usuario para la visualización de los movimientos del brazo robótico con respecto a su análisis matemático.

Los procesos que se realizaron el marco metodológico se basan en primer lugar en un análisis bibliográfico de antecedentes de Cinemática y Dinámica del Brazo Robótico de 4 GDL con el fin de determinar su comportamiento por medio de la cinemática directa, inversa, la planeación de las trayectorias. Del mismo modo, se implementó la modelación por medio de la herramienta Matlab junto con Matlab GUI y el Toolbox de Robótica, luego se desarrolló interfaz gráfica, donde, se delinearon cuatro secciones importantes y necesarias para el acople entre los cálculos matemáticos y el control del mecanismo, por lo cual, se diseñó el prototipo. Por último, se definieron los parámetros control PI, PD y PID, así como la caja de control donde se organizaron los dispositivos electrónicos.

Finalmente, se llegó a la conclusión de que el proyecto cumplió con los objetivos propuestos, es decir, habilitó un prototipo de brazo robótico de 4 grados de libertad del tipo antropomórfico que puede ser usado como herramienta de investigación y

aprendizaje para el estudio de la Robótica en la universidad pontificia bolivariana seccional Montería.

ROBOT PLANAR PARALELO RRR

Autores: Juan Diego Tovar & Yordy Harvey Torres (2015)

Palabras Claves: Robot Planar, robótica paralela, cadena cinemática, cinemática directa, cinemática inversa, análisis jacobiano, Matlab, Arduino.

La presente investigación tuvo con objetivo general diseñar y construir un robot paralelo Planar de 3 grados de libertad, dados por 3 servomotores que generan articulaciones rotacionales. De tal forma que, prototipo supla necesidades didácticas e industriales dependiendo de la aplicación que se le dé, además de ser capaz de llegar a un punto arbitrario escogido por el usuario dentro de su área de trabajo.

Por lo cual, en primer lugar se resolvieron las ecuaciones de cinemática directa e inversa, se compararon distintos espacios de trabajo del prototipo con el fin de que los estudiantes puedan conocer ventajas y desventajas de los robots paralelos planares. Luego, se desarrolló el modelamiento matemático para el control del movimiento del robot, se plasmó el diseño mecánico del prototipo, se calculó la posición y orientación de la plataforma móvil con base a datos provistos por el usuario a través de Matlab obteniendo un grado de precisión mayor o igual al 85%. Por último, se dio a conocer las aplicaciones y limitaciones del prototipo y se determinó la diferencia de costos en fabricación del prototipo y producción, comparándolos con robots existentes en el mercado.

Finalmente, concluyeron afirmando que las ecuaciones cinemáticas directas permiten calcular las coordenadas y la orientación del efector final en función de las longitudes de los eslabones y de los ángulos que estos forman en sus tres

articulaciones rotacionales. Asimismo, determinaron que la parametrización de las ecuaciones permitió un rápido análisis y comparación del comportamiento del prototipo si las variables requeridas para el cálculo variaban, por último, se pudo determinar que las dimensiones de los eslabones y de la plataforma móvil son adecuados, y presentan un buen resultado para generar un rendimiento efectivo del sistema, de igual manera se pudo establecer que el material que se escogió en primera instancia como tentativo para la fabricación del prototipo que fue el acrílico presenta unas especificaciones técnicas que garantizan una excelente resistencia para la aplicación diseñada.

3. MODELAMIENTO Y SIMULACION.

3.1. Análisis cinemático de las ecuaciones relacionadas con la posición, velocidad y aceleración del robot en la trayectoria deseada.

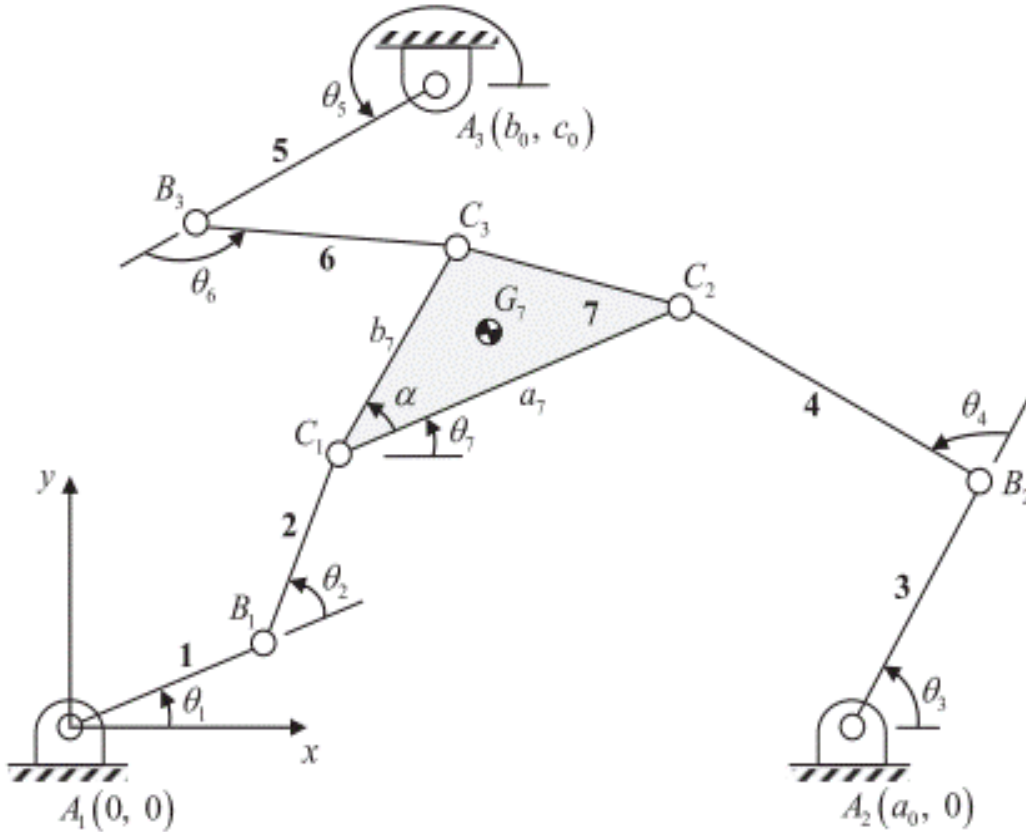
Los robots paralelos son robots manipuladores en donde el efector final o plataforma está unida a dos o más cadenas cerradas que trabajan en paralelo, tienen mayor precisión y son más rápidos que brazos robóticos en serie clásicos, además de soportar mayores cargas (Peidró, Reinoso, Gil, Marín, & Payá, 2016). No obstante, el espacio de trabajo en estos robots es menor en comparación con los robots en serie, y adoptan configuraciones singulares que generan problemas para realizar el control y en general son más difíciles de analizar, lo que hace necesario crear herramientas que permitan su simulación volviéndose esenciales para poder entender su comportamiento.

El análisis posicional de mecanismos espaciales con múltiples grados de libertad conocidos como manipuladores paralelos son clasificados como planares, esféricos y espaciales de acuerdo con las características de sus movimientos. Para el manipulador paralelo planar de 3 grados de libertad mostrado en la Gráfica 1, los tres pivotes A_1, A_2 y A_3 delimitan la geometría de una base fija, y los tres pivotes móviles C_1, C_2 y C_3 definen la geometría de una plataforma móvil. Cabe resaltar que, tres extremidades conectan la plataforma móvil en los puntos C_1, C_2 y C_3 a la base fija en los puntos A_1, A_2 y A_3 mediante revolutas, donde, cada articulación consiste en 2 eslabones conectados por una revoluta (Tsai, 1999).

A partir de la geometría del robot se desarrolla la cinemática inversa del robot paralelo 3RRR donde x_{G_7} (coordenada en x del punto G_7), y_{G_7} (coordenada en y del punto G_7) y θ_7 son dados y los ángulos $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ son hallados; paso necesario para calcular las funciones que muestran el comportamiento del torque en los pivotes A_1, A_2 y A_3 mediante la dinámica inversa plasmada en el ejemplo numérico de

Özdemir en el artículo “Removal of singularities in the inverse dynamics of parallel robots”

Gráfica 1. Manipulador Paralelo Planar 3RRR de 3 Grados de Libertad



Fuente: Tomado de “Removal of singularities in the inverse dynamics of parallel robots”

Por consiguiente, este trabajo tiene como objetivo modelar y simular un robot paralelo 3RRR sujeto a trayectorias específicas, ejecutadas por el punto G_7 , de tal forma que permita investigar el desarrollo y la implementación a velocidades y aceleraciones particulares en puntos de interés dentro del espacio de trabajo del robot. Por ello, se recurre a una revisión bibliográfica sobre el análisis cinemático y dinámico para encontrar las ecuaciones relacionadas.

Posteriormente, se determinaron los ángulos θ_1 y θ_2 resultantes del análisis cinemático por lazo cerrado de la cadena cinemática 1, así como sus respectivas derivadas de primer y segundo orden; las cuales son necesarias para realizar el cálculo de los torques en cada uno de los actuadores, por medio de la dinámica inversa. Igualmente, se aborda el comportamiento de la inclinación de la plataforma, θ_7 , y sus respectivas derivadas de primer y segundo orden.

Cabe resaltar que el cálculo de los demás ángulos θ_3 , θ_4 , θ_5 y θ_6 con sus respectivas derivadas de primer y segundo orden, serán halladas en los Anexos, al igual que dos códigos en Matlab. Estos códigos permiten visualizar el comportamiento de cada una de las partes del robot en el intervalo de tiempo estudiado, además de mostrar la curva del torque que debe ser ejecutado por cada actuador en un instante de tiempo dado.

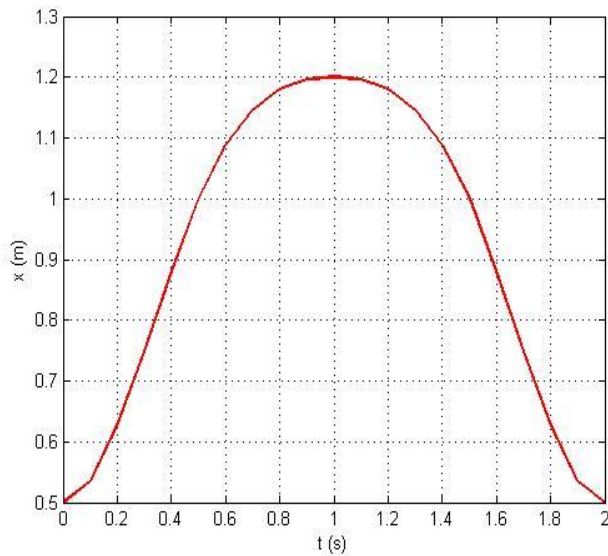
Para determinar la factibilidad de una trayectoria específica a efectuar por el punto G_7 del robot, se realiza la simulación de la posición de los elementos que lo conforman, los cuales, deben ejecutar la curva deseada.

3.1.1. Trayectoria G_7 : Parametrización

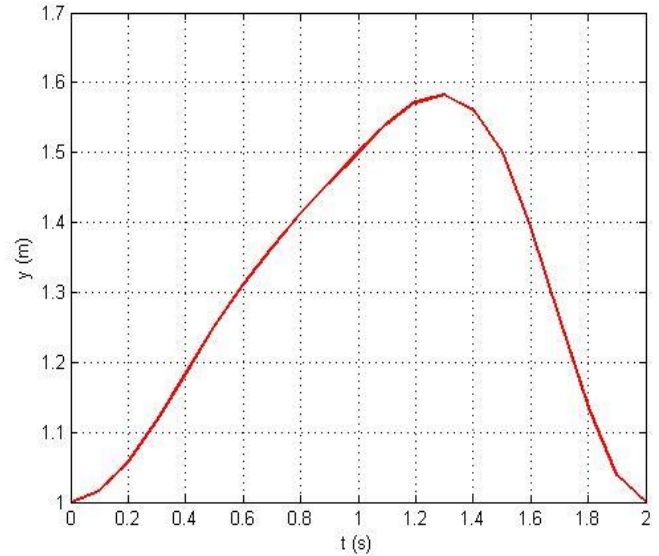
Para evidenciar la trayectoria del punto G_7 se usan ecuaciones paramétricas que definan el comportamiento en el eje x , x_{G_7} , y en el eje y , y_{G_7} , con respecto al tiempo en un intervalo deseado. De este modo, en las Gráficas 2 y 3 podemos observar las curvas que describen estas ecuaciones después de ser asignados los puntos por donde pasara el efector final.



Gráfica 2. Coordenadas de G_7 en el eje x en el intervalo de tiempo de interés

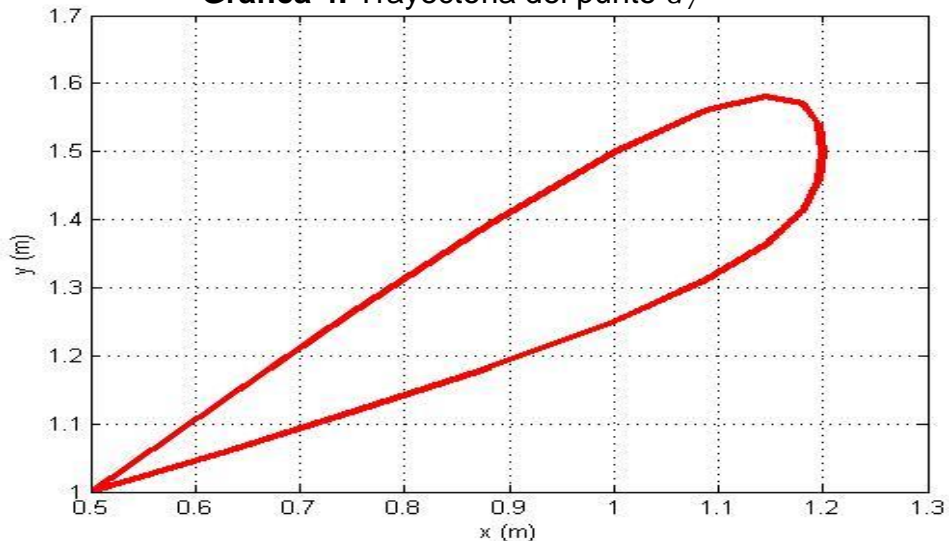


Gráfica 3. Coordenadas de G_7 en el eje y en el intervalo de tiempo de interés



Entonces el conjunto de puntos (x_{G_7}, y_{G_7}) definido por estas ecuaciones es la curva observada en la gráfica 4

Gráfica 4. Trayectoria del punto G_7



Cabe resaltar que, las derivadas de las ecuaciones paramétricas permitirán conocer la velocidad y aceleración en cada uno de los puntos de la trayectoria, tanto en el eje x como en el eje y , sirviendo como base para calcular las velocidades y aceleraciones resultantes en cada instante de tiempo.

De modo que, la velocidad en el eje x está dada por x'_{G_7} y en el eje y por y'_{G_7} . En el caso de la componente x de la aceleración se usa x''_{G_7} y y''_{G_7} para la componente y .

x_{G_7} y y_{G_7} son funciones a trozos, las cuales se obtienen aplicando splines cúbicos partiendo de las posiciones en que se encuentre el efector final en el eje x y en el eje y , en instantes de tiempo específicos desde el inicio del movimiento.

3.1.2. Trayectoria C₁: Parametrización

En el análisis cinemático encontramos que los ángulos θ_1 a θ_6 dependen del comportamiento del punto C_1 y del ángulo de la plataforma θ_7 , pero nuestro efector final está ubicado en G_7 , por lo tanto, C_1 debe estar en función del comportamiento de G_7 . Según Rendon (2012) las componentes en x y y de C_1 en función de G_7 vienen dadas por:

$$x_{c_1} = x_{G_7} - \frac{a_7}{3} \left[c\theta_7 + c\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$y_{c_1} = y_{G_7} - \frac{a_7}{3} \left[s\theta_7 + s\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

Y sus primeras y segundas derivadas son:

$$x'_{c_1} = x'_{G_7} + \frac{a_7}{3} \left[\theta'_7 s\theta_7 + \theta'_7 s\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$y'_{c_1} = y'_{G_7} - \frac{a_7}{3} \left[\theta'_7 c\theta_7 + \theta'_7 c\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$x''_{c_1} = x''_{G_7} + \frac{a_7}{3} \left[\theta''_7 s\theta_7 + (\theta'_7)^2 c\theta_7 + \theta''_7 s\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) + (\theta'_7)^2 c\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

$$y''_{c_1} = y''_{G_7} - \frac{a_7}{3} \left[\theta''_7 c\theta_7 - (\theta'_7)^2 s\theta_7 + \theta''_7 c\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) - (\theta'_7)^2 s\left(\theta_7 + \frac{\pi}{3}\right) \right]$$

3.1.3. Comportamiento del ángulo θ_1

Aplicando el método de lazo vectorial para la cadena cerrada 1 se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} x_{c_1} &= x_{A_1} + a_1 c\theta_1 + a_2 c(\theta_1 + \theta_2) \\ y_{c_1} &= y_{A_1} + a_1 s\theta_1 + a_2 s(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

De las cuales, se puede hallar la función que define el comportamiento del ángulo θ_1 en cualquier instante de tiempo para una trayectoria paramétrica C_1 , después de aplicar diversas estrategias para resolver el sistema de ecuaciones por medio de identidades trigonométricas, se obtuvo la función general que define θ_1 respecto al tiempo.

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}}{e_3 - e_2} \right)$$

De acuerdo con lo planteado por Tsai (1999) los valores de e_1 , e_2 y e_3 son los siguientes, donde el origen del sistema se encuentra en A_1 y las longitudes de los eslabones 1 y 2 del manipulador están determinados por a_1 y a_2 .

$$\begin{aligned} e_1 &= -2y_{c_1} a_1 \\ e_2 &= -2x_{c_1} a_1 \\ e_3 &= x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2 + a_1^2 - a_2^2 \end{aligned}$$

De este modo, al aplicar los métodos de derivación a los valores obtenidos por Tsai (1999) se obtiene que:

$$\begin{aligned} e_1' &= -2y_{c_1}' a_1 & e_1'' &= -2y_{c_1}'' a_1 \\ e_2' &= -2x_{c_1}' a_1 & e_2'' &= -2x_{c_1}'' a_1 \\ e_3' &= 2x_{c_1}' x_{c_1}' + 2y_{c_1}' y_{c_1}' & e_3'' &= 2 \left[(x_{c_1}')^2 + x_{c_1} x_{c_1}'' \right] + 2 \left[(y_{c_1}')^2 + y_{c_1} y_{c_1}'' \right] \end{aligned}$$

Se resalta que, dichos valores son necesarios para incluirlos en la primera y segunda derivada del ángulo θ_1 , como se evidencia a continuación.

3.1.3.1. Primera derivada de θ_1

$$\theta_1' = 2 \cdot \frac{(e_3 - e_2) \left(-e_1' \pm \frac{e_1 e_1' + e_2 e_2' - e_3 e_3'}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}} \right) - \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right) (e_3' - e_2')}{\left[1 + \left(\frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}}{e_3 - e_2} \right)^2 \right] (e_3 - e_2)^2}$$

3.1.3.2. Segunda derivada de θ_1




Universidad
Pontificia
Bolivariana

PRESENTACIÓN INFORME
FINAL DE TRABAJO DE
GRADO

VICERRECTORIA
ACADÉMICA

FO-IP-007

$$\theta_1'' = \frac{2}{\left[(e_3 - e_2)^2 + \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right)^2 \right]^2} \left[\left(e_3' - e_2' \right) \left(-e_1' \pm \frac{2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3'}{2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}} \right) \right. \\ \left. + (e_3 - e_2) \left(-e_1'' \pm \frac{[2((e_1'')^2 + e_1e_1'') + 2((e_2'')^2 + e_2e_2'') - 2((e_3'')^2 + e_3e_3'')]2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} - (2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3') \cdot 2 \cdot \frac{2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3'}{2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}}}{(2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2})^2} \right) \right. \\ \left. - \left[\left(-e_1' \pm \frac{2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3'}{2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}} \right) (e_3' - e_2') + \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right) (e_3'' - e_2'') \right] \cdot \left[(e_3 - e_2)^2 + \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \left((e_3 - e_2) \left(-e_1' \pm \frac{2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3'}{2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}} \right) - \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right) (e_3' - e_2') \right) \left[2(e_3 - e_2)(e_3' - e_2') \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2} \right) \left(-e_1' \pm \frac{2e_1e_1' + 2e_2e_2' - 2e_3e_3'}{2\sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}} \right) \right] \right]$$

 <p>Universidad Pontificia Bolivariana</p>	<p>PRESENTACIÓN INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO</p>	<p>VICERRECTORIA ACADÉMICA</p> <p>FO-IP-007</p>
--	--	---

3.1.4. Comportamiento del ángulo θ_2

Conociendo la función que define θ_1 procedemos a despejar θ_2 a partir de la ecuación $y_{c_1} = y_{A_1} + a_1 s\theta_1 + a_2 s(\theta_1 + \theta_2)$, obteniendo:

$$\theta_2 = s^{-1}\left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right) - \theta_1$$

3.1.4.1. Primera derivada de θ_2

$$\theta'_2 = \frac{\frac{1}{a_2} y'_{c_1} - \frac{a_1}{a_2} c\theta_1 \cdot \theta'_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right)^2}} - \theta'_1$$

3.1.4.2. Segunda derivada de θ_2

$$\theta''_2 = \left[\frac{\frac{1}{a_2} y''_{c_1} - \frac{a_1}{a_2} [-s\theta_1 \cdot (\theta'_1)^2 + c\theta_1 \cdot \theta''_1]}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right)^2}} + \left(\frac{1}{a_2} y'_{c_1} - \frac{a_1}{a_2} c\theta_1 \theta'_1\right) \left(\frac{\left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right) \left(\frac{1}{a_2} y'_{c_1} - \frac{a_1}{a_2} c\theta_1 \theta'_1\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right)^2}} \right) \right] \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} - y_{A_1} - a_1 s\theta_1}{a_2}\right)^2} \right]^2} - \theta''_1$$

3.1.5. Comportamiento del Angulo θ_7

El comportamiento del ángulo θ_7 puede ser definido por una función que satisfaga características especiales de posición, velocidad y aceleración angular en ciertos instantes de tiempo. Por simplicidad de cálculos, la función que define θ_7 será constante.

3.1.6. Dinámica Inversa

Para desarrollar la dinámica inversa del robot paralelo 3RRR, es necesario usar los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ y sus respectivas derivadas halladas en el desarrollo de la cinemática del manipulador. Así como los valores de x_{c_1}, y_{c_1} y θ_7 , teniendo en cuenta que la gravedad es tomada en dirección negativa de z (Özdemir, 2017). Cabe agregar que, las ecuaciones de restricción para los lazos cerrados que resultan de desconectar las juntas C_2 y C_3 pueden ser escritas a nivel de posición como:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_7 \cos \theta_7 - a_0 - a_3 \cos \theta_3 - a_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) = 0 \\ \phi_2 &= a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_7 \sin \theta_7 - a_3 \sin \theta_3 - a_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) = 0 \\ \phi_3 &= a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + b_7 \cos(\theta_7 + \alpha) - b_0 - a_5 \cos \theta_5 - a_6 \cos(\theta_5 + \theta_6) = 0 \\ \phi_4 &= a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + b_7 \sin(\theta_7 + \alpha) - c_0 - a_5 \sin \theta_5 - a_6 \sin(\theta_5 + \theta_6) = 0\end{aligned}$$

De las cuales obtenemos el jacobiano para las ecuaciones de restricción

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & 0 & 0 & J_{17} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & 0 & 0 & J_{27} \\ J_{31} & J_{32} & 0 & 0 & J_{35} & J_{36} & J_{37} \\ J_{41} & J_{42} & 0 & 0 & J_{45} & J_{46} & J_{47} \end{bmatrix}$$

Donde el vector de las variables conjuntas del sistema de cadena abierta es

$$\mathbf{q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6 \ \theta_7]^T$$

La ecuación dinámica del mecanismo de lazo cerrado es expresada como sigue

$$M\ddot{q} + N = T + J^T$$

Según Özdemir (2017) el modelo de la dinámica inversa del robot puede ser descompuesto en los siguientes dos submodelos:

$$\begin{aligned}\tau &= M^a \ddot{q} + N^a - (J^a)^T \lambda \\ (J^p)^T \lambda &= M^p \ddot{q} + N^p\end{aligned}$$

Del mismo modo, Özdemir (2017) asegura que cada uno de los elementos de estos submodelos se puede describir de la siguiente forma:

- ✓ Las Matrices de inercia para juntas activas y pasivas son dadas por

$$M^a = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{17} \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & M_{56} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^p = \begin{bmatrix} M_{12} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{27} \\ 0 & 0 & M_{34} & M_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{56} & M_{66} & 0 \\ M_{71} & M_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{77} \end{bmatrix}$$

- ✓ Los vectores N^a y N^p incluyen las fuerzas centrífugas y de Coriolis para la juntas activas y pasivas, respectivamente

$$N^a = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_3 \\ N_5 \end{bmatrix} \quad N^p = \begin{bmatrix} N_2 \\ N_4 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix}$$

- ✓ Los Jacobiano para la juntas activas y pasivas son

$$J^a = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{13} & 0 \\ J_{21} & J_{23} & 0 \\ J_{31} & 0 & J_{35} \\ J_{41} & 0 & J_{45} \end{bmatrix} \quad J^p = \begin{bmatrix} J_{12} & J_{14} & 0 & J_{17} \\ J_{22} & J_{24} & 0 & J_{27} \\ J_{32} & 0 & J_{36} & J_{37} \\ J_{42} & 0 & J_{46} & J_{47} \end{bmatrix}$$

- ✓ Las juntas de las bases A_1, A_2, A_3 son actuadas por pares motores τ_1, τ_2, τ_3 los cuales están ubicados en el vector τ

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

- ✓ La matriz de coeficientes asociados está dada por,

$$A = (J^p)^T = \begin{bmatrix} -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_4 \sin(\theta_3 + \theta_4) & -a_4 \cos(\theta_3 + \theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 \sin(\theta_5 + \theta_6) & -a_6 \cos(\theta_5 + \theta_6) \\ -a_7 \sin\theta_7 & a_7 \cos\theta_7 & -b_7 \sin(\theta_7 + \alpha) & b_7 \cos(\theta_7 + \alpha) \end{bmatrix}$$

- ✓ Un vector R se define como se muestra a continuación, y sus elementos se pueden calcular como:

$$R = M^p \ddot{q} + N^p = \begin{bmatrix} M_{12}\theta_1'' + M_{22}\theta_2'' + M_{27}\theta_7'' + N_2 \\ M_{34}\theta_3'' + M_{44}\theta_4'' + N_4 \\ M_{56}\theta_5'' + M_{66}\theta_6'' + N_6 \\ M_{71}\theta_1'' + M_{72}\theta_2'' + M_{77}\theta_7'' + N_7 \end{bmatrix}$$

- ✓ Vector de las fuerzas de restricción

$$\lambda(t) = (A(t))^{-1} R(t)$$

Mostrados cada uno de los elementos que contienen los dos submodelos de la dinámica inversa, se calculan cada una de las matrices y vectores mostrados para obtener las curvas que definen el comportamiento del torque en cada una de las juntas activas. Las cuales funcionan como herramienta para la selección de los motores que permitirán generar el movimiento deseado de cada junta activa y por consiguiente de las pasivas, además de saber en qué instante(s) de tiempo sucede alguna singularidad de tipo II que deba ser resulta. Los elementos de M^a, M^p, N^a, N^p, J^a y J^p , son mostrados en los Anexos 5,6 y 7.

3.2. Diagrama de Modelación y Simulación

Se hace una descripción de los elementos del desarrollo de la cinemática inversa que se usaron para crear los códigos en Matlab necesarios para obtener la simulación del comportamiento de las partes del manipulador y de la curva de par motor en cada actuador. Ambos códigos se encuentran ubicados en los Anexos.

El código ubicado en el anexo 8 permite al usuario conocer los movimientos que realiza cada una de las partes del robot paralelo, así como observar la curva que el usuario definió dentro de los parámetros iniciales. Se resalta que, dentro de estos parámetros se encuentran las ecuaciones paramétricas de la curva requerida, las dimensiones y el comportamiento de la inclinación de la plataforma, así como las longitudes de los eslabones.

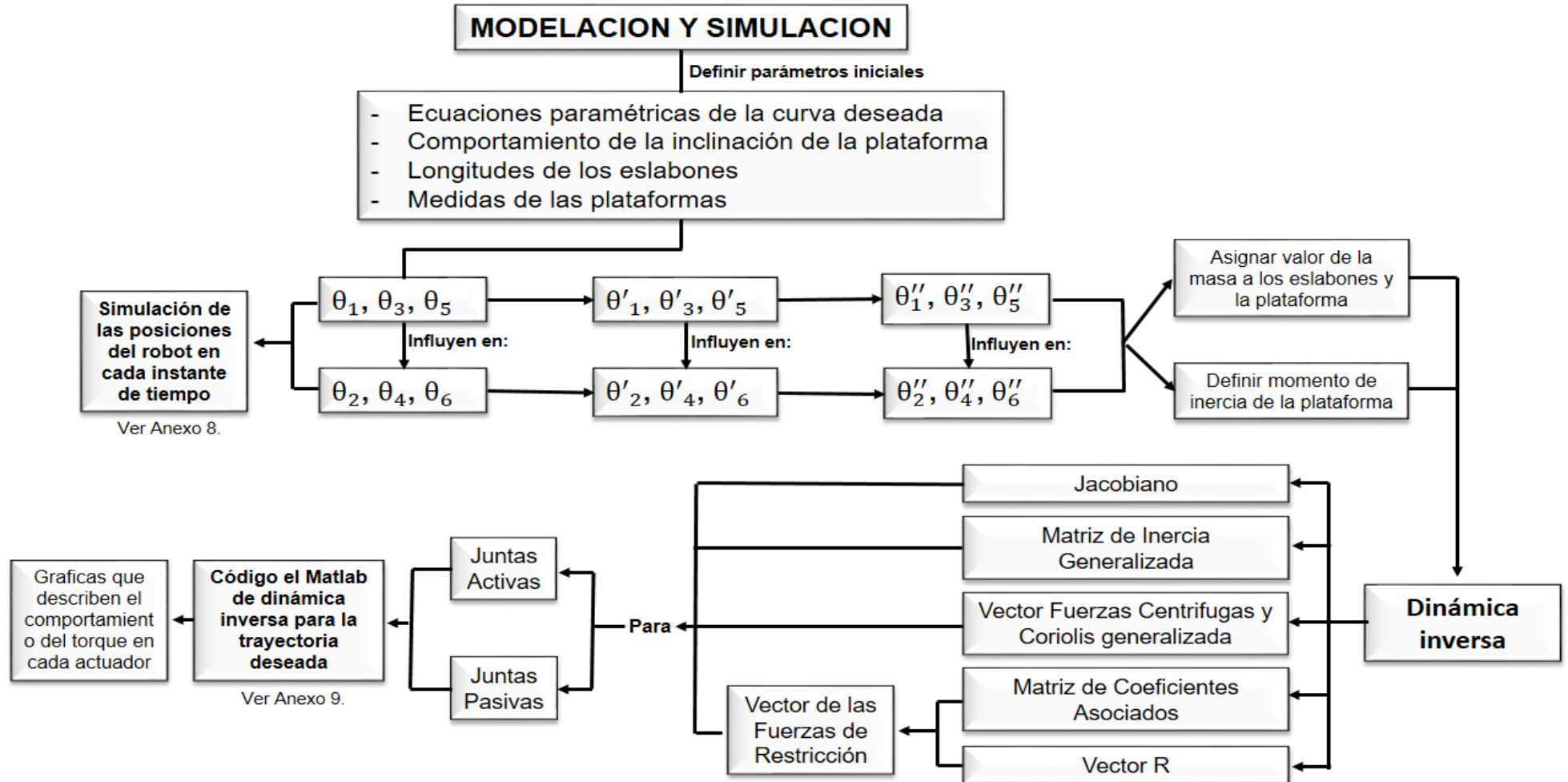
Definidos los parámetros iniciales y usando las ecuaciones obtenidas del desarrollo cinemático, se crearon vectores en Matlab que muestran la posición inicial y final, en cada eje coordenado, de cada uno de los eslabones del manipulador, así como de la plataforma. Posteriormente, usamos la función plot de Matlab que permite ver las barras del robot. Cabe resaltar que, se usó el bucle For para poder ver la ubicación de los elementos del robot en cada instante del intervalo de tiempo, que indica el usuario.


El código ubicado en el anexo 9 nos permite ver el comportamiento del torque en cada junta activa durante el intervalo de tiempo en el que se desarrolla la curva deseada. Esta herramienta resulta de vital importancia al momento de desarrollar el control de los motores que se escojan.

En la Grafica 5 podemos observar los elementos que se calcularon para implementar cada uno de los códigos desarrollados en este trabajo; así como las dimensiones y funciones iniciales necesarias para ejecutar cada código.



Gráfica 5 Diagrama de Modelación y Simulación.



 <p data-bbox="381 170 613 283">Universidad Pontificia Bolivariana</p>	<p data-bbox="683 121 1089 268">PRESENTACIÓN INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO</p>	<p data-bbox="1182 100 1446 296">VICERRECTORIA ACADÉMICA FO-IP-007</p>
--	---	---

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las longitudes iniciales de las barras y de la plataforma son tomadas del artículo “Removal of singularities in the inverse dynamics of parallel robots” de Özdemir (2017), a partir de esto, se empieza a tantear las dimensiones que debe tener el robot para realizar la trayectoria deseada. Las cuales son necesarias para obtener las ecuaciones de los ángulos θ_1 , θ_3 y θ_5 del análisis cinemático del manipulador.

Del mismo modo, se obtuvieron los ángulos θ_2 , θ_4 y θ_6 , así como la primera y segunda derivada. Luego, se transfirió esta información a Matlab y se crearon vectores con la posición inicial y final que debe tener cada eslabón, así como de la plataforma, por lo cual, al usar la función plot de Matlab, se obtuvo la visualización de las partes del robot en cada instante de tiempo.

Cabe resaltar que, la trayectoria trazada se creó usando splines cúbicos con las posiciones adoptadas por el robot en el eje x y el eje y en instantes de tiempo específicos. El usuario puede crear una curva con N puntos de interés, y el código simulara el comportamiento del robot, e igualmente, mostrara las curvas de torque vs tiempo de cada una de las juntas actuadas.

De esta forma, el código puede simular cualquiera de las dos soluciones calculadas para cada uno de los actuadores, obteniendo así 8 formas distintas de ubicar los eslabones para que realicen una trayectoria. Luego, se procede a ajustar los parámetros, a consideración del usuario hasta obtener una solución que satisfaga las necesidades particulares que se quieran resolver con el robot.

Cabe anotar que, habrá casos en que el código arrojará valores imaginarios, lo cual se puede observar en el cambio de longitud de alguna de las barras, o de la plataforma; para solucionar este problema basta con redimensionar la(s) medida(s) de alguna(s) barra(s), así como, el comportamiento de la inclinación de la plataforma o alguna(s) de su(s) dimensión(es).

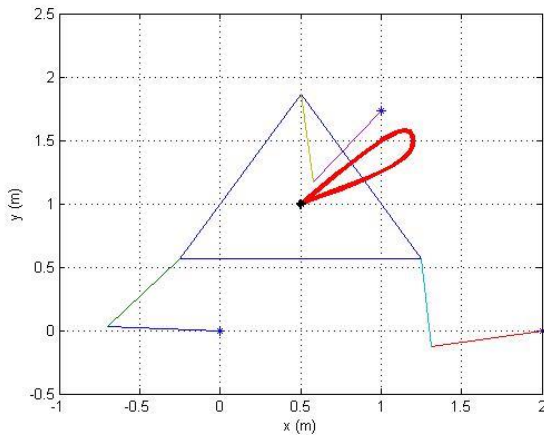
Ya definidas todas las variables iniciales, se puede graficar trayectorias de interés para el usuario de manera continua siempre y cuando esté dentro del espacio de trabajo y no surja ninguna singularidad.

Por medio de la simulación, se puede observar si alguna de las partes del robot choca entre sí, o si se sobrepone(n) con otra(s), permitiendo identificar cual(es) piezas redimensionar. Luego, se usa el código de la dinámica inversa para hallar las gráficas que definen el comportamiento del torque en cada actuador durante el intervalo de tiempo estipulado.

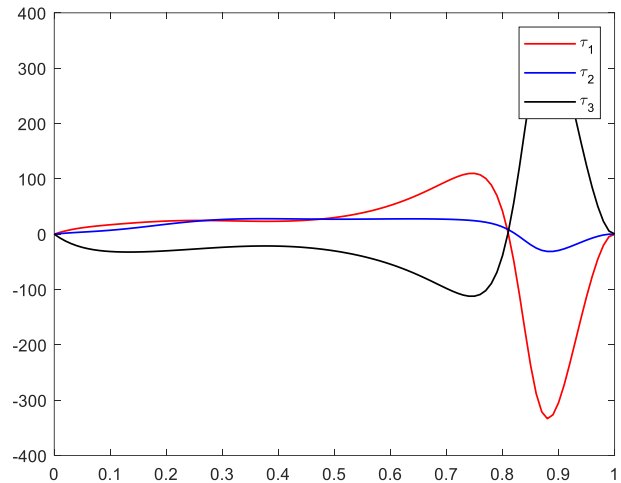
Las siguientes graficas fueron obtenidas del desarrollo de los códigos en Matlab, mostrados en el Anexo 8 y 9, que nos permiten observar las posiciones finales de cada uno de los elementos del manipulador paralelo al realizar la trayectoria C_1 mencionada en el capítulo 3.1.1. y la respectiva curva del desarrollo del par motor en cada instante de tiempo del intervalo para las juntas actuadas.



Gráfica 6. Simulación del Robot Paralelo ejecutando la trayectoria G_7



Gráfica 7. Torque en las Juntas Activas

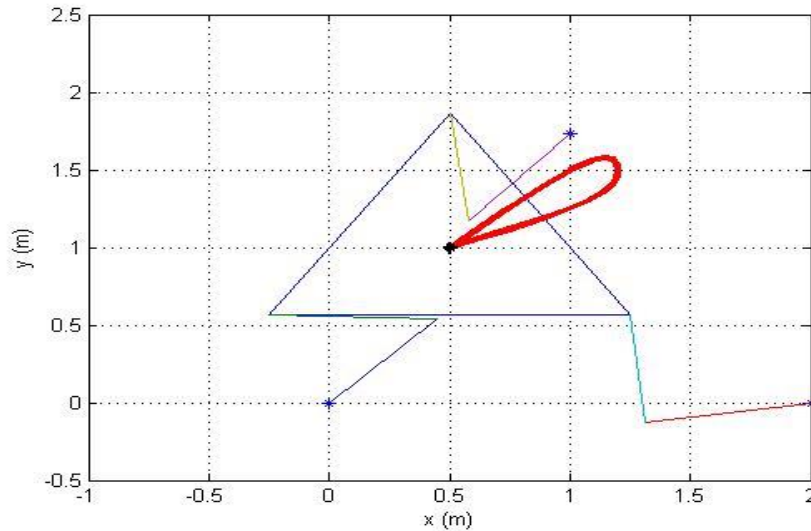


Cabe resaltar que, para obtener la modificación particular de las barras se utilizó la solución positiva de θ_1 , θ_3 y θ_5 ; esta ubicación de los eslabones se prevé poco practica dado que los eslabones del lazo cerrado 3 y la “plataforma” se superponen.

Si fuese de obligatoriedad usar la modificación de las barras de esa forma en específico, se tendría que diseñar una plataforma que evite el choque o contacto con los eslabones del lazo cerrado 3. El análisis anterior evidencia que la simulación sirve como un punto de partida para diseñar los elementos que necesita un robot paralelo 3RRR, para condiciones específicas asignadas por un usuario.

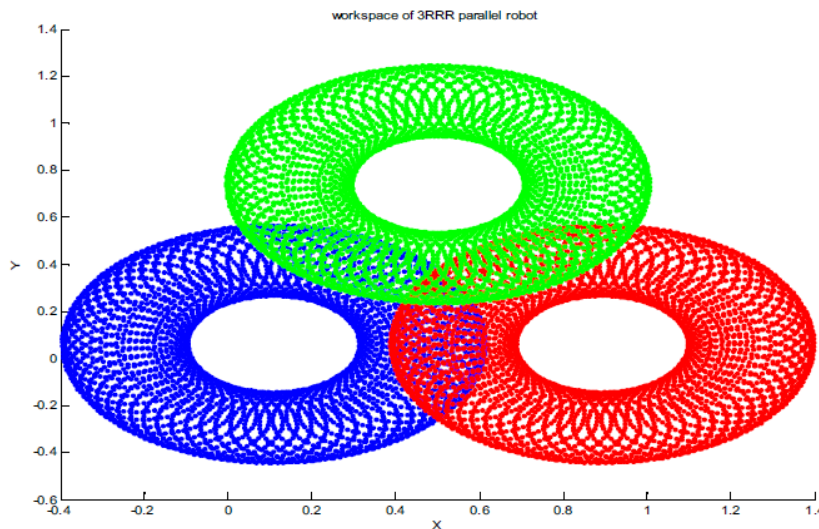
En cuanto a la curva de los pares motores, para cada una de las juntas actuadas, cabe resaltar que solo arrojará resultados para las soluciones positivas de θ_1 , θ_3 y θ_5 , en posteriores trabajos se realizará la modificación pertinente del código de Matlab que muestra éstas gráficas, permitiendo observar el comportamiento del torque para cualquiera de las soluciones posibles para los ángulos θ_1 , θ_3 y θ_5 .

Gráfica 8. Simulación del Robot Paralelo ejecutando la trayectoria C1



La disposición de las barras que observamos en la Gráfica 8 es debido a la solución positiva para los ángulos θ_3, θ_5 y la solución negativa para el ángulo θ_1 . La simulación de un robot con estas características no presenta ninguna superposición entre los elementos del robot, por lo cual, es un robot que permitirá realizar la trayectoria deseada sin que las barras o la plataforma choquen entre sí.

Gráfica 9. Espacio de trabajo robot paralelo 3RRR

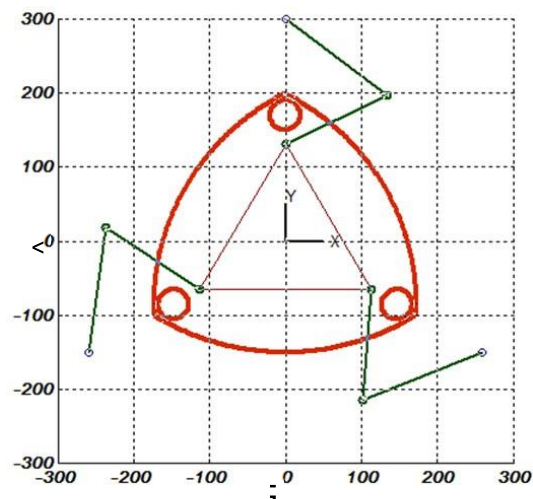


Fuente: Tomado de “Analysis and Optimum Kinematic Design of a Parallel Robot”

La Gráfica 9 permite visualizar el espacio dentro del cual se puede mover cada una de las barras 2,4 y 6 al hacer al hacer girar las barras 1,3 y 5 respectivamente; cada círculo mostrado en la figura se obtiene girando 360° las barras 2,4 y 6 por cada grado que se desplacen las barras 1,3 y 5. Gracias al código que se ha desarrollado en este trabajo es posible obtener esta grafica en robots con las dimensiones que deseemos investigar.

Por otro lado, en la Gráfica 10 podemos observar el espacio de trabajo, resultante de la intersección de las tres figuras de la Gráfica 9, la cual puede obtenerse partiendo del código de la cinemática inversa que se ha desarrollado en este trabajo. Tener conocimiento del espacio de trabajo del manipulador nos permitirá saber si se podrá realizar la trayectoria deseada, así como que trayectorias se pueden ejecutar. No siempre el espacio de trabajo permitirá realizar la curva deseada por lo cual se pueden probar diversos dimensionamientos del robot hasta encontrar aquel(los) que permita(n) ejecutarla.

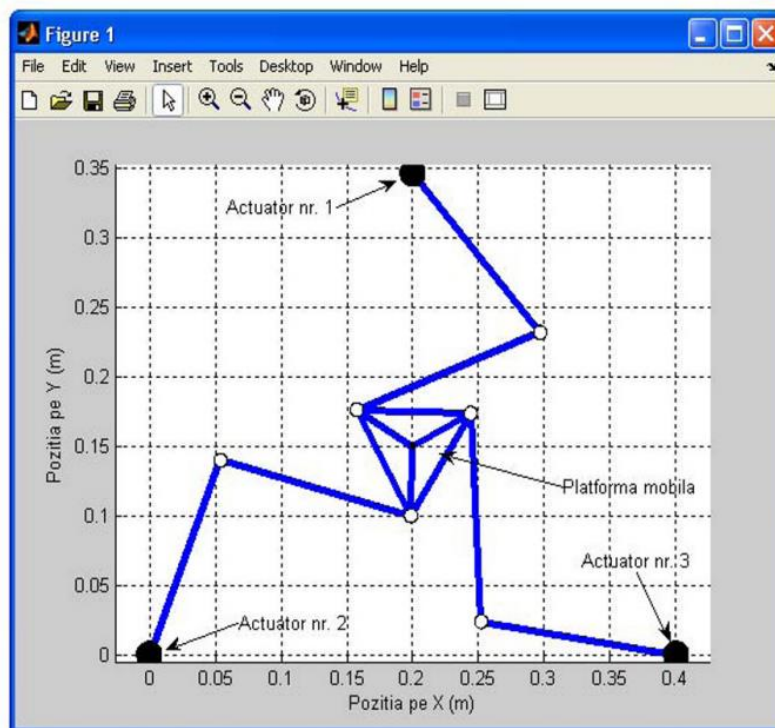
Gráfica 10. Espacio de Trabajo Resultante



Fuente: Tomado de “Analysis and Optimum Kinematic Design of a Parallel Robot”

En la Gráfica 11 podemos observar que el autor realizó el análisis cinemático y procedió a verificar, con respecto a un punto del centro de la plataforma, como sería el posicionamiento de cada una de las barras y la plataforma. Se asemeja al trabajo aquí desarrollado, difiriendo en que se puede hacer tanto para un punto como para una curva cualquiera ejecutada por el efector final ubicado en G_7 .

Gráfica 11. Configuración de mini robot paralelo 3RRR para $x = 0.2$, $y = 0.15$, $\theta_7 = 45^\circ$



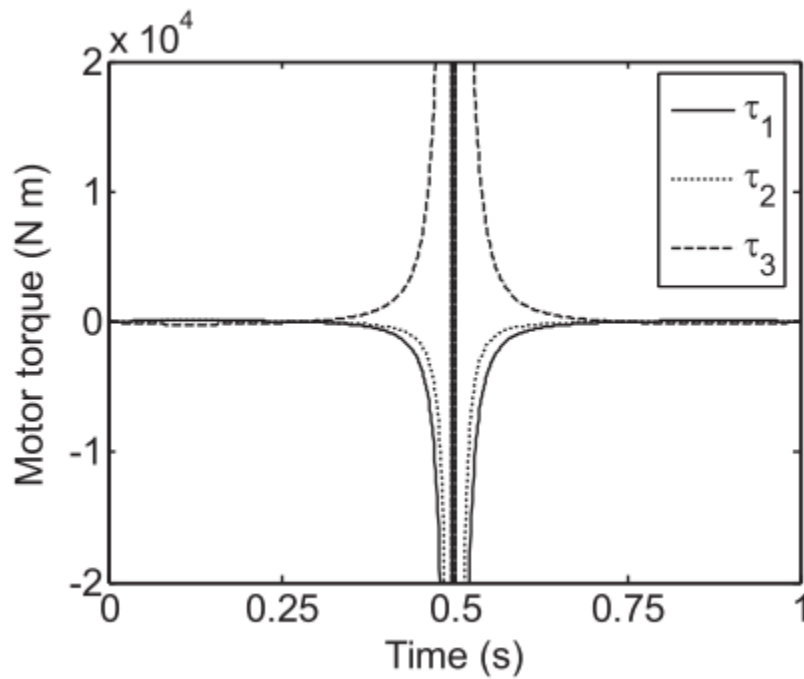
Fuente: Tomado de “Mechatronic concepts in design and control of a 3RRR micro parallel robot”

La simulación de las posiciones de las partes del robot se puede ejecutar normalmente, esto indica que es factible realizar el robot desde el punto de vista cinemático. Pero no es suficiente con este paso, por lo cual, es necesario realizar la dinámica inversa la cual es la que define si en realidad es posible realizar el modelo propuesto con dichas dimensiones. Si las gráficas del torque en cada uno de los actuadores son continuas, podemos decir que el robot no sufrirá ninguna

singularidad de tipo II, por lo tanto, podrá realizar la trayectoria deseada sin ninguna obstrucción de las barras.

En la Gráfica 12 podemos observar una asíntota presente en el instante de tiempo 0.5 s, esta discontinuidad representa una singularidad de tipo II. La imagen muestra que, a medida que se acerca a este tiempo los torques a realizar por cada motor son extremadamente altos, sobrepasando muy fácil el par máximo que puedan realizar; este comportamiento del torque muestra que se acerca a una posición de agarrotamiento de alguno(s) de los lazos cerrados.

Gráfica 12. Torques necesarios para ejemplo numérico de robot paralelo 3RRR

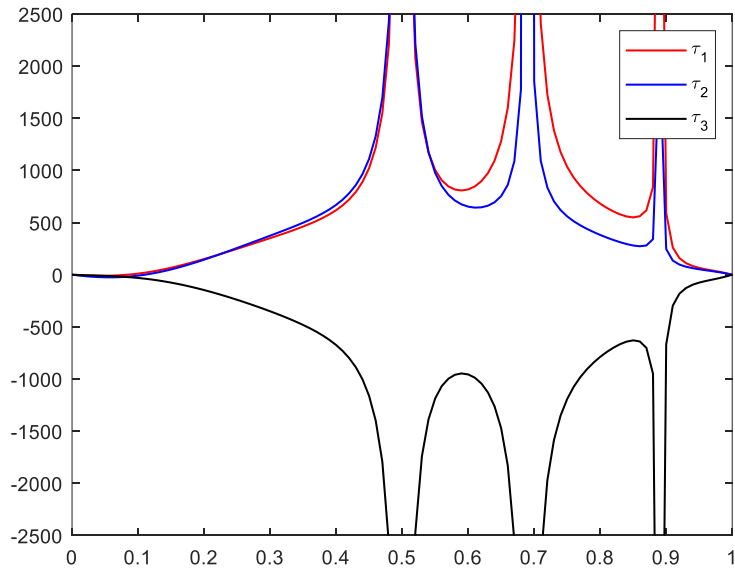


Fuente: Tomado de “Removal of singularities in the inverse dynamics of parallel robots”

Cabe resaltar que la gráfica anterior no se detalla de la misma manera en el código desarrollado en este trabajo, el cual permite obtener claramente las curvas para cuando no hay ninguna discontinuidad. Pero cuando se produce(n) singularidad(es) interna(s), en la gráfica se observa una o más discontinuidades, pero no se

representan con una asíntota y no se dice exactamente en qué instante de tiempo se produce, como se evidencia en la Grafica 13.

Gráfica 13. Curva Torque vs t, obtenida de código desarrollado en Matlab.



CONCLUSIONES

Las curvas del torque desarrolladas por el código de la dinámica inversa en Matlab, para cada uno de los actuadores, se obtienen solamente para las soluciones positivas de los ángulos θ_1 , θ_2 , θ_3 . Este código sirve como herramienta para toma de decisiones respecto a los motores que se deben utilizar para ejecutar la trayectoria deseada por el usuario.

El código mencionado en el Anexo 8 nos permite ver el movimiento de cada una de las partes del robot, sirviendo como herramienta de toma de decisiones respecto al diseño de la plataforma, así como del dimensionamiento de las barras del robot. Además, de verificar la factibilidad de que se realice una trayectoria con el dimensionamiento tentativo de las partes del robot.

Al momento de usar las ecuaciones necesarias para crear los códigos, en Matlab, para la simulación del robot resulto difícil identificar si los errores que surgían eran producto de una mala transcripción o si no se estaba programando de manera correcta; hubo momentos que se presentaron ambos casos y fue muy constructivo encontrar tales errores porque permitían seguir entendiendo aún más el comportamiento del robot. Por lo cual, considero que la simulación de los robots ayuda a apropiarse más de los conceptos que se desarrollan en la teoría relacionada con estos.

Otro gran reto fue cambiar la ubicación del efector del punto C_1 , con el cual se había desarrollado la simulación de la cinemática y de los torques en los actuadores, al punto G_7 . Cabe resaltar que si no hubiese habido una adecuada asesoría al respecto el trabajo de plasmar en Matlab todas las ecuaciones que se hicieron para el punto C_1 se hubiera perdido, al tener que colocar todas estas en función de la nueva

ubicación en G_7 ; se logró que con solo agregar un par de ecuaciones el punto C_1 estuviera en función del comportamiento de G_7 .

El desarrollo de las líneas del código correspondiente a la creación de una curva continua a partir n puntos de interés implicó el uso de un For dentro de otro For con una condición inicial especial, e inteligentemente pensada, además de la instrucción BREAK fueron claves para su ejecución.

Por otro lado, la gran cantidad de cálculos a realizar en Matlab, por el código relacionado con la dinámica, resulta un proceso lento tanto si se quiere una gráfica “detallada” del comportamiento del par-motor, así como para una gráfica que solo utilice pocos puntos del intervalo de tiempo deseado.

Al hablar de trabajos futuros que se pueden realizar partiendo de lo desarrollado en esta investigación surge un amplio abanico de proyectos tales como ubicar el efector final en una posición que no coincida con el centro de gravedad de la plataforma. De igual forma se puede hacer una investigación análoga acerca del comportamiento del robot en posición vertical; trabajos un tanto más avanzados puede ser sincronizar dos robots paralelos 3RRR, uno horizontal y otro horizontal, para crear trayectorias 3D de interés.

4. BIBLIOGRAFÍA

- Alcaldía de Medellín. (2019). *MEDELLÍN HACÍA LA CUARTA REVOLUCIÓN INDUSTRIAL*. Medellín: ODES (OBSERVATORIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE MEDELLÍN).
- Cusco, & Quishpe. (2018). Ética aplicada a la robótica. *Caribeña de Ciencias Sociales*.
- Díaz, Quintero, Mejía, Holguin, Herrera, Mesa, & Daraviña. (2018). Aplicación de los Robots Paralelos. *HAL Id*, 2 - 22.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación (Quinta Edición)*. México D.F.: Mc Graw Hill.
- Ojeda, D. (31 de mayo de 2018). La robótica del futuro en Colombia. *El Espectador*, págs. <https://www.elespectador.com/tecnologia/la-robotica-del-futuro-en-colombia-articulo-791916>.
- Özdemir, M. (2017). Removal of singularities in the inverse dynamics of parallel robots. *Mechanism and Machine Theory*, 71-86.
- Peidró, A., Reinoso, Ó., Gil, A., Marín, J., & Payá, L. (2016). A Simulation Tool to Study the Kinematics and Control of 2RPR-PR Parallel Robots. *ScienceDirect*, 268-273.
- Perasso. (12 de octubre de 2016). Qué es la cuarta revolución industrial (y por qué debería preocuparnos). *BBC*.
- Schwab. (2016). The Fourth Industrial Revolution: what it means, how to respond.
- Tovar , J., & Torres, Y. (2015). ROBOT PLANAR PARALELO RRR. *Universidad Piloto de Colombia*.
- UPB. (2019). *Foco de Energía*. Obtenido de Universidad Pontificia Bolivariana: <https://www.upb.edu.co/es/investigacion/nuestro-sistema/nuestros-focos/foco-investigacion-energia>
- Vizcaíno, & Sebastián. (2011). *LabVIEW: Entorno gráfico de programación*. Marcombo.

5. ANEXOS

Anexo 1. Comportamiento del ángulo θ_3

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= x_{A_2} + a_3 c\theta_3 + a_4 c(\theta_3 + \theta_4) \\ y_{c_2} &= y_{A_2} + a_3 s\theta_3 + a_4 s(\theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= x_{c_1} + a_7 c\theta_7 \\ y_{c_2} &= y_{c_1} + a_7 s\theta_7 \end{aligned}$$

$$\theta_3 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}}{e_6 - e_5} \right)$$

$$\begin{aligned} e_4 &= -2y_{c_1} a_3 + 2y_{A_2} a_3 - 2a_3 a_7 s\theta_7 \\ e_4' &= -2y_{c_1}' a_3 - 2a_3 a_7 c\theta_7 \theta_7' \\ e_4'' &= -2y_{c_1}'' a_3 - 2a_3 a_7 [-s\theta_7 (\theta_7')^2 + c\theta_7 \theta_7''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_5 &= -2x_{c_1} a_3 + 2x_{A_2} a_3 - 2a_3 a_7 c\theta_7 \\ e_5' &= -2x_{c_1}' a_3 + 2a_3 a_7 s\theta_7 \theta_7' \\ e_5'' &= -2x_{c_1}'' a_3 + 2a_3 a_7 [c\theta_7 (\theta_7')^2 + s\theta_7 \theta_7''] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_6 &= x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2 - 2x_{c_1} x_{A_2} - 2y_{c_1} y_{A_2} + x_{A_2}^2 + y_{A_2}^2 + a_7^2 + a_3^2 - a_4^2 + 2x_{c_1} a_7 c\theta_7 \\ &\quad + 2y_{c_1} a_7 s\theta_7 - 2x_{A_2} a_7 c\theta_7 - 2y_{A_2} a_7 s\theta_7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_6' &= 2x_{c_1}' x_{c_1}' + 2y_{c_1}' y_{c_1}' - 2x_{c_1}' x_{A_2} - 2y_{c_1}' y_{A_2} + 2a_7 [x_{c_1}' c\theta_7 + x_{c_1} (-s\theta_7) \theta_7'] \\ &\quad + 2a_7 [y_{c_1}' s\theta_7 + y_{c_1} c\theta_7 \theta_7'] - 2x_{A_2} a_7 (-s\theta_7) \theta_7' - 2y_{A_2} a_7 c\theta_7 \theta_7' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_6'' &= 2 \left[(x_{c_1}')^2 + x_{c_1} x_{c_1}'' \right] + 2 \left[(y_{c_1}')^2 + y_{c_1} y_{c_1}'' \right] - 2x_{c_1}'' x_{A_2} - 2y_{c_1}'' y_{A_2} \\ &\quad + 2a_7 \left[[x_{c_1}'' c\theta_7 + x_{c_1}' (-s\theta_7) \theta_7'] \right. \\ &\quad \left. + [x_{c_1}' (-s\theta_7) \theta_7' + x_{c_1} (-c\theta_7) (\theta_7')^2 + x_{c_1} (-s\theta_7) \theta_7''] \right] \\ &\quad + 2a_7 \left[[y_{c_1}'' s\theta_7 + y_{c_1}' c\theta_7 \theta_7'] + [y_{c_1}' c\theta_7 \theta_7' + y_{c_1} (-s\theta_7) (\theta_7')^2 + y_{c_1} c\theta_7 \theta_7''] \right] \\ &\quad - 2x_{A_2} a_7 [-c\theta_7 (\theta_7')^2 + (-s\theta_7) \theta_7''] - 2y_{A_2} a_7 [(-s\theta_7) (\theta_7')^2 + c\theta_7 \theta_7''] \end{aligned}$$

✓ **Primera derivada del ángulo θ_3**

$$\theta_3' = 2 \cdot \frac{(e_6 - e_5) \left(-e_4' \pm \frac{e_4 e_4' + e_5 e_5' - e_6 e_6'}{\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}} \right) - (-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}) (e_6' - e_5')}{\left[1 + \left(\frac{-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}}{e_6 - e_5} \right)^2 \right] (e_6 - e_5)^2}$$



✓ Segunda derivada del ángulo θ_3

$$\theta_3'' = \frac{2}{\left[(e_6 - e_5)^2 + \left(-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} \right)^2 \right]^2} \left[\left(e_6' - e_5' \right) \left(-e_4' \pm \frac{2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6'}{2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}} \right) \right. \\ \left. + (e_6 - e_5) \left(-e_4'' \pm \frac{[2((e_4')^2 + e_4e_4'') + 2((e_5')^2 + e_5e_5'') - 2((e_6')^2 + e_6e_6'')]2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} - (2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6') \cdot 2 \cdot \frac{2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6'}{2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}}}{(2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2})^2} \right) \right. \\ \left. - \left[\left(-e_4' \pm \frac{2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6'}{2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}} \right) (e_6' - e_5') + \left(-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} \right) (e_6'' - e_5'') \right] \cdot \left[(e_6 - e_5)^2 + \left(-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \left((e_6 - e_5) \left(-e_4' \pm \frac{2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6'}{2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}} \right) - \left(-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} \right) (e_6' - e_5') \right) \left[2(e_6 - e_5)(e_6' - e_5') \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(-e_4 \pm \sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2} \right) \left(-e_4' \pm \frac{2e_4e_4' + 2e_5e_5' - 2e_6e_6'}{2\sqrt{e_4^2 + e_5^2 - e_6^2}} \right) \right] \right]$$



Anexo 2. Comportamiento del ángulo θ_4

$$\theta_4 = s^{-1} \left(\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4} \right) - \theta_3$$

✓ **Primera derivada del ángulo θ_4**

$$\theta'_4 = \frac{\frac{1}{a_4} y'_{c_1} + \frac{a_7}{a_4} c \theta_7 \cdot \theta'_7 - \frac{a_3}{a_4} s \theta_3 \cdot \theta'_3}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4} \right)^2}} - \theta'_3$$

✓ **Segunda derivada del ángulo θ_4**

$$\theta''_4 = \left[\begin{aligned} & \left[\frac{1}{a_4} y''_{c_1} + \frac{a_7}{a_4} [-s \theta_7 (\theta'_7)^2 + c \theta_7 \theta''_7] \right. \\ & \left. - \frac{a_3}{a_4} [-s \theta_3 (\theta'_3)^2 + c \theta_3 \theta''_3] \right] \sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4} \right)^2} \\ & + \left[\frac{1}{a_4} y'_{c_1} + \frac{a_7}{a_4} c \theta_7 \theta'_7 - \frac{a_3}{a_4} c \theta_3 \theta'_3 \right]^2 \cdot \frac{\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4} \right)^2}} \right] \\ & \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c_1} + a_7 s \theta_7 - y_{A_2} - a_3 s \theta_3}{a_4} \right)^2} \right)^2} - \theta''_3 \end{aligned} \right]$$

Anexo 3. Comportamiento del ángulo θ_5

$$x_{c_3} = x_{A_3} + a_5 c \theta_5 + a_6 c (\theta_5 + \theta_6) \quad x_{c_3} = x_{c_1} + b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y_{c_3} = y_{A_3} + a_5 s \theta_5 + a_6 s (\theta_5 + \theta_6) \quad y_{c_3} = y_{c_1} + b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\theta_5 = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}}{e_9 - e_8} \right)$$

$$e_7 = -2y_{c_1} a_5 + 2y_{A_3} a_5 - 2a_5 b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \quad e_7' = -2y_{c_1}' a_5 - 2a_5 b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'$$

$$e_7'' = -2y_{c_1}'' a_5 - 2a_5 b_7 \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) (\theta_7')^2 + c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'' \right]$$

$$e_8 = -2x_{c_1} a_5 + 2x_{A_3} a_5 - 2a_5 b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \quad e_8' = -2x_{c_1}' a_5 - 2a_5 b_7 \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' \right]$$

$$e_8'' = -2x_{c_1}'' a_5 - 2a_5 b_7 \left[-c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) (\theta_7')^2 - s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'' \right]$$

$$e_9 = x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2 - 2x_{c_1} x_{A_3} - 2y_{c_1} y_{A_3} + x_{A_3}^2 + y_{A_3}^2 + b_7^2 + a_5^2 - a_6^2 + 2x_{c_1} b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$+ 2y_{c_1} b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - 2x_{A_3} b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - 2y_{A_3} b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$e_9' = 2x_{c_1}' x_{c_1}' + 2y_{c_1}' y_{c_1}' - 2x_{c_1}' x_{A_3} - 2y_{c_1}' y_{A_3}$$

$$+ 2b_7 \left[x_{c_1}' c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) + x_{c_1} \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' \right] \right]$$

$$+ 2b_7 \left[y_{c_1}' s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) + y_{c_1} c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' \right] - 2x_{A_3} b_7 \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' \right]$$

$$- 2y_{A_3} b_7 c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'$$

$$\begin{aligned}
 e_9'' = & 2 \left[(x_{c_1}')^2 + x_{c_1} x_{c_1}'' \right] + 2 \left[(y_{c_1}')^2 + y_{c_1} y_{c_1}'' \right] - 2x_{c_1}'' x_{A_3} - 2y_{c_1}'' y_{A_3} \\
 & + 2b_7 \left[x_{c_1}'' c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) + x_{c_1}' \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] \theta_7' \right] \\
 & + \left[x_{c_1}' \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] \theta_7' + x_{c_1} \left[-c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] (\theta_7')^2 \right. \\
 & \left. + x_{c_1} \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] \theta_7'' \right] \\
 & + 2b_7 \left[y_{c_1}'' s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) + y_{c_1}' c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' \right] \\
 & + \left[y_{c_1}' c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' + y_{c_1} \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] (\theta_7')^2 + y_{c_1} c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'' \right] \\
 & - 2x_{A_3} b_7 \left[-c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) (\theta_7')^2 + \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \right] \theta_7'' \right] \\
 & - 2y_{A_3} b_7 \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) (\theta_7')^2 + c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'' \right]
 \end{aligned}$$


✓ **Primera derivada del ángulo θ_5**

$$\theta_5' = 2 \cdot \frac{(e_9 - e_8) \left(-e_7' \pm \frac{e_7 e_7' + e_8 e_8' - e_9 e_9'}{\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}} \right) - \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right) (e_9' - e_8')}{\left[1 + \left(\frac{-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}}{e_9 - e_8} \right)^2 \right] (e_9 - e_8)^2}$$



✓ Segunda derivada del ángulo θ_5

$$\theta_5'' = \frac{2}{\left[(e_9 - e_8)^2 + \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right)^2 \right]^2} \left[\left[(e_9' - e_8') \left(-e_7' \pm \frac{2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9'}{2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (e_9 - e_8) \left(-e_7'' \pm \frac{[2((e_7')^2 + e_7e_7'') + 2((e_8')^2 + e_8e_8'') + 2((e_9')^2 + e_9e_9'')]2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} - (2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9') \cdot 2 \cdot \frac{2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9'}{2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}}}{(2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2})^2} \right) \right] \cdot \left[(e_9 - e_8)^2 + \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \left[\left(-e_7' \pm \frac{2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9'}{2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}} \right) (e_9' - e_8') + \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right) (e_9'' - e_8'') \right] \cdot \left[(e_9 - e_8)^2 + \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - \left((e_9 - e_8) \left(-e_7' \pm \frac{2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9'}{2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}} \right) - \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right) (e_9' - e_8') \right) \left[2(e_9 - e_8)(e_9' - e_8') \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(-e_7 \pm \sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2} \right) \left(-e_7' \pm \frac{2e_7e_7' + 2e_8e_8' + 2e_9e_9'}{2\sqrt{e_7^2 + e_8^2 - e_9^2}} \right) \right] \right]$$

 <p>Universidad Pontificia Bolivariana</p>	<p>PRESENTACIÓN INFORME FINAL DE TRABAJO DE GRADO</p>	<p>VICERRECTORIA ACADÉMICA</p> <p>FO-IP-007</p>
--	--	---

Anexo 4. Comportamiento del ángulo θ_6

$$\theta_6 = s^{-1} \left(\frac{y_{c1} + b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - y_{A3} - a_5 s \theta_5}{a_6} \right) - \theta_5$$

✓ **Primera derivada del ángulo θ_6**

$$\theta_6' = \frac{\frac{1}{a_6} y_{c1}' + \frac{b_7}{a_6} c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \theta_7' - \frac{a_5}{a_6} c \theta_5 \cdot \theta_5'}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c1} + b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - y_{A3} - a_5 s \theta_5}{a_6} \right)^2}} - \theta_5'$$

✓ **Segunda derivada del ángulo θ_6**

$$\theta_6'' = \left[\frac{1}{a_6} y_{c1}'' + \frac{b_7}{a_6} \left[-s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) (\theta_7')^2 + c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7'' \right] - \frac{a_5}{a_6} [-s \theta_5 (\theta_5')^2 + c \theta_5 \theta_5''] \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c1} + b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - y_{A3} - a_5 s \theta_5}{a_6} \right)^2}} + \left[\frac{1}{a_6} y_{c1}' + \frac{b_7}{a_6} c \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) \theta_7' - \frac{a_5}{a_6} c \theta_5 \theta_5' \right]^2 \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y_{c1} + b_7 s \left(\theta_7 + \frac{\pi}{3} \right) - y_{A3} - a_5 s \theta_5}{a_6} \right)^2} \right)^2} - \theta_5''$$

Anexo 5. Elementos del Jacobiano

$$J_{11} = -a_1 \sin \theta_1 - a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_{12} = -a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_{13} = a_3 \sin \theta_3 + a_4 \sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$J_{14} = a_4 \sin(\theta_3 + \theta_4)$$

$$J_{17} = -a_7 \sin \theta_7$$

$$J_{21} = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_{22} = a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$J_{23} = -a_3 \cos \theta_3 - a_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$J_{24} = -a_4 \cos(\theta_3 + \theta_4)$$

$$J_{27} = a_7 \cos \theta_7$$

$$J_{35} = a_5 \sin \theta_5 + a_6 \sin(\theta_5 + \theta_6)$$

$$J_{36} = a_6 \sin(\theta_5 + \theta_6)$$

$$J_{37} = -b_7 \sin(\theta_7 + \alpha)$$

$$J_{45} = -a_5 \cos \theta_5 - a_6 \cos(\theta_5 + \theta_6)$$

$$J_{46} = -a_6 \cos(\theta_5 + \theta_6)$$

$$J_{47} = b_1 \cos(\theta_7 + \alpha)$$

Anexo 6. Elementos de la Matriz de Inercia Generalizada

$$M_{11} = m_1 \frac{a_1^2}{3} + m_2 \left(a_1^2 + \frac{a_2^2}{3} + a_1 a_2 \cos \theta_2 \right) + m_7 (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \theta_2)$$

$$M_{12} = m_2 \left(\frac{a_2^2}{3} + \frac{1}{2} a_1 a_2 \cos \theta_2 \right) + m_7 (a_2^2 + a_1 a_2 \cos \theta_2)$$

$$M_{17} = m_7 c_7 [a_1 \cos(\theta_1 - \theta_7 - \beta) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)]$$

$$M_{22} = m_2 \frac{a_2^2}{3} + m_7 a_2^2$$

$$M_{27} = m_7 a_2 c_7 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)$$

$$M_{33} = m_3 \frac{a_3^2}{3} + m_4 \left(a_3^2 + \frac{a_4^2}{3} + a_3 a_4 \cos \theta_4 \right)$$

$$M_{34} = m_4 \left(\frac{a_4^2}{3} + \frac{1}{2} a_3 a_4 \cos \theta_4 \right)$$

$$M_{44} = m_4 \frac{a_4^2}{3}$$

$$M_{55} = m_5 \frac{a_5^2}{3} + m_6 \left(a_5^2 + \frac{a_6^2}{3} + a_5 a_6 \cos \theta_6 \right)$$

$$M_{56} = m_6 \left(\frac{a_6^2}{3} + \frac{1}{2} a_5 a_6 \cos \theta_6 \right)$$

$$M_{66} = m_6 \frac{a_6^2}{3}$$

$$M_{71} = m_7 c_7 [a_1 \cos(\theta_1 - \theta_7 - \beta) + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)]$$

$$M_{72} = m_7 a_2 c_7 \cos(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)$$

$$M_{77} = m_7 c_7^2 + I_7$$

Anexo 7. Elementos de Matriz de Coriolis Generalizada

$$N_1 = -a_1 a_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_7 \right) (2\theta'_1 + \theta'_2) \theta'_2 \sin \theta_2 + m_7 c_7 \theta'_7 [a_1 \sin(\theta_1 - \theta_7 - \beta) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)]$$

$$N_2 = a_1 a_2 \left(\frac{1}{2} m_2 + m_7 \right) (\theta'_1)^2 \sin \theta_2 + m_7 a_2 c_7 (\theta'_7)^2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)$$

$$N_3 = -\frac{1}{2} m_4 a_3 a_4 (2\theta'_3 + \theta'_4) \theta'_4 \sin \theta'_4$$

$$N_4 = \frac{1}{2} m_4 a_3 a_4 (\theta'_3)^2 \sin \theta'_4$$

$$N_5 = -\frac{1}{2} m_6 a_5 a_6 (2\theta'_5 + \theta'_6) \theta'_6 \sin \theta'_6$$

$$N_6 = \frac{1}{2} m_6 a_5 a_6 (\theta'_5)^2 \sin \theta'_6$$

$$N_7 = -m_7 c_7 \{ [a_1 \sin(\theta_1 - \theta_7 - \beta) + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta)] (\theta'_1)^2 + a_2 (2\theta'_1 + \theta'_2) \theta'_2 \sin(\theta_1 + \theta_2 - \theta_7 - \beta) \}$$

Anexo 8. Código para simulación de las posiciones del robot 3RRR en cada instante de tiempo

- ✓ Componentes cartesianas de los actuadores A1, A2 y A3.

```
a0=1.2; b0=0.74; c0=1.89;  
A1x=0; A1y=0;  
A2x=a0; A2y=0;  
A3x=b0; A3y=c0;
```

- ✓ Intervalo de tiempo en el que trabaja el robot.

```
t=0:0.01:2;
```

- ✓ Angulo formado por C₃C₁C₂ según la gráfica 1.

```
fi=pi/3
```

- ✓ Longitudes de los eslabones y de la plataforma del robot 3RRR.

```
a1=0.7; a2=1; a3=0.7; a4=1; a5=0.7; a6=1; a7=2; b7=2;
```

- ✓ Posiciones tanto iniciales como finales del punto C₁ de la plataforma.

```
C1xi=-1.05;  
C1xf=-0.937;  
C1yi=0.85;  
C1yf=0.924;
```

- ✓ Inclinación inicial y final de la plataforma con respecto al eje X.

```
tt7i=0;  
tt7f=10;
```

- ✓ Cantidad de observaciones a realizar en el intervalo de tiempo

```
n=length(t);
```

- ✓ Vectores vacíos

```
Cx=[];
Cy=[];
cx=[];
cy=[];
```

inicio for

```
for i=1:n
```

- ✓ Función que define el comportamiento de la curva especificada por el usuario

```
f=33.3414*t(i)^3-127.1791*t(i)^4+193.2980*t(i)^5-
122.2336*t(i)^6+14.5826*t(i)^7+9.1907*t(i)^8;
```

- ✓ Función que define el comportamiento de la inclinación de la plataforma

```
g=47.9716*t(i)^3-214.3877*t(i)^4+437.8705*t(i)^5-
479.0019*t(i)^6+270.0848*t(i)^7-61.5374*t(i)^8;
```

- ✓ Ecuaciones de trayectoria planeada

```
C1x=C1xi+f*(C1xf-C1xi);
C1y=C1yi+f*(C1yf-C1yi);
```

- ✓ Ecuación de inclinación planeada

```
tt7=(tt7i+g*(tt7f-tt7i))*pi/180
tt7D=tt7*180/pi;
```

- ✓ Comportamiento de los ángulos θ_1 y θ_2 en función de la trayectoria e inclinación deseada

```
e1=-2*C1y*a1;
e2=-2*C1x*a1;
e3=(C1x-A1x)^2+(C1y-A1y)^2+a1^2-a2^2;

tt1=2*atan((-e1+sqrt(e1^2+e2^2-e3^2))/(e3-e2));

tt2=acos((C1x-A1x-a1*cos(tt1))/a2)-tt1;
```

- ✓ Comportamiento del ángulo θ_3 y θ_4 en función de la trayectoria e inclinación deseada

```
e4=-2*C1y*a3+2*A2y*a3-2*a3*a7*sin(tt7);
e5=-2*C1x*a3+2*A2x*a3-2*a3*a7*cos(tt7);
e6=C1x^2+C1y^2-2*C1x*A2x-2*C1y*A2y+A2x^2+A2y^2+a7^2+a3^2-a4^2 ...
+2*C1x*a7*cos(tt7)+2*C1y*a7*sin(tt7) ...
```

```
-2*A2x*a7*cos(tt7)-2*A2y*a7*sin(tt7);
```

```
tt3=2*atan((-e4-sqrt(e4^2+e5^2-e6^2))/(e6-e5));
```

```
tt4=acos((C1x+a7*cos(tt7)-A2x-a3*cos(tt3))/a4)-tt3;
```

- ✓ Comportamiento del ángulo θ_5 y θ_6 en función de la trayectoria e inclinación deseada

```
e7=-2*C1y*a5+2*A3y*a5-2*a5*b7*sin(tt7+fi);
e8=-2*C1x*a5+2*A3x*a5-2*a5*b7*cos(tt7+fi);
e9=C1x^2+C1y^2-2*C1x*A3x-2*C1y*A3y+A3x^2+A3y^2+b7^2+a5^2 ...
-a6^2+2*C1x*b7*cos(tt7+fi)+2*C1y*b7*sin(tt7+fi) ...
-2*A3x*b7*cos(tt7+fi)-2*A3y*b7*sin(tt7+fi);
```

```
tt5=2*atan((-e7+sqrt(e7^2+e8^2-e9^2))/(e9-e8));
```

```
tt6=acos((C1x+b7*cos(tt7+fi)-A3x-a5*cos(tt5))/a6)-tt5;
```

- ✓ Visualización de la ubicación de los actuadores

```
plot(A1x,A1y,'b*','linewidth',3);hold on;
plot(A2x,A2y,'b*','linewidth',3);hold on;
plot(A3x,A3y,'b*','linewidth',3);hold on;
```

- ✓ Visualización de la curva establecida por el usuario

```
Cx=[Cx C1x];
Cy=[Cy C1y];

plot(Cx,Cy,'k*');hold on
```

- ✓ Ubicación del punto B₁ y C₁

```
a1x=a1*cos(tt1);
a1y=a1*sin(tt1);
B1x=[A1x a1x];
B1y=[A1y a1y];

a2x=a2*cos(tt1+tt2);
a2y=a2*sin(tt1+tt2);
c1x=[a1x a1x+a2x];
c1y=[a1y a1y+a2y];

cx=[cx a1x+a2x];
cy=[cy a1y+a2y];
```

- ✓ Ubicación del punto B₂ y C₂

```
a3x=a3*cos(tt3);
```

```
a3y=a3*sin(tt3);  
B2x=[A2x A2x+a3x];  
B2y=[A2y A2y+a3y];  
  
a4x=a4*cos(tt3+tt4);  
a4y=a4*sin(tt3+tt4);  
c2x=[A2x+a3x A2x+a3x+a4x];  
c2y=[A2y+a3y A2y+a3y+a4y];
```

✓ Ubicación del punto B₃ y C₃

```
a5x=a5*cos(tt5);  
a5y=a5*sin(tt5);  
B3x=[A3x A3x+a5x];  
B3y=[A3y A3y+a5y];  
  
a6x=a6*cos(tt5+tt6);  
a6y=a6*sin(tt5+tt6);  
c3x=[A3x+a5x A3x+a5x+a6x];  
c3y=[A3y+a5y A3y+a5y+a6y];
```

```
%c3x=[A3x+a5x c1x(1,2)+b7*cos(tt7+fi)];  
%c3y=[A3y+a5y c1y(1,2)+b7*sin(tt7+fi)];
```

```
Trx=[c1x(1,2) c2x(1,2) c3x(1,2) c1x(1,2)];  
Try=[c1y(1,2) c2y(1,2) c3y(1,2) c1y(1,2)];
```

✓ Visualización del comportamiento de los eslabones

```
plot(B1x,B1y,c1x,c1y,B2x,B2y,c2x,c2y,B3x,B3y,c3x,c3y);hold on;;
```

✓ Visualización del comportamiento de la plataforma

```
plot(Trx,Try);hold on;
```

✓ Curva realizada por el punto C₁ de la plataforma

```
plot(cx,cy,'r','linewidth',2);
```

```
axis([-1.5 2.5 -1 3])  
grid on  
hold off;  
pause(0.01)
```

```
finalización bucle FOR  
end
```


Anexo 9. Código en Matlab del modelo de dinámica inversa para la trayectoria deseada

```
syms t
```

- ✓ Componentes de las coordenadas cartesianas de los actuadores A₁, A₂ y A₃.

```
a0=;b0=;c0=;
```

```
A1x=0
```

```
A1y=0
```

```
A2x=a0
```

```
A2y=0
```

```
A3x=b0
```

```
A3y=c0
```

- ✓ Longitudes de las diferentes barras del robot 3RRR

```
a1=0.7; a2=1; a3=0.7; a4=1; a5=0.7; a6=1;
```

- ✓ Longitudes de la plataforma

```
a7=2; b7=2; c7=2;
```

- ✓ Característica de la plataforma, donde, alfa es el ángulo formado por C₃C₁C₂ y beta es el Angulo formado por G₇C₁C₂

```
alfa=pi/3; beta=pi/6;
```

- ✓ Masas de las diferentes barras del robot 3RRR

```
m1=0.7; m2=1; m3=0.7; m4=1; m5=0.7; m6=1;
```

- ✓ Masa y momento de Inercia de la Plataforma

```
m7=8
```

```
I7=0.0817
```

```
Vectores vacíos
```

```
iv=[];
```

```
taoCv=[];
```

```
taoCv2=[];
```

```
taoCv3=[];
```

```
inicio FOR
```

```
for i=0:0.01:1  
    t=i;
```

- ✓ Función que define el comportamiento del punto C_1 , y su primera y segunda derivada.

```
f=33.3414*t^3-127.1791*t^4+193.2980*t^5-  
122.2336*t^6+14.5826*t^7+9.1907*t^8
```

```
fp=diff(f)
```

```
fpp=diff(f,2)
```

- ✓ Función que define el comportamiento de la inclinación de la plataforma con respecto al eje x, y su primera y segunda derivada.

```
g=47.9716*t^3-214.3877*t^4+437.8705*t^5-  
479.0019*t^6+270.0848*t^7-61.5374*t^8
```

```
gp=diff(g)
```

```
gpp=diff(g,2)
```

- ✓ Posiciones iniciales y finales del punto C_1

```
C1xi=; C1xf; C1yi=; C1yf;
```

- ✓ Ecuaciones de trayectoria planeada

```
C1x=C1xi+f*(C1xf-C1xi)  
C1y=C1yi+f*(C1yf-C1yi)
```

- ✓ Velocidad y aceleración en cada punto de la trayectoria planeada.

```
C1xp=fp*(C1xf-C1xi)  
C1yp=fp*(C1yf-C1yi)
```

```
C1xpp=fpp*(C1xf-C1xi)  
C1ypp=fpp*(C1yf-C1yi)
```

- ✓ Inclinación inicial y final de la plataforma

```
tt7i=29  
tt7f=30.5
```

✓ Posiciones angulares, θ_1 y θ_2 , velocidades y aceleraciones

$$e1 = -2 * C1y * a1$$

$$e1p = -2 * C1yp * a1$$

$$e1pp = -2 * C1ypp * a1$$

$$e2 = -2 * C1x * a1$$

$$e2p = -2 * C1xp * a1$$

$$e2pp = -2 * C1xp1 * a1$$

$$e3 = C1x^2 + C1y^2 + a1^2 - a2^2$$

$$e3p = 2 * C1x * C1xp + 2 * C1y * C1yp$$

$$e3pp = 2 * (C1xp^2 + C1x * C1xp) + 2 * (C1yp^2 + C1y * C1yp)$$

✓ Posiciones angulares

$$tt1 = 2 * \text{atan} \left(\frac{-e1 + \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2}}{e3 - e2} \right);$$

$$tt2 = \text{asin} \left(\frac{C1y - ya1 - a1 * \sin(tt1)}{a2} \right) - tt1;$$

✓ Velocidades angulares

$$tt1p = 2 * \left(\frac{(e3 - e2) * (-e1p + (e1 * e1p + e2 * e2p - e3 * e3p) / \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2})}{(1 + ((-e1 + \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2}) / (e3 - e2))^2) * (e3 - e2)^2} \right);$$

$$tt2p = (C1yp / a2 - a1 * \cos(tt1) * tetel1p / a2) / \sqrt{1 - ((C1y - ya1 - a1 * \sin(tt1)) / a2)^2} - tt1p;$$

✓ Aceleraciones angulares

$$tt1pp = \frac{2 / ((e3 - e2)^2 + (-e1 + \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2})^2)^2 * ((e3p - e2p) * (-e1p + (e1 * e1p + e2 * e2p - e3 * e3p) / \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2}) + (e3 - e2) * (-e1pp + ((2 * (e1p^2 + e1 * e1pp) + 2 * (e2p^2 + e2 * e2pp) - 2 * (e3p^2 + e3 * e3pp)) * 2 * \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2} - (2 * e1 * e1p + 2 * e2 * e2p - 2 * e3 * e3p) * (2 * e1 * e1p + 2 * e2 * e2p - 2 * e3 * e3p) / \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2}) / (2 * \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2})^2) - ((-e1p + (e1 * e1p + e2 * e2p - e3 * e3p) / \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2})^2) * (e3 - e2)^2}}{(1 + ((-e1 + \sqrt{e1^2 + e2^2 - e3^2}) / (e3 - e2))^2) * (e3 - e2)^2};$$

$$e3^2) * (e3p-e2p) + (-e1+\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2}) * (e3pp-e2pp) * ((e3-e2)^2 + (-e1+\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2})^2) - ((e3-e2) * (-e1p+(e1*e1p+e2*e2p-e3*e3p)/\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2}) - (-e1+\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2}) * (e3p-e2p)] * (2 * (e3-e2) * (e3p-e2p) + 2 * (-e1+\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2}) * (-e1p+(e1*e1p+e2*e2p-e3*e3p)/\sqrt{e1^2+e2^2-e3^2}));$$

$$tt2pp=[(1/a2*C1ypp-a1/a2*(-\sin(tt1)*tt1p^2+\cos(tt1)*tt1pp))*\sqrt{1-((C1y-ya1-a1*\sin(tt1))/a2)^2}+(1/a2*C1yp-a1/a2*\cos(tt1)*tt1p)*(1/a2*(C1y-ya1-a1*\sin(tt1)))*(1/a2*C1yp-a1/a2*\cos(tt1)*tt1p)/\sqrt{1-(1/a2*(C1y-ya1-a1*\sin(tt1)))^2}]*1/(\sqrt{1-(1/a2*(C1y-ya2-a1*\sin(tt1)))^2})-tt1pp;$$

✓ **Posiciones angulares, θ_3 y θ_4 , velocidades y aceleraciones**

$$tt7=tt7i+g*(tt7f-tt7i);$$

$$tt7p=gp*(tt7f-tt7i);$$

$$tt7pp=gpp*(tt7f-tt7i);$$

$$e4=-2*C1y*a3+2*ya2*a3-2*a3*a7*\sin(tt7)$$

$$e4p=-2*C1yp*a3-2*a3*a7*\cos(tt7)*tt7p$$

$$e4pp=-2*C1ypp*a3-2*a3*a7*(-\sin(tt7)*tt7p^2+\cos(tt7)*tt7pp)$$

$$e5=-2*C1y*a3+2*ya2*a3-2*a3*a7*\sin(tt7)$$

$$e5p=-2*C1xp*a3+2*a3*a7*\sin(tt7)*tt7p$$

$$e5pp=-2*C1xpp*a3+2*a3*a7*(\cos(tt7)*tt7p^2+\sin(tt7)*tt7pp)$$

$$e6=C1x^2+C1y^2-2*C1x*xa2-2*C1y*ya2+xa2^2+ya2^2+a7^2+a3^2-a4^2+2*C1x*a7*\cos(tt7)+2*C1y*a7*\sin(tt7)-2*xa2*a7*\cos(tt7)-2*ya2*a7*\sin(tt7);$$

$$e6p=2*C1x*C1xp+2*C1y*C1yp-2*C1xp*xa2-2*C1yp*ya2+2*a7*(C1xp*\cos(tt7)+C1x*(-\sin(tt7))*tt7p)+2*a7*(C1yp*\sin(tt7)+C1y*\cos(tt7)*tt7p)-2*xa2*a7*(-\sin(tt7))*tt7p-2*ya2*a7*\cos(tt7)*tt7p;$$

$$e6pp=2*(C1xp^2+C1x*C1xpp)+2*(C1yp^2+C1y*C1ypp)-2*C1xpp*xa2-2*C1ypp*ya2+2*a7*((C1xpp*\cos(tt7)+C1xp*(-\sin(tt7))*tt7p)+(C1yp*(-\sin(tt7))*tt7p+C1x*(-\cos(tt7))*tt7p^2+C1x*(-$$

$$\begin{aligned} & \sin(tt7)) * tt7pp)) + 2 * a7 * ((C1ypp * \sin(tt7) + C1yp * \cos(tt7) * tt7 \\ & p) + (C1yp * \cos(tt7) * tt7p + C1y * (- \\ & \sin(tt7)) * tt7p^2 + C1y * \cos(tt7) * tt7pp)) - 2 * xa2 * a7 * (- \\ & \cos(tt7) * tt7p^2 + (-\sin(tt7)) * tt7pp) - 2 * ya2 * a7 * ((- \\ & \sin(tt7)) * tt7p^2 + \cos(tt7) * tt7pp); \end{aligned}$$

✓ **Posiciones angulares**

$$tt3 = 2 * \operatorname{atan}((-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) / (e6 - e5));$$

$$tt4 = \operatorname{asin}((C1y + a7 * \sin(tt7) - ya2 - a3 * \sin(tt3)) / a4) - tt3;$$

✓ **Velocidades angulares**

$$\begin{aligned} tt3p = 2 * ((e6 - e5) * (-e4p + ((e4 * e4p + e5 * e5p - \\ e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}))) - (-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - \\ e6^2}) * (e6p - e5p) / ((1 + ((-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) / (e6 - \\ e5))^2) * (e6 - e5)^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tt4p = (C1yp / a4 + a7 / a4 * \cos(tt7) * tt7p - \\ a3 / a4 * \sin(tt3) * tt3p) / \sqrt{1 - (1 / a4 * (C1y + a7 * \sin(tt7) - ya2 - \\ a3 * \sin(tt3)))^2} - tt3p; \end{aligned}$$

✓ **Aceleraciones angulares**

$$\begin{aligned} tt3pp = (2 / ((e6 - e5)^2 + (-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - \\ e6^2})^2)^2) * (((e6p - e5p) * (-e4p + (e4 * e4p + e5 * e5p - \\ e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2})) + (e6 - e5) * (- \\ e4pp + ((2 * (e4p^2 + e4 * e4pp) + 2 * (e5p^2 + e5 * e5pp) - \\ 2 * (e6p^2 + e6 * e6pp)) * 2 * \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2} - \\ (2 * e4 * e4p + 2 * e5 * e5p - 2 * e6 * e6p) * (2 * e4 * e4p + 2 * e5 * e5p - \\ 2 * e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2})) / (2 * \sqrt{e4^2 + e5^2 - \\ e6^2})^2) - ((-e4p + (e4 * e4p + e5 * e5p - e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - \\ e6^2}) * (e6p - e5p) + (-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) * (e6pp - \\ e5pp)) * [(e6 - e5)^2 + (-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2})^2] - ((e6 - \\ e5) * (-e4p + (e4 * e4p + e5 * e5p - e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) - (- \\ e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) * (e6p - e5p)) * (2 * (e6 - e5) * (e6p - \\ e5p) + 2 * (-e4 + \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2}) * (-e4p + (e4 * e4p + e5 * e5p - \\ e6 * e6p) / \sqrt{e4^2 + e5^2 - e6^2})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tt4pp = ((1 / a4 * C1ypp + a7 / a4 * (- \\ \sin(tt7) * tt7p^2 + \cos(tt7) * tt7pp) - a3 / a4 * (- \\ \sin(tt3) * tt3p^2 + \cos(tt3) * tt3pp)) * \sqrt{1 - \\ ((C1y + a7 * \sin(tt7) - ya2 - \\ a3 * \sin(tt3)) / a4)^2} + (1 / a4 * C1yp + a7 / a4 * \cos(tt7) * tt7p - \\ a3 / a4 * \cos(tt3) * tt3p)^2 * ((C1y + a7 * \sin(tt7) - ya2 - \\ a3 * \sin(tt3)) / a4) / \sqrt{1 - ((C1y + a7 * \sin(tt7) - ya2 - \end{aligned}$$

$$a3 \cdot \sin(tt3) / a4)^2) * 1 / (\text{sqrt}(1 - ((C1y + a7 \cdot \sin(tt7) - ya2 - a3 \cdot \sin(tt3)) / a4)^2)) - tt3pp;$$

✓ Posiciones angulares θ_5 y θ_6 , velocidades y aceleraciones

$$e7 = -2 \cdot C1y \cdot a5 + 2 \cdot ya3 \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot \sin(tt7 + \text{phi})$$

$$e7p = -2 \cdot C1yp \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p$$

$$e7pp = -2 \cdot C1ypp \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 + \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp)$$

$$e8 = -2 \cdot C1x \cdot a5 + 2 \cdot xa3 \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot \cos(tt7 + \text{phi})$$

$$e8p = -2 \cdot C1xp \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p)$$

$$e8pp = -2 \cdot C1xpp \cdot a5 - 2 \cdot a5 \cdot b7 \cdot (-\cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 - \sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp)$$

$$e9 = C1x^2 + C1y^2 - 2 \cdot C1x \cdot xa3 - 2 \cdot C1y \cdot ya3 + xa3^2 + ya3^2 + b7^2 + a5^2 - a6^2 + 2 \cdot C1x \cdot b7 \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) + 2 \cdot C1y \cdot b7 \cdot \sin(tt7 + \text{phi}) - 2 \cdot xa3 \cdot b7 \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) - 2 \cdot ya3 \cdot b7 \cdot \sin(tt7 + \text{phi});$$

$$e9p = 2 \cdot C1x \cdot C1xp + 2 \cdot C1y \cdot C1yp - 2 \cdot C1xp \cdot xa3 - 2 \cdot C1yp \cdot ya3 + 2 \cdot b7 \cdot (C1xp \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) + C1x \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p)) + 2 \cdot b7 \cdot (C1yp \cdot \sin(tt7 + \text{phi}) + C1y \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p) - 2 \cdot xa3 \cdot b7 \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p) - 2 \cdot ya3 \cdot b7 \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p;$$

$$e9pp = 2 \cdot (C1xp^2 + C1x \cdot C1xp1) + 2 \cdot (C1yp^2 + C1y \cdot C1ypp) - 2 \cdot C1xp1 \cdot xa3 - 2 \cdot C1ypp \cdot ya3 + 2 \cdot b7 \cdot ((C1xpp \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) + C1xp \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p)) + [C1xp \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p) + C1x \cdot (-\cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 + C1x \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp)]) + 2 \cdot b7 \cdot ((C1ypp \cdot \sin(tt7 + \text{phi}) + C1yp \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p) + (C1yp \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p + C1y \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 + C1y \cdot \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp)) - 2 \cdot xa3 \cdot b7 \cdot (-\cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 + (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp) - 2 \cdot ya3 \cdot b7 \cdot (-\sin(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7p^2 + \cos(tt7 + \text{phi}) \cdot tt7pp));$$

$$tt5 = 2 \cdot \text{atan}((-e7 + \text{sqrt}(e7^2 + e8^2 - e9^2)) / (e9 - e8));$$

$$tt6 = \text{asin}((C1y + b7 \cdot \sin(tt7 + \text{phi}) - ya3 - a5 \cdot \sin(tt5)) / a6) - tt5;$$

✓ **Velocidades angulares**

$$tt5p=2*((e9-e8)*(-e7p+(e7*e7p+e8*e8p-e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2}))-(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})*(e9p-e8p)/((1+((-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})/(e9-e8))^2)*(e9-e8)^2);$$

$$tt6p=(1/a6*(C1yp+b7*\cos(tt7+phi))*tt7p-a5*\cos(tt5)*tt5p)/\sqrt{1-(1/a6*(C1y+b7*\sin(tt7+phi)-ya3-a5*\sin(tt5)))^2}-tt5p;$$

✓ **Aceleraciones angulares**

$$tt5pp=(2/((e9-e8)^2+(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})^2)^2)*((e9p-e8p)*(-e7p+(e7*e7p+e8*e8p-e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})+(e9-e8)*(-e7pp+(2*(e7p^2+e7*e7pp)+2*(e8p^2+e8*e8pp)-2*(e9p^2+e9*e9pp))*2*\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2}-(2*e7*e7p+2*e8*e8p-2*e9*e9p)*(2*e7*e7p+2*e8*e8p-2*e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})/(2*\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})^2)-((-e7p+(e7*e7p+e8*e8p-e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})*(e9p-e8p)+(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})*(e9pp-e8pp))*[(e9-e8)^2+(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})^2]-((e9-e8)*(-e7p+(e7*e7p+e8*e8p-e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})-(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})*(e9p-e8p)]*(2*(e9-e8)*(e9p-e8p)+2*(-e7+\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2})*(-e7p+(e7*e7p+e8*e8p-e9*e9p)/\sqrt{e7^2+e8^2-e9^2}));$$

$$tt6pp=((1/a6*C1ypp+b7/a6*(-\sin(tt7+phi))*tt7p^2+\cos(tt7+phi)*tt7pp)-a5/a6*(-\sin(tt5)*tt5p^2+\cos(tt5)*tt5pp))*\sqrt{1-((C1y+b7*\sin(tt7+phi)-ya3-a5*\sin(tt5))/a6)^2}+(1/a6*C1yp+b7/a6*\cos(tt7+phi))*tt7p-a5/a6*\cos(tt5)*tt5p^2*((C1y+b7*\sin(tt7+phi)-ya3-a5*\sin(tt5))/a6)/\sqrt{1-((C1y+b7*\sin(tt7+phi)-ya3-a5*\sin(tt5))/a6)^2})*1/(\sqrt{1-((C1y+b7*\sin(tt7+phi)-ya3-a5*\sin(tt5))/a6)^2})^2-tt5pp;$$

$$qpp=[tt1pp \ tt2pp \ tt3pp \ tt4pp \ tt5pp \ tt6pp \ tt7pp]'$$

Dinámica Inversa

$$\begin{aligned} j11 &= -a1*\sin(tt1)-a2*\sin(tt1+tt2); \\ j12 &= -a2*\sin(tt1+tt2); \\ j13 &= a3*\sin(tt3)+a4*\sin(tt3+tt4); \\ j14 &= a4*\sin(tt3+tt4); \end{aligned}$$

PRESENTACIÓN DE INFORME FINAL – TRABAJOS DE GRADO

```
j17=-a7*sin(tt7);
j21=a1*cos(tt1)+a2*cos(tt1+tt2);
j22=a2*cos(tt1+tt2);
j23=-a3*cos(tt3)-a4*cos(tt3+tt4);
j24=-a4*cos(tt3+tt4);
j27=a7*cos(tt7);
j35=a5*sin(tt5)+a6*sin(tt5+tt6);
j36=a6*sin(tt5+tt6);
j37=-b7*sin(tt7+alfa);
j45=-a5*cos(tt5)-a6*cos(tt5+tt6);
j46=-a6*cos(tt5+tt6);
j47=b7*cos(tt7+alfa);

m11=m1*a1^2/3+m2*(a1^2+a2^2/3+a1*a2*cos(tt2))+m7*(a1^2+a2^2+2
*a1*a2*cos(tt2));
m12=m2*(a2^2/3+0.5*a1*a2*cos(tt2))+m7*(a2^2+a1*a2*cos(tt2));
m17=m7*c7*[a1*cos(tt1-tt7-beta)+a2*cos(tt1+tt2-tt7-beta)];
m22=m2*a2^2/3+m7*a2^2;
m27=m7*a2*c7*cos(tt1+tt2-tt7-beta);
m33=m3*a3^2/3+m4*(a3^2+a4^2/3+a3*a4*cos(tt4));
m34=m4*(a4^2/3+0.5*a3*a4*cos(tt4));
m44=m4*a4^2/3;
m55=m5*a5^2/3+m6*(a5^2+a6^2/3+a5*a6*cos(tt6));
m56=m6*(a6^2/3+0.5*a5*a6*cos(tt6));
m66=m6*a6^2/3;
m71=m7*c7*[a1*cos(tt1-tt7-beta)+a2*cos(tt1+tt2-tt7-beta)];
m72=m7*a2*c7*cos(tt1+tt2-tt7-beta);
m77=m7*c7^2+I7;
n1=-
a1*a2*(0.5*m2+m7)*(2*tt1p+tt2p)*tt2p*sin(tt2)+m7*c7*tt7p^2*[a
1*sin(tt1-tt7-beta)+a2*sin(tt1+tt2-tt7-beta)];
n2=a1*a2*(0.5*m2+m7)*tt1p^2*sin(tt2)+m7*a2*c7*tt7p^2*sin(tt1+
tt2-tt7-beta);
n3=-0.5*m4*a3*a4*(2*tt3p+tt4p)*tt4p*sin(tt4);
n4=0.5*m4*a3*a4*tt3p^2*sin(tt4);
n5=-0.5*m6*a5*a6*(2*tt5p+tt6p)*tt6p*sin(tt6);
n6=0.5*m6*a5*a6*tt5p^2*sin(tt6);
n7=-m7*c7*((a1*sin(tt1-tt7-beta)+a2*sin(tt1+tt2-tt7-
beta))*tt1p^2+a2*(2*tt1p+tt2p)*tt2p*sin(tt1+tt2-tt7-beta));

Ma=[m11 m12 0 0 0 0 m17;0 0 m33 m34 0 0 0;0 0 0 0 m55 m56 0];
Mp=[m12 m22 0 0 0 0 m27;0 0 m34 m44 0 0 0;0 0 0 0 m56 m66
0;m71 m72 0 0 0 0 m77];
Na=[n1;n3;n5];
```

PRESENTACIÓN DE INFORME FINAL – TRABAJOS DE GRADO

```
Np=[n2;n4;n6;n7];
Ja=[j11 j13 0;j21 j23 0;j11 0 j35;j21 0 j45];
Jp=[j12 j14 0 j17;j22 j24 0 j27;j12 0 j36 j37;j22 0 j46 j47];
A=[-a2*sin(tt1+tt2) a2*cos(tt1+tt2) -a2*sin(tt1+tt2)
a2*cos(tt1+tt2);a4*sin(tt3+tt4) -a4*cos(tt3+tt4) 0 0;0 0
a6*sin(tt5+tt6) -a6*cos(tt5+tt6);-a7*sin(tt7) a7*cos(tt7) -
b7*sin(tt7+alfa) b7*cos(tt7+alfa)];
R=[m12*tt1pp+m22*tt2pp+m27*tt7pp+n2;m34*tt3pp+m44*tt4pp+n4;m5
6*tt5pp+m66*tt6pp+n6;m71*tt1pp+m72*tt2pp+m77*tt7pp+n7];
Ainv=inv(A);
landa=Ainv*R;
taoC=Ma*qpp+Na-(Ja) '*landa;

taoCv=[taoCv taoC(1,1)];
taoCv2=[taoCv2 taoC(2,1)];
taoCv3=[taoCv3 taoC(3,1)];

iv=[iv i];
plot (iv,taoCv,'r','linewidth',1);hold on;
plot (iv,taoCv2,'b','linewidth',1);hold on;
plot (iv,taoCv3,'k','linewidth',1);hold on;

legend('\tau_1','\tau_2','\tau_3')

hold off
pause (0.01)
end
```