Introducción al cálculo en varias variables

Oscar Lozano Mantilla

Escuela de Ingeniería Escuela de Ingeniería

Universidad Pontificia Bolivariana

Autor

Oscar Lozano Mantilla

Licenciado en Matemáticas y Magíster en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Industrial de Santander. Vinculado con la Universidad Pontificia Bolivariana desde el año 1998, adscrito al Departamento de Ciencias Básicas como Docente Interno. Docente Catedrático de la Universidad Industrial de Santander en la Escuela de Matemáticas entre los años 1995 y 2015, y en la Escuela de Educación en el programa Maestría en Pedagogía en la orientación de Seminarios Disciplinares.

El Magíster Lozano publicó los libros académicos: Introducción Teórica, Ejercicios y Problemas Resueltos de Cálculo Diferencial en el año 2011, en 2016, Introducción Teórica, Ejercicios y Problemas Resueltos de Cálculo Multivariable y actualmente ha publicado el libro académico Introducción al Cálculo en Varias Variables.

Contacto: oscar.lozano@upb.edu.co

515.2
L925

Lozano Mantilla, Óscar, autor
Introducción al cálculo en varias variables / Óscar Lozano Mantilla – Medellín: UPB, Seccional Bucaramanga. 2019.
532 páginas : 16.5 x 23.5 cm.
ISBN: 978-958-764-716-7

1. Cálculo – Enseñanza – 2. Coordenadas (Cálculo) – 3. Variables (Cálculo) – 4. Funciones (Cálculo) – 5. Derivadas (Cálculo) – 6. Integrales (Cálculo) – I. Título

CO-MdUPB / spa / rda
SCDD 21 / Cutter-Sanborn

Introducción al cálculo en varias variables
ISBN: 978-958-764-716-7
Primera edición, 2019
Escuela de Ingenierías
Departamento de Ciencias Básicas
Dirección de Investigaciones y Transferencia - DIT
Seccional Bucaramanga

Arzobispo de Medellín y Gran Canciller UPB: Mons. Ricardo Tobón Restrepo
Rector General: Pbro. Julio Jairo Ceballos Sepúlveda
Rector Seccional Bucaramanga: Presbítero Gustavo Méndez Paredes
Vicerrectora Académica Seccional Bucaramanga: Ana Fernanda Uribe Rodríguez
Decano de la Escuela de Ingenierías: Edwin Dugarte Peña
Director del Departamento de Ciencias Básicas: Pedro Vera Bautista
Gestora Editorial Seccional Bucaramanga: Ginette Rocío Moreno Cañas
Editor: Juan Carlos Rodas Montoya
Coordinación de Producción: Ana Milena Gómez Correa
Ilustraciones para portada: Freepik
Diagramación: Ana Mercedes Ruiz Mejía
Corrección de Estilo: Eduardo Franco Martínez

Dirección Editorial:
Editorial Universidad Pontificia Bolivariana, 2019
Correo electrónico: editorial@upb.edu.co
www.upb.edu.co
Telefax: (57)(4) 354 4565
A.A. 56006 - Medellín - Colombia

Radicado: 1796-10-12-18

Prólogo

En cálculo existen cuatro conceptos fundamentales: límite, continuidad, derivación e integración, los cuales se han estudiado para funciones de una variable en los dos primeros cursos. En este material se desea generalizar dichos conceptos a funciones de varias variables. El libro se divide en nueve capítulos y un apéndice, y se distribuyen de la siguiente manera: en los tres primeros capítulos se recuerdan algunos temas correspondientes a coordenadas polares, coordenadas cilíndricas y esféricas, y superficies. En el cuarto capítulo se trata el concepto de función de varias variables, en los capítulos del quinto al octavo se trabajan los conceptos fundamentales de cálculo, pero, como ya lo hemos mencionado, para funciones de varias variables. En el capítulo noveno trabajamos los campos vectoriales y, finalmente, se hace un apéndice sobre los conceptos de sucesiones y series, puesto que es un tema de gran relevancia para abordar diversas aplicaciones en ingeniería.

Además, como docentes en matemáticas de estudiantes que se encuentran en el ciclo básico de ingenierías, se observa la dificultad que tienen éstos al trabajar la asignatura de cálculo en varias variables. Por esto, buscamos estrategias que ayuden a una mejor comprensión del estudiante, realizando un material con una gran cantidad de ejercicios y problemas resueltos de cálculo en varias variables con los temas contenidos dentro del programa de nuestra universidad para que ayude a los estudiantes a reforzar los temas vistos en clase; este texto contiene para cada capítulo o sección una introducción teórica a cada tema, luego se muestra una buena cantidad de Ejercicios complementarios y, por último, se presentan ejercicios propuestos para que el estudiante pueda reforzar los temas vistos.

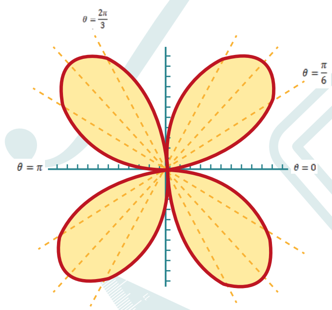
En la realización de este trabajo agradecemos a los autores de los siguientes textos, los cuales hemos tomado como referencia: Cálculo trascendentes tempranas de James Stewart, Cálculo de varias variables de Ron Larson, Cálculo con geometría analítica de Edwin

Purcell, Cálculo de Robert Smith, además de las diferentes fuentes de internet, las que a través de los ejemplos permiten una mayor ilustración en cada caso.

Es nuestro deseo que este material sea aprovechado al máximo por los estudiantes y que sea de ayuda para una mejor comprensión del curso.

El autor

Contenido



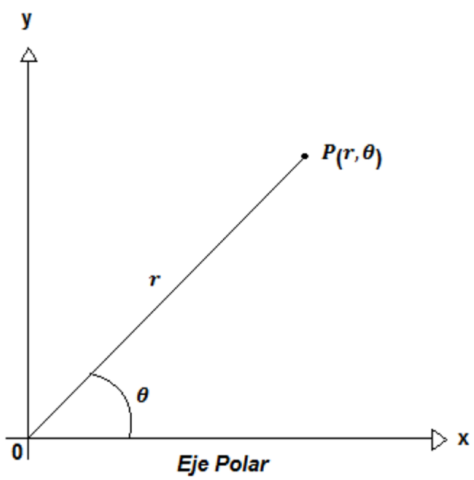
Capítulo I

Coordenadas polares

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general se usan coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema de coordenadas introducido por Newton, llamado "sistema coordenado polar", que es el más conveniente para varios propósitos.

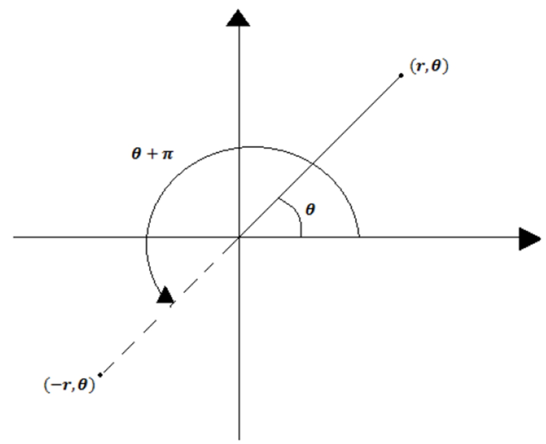
Se elige un punto en el plano que se llama polo (origen) y se identifica 0. Luego se dibuja un rayo (semirecta) que empieza en 0 llamado eje polar. Este eje se traza por lo común horizontalmente a la derecha y corresponde al eje x positivo en coordenadas cartesianas.

Si P es cualquier otro punto en el plano, sea r la distancia de 0 a P y sea θ el ángulo (medido en radianes) entre el eje polar y la recta $0P$, por lo tanto, el punto P se representa mediante otro par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman "coordenadas polares" de P. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = 0$, en tal caso $r = 0$ y $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.



Se extiende el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso donde r es negativa y los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están en la misma

línea que pasa por 0 y a la misma distancia $|r|$ de 0, pero en lados opuestos de 0. Si $r > 0$, el punto $(-r, \theta)$ está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el mismo cuadrante del lado opuesto del polo. Obsérvese que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.



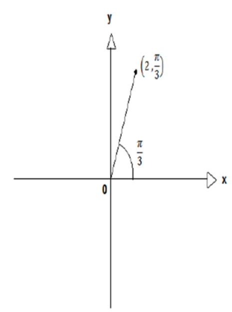
EJEMPLOS

Graficar el punto cuyas coordenadas polares son:

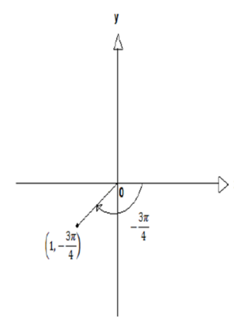
a.) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **b.)** $\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$ **c.)** $\left(-4, \frac{\pi}{4}\right)$

Solución

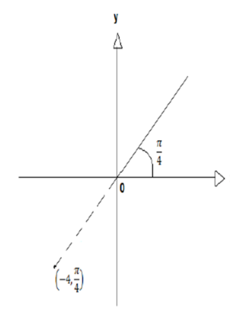
a.)



b.)



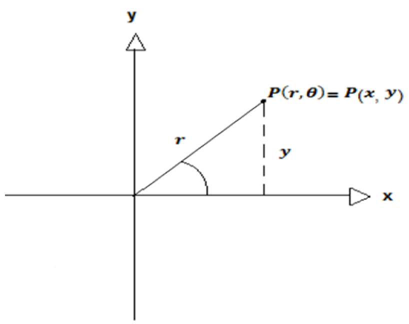
c.)



En el sistema coordenado cartesiano todo punto tiene solo una representación, pero en el sistema de coordenadas polares cada punto tiene infinitas representaciones. Esto es, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se simboliza también por:

$$(r, \theta + 2n\pi) \quad y \quad (-r, \theta + (2n+1)\pi), \; n \in Z$$

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas, en la que el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo es:



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Las ecuaciones anteriores se deducen de la figura para el caso $r > 0$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, pero dichas ecuaciones también son válidas para todos los valores de r y θ. Además, las ecuaciones permiten hallar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, se usan las siguientes ecuaciones, las cuales se pueden deducir de las ecuaciones anteriores

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO

Convierta el punto $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$ de coordenadas polares a cartesianas.

Solución

Puesto que $r = -2$ y $\theta = \frac{3\pi}{4}$, se obtiene:

$$x = r\cos\theta = -2\cos\frac{3\pi}{4} = (-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = (-2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el punto en coordenadas cartesianas es $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

EJEMPLO

Represente el punto con coordenadas cartesianas $(-3, -3)$ en términos de coordenadas polares.

Solución

Si se considera a r como positiva, entonces:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \tan\theta = \frac{-3}{-3} = 1$$

Puesto que el punto $(-3, -3)$ se localiza en el tercer cuadrante, se puede elegir $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$. Así el punto en coordenadas polares es $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Curvas polares

La "gráfica de una ecuación polar" $r = f(\theta)$, consta de todos los puntos $\boldsymbol{P}$ que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

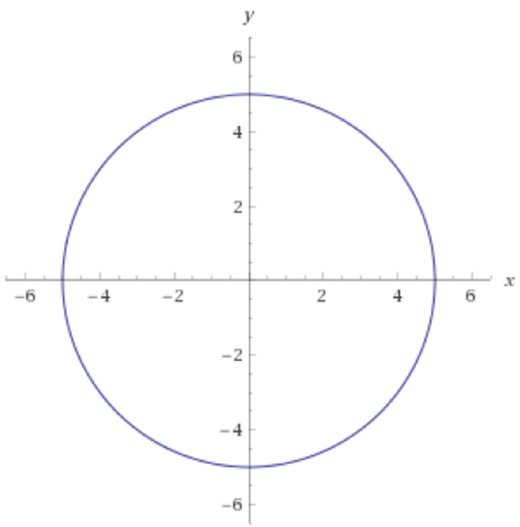
EJEMPLOS

Trace la curva con la ecuación polar dada

1. $r = 5$

Solución

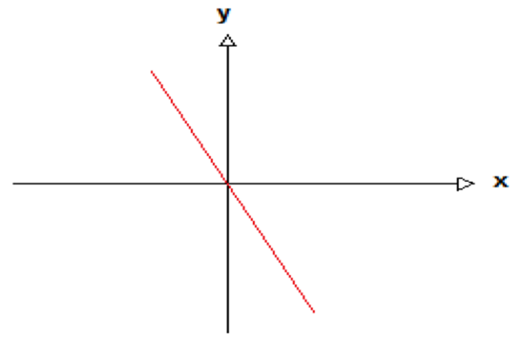
La curva consta de todos los puntos (r, θ) con $r = 5$. Puesto que representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 5$ representa la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 5.



2. $\theta = 2$

Solución

Esta curva consta de todos los puntos (r, θ) tal que el ángulo polar θ es 2 radianes. Es la recta que pasa por $(0, 0)$ y forma un ángulo de 2 radianes con el eje x positivo. Obsérvese que los puntos $(r, 2)$ sobre la línea con $r > 0$ están en el segundo cuadrante, mientras que aquellos con $r < 0$ están en el cuarto cuadrante.

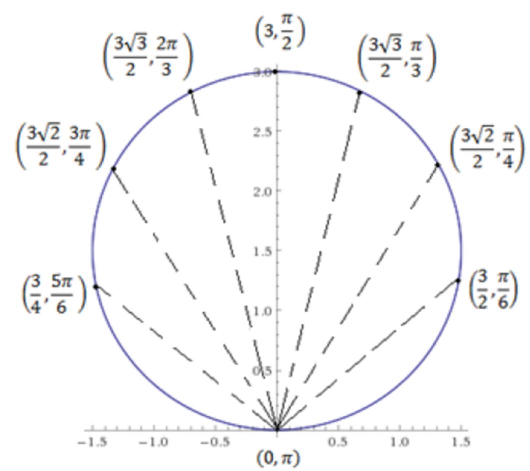


3. $r = 3 \text{ sen } \theta$

Solución

Se debe construir una tabla considerando algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ)

θ	$r = 3 \sin \theta$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	3
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$



$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3}{2}$
π	0

Se han utilizado solo valores de θ entre 0 y π, puesto que si se incrementa entre π y 2π , se obtienen de nuevo los mismos puntos. La curva parece ser una circunferencia, para demostrarlo se pasa la ecuación a coordenadas cartesianas. Esto es,

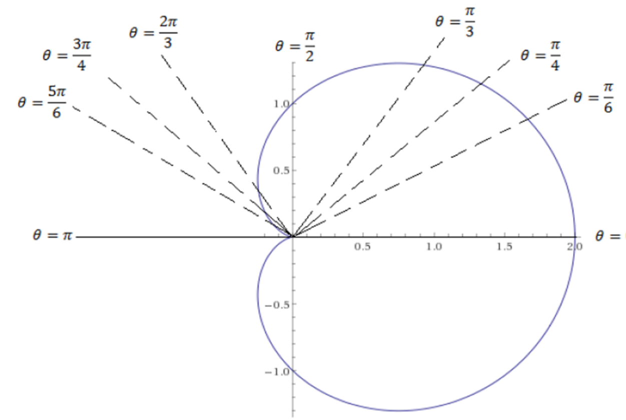
$$r = 3\ sen\ \theta \ \rightarrow\ r^2 = 3r\ sen\ \theta \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 3y \ \rightarrow\ x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

4. $r = 1 + cos\ \theta$

Solución

Al igual que en el ejemplo anterior se construye la tabla de valores y, teniendo en cuenta que la función coseno es par, se tiene que $cos\ \theta = cos\ (-\theta)$. Por tanto, la curva es simétrica con respecto al eje x.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 1 + cos\ \theta$	2	$\frac{(2+\sqrt{3})}{2}$	$\frac{(2+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{(2-\sqrt{2})}{2}$	$\frac{(2-\sqrt{3})}{2}$	0



5. $r = sen\ 2\theta$

Solución

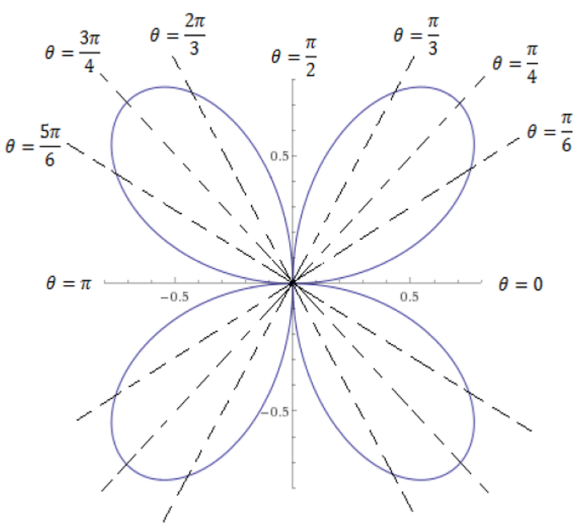
Realizando la tabla se obtiene:

θ	$r = sen\ 2\theta$
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$

θ	$r = sen\ 2\theta$
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{1}{2}$
π	0

$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



Observación

La curva del ejemplo 4 se denomina "cardioide" porque tiene la forma de corazón, y en el ejemplo 5, la curva se denomina "Rosa de cuatro pétalos".

Simetría

Cuando se bosquejan curvas polares es útil aprovechar la simetría. Veamos tres criterios para la simetría en coordenadas polares:

1. Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje x.
2. Si la ecuación sigue igual cuando se reemplaza θ por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto al eje y.
3. Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\pi + \theta$, la curva es simétrica respecto al origen.

Existen algunas curvas en ecuaciones polares, las cuales se pueden considerar exóticas: cardioides (ejemplo 4), limacons, lemniscatas, rosas (ejemplo 5) y espirales. Las ecuaciones polares de estas curvas siguen siendo sencillas, pero las ecuaciones cartesianas de ellas son algo complicadas. A continuación, se presenta la ecuación polar de cada una de ellas.

Cardioides y limacons

La ecuación polar de los cardioides y limacons está dada por

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Con a y b positivos. Si $a = b$ la curva se denomina cardioide y si $a \neq b$ se denomina limacons.

Lemniscatas

La ecuación polar de las lemniscatas es

$$r^2 = \pm\, a \cos 2\theta \qquad r^2 = \pm\, a \operatorname{sen} 2\theta$$

Rosas

Las rosas están determinadas por la ecuación polar

$$r = a \cos n\theta \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

Las rosas tienen n pétalos si n es impar y $2n$ pétalos si n es par.

Espirales

La "espiral de Arquímedes" está dada por $r = a\theta$, y la "espiral logarítmica" es $r = ae^{b\theta}$

Tangentes a curvas polares

Los dos problemas básicos en cálculo son la determinación de la pendiente de una recta tangente y el área de una región plana. Veamos los problemas en coordenadas polares.

Para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva polar $r = f(\theta)$ se considera a θ como un parámetro y se expresan sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r \cos \theta = f(\theta)\ \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Ahora, utilizando el método para hallar pendientes de curvas paramétricas y la regla del producto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta}$$

Observación

Se encuentran rectas tangentes horizontales al determinar los puntos donde $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$). Del mismo modo, se hallan rectas tangentes verticales en los puntos donde $\frac{dx}{d\theta} = 0$ (siempre que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$). Observe que si se están buscando rectas tangentes en el origen (polo), en tal caso, $r = 0$ y la ecuación anterior se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \tan \theta\,, \qquad si\ \ \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

EJEMPLO

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva polar dada en el punto especificado por el valor de $\boldsymbol{\theta}$.

$$r = 2 - \operatorname{sen} \theta\,, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Solución

Utilizando la expresión dada para hallar $\frac{dy}{dx}$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta} = \frac{(-\cos \theta) \operatorname{sen} \theta + (2 - \operatorname{sen} \theta) \cos \theta}{(-\cos \theta) \cos \theta - (2 - \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{-\cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{2 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta - \cos^2 \theta}$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} - \sqrt{3} - \frac{1}{4}} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{11}$$

EJEMPLO

Determine los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

$$r = e^{\theta}$$

Solución

Encontrando $\frac{dx}{d\theta}$ y $\frac{dy}{d\theta}$ se obtiene:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{\theta}(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta = e^{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + e^{\theta}\cos\theta = e^{\theta}(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)$$

Los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal se presentan cuando $\frac{dy}{d\theta} = 0$. Es decir,

$e^{\theta}\,(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta) = 0 \rightarrow \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta = 0 \rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = -\cos\theta \rightarrow \tan\theta = -1 \rightarrow$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \qquad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Entonces, hay rectas tangentes horizontales en los puntos

$$\left(e^{\frac{3\pi}{4}}, \frac{3\pi}{4}\right), \qquad \left(e^{\frac{7\pi}{4}}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Ahora, los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical se presentan cuando $\frac{dx}{d\theta} = 0$. Es decir,

$e^{\theta}\,(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) = 0 \rightarrow \cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta = 0 \rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \cos\theta \rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Por tanto, hay rectas tangentes verticales en los puntos:

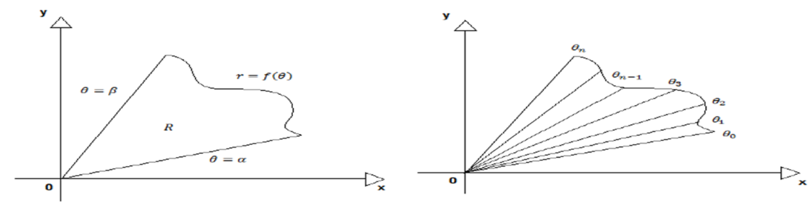
$$\left(e^{\frac{\pi}{4}}, \frac{\pi}{4}\right), \qquad \left(e^{\frac{5\pi}{4}}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

Área y longitud en coordenadas polares

En coordenadas cartesianas, el bloque de construcción fundamental en problemas de área era el rectángulo. En coordenadas polares, es el sector circular. Con base en que el área de un círculo es πr^2, se infiere que el área de un sector con ángulo central de θ radianes es $\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)(\pi r^2)$; es decir,

$$\textit{Área de un sector:}\ A = \frac{1}{2}\theta\, r^2$$

Supóngase que $r = f(\theta)$ determina una curva en el plano, donde f es una función continua, no negativa para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Las curvas $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ determinan una región R.



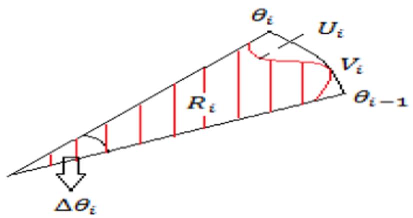
Se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos por medio de números

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Rebanando con esto a R en n regiones más pequeñas $R_1, R_2, \ldots, R_n$, tenemos que

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + \cdots + A(R_n)$$

Se aproxima el área $A(R_i)$ de la i-ésima rebanada; de hecho, se hace de dos formas. En el i-ésimo intervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, alcanza su valor mínimo y su valor máximo, por ejemplo, en u_i y v_i respectivamente. Así, $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$



$$\frac{1}{2}[f(u_i)]^2\Delta\theta_i \leq A(R_i) \leq \frac{1}{2}[f(v_i)]^2\Delta\theta_i$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(u_i)]^2\Delta\theta_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{n}A(R_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[f(v_i)]^2\Delta\theta_i$$

El miembro izquierdo y derecho de esta desigualdad son sumas de Riemann de la misma integral

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

Si se hace tender a cero la norma de la partición, se obtiene (mediante el teorema del emparedado) la expresión para el área

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[r]^2 d\theta$$

EJEMPLO

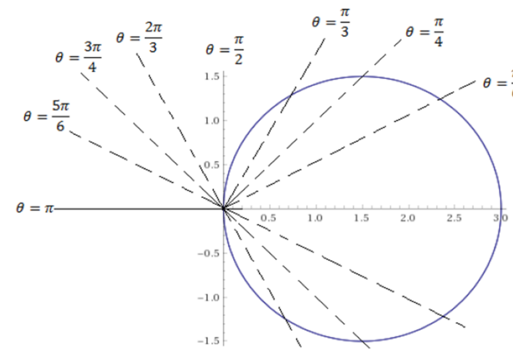
Bosqueje la curva y calcule el área que ella encierra

$$r = 3\cos\theta$$

Solución

Se construye la tabla considerando los valores convenientes de θ.

θ	$r = 3\cos\theta$
0	3
$\frac{\pi}{6}$	$3\sqrt{3}/_2$
$\frac{\pi}{4}$	$3\sqrt{2}/_2$
$\frac{\pi}{3}$	$3/_2$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-3/_2$
$\frac{3\pi}{4}$	$-3\sqrt{2}/_2$
$\frac{5\pi}{6}$	$-3\sqrt{3}/_2$
π	-3



Si se dan los valores a θ entre π y 2π se vuelve a recorrer la curva. Por lo tanto, el área de la región es

$$A(R) = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$A(R) = \frac{9}{4}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{9}{4}\left(\left(\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{9}{4}\pi\, u^2$$

Observación

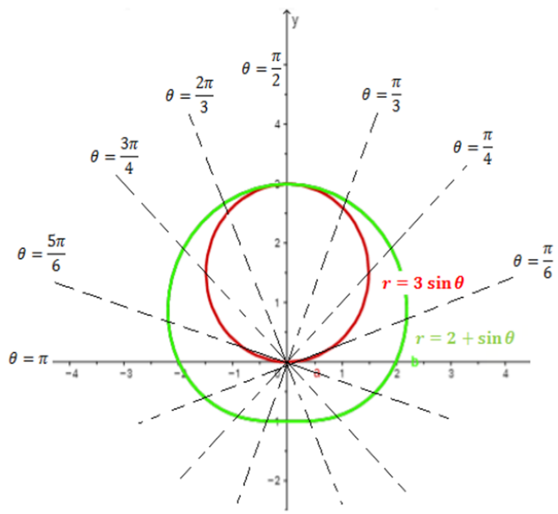
La región plana es un círculo con centro en $\left(\frac{3}{2},0\right)$ y radio $\frac{3}{2}$ luego utilizando la fórmula $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi$ ***unidades cuadradas***. Se verifica el resultado anterior.

EJEMPLO

Determine el área de la región dentro del limacons $r = 2 + sen\ \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 3\ sen\ \theta$

Solución

Inicialmente se bosqueja las dos curvas



A continuación se encuentran los puntos de intersección de las dos curvas. Esto es,

$$3\ sen\ \theta = 2 + sen\ \theta \rightarrow 2\ sen\ \theta = 2 \rightarrow sen\ \theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Hay que tener en cuenta que para graficar el limacons θ varía desde 0 hasta 2π, mientras que para dibujar la circunferencia θ varía desde 0 hasta π. Por lo tanto, para hallar el área de la región dentro del limacons y fuera de la circunferencia, se encuentra el área dentro del limacons y se resta el área dentro de la circunferencia. Por consiguiente,

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(2 + sen\ \theta)^2 d\theta - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(3\ sen\ \theta)^2 d\theta$$

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4 + 4\ sen\ \theta + sen^2\ \theta) d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 9\ sen^2\ \theta\ d\theta$$

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(4 + 4\ sen\ \theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta - \frac{9}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} + 4\ sen\ \theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta - \frac{9}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$A(R) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\theta - 4\cos\theta - \frac{1}{4}sen\ 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen\ 2\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{9}{2}\pi - \frac{9}{4}\pi = \frac{9\pi}{4}\ u^2$$

Longitud de arco

Para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ se considera a θ como un parámetro y se expresan las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\ \cos\theta, \qquad y = r\ sen\ \theta = f(\theta)\ sen\ \theta$$

Utilizando la regla del producto y derivando con respecto a θ, se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\ sen\ \theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}sen\ \theta + r\cos\theta$$

Entonces,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}sen\ \theta\cos\theta + r^2 sen^2\ \theta + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\ \theta$$
$$+2r\frac{dr}{d\theta}sen\ \theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta$$

Simplificando

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 (cos^2\theta + sen^2\theta) + r^2(sen^2\theta + cos^2\theta) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$$

Considerando que f' es continua, entonces la longitud de arco de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \le \theta \le b$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

EJEMPLO

Encuentre la longitud de la curva polar

$$r = 3\,sen\,\theta\,, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Solución

En el tercer ejemplo se graficó la curva dada y se observó que es una circunferencia con centro en $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y radio $\frac{3}{2}$, donde $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$
Por tanto,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(3\,sen\,\theta)^2 + (3\cos\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{9\,sen^2\theta + 9\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{9}\, d\theta = 3\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi \text{ unidades lineales}$$

Ejercicios propuestos

Determine las coordenadas polares de los puntos con las coordenadas cartesianas dadas.

1. $(3\sqrt{3}, 3)$ **2.** $(-2\sqrt{3}, 2)$ **3.** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **4.** $(0, 0)$

5. $\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **6.** $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **7.** $\left(2, \frac{-2\pi}{3}\right)$ **8.** $(3, -4)$

Determine las coordenadas cartesianas de los puntos con las coordenadas polares dadas.

9. $(1, \pi)$ **10.** $\left(2, \frac{-2\pi}{3}\right)$ **11.** $\left(-2, \frac{3\pi}{4}\right)$ **12.** $\left(-\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$

13. $\left(1, \frac{5\pi}{2}\right)$ **14.** $\left(2, \frac{-7\pi}{6}\right)$ **15.** $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **16.** $\left(-3, \frac{\pi}{6}\right)$

Determine la ecuación polar de las ecuaciones cartesianas dadas.

17. $x - 3y + 2 = 0$ **18.** $x - y = 0$

19. $x = 0$ **20.** $y = -2$

21. $x^2 + y^2 = 4$ **22.** $x^2 = 8y$

Determine la ecuación cartesiana de las ecuaciones polares dadas.

23. $\theta = \frac{\pi}{2}$ **24.** $r = 3$

25. $r\cos\theta + 3 = 0$ **26.** $r - 5\cos\theta = 0$

27. $r\,\mathrm{sen}\,\theta - 1 = 0$ **28.** $r^2 - 6r\cos\theta - 4r\,\mathrm{sen}\,\theta + 9 = 0$

Bosqueje la gráfica de la ecuación polar dada.

29. $\theta^2 - \frac{\pi^2}{16} = 0$

30. $(r-3)\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

31. $r \operatorname{sen} \theta + 4 = 0$

32. $r = -4 \sec \theta$

33. $r = 2 \cos \theta$

34. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

35. $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$

36. $r = \frac{4}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

37. $r = 3 - 3 \cos \theta$ (*cardioide*)

38. $r = 5 - 5 \operatorname{sen} \theta$ (*cardioide*)

39. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ (*limaçon*)

40. $r = 4 - 3 \cos \theta$ (*limaçon*)

41. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ (*lemniscata*)

42. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$ (*lemniscata*)

43. $r^2 = -9 \cos 2\theta$ (*lemniscata*)

44. $r^2 = -16 \operatorname{sen} 2\theta$ (*lemniscata*)

45. $r = 5 \cos 3\theta$ (*rosa de tres pétalos*)

46. $r = 3 \operatorname{sen} 3\theta$ (*rosa de tres pétalos*)

47. $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$ (*rosa de cuatro pétalos*)

48. $r = 4 \cos 2\theta$ (*rosa de cuatro pétalos*)

49. $r = 7 \cos 5\theta$ (*rosa de cinco pétalos*)

50. $r = 3 \operatorname{sen} 5\theta$ (*rosa de cinco pétalos*)

51. $r = \frac{1}{2}\theta$, $\theta \geq 0$ (*espiral de Arquímedes*)

52. $r = 2\theta$, $\theta \geq 0$ (*espiral de Arquímedes*)

53. $r = e^{\theta}$, $\theta \geq 0$ (*espiral logarítmica*)

54. $r = e^{\frac{\theta}{2}}$, $\theta \geq 0$ (*espiral logarítmica*)

Bosqueje las curvas dadas y determine sus puntos de intersección.

55. $r = 6$, $r = 4 + 4 \cos \theta$

56. $r = 1 - \cos \theta$, $r = 1 + \cos \theta$

57. $r = 3\sqrt{3} \cos \theta$, $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

58. $r = 5$, $r = \frac{5}{1 - 2\cos \theta}$

59. $r = 6 \operatorname{sen} \theta$, $r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

60. $r^2 = 4 \cos 2\theta$, $r = 2\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$

Bosqueje la gráfica de la ecuación dada y determine el área de la región acotada por ella.

61. $r = 2 + \cos \theta$

62. $r = 5 + 4 \cos \theta$

63. $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$

64. $r = 3 + 3 \operatorname{sen} \theta$

65. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

66. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

67. Bosqueje la limacons $r = 3 - 4 \operatorname{sen} \theta$ y determine el área de la región dentro de su rizo menor.

68. Bosqueje la limacons $r = 2 - 3 \cos \theta$ y determine el área de la región dentro de su rizo mayor.

69. Determine el área de la región encerrada por las dos circunferencias $r = 7$, $r = 10$.

70. Bosqueje la región que está dentro de la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera del cardiode dado $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

71. Bosqueje la región que está fuera de la circunferencia $r = 2$ y dentro de la lemniscata dada $r^2 = 8 \cos 2\theta$ y calcule su área.

72. Bosqueje la región en el primer cuadrante que está dentro del cardiode $r = 3 + 3 \cos \theta$ y fuera del cardiode $r = 3 + 3 \operatorname{sen} \theta$ y determine su área.

73. Determine la longitud del cardiode $r = 1 + \cos \theta$.

74. Determine la longitud de la espiral logarítmica $r = e^{\frac{\theta}{2}}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Encuentre la longitud de la curva polar.

75. $r = 5\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

76. $r = e^{2\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

77. $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

78. $r = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Determine la pendiente de la recta tangente a cada una de las curvas dadas en el valor de especificado.

79. $r = 2\cos\theta, \theta = \frac{\pi}{3}$

80. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

81. $r = \operatorname{sen}2\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

82. $r = 4 - 3\cos\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

83. $r = \cos\frac{\theta}{3}, \quad \theta = \pi$

84. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

85. $r = \frac{1}{\theta}, \quad \theta = \pi$

86. $r = 1 + 2\theta\cos\theta, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

Determine los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.

87. $r = 3\cos\theta$

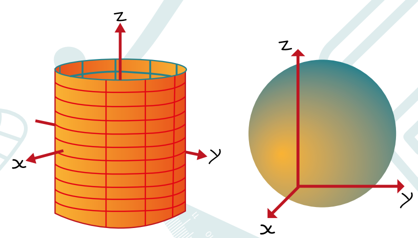
88. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

89. $r = 1 + \cos\theta$

90. $r = e^{\theta}$

91. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

92. $r^2 = \operatorname{sen}2\theta$



Capítulo 2

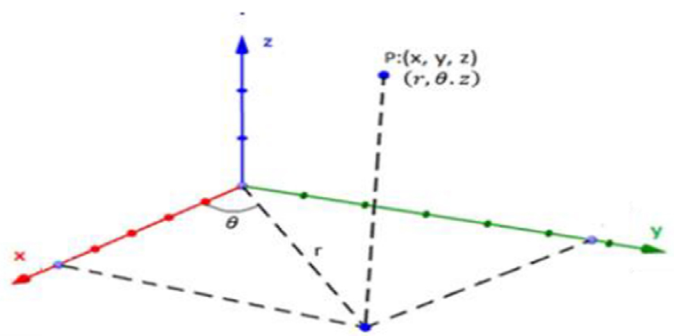
Coordenadas cilíndricas y esféricas

Recordemos que existen algunas curvas que son más fáciles de representar en coordenadas polares. Algo semejante ocurre con las superficies en el espacio. En esta sección revisaremos dos sistemas alternativos de coordenadas espaciales. El primero, el sistema de "coordenadas cilíndricas" que es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional.

Sistema de coordenadas cilíndricas

En un sistema de coordenadas cilíndricas un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z).

a) (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy.
b) z es la distancia dirigida de (r, θ) a P.



Para transformar coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas (o viceversa), se utilizan las siguientes ecuaciones.

- Cilíndricas a rectangulares: $x = r\cos\theta,\ \ y = r\,sen\,\theta,\ \ z = z$

- Rectangulares a cilíndricas: $r^2 = x^2 + y^2,\ \ \tan\theta = \frac{y}{x},\ \ z = z$

Observación

Al punto $(0, 0, 0)$ se le denomina ***polo***. Como la representación de un punto en coordenadas polares no es única, la representación en el sistema de las coordenadas cilíndricas tampoco es única.

EJEMPLO

Convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares

$$\left(4, \frac{\pi}{2}, -2\right)$$

Solución

Usando las ecuaciones de conversión de cilíndricas a rectangulares se obtiene:

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{2} = 4(0) = 0,\ y = r\,sen\,\theta = 4\,sen\,\frac{\pi}{2} = 4(1) = 4,\ z = -2$$

Por tanto, en coordenadas rectangulares el punto es $(0, 4, -2)$.

EJEMPLO

Convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas

$$(-3, 2, -1)$$

Solución

Usando las ecuaciones de conversión de rectangulares a cilíndricas se obtiene:

$$z = -1,\quad r = \pm\sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \pm\sqrt{13}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{-2}{3} = -0.5880026035\ [rad]$$

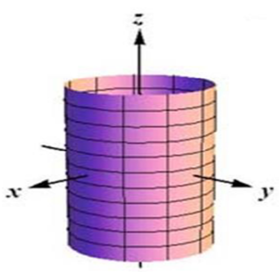
Hay dos posibilidades para r y una cantidad infinita de posibilidades para θ, dos representaciones adecuadas para el punto son:

$\left(\sqrt{13}, 2.5536, -1\right), r > 0$, y θ *en el cuadrante II*.

$\left(-\sqrt{13}, 5.6952, -1\right)$, y θ *en el cuadrante IV*.

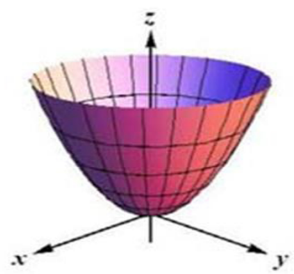
Observación

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas para representar superficies cilíndricas y superficies cuadráticas que tengan a z como el eje de simetría.



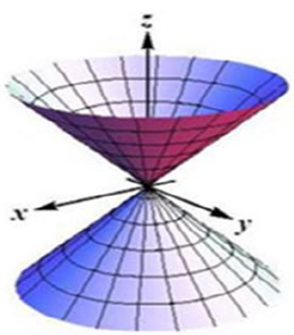
$x^2 + y^2 = a^2$

$r = a$



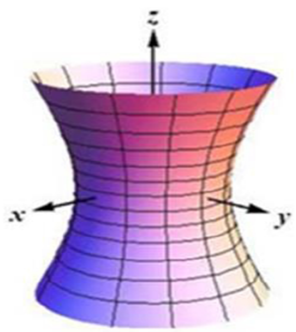
$z = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{z}$



$x^2 + y^2 = z^2$

$r = z$



$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$r^2 = z^2 + 1$

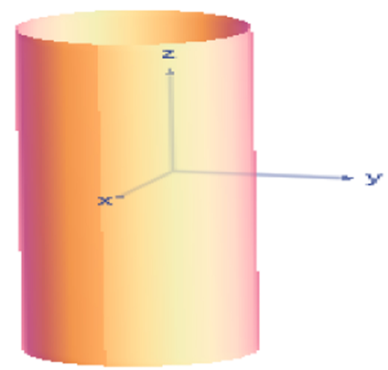
EJEMPLO

Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación dada en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = 8x$

Solución

La gráfica de la superficie $x^2 + y^2 = 8x$, que se puede representar de la forma $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ es un cilindro circular recto. Si se sustituye $x^2 + y^2$ por r^2 y x por $r \cos\theta$, la ecuación en coordenadas cilíndricas es:

$$x^2 + y^2 = 8x \rightarrow r^2 = 8r\cos\theta \rightarrow r = 8\cos\theta$$

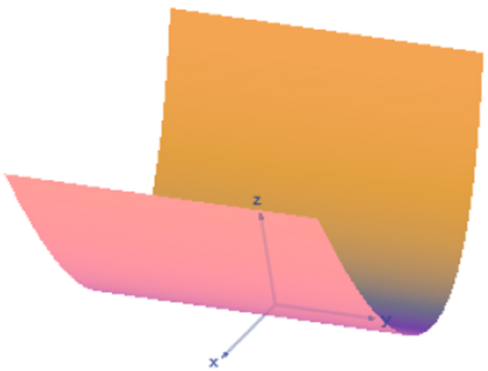


EJEMPLO

Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica $z = r^2\cos^2\theta$

Solución

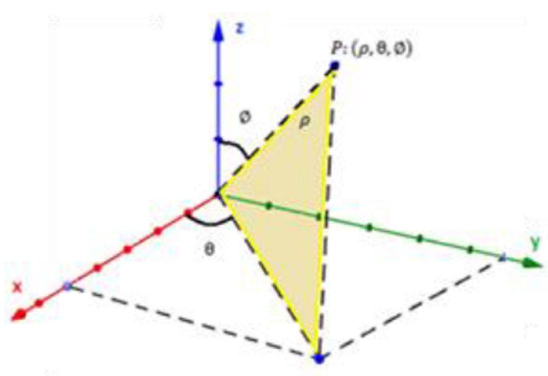
$z = r^2 \cos^2\theta \;\rightarrow\; z = (r\cos\theta)^2 \;\rightarrow\; z = x^2$ (Cilindro parabólico)



Sistema de coordenadas esféricas

En el sistema de coordenadas esféricas, cada punto está representado por una terna ordenada: la primera coordenada es distancia, la segunda y tercera coordenadas son ángulos. Esto es, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada $(\rho, \theta, \emptyset)$.

a) ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$
b) θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$
c) $\emptyset$ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de recta $\overrightarrow{OP}$, $0 \leq \emptyset \leq \pi$



La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas está dada por las ecuaciones:

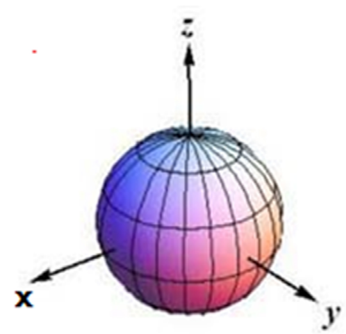
- Esféricas a rectangulares: $x = \rho \, sen\, \emptyset \cos\theta$, $y = \rho \, sen\, \emptyset \, sen\, \theta$, $z = \rho \cos\emptyset$
- Rectangulares a esféricas:
  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \;\; \tan\theta = \frac{y}{x}, \;\; \emptyset = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

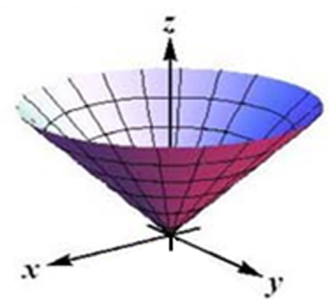
Para cambiar entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, usar lo siguiente:

- Esféricas a cilíndricas: $r^2 = \rho^2 sen^2\,\emptyset$, $\theta = \theta$, $z = \rho\cos\emptyset$
- Cilíndricas a esféricas:
  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \;\; \theta = \theta, \;\; \emptyset = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$

Observación

El sistema de coordenadas esféricas es útil principalmente para superficies en el espacio que tiene un punto o centro de simetría.





ρ = c

$\emptyset = c \; (0 < c < \frac{\pi}{2})$

EJEMPLO

Convertir las coordenadas rectangulares del punto $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ a coordenadas esféricas

Solución

Usando las ecuaciones de conversión de rectangulares a esféricas se obtiene:

$$\rho^2 = (-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2 = 4 + 12 + 16 = 32 \to \rho = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \;\; \to \;\; \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Puesto que el punto P al proyectarse sobre el plano xy se ubica en el segundo cuadrante, entonces $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi$, es decir, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$\emptyset = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{32}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, en coordenadas esféricas, el punto es $\left(4\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$

EJEMPLO

Convertir las coordenadas esféricas del punto $\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ a coordenadas rectangulares

Solución

Usando las ecuaciones de conversión de esféricas a rectangulares se obtiene:

$$x = 5\,sen\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = (5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$y = 5\,sen\frac{3\pi}{4}\,sen\frac{\pi}{4} = (5)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$z = 5\cos\frac{3\pi}{4} = (5)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Por consiguiente, en coordenadas rectangulares el punto es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

EJEMPLO

Hallar una ecuación en coordenadas esféricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares: $x^2 + y^2 = 2z^2$

Solución

Haciendo las sustituciones para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 2z^2 \to \rho^2\,sen^2\emptyset\,\cos^2\theta + \rho^2\,sen^2\emptyset\,sen^2\theta = 2\rho^2\cos^2\emptyset$$

Entonces,

$$\rho^2\,sen^2\emptyset\,(\cos^2\theta + sen^2\theta) = 2\rho^2\cos^2\emptyset \to \rho^2\,sen^2\emptyset = 2\rho^2\cos^2\emptyset \to \tan^2\emptyset = 2$$

EJEMPLO

Encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación en coordenadas esféricas: $\emptyset = \frac{\pi}{6}$

Solución

$$\emptyset=\frac{\pi}{6}\rightarrow cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\pi}{6}\rightarrow\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Multiplicando en cruz se tiene

$$2z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\rightarrow 4z^2=3(x^2+y^2+z^2)\rightarrow 4z^2=3x^2+3y^2+3z^2$$

Simplificando se obtiene el cono que abre sobre el eje z: $z^2=3x^2+3y^2$

Ejercicios propuestos

Convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.

1. $(5,0,2)$ **2.** $\left(2,\frac{\pi}{3},2\right)$ **3.** $\left(6,-\frac{\pi}{4},2\right)$

4. $\left(4,\frac{7\pi}{6},3\right)$ **5.** $\left(1,\frac{3\pi}{2},1\right)$ **6.** $\left(4,\frac{4\pi}{3},-8\right)$

Convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.

7. $(0,5,1)$ **8.** $(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},4)$ **9.** $(1,\sqrt{3},4)$

10. $(2\sqrt{3},-2,6)$ **11.** $(2,-2,-4)$ **12.** $(4\sqrt{3},-4,6)$

Convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

13. $(4,0,0)$ **14.** $(1,1,1)$ **15.** $(2,2,4\sqrt{2})$

16. $(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$ **17.** $(-4,0,0)$ **18.** $(-\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3})$

Convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.

19. $\left(4,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ **20.** $\left(12,\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{9}\right)$ **21.** $\left(12,-\frac{\pi}{4},0\right)$

22. $\left(9,\frac{\pi}{4},\pi\right)$ **23.** $\left(6,\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ **24.** $\left(8,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$

Realice el cambio requerido en la ecuación dada.

25. $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas cilíndricas.

26. $x^2 - y^2 = 25$ a coordenadas cilíndricas.

27. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ a coordenadas cilíndricas.

28. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ a coordenadas esféricas.

29. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 0$ a coordenadas esféricas.

30. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ a coordenadas esféricas.

31. $r^2 + 2z^2 = 4$ a coordenadas esféricas.

32. $\rho = 2\cos\emptyset$ a coordenadas cilíndricas.

33. $x + y = 4$ a coordenadas cilíndricas.

34. $x + y + z = 1$ a coordenadas esféricas.

35. $x^2 + y^2 = 9$ a coordenadas esféricas.

36. $r = 2\, sen\, \theta$ a coordenadas cartesianas.

37. $r^2 \cos 2\theta = z$ a coordenadas cartesianas.

38. $\rho\, sen\emptyset = 1$ a coordenadas cartesianas.

Dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas cilíndricas.

39. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 4$

40. $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le z \le r\cos\theta$

41. $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le a, r \le z \le a$

42. $0 \le \theta \le 2\pi, 2 \le r \le 4, z^2 \le -r^2 + 6r - 8$

Dibujar el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas esféricas.

43. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{6},\ 0 \le \rho \le a \sec\emptyset$

44. $0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \le \emptyset \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 1$

45. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 2$

46. $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le \rho \le 3$

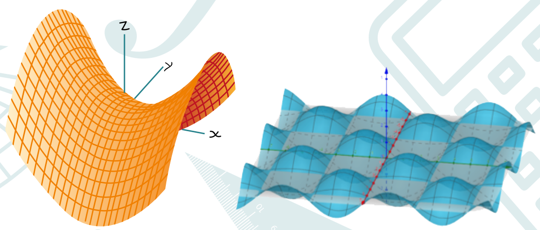
Determinar si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa determinar por qué o dar un ejemplo que pruebe que es falso.

47. En coordenadas esféricas, la ecuación $\theta = c$ representa todo un plano.

48. Las ecuaciones $\rho = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representan la misma superficie.

49. Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son únicas.

50. Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son únicas.



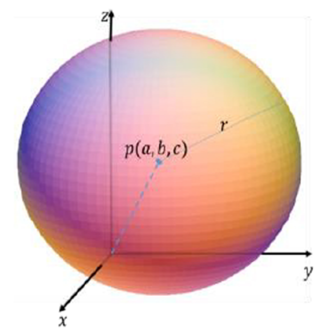
Capítulo 3

Superficies

En esta sección se revisarán los elementos más importantes de cuatro clases de superficies: esferas, planos, cilindros y superficies cuadráticas.

Esferas

Una esfera con centro en (a, b, c) y radio r es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que la distancia entre él y (a, b, c) es r. Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos para encontrar la ecuación canónica de una esfera de radio r, con centro en el punto (a, b, c), si (x, y, z) es un punto arbitrario en la esfera, luego su ecuación está dada por $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$



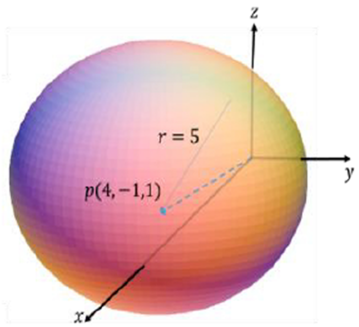
EJEMPLO

Hallar la ecuación canónica de la esfera.

1. Centro: $(4, -1, 1)$ radio: 5

Solución

Sustituyendo los valores de las componentes del punto y el radio obtenemos la ecuación canónica $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 5^2 = 25$



2. Puntos terminales de un diámetro: $(2, 0, 0)$ y $(0, 6, 0)$.

Solución

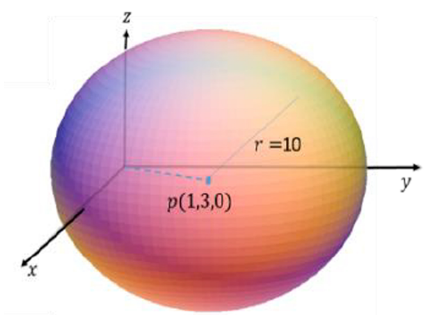
Inicialmente se encuentran el centro de la esfera (punto medio entre los extremos del diámetro) y el radio (mitad de la distancia entre los puntos extremos del diámetro). Así,

Centro: $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (1,3,0)$

Radio: $\frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2+(0-6)^2+(0-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \frac{1}{2}2\sqrt{10} = \sqrt{10}$

Por lo tanto, la ecuación canónica de la esfera es:

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-0)^2 = \sqrt{10}^2 = 10$$



EJEMPLO

Completar cuadrados para hallar la ecuación canónica de la esfera. Encontrar el centro y el radio:

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x-32y+8z+33=0$$

Solución

Se agrupan los términos en cada variable y se extrae el factor común 4.

$$4(x^2-x)+4(y^2-8y)+4(z^2+2z)=-33$$

Se completan cuadrados sumando en el primer término $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, en el segundo $\left(\frac{8}{2}\right)^2$ y en el tercero $\left(\frac{2}{2}\right)^2$. De ahí,

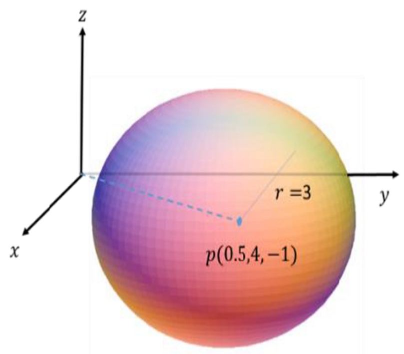
$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4(y^2-8y+16)+4(z^2+2z+1)=1+64+4-33$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4(y-4)^2+4(z+1)^2=36$$

Dividiendo entre 4 se obtiene la ecuación canónica:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$$

El centro de la esfera es $\left(\frac{1}{2},4,-1\right)$ y el radio es 3.



Planos en el espacio

Dos elementos importantes para encontrar la ecuación canónica de una esfera son el centro y el radio, de igual forma los dos elementos para hallar la ecuación de un plano en el espacio son un punto del plano y un vector normal (perpendicular) al plano.

Sea $P(x, y, z)$ un punto del plano y $\vec{n} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$ un vector normal (no nulo), entonces el plano es el conjunto de puntos $Q(x, y, z)$ para los cuales PQ es ortogonal al vector n. Recordando, dos vectores son ortogonales si el producto punto entre ellos es cero, por lo tanto, se tiene que:

$$(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}) \cdot \left((x - x_1)\hat{\imath} + (y - y_1)\hat{\jmath} + (z - z_1)\hat{k}\right) = 0$$

Es decir, $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

Reagrupando términos, se obtiene la ecuación general $ax + by + cz = d$, donde $d = ax_1 + by_1 + cz_1$

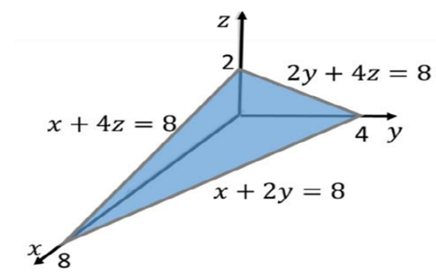
Trazados de planos en el espacio

Si un plano en el espacio corta uno de los planos coordenados, a la recta de intersección se le llama "***traza***" del plano dado. Para dibujar un plano en el espacio, es útil hallar sus puntos de intersección con los ejes coordenados y las trazas en los planos coordenados.

EJEMPLO

Dibujar el plano $x + 2y + 4z = 8$

Solución. Haciendo $z = 0$ se puede hallar la traza $x + 2y = 8$ (recta), si $y = 0$, la traza está dada $x + 4z = 8$ (recta) y si $x = 0$ su traza es $2y + 4z = 8$ (recta). Por lo tanto, dibujando las tres rectas se obtiene la gráfica del plano.



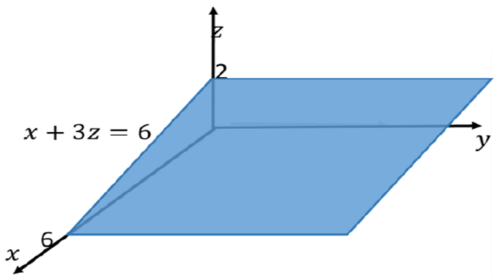
Si en la ecuación del plano está ausente una variable, el plano debe ser paralelo al eje correspondiente a la variable ausente.

EJEMPLO

Dibuje el plano $x + 3z = 6$

Solución

Se grafica la recta $x + 3z = 6$ en el plano xz y se desplaza sobre todo el eje y (variable ausente).

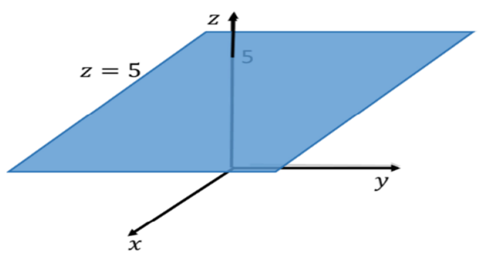


Si en la ecuación del plano faltan dos variables, este es paralelo al plano coordenado correspondiente a las variables ausentes.

EJEMPLO

Dibuje el plano $z = 5$

Solución



EJEMPLO

Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.

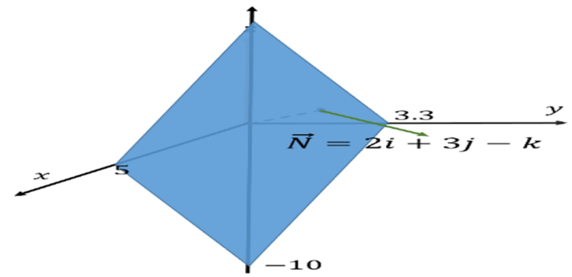
1. $(3, 2, 2)$; $n = 2i + 3j - k$

Solución

Sustituyendo los componentes del punto y el vector normal en la ecuación canónica se tiene:

$$2(x - 3) + 3(y - 2) - 1(z - 2) = 0$$

Resolviendo se obtiene: $2x + 3y - z = 10$



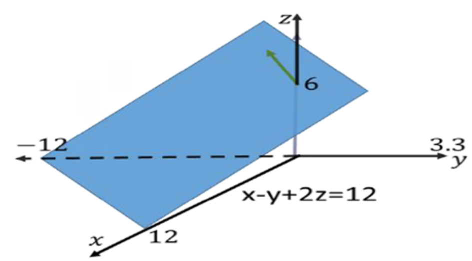
2. $(0,0,6)$; $x = 1 - t, y = 2 + t, z = 4 - 2t$

Solución

Puesto que el plano es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas dadas, se tiene que también debe ser perpendicular al vector director de la recta, por tanto $n = -i + j - 2j$. Como en el ejemplo anterior se tiene:

$$-1(x - 0) + 1(y - 0) - 2(z - 6) = 0$$

De ahí, se obtiene: $-x + y - 2z = -12$ o $x - y + 2z = 12$



3. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(2, 3, -2)$, $(3, 4, 2)$, $(1, -1, 0)$

Solución

Hay tres opciones para el punto, pero no se tiene el vector normal. Para obtener el vector perpendicular se construyen dos vectores u y v con los tres puntos dados y considerando el mismo punto inicial para los dos vectores. Analizando

$u = (3, 4, 2) - (2, 3, -2) = i + j + 4k$
$v = (1, -1, 0) - (2, 3, -2) = -i - 4j + 2k$

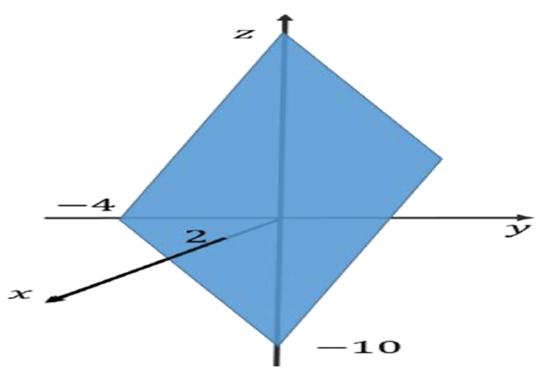
Por tanto:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (2+16)i - (2+4)j + (-4+1)k = 18i - 6j - 3k$$

Y tomando el punto $(1, -1, 0)$ se resuelve como en los ejemplos anteriores

$$18(x-1) - 6(y+1) - 3(z-0) = 0$$

Es decir, $18x - 6y - 3z = 24$. Simplificando, se tiene finalmente la ecuación $6x - 2y - z = 8$



Observación

Verifique que, si se considera cualquiera de los otros puntos dados, la ecuación del plano es igual.

Cilindros

Un tercer tipo de superficies en el espacio son los cilindros. Sea C una curva en el plano y L una recta no paralela a ese plano. Al conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se le denomina "cilindro". A la curva C se le llama "curva generadora" (o directriz) del cilindro y a las rectas paralelas a L se les designan "rectas generatrices".

Observación

Para nuestro interés se considera que C se encuentra en uno de los tres planos coordenados y que las rectas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C (cilindros rectos).

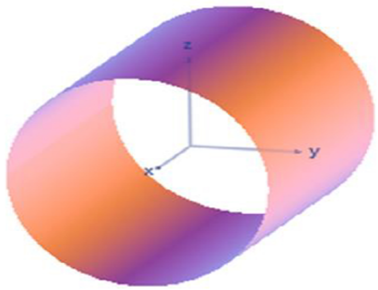
La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados contiene solo las variables correspondientes a los otros dos ejes.

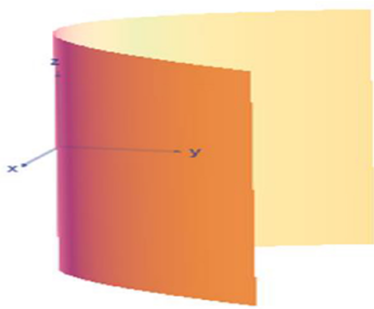
EJEMPLO

Dibujar los cilindros dados

Solución

$y^2 + z^2 = 9$ $\qquad\qquad$ $x^2 - y = 0$





Superficies cuadráticas

El cuarto tipo de superficies en el espacio son las cuadráticas, equivalentes en R^3 a las cónicas en R^2. La ecuación de una "superficie cuadrática" en el espacio es una ecuación de segundo grado de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Son seis tipos básicos de superficies cuadráticas: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico.

A la intersección de una superficie con un plano se le llama la "traza de la superficie" en el plano. Para visualizar una superficie en el espacio, es útil determinar sus trazas en algunos planos elegidos adecuadamente. Las trazas de la superficie son cónicas. Estas trazas, junto con la forma canónica o estándar de la ecuación de cada superficie cuadrática, se muestran en la siguiente tabla.

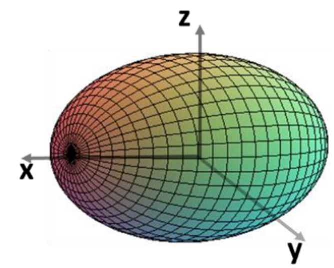
ELIPSOIDE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La superficie es una esfera si

$$a = b = c \neq 0$$

TRAZA	PLANO
Elipse	Paralelo al plano xy
Elipse	Paralelo al plano xz
Elipse	Paralelo al plano yz

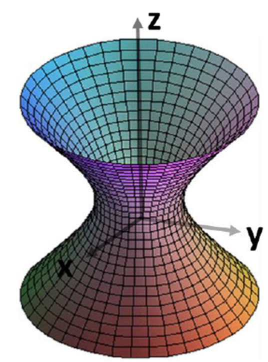


HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

TRAZA	PLANO
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo

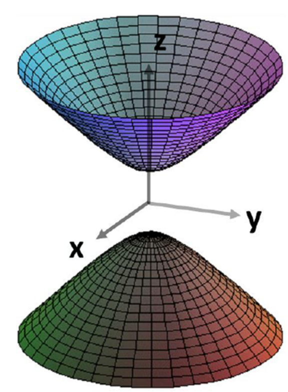


HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

TRAZA	PLANO
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.

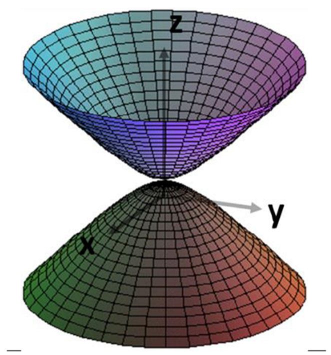


CONO ELÍPTICO

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

TRAZA	PLANO
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los ejes coordenados paralelos a este eje con rectas que se cortan.

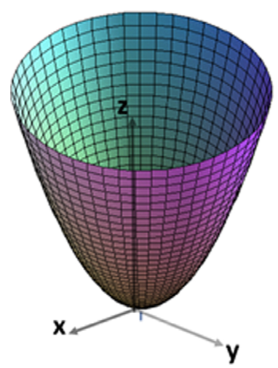


PARABOLOIDE ELÍPTICO

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

TRAZA	PLANO
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide elíptico corresponde a la variable lineal.

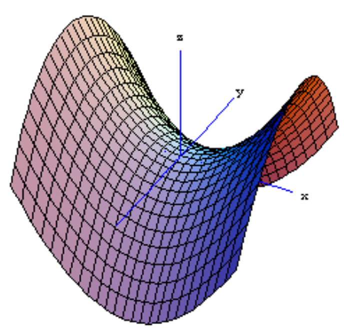


PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

$$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

TRAZA	PLANO
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide hiperbólico corresponde a la variable lineal.



Para clasificar una superficie cuadrática, se comienza por expresar la superficie en la forma canónica o estándar. Después, se determinan varias trazas en los planos coordenados o en planos paralelos coordenados.

EJEMPLO

Identificar y dibujar la superficie cuadrática

1. $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$

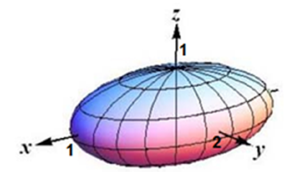
Solución

La superficie es un elipsoide. Las trazas en los planos coordenados son:

Traza xy $(z=0)$; $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ (elipse)

Traza xz $(y=0)$; $x^2+z^2=1$ (circunferencia)

Traza yz $(x=0)$; $\frac{y^2}{4}+z^2=1$ (elipse)



2. $16x^2-y^2+16z^2=4$

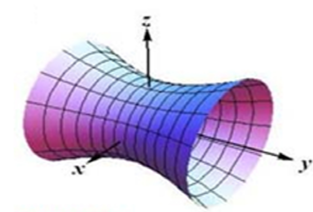
Solución

La superficie es un hiperboloide de una hoja con y como su eje. La ecuación canónica o estándar es $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}=1$ y sus trazas principales son:

Traza xy $(z=0)$; $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{4}=1$ (hipérbola)

Traza xz $(y=0)$; $x^2+z^2=\frac{1}{4}$ (circunferencia)

Traza yz $(x=0)$; $-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{\frac{1}{4}}=1$ (hipérbola)



3. $z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

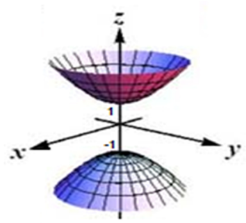
Solución

La superficie es un hiperboloide de dos hojas con z como su eje. Las trazas en los planos coordenados son:

Traza xy $(z = 0)$; $x^2 + \frac{y^2}{4} = -1$ (no hay trazas)

Traza xz $(y = 0)$; $z^2 - x^2 = 1$ (hipérbola)

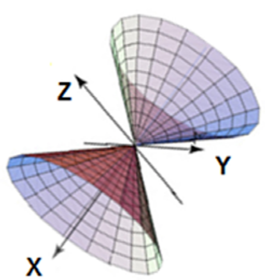
Traza yz $(x = 0)$; $z^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (hipérbola)



4. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$

Solución

La superficie es un cono con el eje x como su eje.

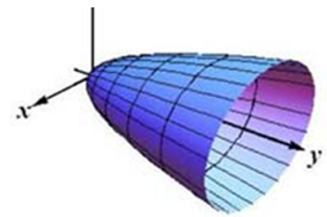


5. $x^2 - y + z^2 = 0$

Solución

La superficie es un paraboloide elíptico con y como su eje. La ecuación canónica o estándar es $y = x^2 + z^2$. Algunas trazas útiles son:

Traza xy $(z = 0)$; $y = x^2$ (parábola)
Traza yz $(x = 0)$; $y = z^2$ (parábola)
Paralelo al plano xz $(y = 4)$; $x^2 + z^2 = 4$ (circunferencia)



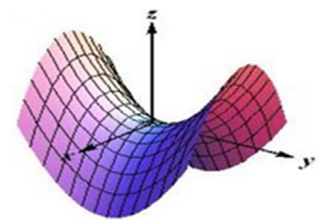
6. $3z = x^2 - y^2$

Solución

La superficie es un paraboloide hiperbólico con z como su eje. Algunas trazas útiles son:

Traza xz $(y = 0)$; $z = \frac{1}{3}x^2$ (parábola)

Traza yz $(x = 0)$; $z = -\frac{1}{3}y^2$ (parábola)



Paralelo al plano xy $(z = \frac{1}{3})$; $x^2 - y^2 = 1$ (hipérbola)

Paralelo al plano xy $(z = -\frac{1}{3})$; $y^2 - x^2 = 1$ (hipérbola)

Ejercicios propuestos

Hallar la ecuación estándar de la esfera.

1. Centro: $(1, 2, 5)$ y radio 2

2. Puntos terminales de un diámetro: $(1, 2, 4)$,$(0, 6, -2)$

3. Centro $(-3, 2, 4)$, tangente al plano yz

4. Centro: $(3, 8, 1)$, pasa por el punto $(4, 3, -1)$

5. Centro: $(1, 2, 3)$, pasa por el origen

Completar los cuadrados para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Hallar el centro y el radio.

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$

7. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

8. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

9. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

10. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 2z = 1$

Hallar una ecuación del plano.

11. El plano que pasa por $(2, -1, 3)$ y es perpendicular al vector $n = i - 3j + 2k$.

12. El plano que pasa por $(5, -3, -2)$ y es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas: $x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 4t$.

13. El plano que pasa por: $(2, 3, -2)$, $(3, 4, 2)$,$(1, -1, 0)$.

14. El plano que pasa por: $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(-1, -2, 2)$.

15. El plano que pasa por el punto $(1, -2, 3)$ y es paralelo al plano yz.

16. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano xy.

17. El plano contiene el eje y y forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el eje x positivo.

18. El plano contiene las rectas dadas por: $\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z$ y $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

19. El plano que pasa por el punto $(2, 2, 1)$ y contiene la recta dada por $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z$

20. El plano que pasa por los puntos $(2, 2, 1)$ y $(-1, 1, -1)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.

21. El plano que pasa por los puntos $(1, -2, -1)$ y $(2, 5, 6)$ y es paralelo al eje x.

22. El plano que pasa por los puntos $(4, 2, 1)$ y $(-3, 5, 7)$ y es paralelo al eje z.

Describa y trace la gráfica de la superficie dada.

23. $x = -1$

24. $y = 8x$

25. $2x - y + 3z = 6$

26. $x^2 + z^2 = 25$

27. $y^2 + z = 4$

28. $4x^2 + y^2 = 4$

29. $y^2 - z^2 = 4$

30. $z - \text{sen}\, y = 0$

31. $z - e^y = 0$

32. $z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12$

33. $4x^2 - 9y^2 + z^2 + 36 = 0$

34. $z = x^2 + y^2 + 1$

35. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$

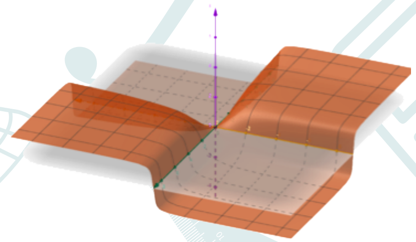
36. $4x = y^2 - 2z^2$

37. $x^2 - y^2 + 4y + z = 4$

38. $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$

39. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$

40. $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 54x - 4y - 54z + 4 = 0$



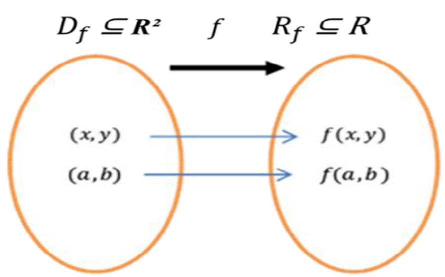
Capítulo 4

Funciones de varias variables

Hasta el momento se han estudiado funciones de valor real en una variable independiente determinadas por $y = f(x)$, en donde el dominio y el recorrido son subconjuntos de los números reales y funciones vectoriales de la forma $f(t)$, cuyo dominio es un subconjunto de los números reales, pero el recorrido es un conjunto de vectores en dos o más dimensiones. En este capítulo, ampliamos nuestro concepto de función para incluir funciones que dependen de más de una variable, o sea funciones cuyo dominio es multidimensional.

Funciones de dos variables

Sea D un conjunto de pares ordenados (x, y). Si a cada par (x, y) le corresponde un único valor $f(x, y)$ se dice que f es función de x e y. Al conjunto D se le denomina dominio de f y al conjunto de valores $f(x, y)$ recorrido de f.



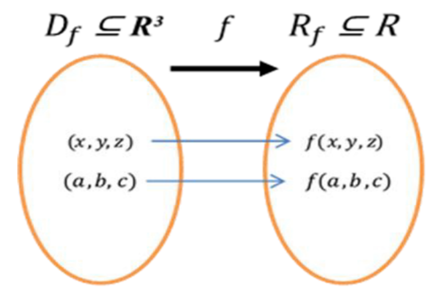
EJEMPLOS.

1. $f(x, y) = 4x^2 y + e^{xy^2}$

2. $f(x, y) = tan^{-1}(y^2 - 5) - x^2 \ \ln xy$

Funciones de tres variables

Sea D un conjunto de ternas ordenadas (x, y, z). Si a cada terna le corresponde un único valor $f(x, y, z)$ se dice que f es una función de x, y, z.



EJEMPLOS

1. $f(x, y, z) = \frac{14xy^3}{2x^3+z} + y^3 \operatorname{sen}(x + 3z^2)$

2. $f(x, y, z) = x^{y/z} - \sqrt{xyz}$

El concepto de función se extiende a n-variables de forma similar. Esto es, a cada n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ del dominio de f, le corresponde un único valor $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Pero, la presente sección se centra en funciones de dos y tres variables para el análisis e interpretación geométrica.

A menos que se especifique de otro modo, se toma como dominio de una función de varias variables $(2 \text{ y } 3)$, el conjunto de todas las parejas o ternas para las cuales está definida la función.

EJEMPLO

Determine y dibuje el dominio de la función dada.

1. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Solución

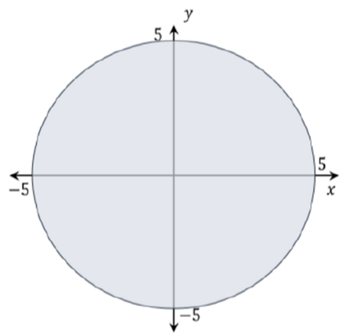
El dominio de la función f consta de todas la parejas (x, y) del conjunto

$D_f = \{(x, y): 25 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

Para graficar esta región, partimos de la ecuación

$$25 - x^2 - y^2 = 0 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Esta ecuación representa una circunferencia con centro en el origen y radio 5.



Se observa que todos los puntos de la circunferencia pertenecen al dominio porque representa la igualdad. Para determinar qué puntos del plano satisfacen la desigualdad, consideramos un punto dentro de la circunferencia (por ejemplo $(2, 1)$) y otro fuera de la circunferencia (por ejemplo $(6, 0)$), veamos cuál de los dos puntos satisface dicha desigualdad.

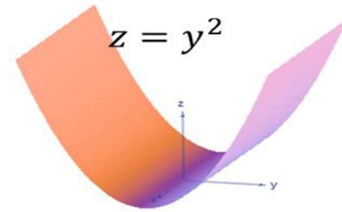
a) Para $(2, 1)$, tenemos $25 - (2)^2 - (1)^2 = 20 > 0$ (cumple).
b) Para $(6, 0)$, tenemos $25 - (6)^2 - (0)^2 = -11 < 0$ (no cumple).

2. $f(x,y,z) = \frac{x^2+2yz}{y^2-z}$

Solución

El dominio de la función f consta de todas las ternas (x, y, z) donde $y^2 - z \neq 0$. Esto es,

$$D_f = \{(x, y, z): z \neq y^2\}$$

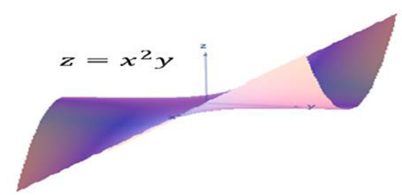


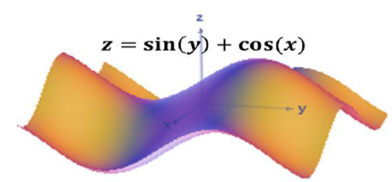
Para dibujar el conjunto se tiene en cuenta que la gráfica de la ecuación $z = y^2$ en el espacio es un cilindro parabólico. Por lo tanto, el dominio de la función consta de todos los puntos del espacio que se encuentran fuera del cilindro parabólico.

Gráfica de una función de dos variables

La gráfica de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f. La gráfica de una función f de dos variables recibe el nombre de superficie.

Veamos la gráfica de dos superficies





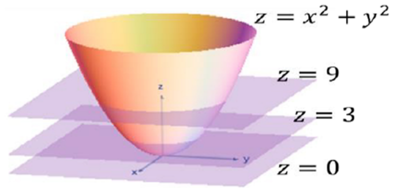
Curvas de nivel

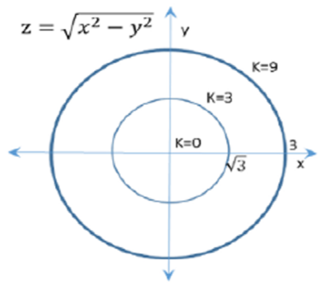
Sean $z = f(x, y)$ una superficie y $z = k$ un plano que corta a la superficie en una curva C. La proyección de C sobre el plano xy se denomina una curva de nivel y el conjunto de varias curvas de nivel se denomina un mapa de contorno.

EJEMPLO

Dibuje las curvas de nivel para la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y los siguientes valores $k = 0, 3, 9$

Solución





La proyección de las curvas de intersección C sobre el plano xy está dada por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 3,\ x^2 + y^2 = 9$$

Superficies de nivel

Las superficies de nivel para la función $f(x, y, z)$ y los valores de k están dados por la ecuación $f(x, y, z) = k$

EJEMPLO

Dibuje las superficies de nivel para la función $f(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$ y los valores de $k = 0, -2, 2$.

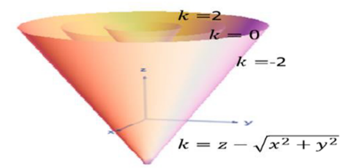
Solución

Las superficies de nivel de la función para los valores dados son semiconos y están determinadas por las ecuaciones:

$$z - \sqrt{x^2+y^2} = 0 \longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z - \sqrt{x^2+y^2} = 2 \longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2} + 2$$

$$z - \sqrt{x^2+y^2} = -2 \longrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2} - 2$$



Algunos ejemplos prácticos de las curvas de nivel son:

En topografía. Si se desea representar sobre un plano horizontal la topografía de una región, en donde se dispone de información relativa de la altura, referente a una posición geográfica (latitud, longitud), se puede realizar trazando líneas que unen los puntos que tienen el mismo nivel denominadas isolineas. Estas isolineas, permiten la definición de un mapa en donde se pueden identificar los puntos más altos y más bajos del terreno, las zonas planas y los sectores de fuerte pendiente. En términos generales, el mapa de curvas de nivel entrega valiosa información sobre las características de un lugar, que tiene gran relevancia en el estudio de planeación y desarrollo de obras civiles, usos agrícolas y pecuarios, ordenamiento territorial, entre otras.

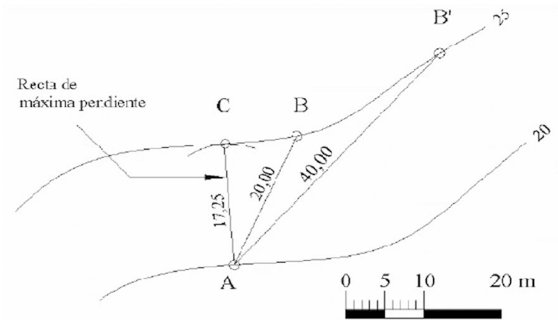
En temperatura. Si se realiza el procedimiento anterior con la información de la temperatura en un punto y se trazan las líneas, se obtiene un mapa de curvas de igual temperatura llamadas isotermas, las cuales nos indican las regiones de temperaturas altas y bajas, igualmente, en donde la temperatura no cambia mucho espacialmente.

De la misma manera que en los procesos anteriores, se pueden construir curvas de presión (llamadas isobaras), las cuales se relacionan con la información de altura y temperatura, siendo estas de gran importancia en el análisis de información meteorológica.

Cálculo de pendientes. La pendiente de un terreno entre dos puntos ubicados en dos curvas de nivel consecutivas es igual a la revelación entre el intervalo de las curvas de nivel o equidistancia y la distancia longitudinal que los separa

$$P = \frac{e}{D} * 100$$

Donde: P = pendiente del terreno en %, e = equidistancia entre las curvas de nivel, D = distancia horizontal entre los puntos considerados.



La figura repesenta un plano de curvas de nivel equidistantes $e = 5\ m$.

Como los mapas topográficos representan la proyeccion del terreno sobre el plano horizontal todas las distancias que midamos sobre él son distancias en proyeccion horizontal.

Para calcular la pendiente del terreno entre los puntos A y B de la figura medimos directamnere con el escalímetro a la escala indicada, la distancia AB (20 m) y aplicamos la ecuacion

$$P = \frac{e}{D} * 100 = \frac{5}{20} * 100 = 25\%$$

Si en la figura, en vez de calcular la pendiente entre A y B, calculamos la pendiente entre A y B', vemos que para salvar el mismo desnivel de 5 m la distancia horizontal es de 40 m, por lo que la pendiente entre A y B' sera:

$$P = \frac{e}{D} * 100 = \frac{5}{40} * 100 = 12.5\%$$

Como la pendiente entre dos puntos es inversamente proporcional a la distancia horizontal, la recta máxima pendiente entre dos curvas consecutivas se obtendrá para la distancia menor entre las curvas, siendo determinada por una línea tangente a las dos curvas consecutivas, como se muestra en la figura por la línea AC.

Ejercicios complementarios

1. Sea $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

a) Evalue $f(e,1) = \ln(e + 1 - 1) = \ln(e) = 1$
b) Evalue $f(1,1) = \ln(1+1-1) = \ln(1) = 0$
c) Encuentre el dominio de f. El dominio es $D_f = \{(x, y): x + y - 1 > 0\}$
d) Encuentre la imagen de f. La imagen de la función es $R_f = R$

2. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

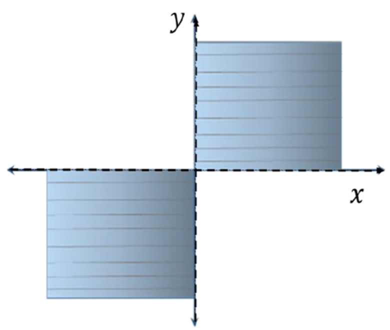
a) Evalúe $f(3, 6, 4) = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (4)^2 - 1} = \sqrt{60}$
b) Encuentre el dominio de f. El dominio es $D_f = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 - 1 \geq 0\}$
c) Encuentre la imagen de f. La imagen de la función es $R_f = [0,\infty)$

Encuentre y trace el dominio de la función dada.

3. $f(x, y) = \ln xy$

Solución

El dominio de la función es el conjunto de todos los puntos del plano donde el producto de las dos componentes es positiva.



Esto es,

$$D_f = \{ (x, y)\ x \cdot y > 0\}$$

La gráfica es el conjunto de puntos de los cuadrantes I y III sin inlcuir los ejes.

4. $f(x, y) = \ln x \ln y$

Solución

El dominio está formado por los puntos del I cuadrante sin incluir los ejes.

5. $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 25y^2}$

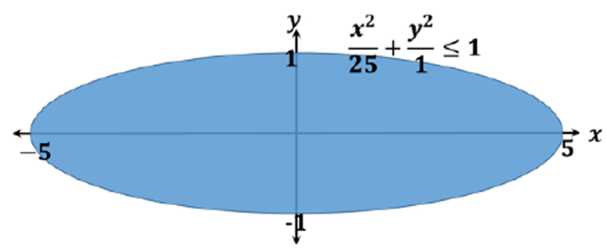
Solución

Puesto que la función radical tiene índice par, el argumento debe ser no negativo, luego, $D_f = \{ (x, y): 25 - x^2 - 25y^2 \geq 0\}$

Para graficar este conjunto partimos de la ecuacion

$$25 - x^2 - 25y^2 = 0 \leftrightarrow x^2 + 25y^2 = 25 \leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{1} = 1$$

La ecuacion anterior representa una elipse con centro en el origen, cuya grafica es:



Para determinar cuál de las dos regiones del plano representa que el argumento sea mayor que cero, consideramos dos puntos uno dentro de la elipse y otro fuera de ella y se evalúa en el dominio para determinar cuál de los dos da como resultado un número positivo. Entonces

Para (3, 0), tenemos $25 - 3^2 - 25(0)^2 = 16 > 0$.
Para (5, 1), tenemos $25 - 5^2 - 25(1)^2 = -25 < 0$.

Por tanto, el dominio de la función es el conjunto de puntos que están dentro y sobre la elipse.

6. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(1 + 2x^2 + 4y^2)}}$

Solución

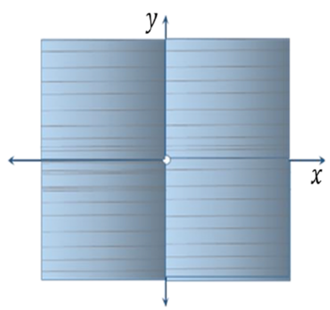
El dominio de la función f consta de todos los puntos del plano donde el argumento de la raíz debe ser positiva. Esto es,

$D_f = \{(x, y): \ln(1 + 2x^2 + 4y^2) > 0\}$

$D_f = \{(x, y): 1 + 2x^2 + 4y^2 > 1\}$

$D_f = \{(x, y): 2x^2 + 4y^2 > 0\}$

$D_f = R^2 - \{(0, 0)\}$



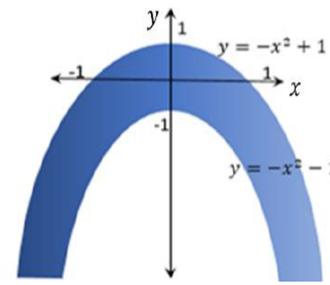
7. $f(x, y) = sen^{-1}(x^2 + y)$

Solución

Puesto que el dominio de la función $\operatorname{sen}^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, entonces

$D_f = \{(x, y): -1 \leq x^2 + y \leq 1\}$

$D_f = \{(x, y): -1 - x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$.



Es decir, el dominio de f es el conjunto de puntos que se encuentran entre las parábolas $y = -x^2 - 1$ y $y = -x^2 + 1$, incluyendo los puntos de ellas.

8. $f(x,y) = \sqrt{sen(x^2 + y^2)\pi}$

Solución

Puesto que la función f es radical con índice par, tenemos:

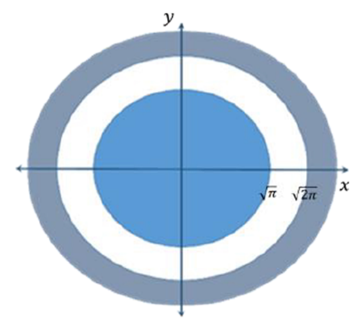
$$D_f = \{(x,y): sen(x^2 + y^2)\pi \geq 0\}$$

Para encontrar qué puntos del plano satisfacen la desigualdad, debemos recordar que la funcion $\operatorname{sen} x$ es positiva en el primer y segundo cuadrante, por lo tanto

$$D_f = \{(x, y): 2k\pi \leq (x^2 + y^2)\pi \leq (2k + 1)\pi\}$$

Donde k es un entero no negativo. Ahora, dividiendo entre π se obtiene

$D_f = \{(x, y): 2k \leq (x^2 + y^2) \leq (2k + 1)\}$



La gráfica de este conjunto está formada por infinitos anillos, uno que pertenece al dominio (cuando $x^2 + y^2$ cae en el primer o segundo cuadrante) y uno que no pertenece (cuando $x^2 + y^2$ cae en el tercero y cuarto cuadrante)

9. $f(x,y) = \sqrt{y\cos x}$

Solución

Al igual que el ejercicio anterior, tenemos

$$D_f = \{(x,y): y\cos x \geq 0\}$$

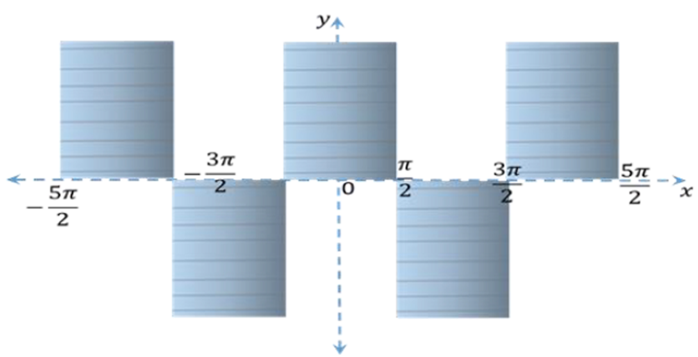
Para que y $\cos x \geq 0$ hay dos posibilidades: que los dos términos sean positivos o los dos sean negativos, esto es

$$D_f = \{(x,y): y \geq 0, \cos x \geq 0\} \cup \{(x,y): y \leq 0, \cos x \leq 0\}$$

Para graficar el dominio debemos partir el eje x en intervalos de la forma

$$\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Además, hay que recordar que la función $\cos x$ es positiva en los cuadrantes I, IV y negativa en II, III. Si en el intervalo la función $\cos x$ es positiva, se desplaza el segmento de recta sobre el eje y positivo y si en el intervalo la función $\cos x$ es negativa, entonces se desplaza el segmento de recta hacia el eje y negativo.



10. $f(x,y) = \ln[y\ln(x+y+1)]$

Solución

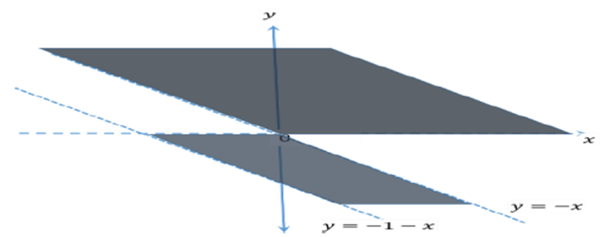
Debido a que el dominio de la función logaritmo natural es $(0,\infty)$, tenemos:

$$D_f = \{(x,y): y\ln(x+y+1) > 0\}$$

Realizando un análisis similar al ejercicio anterior se obtiene

$$D_f = \{(x,y): y > 0,\ \ln(x+y+1) > 0\} \cup \{(x,y): y < 0,\ \ln(x+y+1) < 0\}$$
$$D_f = \{(x,y): y > 0,\ x+y > 0\} \cup \{(x,y): y < 0, -1 < x+y < 0\}$$

El primer conjunto está formado por todos los puntos del plano que se encuentran arriba de la recta $x+y=0$ y del eje x. Mientras que el segundo conjunto está formado por todos los puntos del plano que se encuentran entre las rectas $x+y=-1$ y $x+y=0$ abajo del eje x.



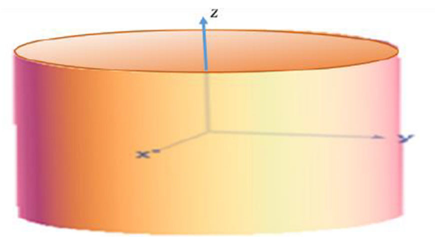
11. $f(x,y,z) = z\sqrt{4-x^2-y^2}$

Solución

El dominio de la función de tres variables está dado por el conjunto

$$D_f = \{(x,y,z): 4-x^2-y^2 \geq 0, z \in R\}$$

Es decir, el conjunto de puntos dentro y sobre el cilindro que se muestra a continuación

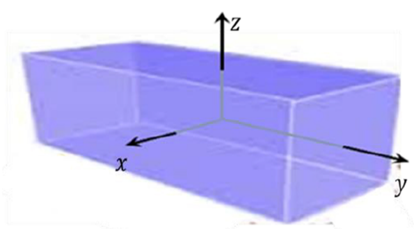


12. $f(x, y, z) = sen^{-1}\,\mathrm{x} + sen^{-1}\,\mathrm{y} + sen^{-1}\,\mathrm{z}$

Solución

$$D_f = \{(x, y, z): -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, -1 \le z \le 1\}$$

La gráfica está formada por todos los puntos del espacio que se encuentran dentro y sobre el cubo.

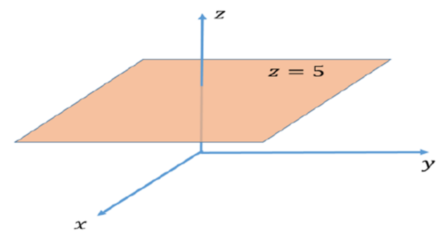


Dibujar la gráfica de la función dada.

13. $f(x, y) = 5$

Solución

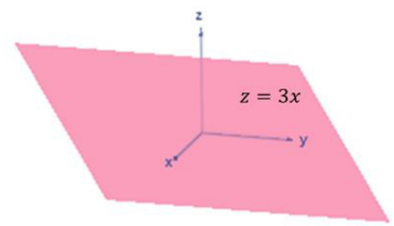
La gráfica de la función $z = 5$ es un plano paralelo al plano xy.



14. $f(x, y) = 3x$

Solución

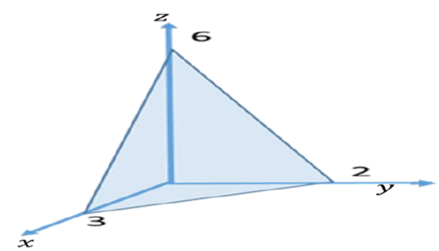
La gráfica de la función $z = 3x$ también es un plano el cual se grafica dibujando la recta en el plano xz y desplazándola sobre todo el eje y.



15. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

Solución

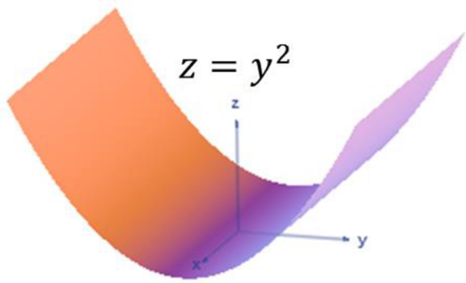
La gráfica es un plano que se dibuja uniendo los puntos de corte con los ejes coordenados



16. $f(x, y) = y^2$

Solución

La gráfica de la función $z = y^2$ es un cilindro parabólico, el cual se realiza dibujando la parábola en el plano yz y desplazándola sobre todo el eje x.



17. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

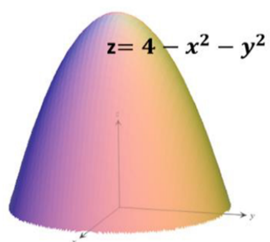
Solución

La gráfica de la función $z = 4 - x^2 - y^2$ es un paraboloide elíptico y se dibuja realizando la gráfica en las tres trazas principales (planos coordenados).

Plano $xy(z = 0) \to x^2 + y^2 = 4$ (circunferencia)

Plano $xz(y = 0) \to z = 4 - x^2$ (parábola).

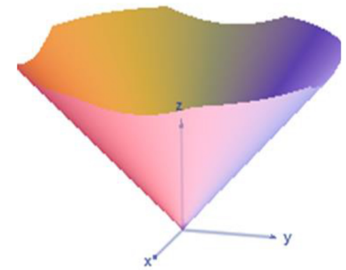
Plano $yz(x = 0) \to z = 4 - y^2$ (parábola).



18. $f(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

Solución

La gráfica de la función $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ es un semicono y se dibuja como el ejercicio anterior.



Plano $xy(z = 0) \to 0 = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to x^2 + y^2 = 0$

Plano $xz(y = 0) \to z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2} = \frac{1}{2}|x|$

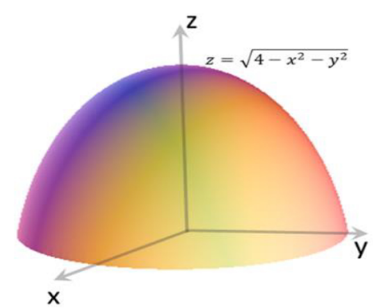
Plano $yz(x = 0) \to z = \frac{1}{2}\sqrt{y^2} = \frac{1}{2}|y|$

Plano $z = 1 \to 1 = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to x^2 + y^2 = 4$

19. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Solución

La gráfica de la función $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ es la parte positiva de la esfera con centro en el origen y radio 2.



20. $f(x,y) = \sqrt{64 - x^2 - 4y^2}$

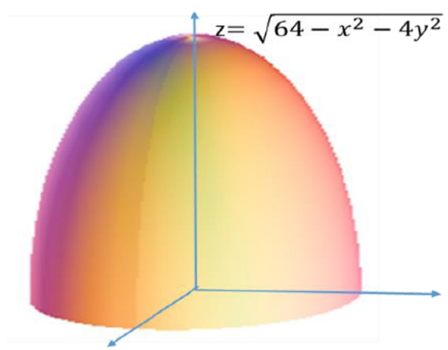
Solución

La función $z = \sqrt{64 - x^2 - 4y^2}$ representa la parte positiva del elipsoide $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{64} = 1$ y se dibuja realizando la gráfica de las trazas en los planos coordenados.

Plano $xy(z = 0) \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$ (elipse).

Plano $xz(y = 0) \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{z^2}{64} = 1$ (media circunferencia).

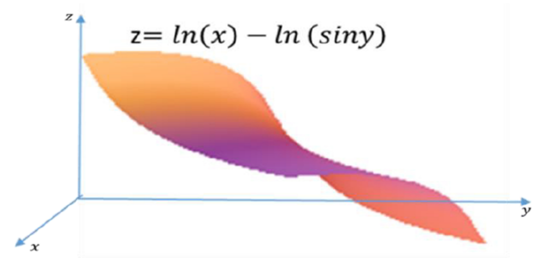
Plano $yz(x = 0) \rightarrow \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{64} = 1$ (media elipse).



Para graficar las funciones de los ejercicios 21 y 22 es necesario el uso de una calculadora graficadora o un computador.

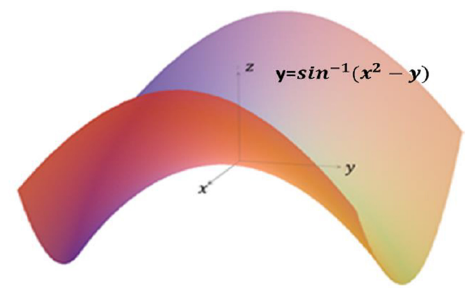
21. $f(x, y) = \ln x - \ln (sen\, y)$

Solución



22. $f(x, y) = sen^{-1}(x^2 - y)$

Solución



Describa y dibuje las curvas de nivel para las funciones indicadas y los valores de k especificados.

23. $f(x, y) = xy, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

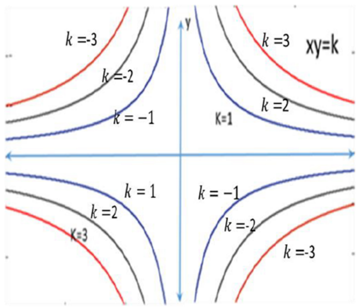
Solución

Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $xy = k$, y son hipérbolas para los valores ± 1 y ± 2, mientras que para $k = 0$ son los ejes coordenados.

Si $k = 0 \rightarrow xy = 0 \rightarrow x = 0$ o $y = 0$

Si $k = \pm 1 \rightarrow y = \frac{\pm 1}{x}$

Si $k = \pm 2 \rightarrow y = \frac{\pm 2}{x}$



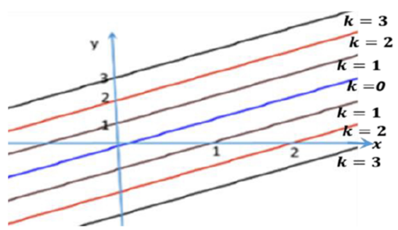
24. $f(x, y) = |x - y|, \quad k = 0, 1, 2, 3$

Solución

Las curvas de nivel son rectas paralelas, dadas por la ecuación

$$|x - y| = k \rightarrow x - y = k \text{ o } x - y = -k$$

Si $k = 0 \rightarrow x - y = 0$
Si $k = 1 \rightarrow x - y = 1$ o $x - y = -1$
Si $k = 2 \rightarrow x - y = 2$ o $x - y = -2$
Si $k = 3 \rightarrow x - y = 3$ o $x - y = -3$

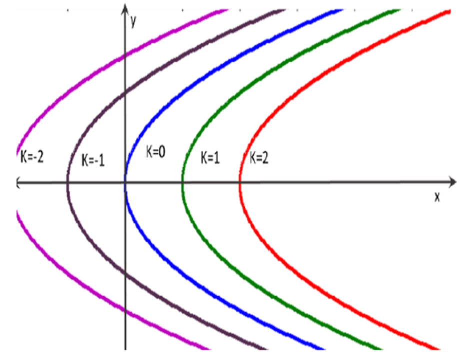


25. $f(x, y) = x - y^2, \; k = 0, \pm 1, \pm 2$

Solución

Las curvas de nivel están dadas por $x - y^2 = k \;\; (x = y^2 + k)$, y son parábolas con vértice $(k,0)$, abren sobre el eje x hacia la derecha.

Si $k = 0 \rightarrow x = y^2$
Si $k = 1 \rightarrow x = y^2 + 1$
Si $k = -1 \rightarrow x = y^2 - 1$
Si $k = 2 \rightarrow x = y^2 + 2$
Si $k = -2 \rightarrow x = y^2 - 2$



26. $f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \; k = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$

Solución

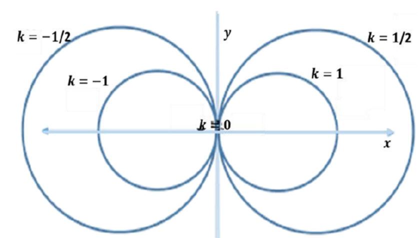
Las curvas de nivel se determinan por $\frac{2x}{x^2+y^2} = k \leftrightarrow x^2 - \frac{2}{k}x + y^2 = 0$,

y son circunferencias con centro en el eje x

Si $k = 1 \rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$.
Luego, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
Si $k = -1 \rightarrow (x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1$.
Luego, $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

Si $k = \frac{1}{2} \rightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$.
Luego, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

Si $k = -\frac{1}{2} \rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4$

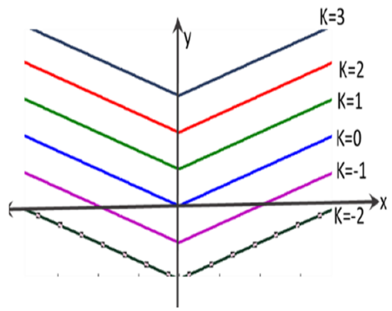


27. $f(x, y) = |x| - y, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$

Solución

Las curvas de nivel están dadas por la ecuación $|x| - y = k \leftrightarrow y = |x| - k$, las cuales representan la función valor absoluto desplazada verticalmente k unidades.

Si $k = 0 \rightarrow y = |x|$
Si $k = 1 \rightarrow y = |x| - 1$
Si $k = -1 \rightarrow y = |x| + 1$
Si $k = 2 \rightarrow y = |x| - 2$
Si $k = -2 \rightarrow y = |x| + 2$

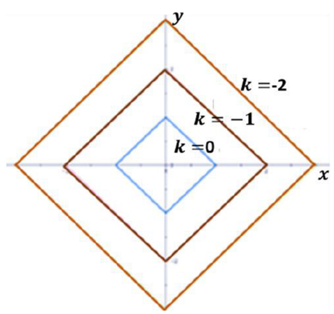


28. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|, \quad k = 0, -1, -2$

Solución

Las curvas de nivel están dadas $1 - |x| - |y| = k \leftrightarrow |x| + |y| = 1 - k$, y son rombos que cortan a los ejes coordenados en 1, 2 y 3, respectivamente.

Si $k = 0 \rightarrow |x| + |y| = 1$
Para realizar la gráfica de la ecuación debemos hacerlo en cada cuadrante.
a) I cuadrante, la ecuación es $x + y = 1$
b) II cuadrante, la ecuación es $-x + y = 1$
c) III cuadrante la ecuación es $-x - y = 1$
d) IV cuadrante la ecuación es $x - y = 1$



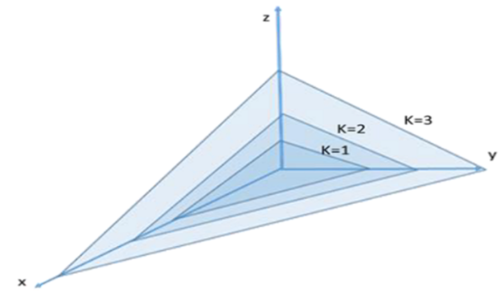
Para $k = -1$ y $k = -2$ se hace un proceso similar.

Describa las superficies de nivel para la función dada.

29. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

Solución

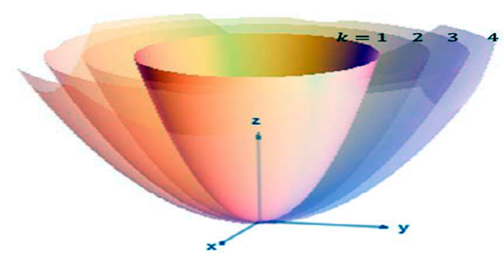
Las superficies de nivel están determinadas por la ecuación $x + 3y + 5z = k$, las cuales representan planos, para todo valor real de k.



30. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$

Solución

Las superficies de nivel están dadas por: $\frac{x^2+y^2}{z} = k$, y son paraboloides con ecuación $z = \frac{1}{k}(x^2 + y^2)$, siempre que $k \neq 0$. Si $k = 0$ la superficie de nivel es el eje z.



31. Una placa metálica delgada en el plano xy, tiene temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y). Las curvas de nivel de T se denominan isotermas porque en todos los puntos de una isoterma la temperatura es la misma. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dada por:

$$T(x,y) = \frac{100}{(1 + x^2 + 2y^2)}$$

Solución

Las isotermas están dadas por la ecuación

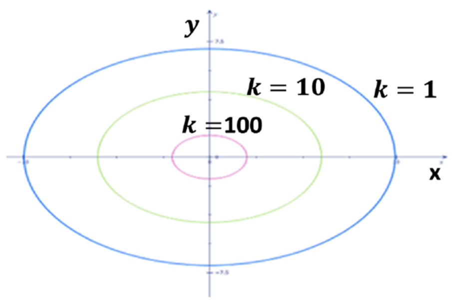
$$\frac{100}{(1 + x^2 + 2y^2)} = k \leftrightarrow 1 + x^2 + 2y^2 = \frac{100}{k} \leftrightarrow x^2 + 2y^2 = \frac{100}{k} - 1,$$

$0 < k \leq 100$

$$Si\ k = 1 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 99 \rightarrow \frac{x^2}{99} + \frac{y^2}{\frac{99}{2}} = 1\ (elipse)$$

$$Si\ k = 10 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 9 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1\ (elipse)$$

$$Si\ k = 100 \rightarrow x^2 + 2y^2 = 0\ (origen)$$



32. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman curvas equipotenciales porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es igual. Trace algunas curvas equipotenciales si

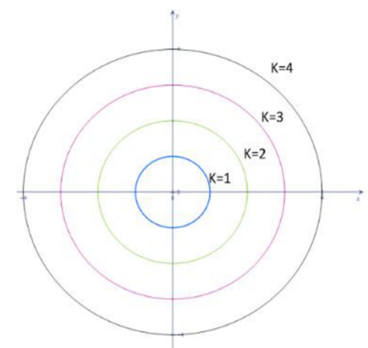
$$V = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},\quad c > 0$$

Solución

Las curvas equipotenciales están dadas por

$$\frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = k \leftrightarrow \frac{c}{k} = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 - \frac{c^2}{k^2}$$

Donde $r \geq \frac{c}{k}$. En el caso de que $k = \frac{c}{r}$, la curva de nivel es el origen y si $k > \frac{c}{r}$, las curvas de nivel son circunferencias con centro en el origen y radio $\sqrt{r^2 - \frac{c^2}{k^2}}$



Ejercicios propuestos

Determinar si z es una función de x e y

1. $x^2 + yz - xy = 10$

2. $xz^2 + xy - y^2 = 4$

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

4. $xz^2 + \ln y - 8 = 0$

5. Sea g la función de dos variables x, y y el conjunto de pares ordenados de la forma (P,z) tales que

$$z = \sqrt{x^2 - y} \quad \leftrightarrow \quad g(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$$

Calcule: $(a)\ g(3,5)$; $(b)\ g(-4,-9)$; $(c) g(x+2, 4x+4)$; (d) $\left(\frac{1}{x}, \frac{-3}{x^2}\right)$

6. Sea f la función de las tres variables x, y, z, y el conjunto de pares ordenados de la forma (P, w) tales que

$$w = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \quad \leftrightarrow \quad f(x,y,z) = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$$

Calcule: $(a)\ f(1,2,3)$; $(b)\ \left(2, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; (c) $f(x+1, 1, x-2)$

Describir y dibujar el dominio de la función dada. De ser posible por simple observación halle el recorrido.

7. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

8. $f(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

9. $f(x, y) = \ln(xy - 6)$

10. $z = \frac{x+y}{x-y}$

11. $f(x, y) = e^{x/y}$

12. $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2} + \ln(y^2 - 1)$

13. $f(x,y) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2} - 2\right)}}{\ln(16 - y^2)}$

14. $f(x,y) = \ln(y \operatorname{sen} x)$

15. $f(x,y) = \sqrt{x \operatorname{sen} y}$

16. $f(x.y) = \tan^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-y^2}\right)$

17. $f(x,y) = \ln(x \ln(x-y))$

18. $f(x,y) = \sqrt{\tan(\ln(x^2 + y^2))}$

19. $f(x,y) = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$

20. $f(x,y) = \ln(x \sec y)$

21. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(2x^2 + 4y^2)}}$

22. $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen}(x - y)}$

23. $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

24. $f(x,y) = \operatorname{sen}^{-1}(x + y)$

25. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{(x+y+1)\ln(x-y+1)}}$

26. $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen}(\ln(x - y + 1))}$

27. $f(x,y) = \sqrt{\ln x \ln y}$

28. $f(x,y) = \sqrt{\ln[\cos(x - y)]}$

29. $f(x,y) = \sqrt{(x+y)\ln(x-y)}$

30. $f(x,y) = \sqrt{\ln\ln(x - y)}$

31. $f(x,y) = \sqrt{\operatorname{sen} x \cos y}$

32. $f(x,y) = \sqrt{\cos x \cos y}$

33. $f(x,y) = \frac{xy}{\operatorname{sen}(2x+y)}$

34. $f(x,y,z) = \frac{2x}{\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}}$

35. $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + \ln z$

36. $f(x, y, z) = \ln(8 - x^2 - z^2) + |y|$

37. $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2 - y}$

38. $f(x, y, z) = yz \cos^{-1}(x^2 - 1)$

39. $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

Dibujar la superficie dada

40. $f(x, y) = 3$

41. $f(x, y) = y$

42. $f(x, y) = 5 - x - 5y$

43. $f(x, y) = y^2 + 1$

44. $f(x, y) = \cos x$

45. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

46. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

47. $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

48. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Describir y dibujar las curvas de nivel para la función y los valores dados de k.

49. $f(x, y) = |x^2 - y|$, $k = 0,1,2,3,4$

50. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $k = 0, \pm1, \pm2$

51. $f(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $k = \pm1, \pm2$

52. $f(x, y) = |x|$, $k = 0, 5, 10, 15$

53. $f(x,y) = sen^{-1}(x^2 + y), k = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}$

54. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $k = 0, 2, 5$

55. $f(x, y) = x^2 y$, $k = -1, 3, 6$

56. $f(x, y) = y - \cos x$, $k = 0, \pm1, \pm2$

57. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $k = 0, \pm1, \pm2$

58. $f(x,y) = e^{1/x^2+y^2}$, $k = 2, 3, 4, 5$

59. Encuentre una ecuación para la curva de nivel de la función dada

$f(x, y) = y \tan^{-1} x$, que pasa por el punto $(1, 4)$

60. Encuentre una ecuación para la superficie de nivel de la función dada

$f(\mathrm{x, y, z}) = x^2 + 4y^2 - z^2$, que pasa por el punto $(2,-1,3)$

Dibujar la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = k$ para el valor de k que se especifica

61. $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$, $k=6$

62. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z$, $k = 4$

63. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z2$, $k = 4$

64. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$, $k = 0$

65. $f(x, y, z) = -x^2 + 4y^2 + 4z^2$, $k = 0$

66. $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x - z$, $k = 0$

Describa las superficies de nivel de las siguientes funciones

67. $f(x, y, z) = 9x^2 - 4y^2 - z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

69. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

70. $f(x, y, z) = 4x^2 - 9y^2$

71. Explotación forestal: la regla de los troncos de Doyle es uno de varios métodos para determinar el rendimiento en madera aserrada (en tablones-pie) en términos de su diámetro d (en pulgadas) y su longitud L (pies). El número de tablones-pie está dado por:

$$N(d,L) = \left(\frac{d-4}{4}\right)^2 * L$$

a) Hallar el número de tablones-pie de madera aserrada producida por un tronco de *22* pulgadas de diámetro y *12* pies de longitud
b) Evaluar $N(30, 12)$

72. Distribución de temperatura: la temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de la placa metálica circular de acero de 10 metros de radio está dada por:
$T(x, y) = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$, donde x e y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isotermas.

73. Costo de producción: una caja rectangular abierta por arriba tiene x pies de longitud, y pies de ancho y z pies de alto. Construir la base cuesta $\$0.75$ por pie cuadrado y construir los lados $\$0.40$ por pie cuadrado. Expresar el costo C de construcción de la caja en función de x, y y z.

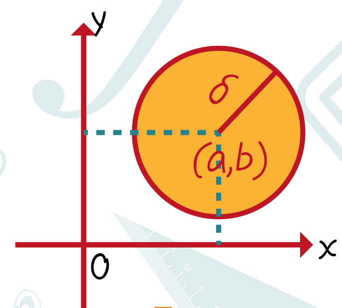
74. Ley de los gases ideales: de acuerdo con la ley de los gases ideales, $PV = KT$, donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura (Kelvin), y K es una constante de proporcionalidad. Un tanque contiene 2.600 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 20 libras por pulgada cuadrada y una temperatura de 300k

a) Determine K
b) Exprese P como función de V y T y describa las curvas de nivel.

75. La función de producción f para cierto artículo está definida por

$f(x,y) = 4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, donde x y y son las cantidades de los insumos. Dibuje un mapa de contorno de f que muestre las curvas de producción constante para $30, 24, 18, 12, 6$.

76. La presión de un gas en el punto (x, y, z) del espacio tridimensional es $P(x, y, z)$ atmósferas, donde $P(x,y,z) = 4e^{-(x^2+y^2+z^2)}$. Describa las superficies de nivel, denominadas superficies isobáricas, de P para $4, 2, 1, \frac{1}{2}$.



Capítulo 5

Límite de funciones de varias variables

Después de analizar los conceptos más importantes de funciones en dos y tres variables, nos enfocaremos en extender el concepto de límite para este tipo de funciones.

Inicialmente, debemos recordar que el concepto intuitivo de límite para una función en una variable $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que cuando x se acerca más y más al valor real a, $f(x)$ se aproxima más y más a L. Recuerde que cuando afirmamos que x se acerca más y más al valor a queremos expresar que x se aproxima arbitrariamente a este valor desde cualquier lado de a (derecha o izquierda). Además, el límite debe ser el mismo cuando x se acerca al valor de a en las dos direcciones. Para funciones en varias variables, la idea es similar. Cuando expresamos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Queremos afirmar que cuando (x,y) se acerca más y más al punto (a,b), $f(x,y)$ se aproxima más y más al valor real L. En este caso (x, y) se puede acercar al punto (a,b) por cualquier trayectoria que pase por este punto. Observemos que, a diferencia de lo que ocurre con las funciones de una variable, hay infinitas trayectorias diferentes que pasan por el punto dado (a,b). Por lo tanto, si encontramos dos trayectorias que pasan por el punto (a,b), donde la función tiende a valores diferentes o se disparen, entonces no existe

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

En el $\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2+1}$ debemos identificar qué ocurre con la función $f(x,y) = \frac{\cos xy}{y^2+1}$, cuando x se acerca a π y y se acerca a 1, simultáneamente. Es inmediato observar que la función se aproxima al valor $\frac{\cos(\pi * 1)}{(1)^2+1} = \frac{-1}{2}$

De aquí tenemos,

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2+1} = -\frac{1}{2}$$

De manera similar, se puede razonar que

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \frac{e^{x+y-z}}{x-z} = \frac{e^{1+1-2}}{1-2} = \frac{e^0}{-1} = -1$$

En otras palabras, para muchas funciones, podemos evaluar límites por simple inspección. Pero nuestro interés es estudiar límites que no son inmediatos.

Ahora, recordemos la definición formal de límite para una función en una variable.

Definición

Sea f una función en una variable, definida en un intervalo abierto que contiene al valor a, excepto posiblemente en a, decimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

En otras palabras, no importa qué tan cercano se quiera hacer $f(x)$ a L (representamos esta distancia con ε), esto se puede lograr, haciendo simplemente a x suficientemente cercano al valor a (es decir, a una distancia no mayor que δ de a).

La definición formal para una función f en dos variables es análoga, esto es.

Definición

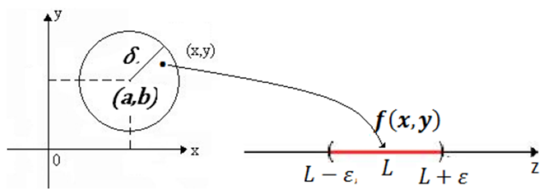
Sea f una función definida en el interior de una circunferencia con centro en el punto (a,b), excepto posiblemente en (a,b). Decimos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

En la definición se expresa que dado cualquier $\varepsilon > 0$ (no importa qué tan pequeño sea), es posible encontrar otro valor δ, tal que todos los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en (a, b) y radio δ, su imagen cae en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



EJEMPLO

Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Solución

Inicialmente observemos que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ y $\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$ porque el denominador es mayor o igual al numerador.

Debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$, tal que

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

El primer paso consiste en hacer un análisis preliminar para encontrar la relación entre ε y δ. Esto es,

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right| = 3|x|\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta$$

Las desigualdades anteriores se sustentan en las observaciones iniciales y la hipótesis.

Del análisis preliminar se observa que se puede elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ y suponiendo que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, tenemos:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3xy^2}{x^2+y^2}\right| = 3|x|\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Entonces, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Al igual que en los límites de funciones en una variable, a partir de la definición se pueden demostrar los resultados usuales para límites de sumas, productos y cocientes. Es decir,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} kf(x,y) = k \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$ (propiedad homogénea)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

(propiedad aditiva)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}, \text{ donde } \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0$$

Anteriormente determinamos que para demostrar que un límite no existe, debemos encontrar por lo menos dos trayectorias diferentes que pasen por el punto especificado en donde la función tienda a valores diferentes o se disparen. Ahora, surge un interrogante: ¿Qué herramientas se pueden utilizar si el límite existe, pero no es inmediato? Una de ellas es la definición formal como ya se ilustró en el ejemplo precedente, otra es una manipulación algebraica para tratar de eliminar la indeterminación o intentar utilizar coordenadas polares, si es posible. A continuación, formalizamos otra herramienta que es la generalización del teorema del emparedado para límites de funciones en una variable.

Teorema

Supongamos que $|f(x,y)-L| \leq g(x,y)$ para todo (x,y) dentro de una circunferencia con centro en (a,b), excepto posiblemente en (a,b).

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

Demostración

Para cualquier $\varepsilon > 0$, sabemos por la definición de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=0$,

que existe un número $\delta > 0$ tal que $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ garantiza que $|g(x,y)-0| < \varepsilon$. Para tales puntos (x,y), tenemos

$$|f(x,y)-L| \leq g(x,y) < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$$

Ejemplo

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}$

Solución

El primer paso es encontrar el valor de L utilizando una trayectoria cualquiera que pase por el punto $(0,1)$. Consideremos la trayectoria $y=1$, por consiguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0} 0=0$$

De lo anterior, suponemos que $L=0$. Ahora se debe encontrar la función $g(x,y)$ que sea más grande o igual que $\left|\frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}-0\right|$ y que tenga límite 0 en dicho punto. Esto es,

$$|f(x,y)-L|=\left|\frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}-0\right|=\left|\frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}\right|\leq\left|\frac{(y-1)^2\ln y}{(y-1)^2}\right|=|\ln y|=g(x,y)$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} |\ln y|=|\ln 1|=0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2\ln y}{x^2+(y-1)^2}=0$$

Observación

Todos los análisis hechos para el concepto de límite de una función en dos variables se extienden para funciones de tres (o más) variables, de forma natural.

Definición

Sea $f(x,y,z)$ una función definida en una esfera con centro en (a,b,c), excepto posiblemente en (a,b,c). Decimos que

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=L$$

Si para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$ tales que,

$|f(x,y,z)-L| < \varepsilon$ Siempre que $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<\delta$

Observemos que, lo mismo que con los límites de funciones de dos variables, la definición anterior expresa que para que se cumpla $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=L$ debemos tener que $f(x,y,z)$ se acerca a L por cualquier posible trayectoria que pasa por (a,b,c).

Lo mismo que para una función de dos variables, se observa que si una función de tres variables se acerca a diferentes límites por dos trayectorias particulares o se disparen, entonces el límite no existe.

Ejercicios complementarios

Demuestre la existencia de cada límite usando la definición

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Solución

Se demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$, tales que

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Inicialmente, se hace un análisis preliminar para encontrar la relación entre ε y δ. Es decir,

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| = 6|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \le 6|y| \le 6\sqrt{x^2+y^2} < 6\delta$$

Las desigualdades anteriores se sustentan en la hipótesis y las siguientes desigualdades

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1, \qquad |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}$$

Del análisis preliminar se observa que $\varepsilon = 6\delta \to \delta = \frac{\varepsilon}{6}$. Entonces, suponiendo que se tiene que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, obtenemos:

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| = 6|y|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \le 6|y| \le 6\sqrt{x^2+y^2} < 6\delta = 6\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} [(x-4)^2 + (y-3)^2] = 0$

Solución

Se debe demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$, tal que

$|f(x,y) - 0| = |(x-4)^2 + (y-3)^2| < \varepsilon$, *siempre que*

$0 < \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} < \delta$

Realizando el análisis preliminar se obtiene:

$$|f(x,y) - 0| = |(x-4)^2 + (y-3)^2| = \left|\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2\right| < \delta^2$$

Considerando $\varepsilon = \delta^2 \to \delta = \sqrt{\varepsilon}$ y suponiendo que

$0 < \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} < \delta$, tenemos

$$|f(x,y) - 0| = |(x-4)^2 + (y-3)^2| = \left|\left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right)^2\right| < \delta^2 = \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon$$

En consecuencia,

$$\lim_{(x,y)\to(4,3)} [(x-4)^2 + (y-3)^2] = 0$$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)} = 0$

Solución

Se demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$, tales que

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)}\right| < \varepsilon, \qquad \textit{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Inicialmente, se realiza el análisis preliminar. Esto es,

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)}\right| \le \left|\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}\right| = \left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2)}\right| < \frac{\delta}{\ln \delta^2}$$

Las desigualdades anteriores se sustentan en la hipótesis y en la desigualdad

$$4x^2 + 2y^2 \ge x^2 + y^2$$

De lo primero se observa que $\varepsilon = \frac{\delta}{\ln \delta^2}$ y suponiendo que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, se obtiene:

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)}\right| \le \left|\frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)}\right| = \left|\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\ln(x^2+y^2)}\right|$$

$$|f(x,y)-0| < \frac{\delta}{\ln \delta^2} = \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(4x^2+2y^2)\ln(x^2+y^2)} = 0$$

4. $\lim_{(x,y)\to(2,4)} (3x+5y) = 26$

Solución

Se demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe su correspondiente $\delta > 0$, tales que

$|f(x,y) - 26| = |3x + 5y - 26| < \varepsilon$, siempre que
$0 < \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} < \delta$

Realizando el análisis preliminar, obtenemos:

$|f(x,y) - 26| = |3x + 5y - 26| = |3x - 6 + 6 + 5y - 20 + 20 - 26| =$
$|3(x-2) + 5(y-4)|$

$|f(x,y) - 26| \le |3(x-2)| + |5(y-4)| = 3|x-2| + 5|y-4| =$
$3\sqrt{(x-2)^2} + 5\sqrt{(y-4)^2}$

$$|f(x,y)-26| \le 3\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} + 5\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} < 3\delta + 5\delta = 8\delta$$

Las desigualdades anteriores se sustentan en las propiedades del valor absoluto y la hipótesis.

Del análisis se observa que $\varepsilon = 8\delta \ \rightarrow \ \delta = \frac{\varepsilon}{8}$. Ahora, suponiendo que se cumple que $0 < \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} < \delta$, tenemos

$|f(x,y) - 26| = |3x+5y-26| = |3x-6+6+5y-20+20-26| = |3(x-2)+5(y-4)|$

$|f(x,y) - 26| \le |3(x-2)| + |5(y-4)| = 3|x-2| + 5|y-4| =$
$3\sqrt{(x-2)^2} + 5\sqrt{(y-4)^2}$

$$|f(x,y)-26| \le 3\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} + 5\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} < 3\delta + 5\delta = 8\delta = 8\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$$

$|f(x,y) - 26| < \varepsilon$

De lo anterior decimos que

$$\lim_{(x,y)\to(2,4)} (3x+5y) = 26$$

Muestre que el límite indicado no existe

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} \ \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Debemos encontrar por lo menos dos trayectorias diferentes que pasen por el punto $(0,0)$, en donde la función tiende a valores diferentes. Las trayectorias más sencillas que pasan por $(0,0)$ son los ejes coordenados. Esto es, *Trayectoria* $y = 0$ (*eje x*). En esta trayectoria tenemos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 3 = 3$$

Trayectoria $x = 0$ (*eje y*). Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Puesto que la función tiende a valores diferentes, podemos afirmar que el límite no existe.

6. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Si utilizamos también los ejes coordenados como las trayectorias que se van a utilizar, obtenemos

Trayectoria $x = 0$ (*eje y*). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to o} \frac{0}{2y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Trayectoria $y = 0$ (*eje x*). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Como el resultado es igual, es necesario que se analice otra trayectoria lineal (cualquiera)

Trayectoria $y = 2x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(2x)}{x^2+2(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{9x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

Como se obtuvo un resultado diferente de cero, se tiene que no existe el límite.

7. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3\sqrt{y}}{x^4+y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

En este límite vamos a encontrar que al utilizar cualquier trayectoria lineal que pase por el punto (0,0), la función tiende al mismo valor, esto no significa que el límite exista, si no que debemos encontrar otra trayectoria que dé como resultado un valor diferente

Utilizando las *Trayectorias* $y = mx,\ m \neq 0$, se obtiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3\sqrt{y}}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3\sqrt{mx}}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3\sqrt{mx}}{x^2(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\sqrt{mx}}{x^2+m^2} = \frac{0}{m^2} = 0$$

Como la variable y del denominador tiene potencia dos y x tiene potencia cuatro, por consiguiente, esto sugiere que se considere una trayectoria cuadrática en x. Por ejemplo,

Trayectoria $y = x^2$. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3\sqrt{y}}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3\sqrt{x^2}}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3\sqrt{x^2}}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como se obtuvo un resultado diferente, se puede afirmar que no existe el límite

8. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Como el punto no es el origen, los ejes coordenados no se pueden utilizar como trayectorias. En su lugar están las trayectorias $x = 1$ y $y = 2$

Trayectoria $x = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5} = \lim_{y\to 2} \frac{y-2-y+2}{y^2-4y+4} = \lim_{y\to 2} \frac{0}{y^2-4y+4} = \lim_{y\to 2} 0 = 0$$

Se puede verificar que al utilizar la trayectoria $y = 2$ el resultado también es cero, por tanto, es necesario trabajar otra trayectoria lineal que pase por el punto $(1, 2)$. Por ejemplo,

Trayectoria $y = 2x$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5} = \lim_{x\to 1} \frac{x(2x)-2x-2x+2}{x^2-2x+(2x)^2-4(2x)+5} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-4x+2}{5x^2-10x+5}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-2x+1)}{5(x^2-2x+1)} = \frac{2}{5}$$

Entonces, no existe el límite dado

9. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\cos y-1)}{x^3+y^3} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Otra forma para demostrar la no existencia de un límite consiste en trabajar todas las trayectorias lineales (o cuadráticas, o cubicas, etc.) al tiempo. Esto es,

Trayectorias $y = mx, m \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\cos y-1)}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\cos mx-1)}{x^3+m^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\cos mx-1)}{x^3(1+m^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos mx-1)}{x^2(1+m^3)}$$

Como tenemos un límite en una variable con la indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$ podemos utilizar la regla de L'Hopital dos veces. Esto es,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx-1}{(1+m^3)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-m(\operatorname{sen} mx)}{2(1+m^3)x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-m^2(\cos mx)}{2(1+m^3)} = \frac{-m^2}{2(1+m^3)}$$

Como la respuesta es una expresión en términos de m, entonces siempre obtenemos resultados diferentes por trayectorias lineales diferentes. Por tanto, no existe el límite dado

10. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{xy} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Para mostrar que el límite no existe podemos utilizar una trayectoria lineal con pendiente positiva y otra con pendiente negativa. Por ejemplo

Trayectoria $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2|}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Trayectoria $y = -2x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{|-2x^2|}{-2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{-2x^2} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Entonces, no existe el límite

11. $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+y^4+z^4} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Este ejercicio es un límite en tres variables, por lo cual las trayectorias son curvas en el espacio, las cuales se determinan por medio de un par de ecuaciones que relacionan dos variables en términos de la tercera. Por ejemplo, si utilizamos el eje y, esta trayectoria está determinada por las ecuaciones $x = 0$ y $z = 0$. Entonces,

Trayectoria $x = 0$ y $z = 0$ (*eje y*)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Si utilizamos los otros ejes coordenados obtenemos el mismo resultado, por lo tanto, analizando el numerador de la función se sugiere utilizar una trayectoria en donde y y z estén dados por ecuaciones lineales en x. Por ejemplo,

Trayectoria $y = x$ y $z = 2x$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+y^4+z^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{18x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Entonces, no existe el límite

Encuentre el límite indicado utilizando: propiedades de los límites, operaciones algebraicas, regla de L'Hopital, teorema del emparedado o la definición. (Recuerde que el límite existe y, por tanto, utilizar trayectorias no es conveniente ya que no se demuestra la existencia).

12.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{y-1}{y^2-1}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} + \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} + \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)}{(y+1)(y-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1) + \lim_{y\to 1} \frac{1}{y+1} = (2) + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

13.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \lim_{y\to o} \frac{e^{2y}-1}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \lim_{y\to 0} \frac{2e^{2y}}{1} = \left(\frac{e^0}{1}\right)\left(\frac{2e^0}{1}\right) = 2$$

Observación

En el ejercicio anterior se aplicó la regla de L'Hopital.

14.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y^3-1}{xy-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(xy-1)(x^2y^2+xy+1)}{(xy-1)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2y^2+xy+1) = 3$$

15. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(x-y)}{(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)[\sqrt{x}+\sqrt{y}+2]}{(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x}+\sqrt{y}+2) = 2$$

16. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2+y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Para utilizar el teorema del emparedado se debe considerar una trayectoria que pase por el punto $(0, 0)$ para determinar el valor del límite L.

Trayectoria $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3} = 0$$

Suponiendo que $L = 0$, obtenemos

$$|f(x,y) - L| = \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} y}{2}\right| = g(x,y)$$

Donde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\operatorname{sen} y}{2}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} 0}{2}\right| = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{2x^2+y^2} = L = 0$$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Trayectoria $x = 0$ *(eje* y*)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 2 = 2$$

Suponemos que $L = 2$. Entonces,

$$|f(x,y) - L| = \left|\frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2} - 2\right| = \left|\frac{x^3+4x^2+2y^2-4x^2-2y^2}{2x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3}{2x^2+y^2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{x^3}{2x^2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right| = g(x,y)$$

Donde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x}{2}\right| = 0$$

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+4x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = 2$$

18. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4}{x^2+y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Trayectoria $y = 0$ *(eje* x*)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-3)}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 - 3 = -3$$

Suponemos que $L = -3$, entonces

$$|f(x,y) - L| = \left|\frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4}{x^2+y^2} - (-3)\right| = \left|\frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4}{x^2+y^2} + 3\right|$$

$$= \left|\frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4+3x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2}\right| = |x^2+y^2| = g(x,y)$$

Donde

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x^2+y^2| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-3x^2-3y^2+y^4}{x^2+y^2} = -3$$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Trayectoria $x = 0$ y $y = 0$ (*eje z*)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{z^2} = \lim_{z\to 0} z = 0$$

Suponemos que $L = 0$, entonces

$$|f(x,y,z) - L| = \left|\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{x^2y}{x^2} + \frac{z^3}{z^2}\right| = |y+z| = g(x,y,z)$$

Donde $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |y+z| = 0$

Por tanto, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2} = 0$

Observación

Hay una herramienta que se puede utilizar para encontrar o demostrar que un límite no existe, la cual consiste en transformar un límite de coordenadas cartesianas a coordenadas polares (dos variables) o esféricas (tres variables). Una condición necesaria pero no suficiente para realizar las transformaciones es que el punto de análisis sea el origen.

Use coordenadas polares o esféricas para calcular o determinar que no existen los siguientes límites

20. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Recordando las ecuaciones para transformar las coordenadas de cartesianas a polares son: $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$. Además, si $(x,y)\to(0,0)$ esto implica que $r\to 0$.

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}2r}{2r} = \lim_{r\to 0} e^{r^2} = e^0 = 1$$

21.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos(r^2)2r}{2r} = \lim_{r\to 0} \cos(r^2) = \cos 0 = 1$$

Observación

En los dos ejercicios anteriores se aplicó la regla de L'Hopital.

22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

Solución

En este límite se presenta otra clase de indeterminación (1^∞). Además, es necesario aplicar la propiedad $e^{\ln(x)} = x$. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} (1 + r^2)^{\frac{1}{r^2}} = \lim_{r\to 0} e^{\ln(1+r^2)^{\frac{1}{r^2}}} =$$
$$\lim_{r\to 0} e^{\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}} = e^{\lim_{r\to 0}\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}}$$

En los dos últimos pasos se utiliza una propiedad de los logaritmos y el hecho de que la función exponencial es continua. Ahora, para resolver el $\lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}$ se aplica la regla de L´Hopital. Esto es,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r^2)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{(1+r^2)}2r}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(1+r^2)} = 1$$

Entonces, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{\lim\limits_{r\to 0}\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}} = e^1 = e$

23. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \cos^2\theta = \cos^2\theta$

El límite dado no existe porque $\cos^2\theta$ oscila entre 0 y 1, dependiendo de la trayectoria utilizada

24. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\left(\frac{0}{0}\right)$

Solución

Recordando las ecuaciones para transformar las coordenadas cartesianas a esféricas tenemos: $x = \rho sen\emptyset cos\theta$, $y = \rho sen\emptyset sen\theta$, $z = \rho cos\emptyset$. Además, si $(x, y, z)\to(0, 0, 0)$ implica que $\rho \to 0$. Entonces,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\emptyset cos\theta \rho sen\emptyset sen\theta \rho cos\emptyset}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 sen^2\emptyset cos\emptyset cos\theta sen\theta}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho(sen^2\emptyset cos\emptyset cos\theta sen\theta) = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 3$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = 12$, hallar el límite indicado.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [-3f(x,y) + 2g(x,y)]$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [e^{g(x,y)}]$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [\sqrt{g(x,y)}]$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{g(x,y)-f(x,y)}{f(x,y)-g(x,y)}\right]$

Mostrar que el límite indicado no existe.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{x^2-3y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{3y^2-x^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+4y^4}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{x}\,y^2}{x+y^3}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y sen\, x}{x^2+y^2}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{5y^2}{(x-2)^2+y^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$

11. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2+z^2}$

12. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2+z^2}$

13. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

Demuestre que el límite dado existe.

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+x^2y^3}{x^2+y^2}$

18. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy^2+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

19. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$

Determinar el límite dado, si existe o demuestre que no existe.

20. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} \dfrac{x^2 sen(y^2-4)}{(y+2)\,\text{sen}\,x}$

21. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2}$

22. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-\cos 2x)(\cos 3y-1)}{5x^2y}$

23. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)}$

24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}\,x\ \text{sen}\,3y}{2xy}$

25. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \left(\dfrac{\cos x-1}{x^2}\right)\left(\dfrac{y-2}{y^2-4}\right)$

26. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{4(x-1)^2y}{(x-1)^4+y^2}$

27. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

28. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

29. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

30. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{sen^{-1}\frac{x}{y}}{1+xy}$

31. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-xy^2}{x^2+y^4}$

32. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$

33. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

34. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$

35. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^4+sen^2y}$

36. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{5x^4+y^2}$

37. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$

38. $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,1)} \dfrac{x\ln y+3\ln y}{x+(y-1)^2+3}$

39. $\lim\limits_{(x,y)\to(-5,1)} \dfrac{-2(x+5)(y-1)^3}{(x+5)^2+3(y-1)^6}$

40. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{5(x+1)^3}{(x+1)^2+(y-2)^4}$

41. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3-yx^3}{x^2+y^2}$

42. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{(x-1)(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}$

43. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sqrt[5]{x-1}\,(y-2)^4}{x+(y-2)^5-1}$

44. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}$

45. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{2y^2-4y+2}{x^2-3y^2+6y-3}$

46. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

47. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \dfrac{x(y-1)^4-(y-1)^4}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^4+(z-1)^2}}$

48. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \dfrac{yz-z-2x^2-2(y-1)^4-2|z|}{x^2+(y-1)^4+|z|}$

49. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,3,-1)} \dfrac{(z+1)^2(x+y-4)}{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}$

Usar el teorema del emparedado para probar la existencia de los siguientes límites.

50. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 sen\,y}{2x^2+y^2}$

51. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-3)} \dfrac{3x+xy}{x^2+|y+3|}$

52. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 sen\,y}{x^2+y^2}$

53. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$

54. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+2x^2+2y^2+y^4}{x^2+y^2}$

Use coordenadas polares o esféricas para calcular o determinar que no existen los límites dados.

55. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

56. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

57. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

58. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

59. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2+4y^2}{3e^{(x^2+y^2)}-3}$

60. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{6}{x^2+y^2}}$

61. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

62. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$

63. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2+z^2}{e^{(x^2+y^2+z^2)}-1}$

64. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2+(z-1)^2)}{x^2+y^2+(z-1)^2}$

65. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

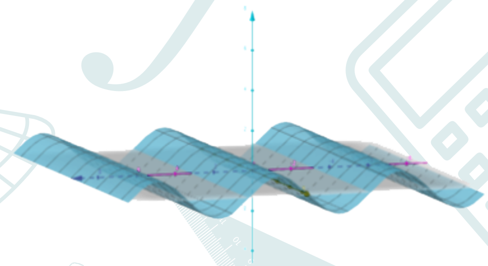
a) Si el $\lim\limits_{x\to a} f(x,b)=L$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$

b) Si el $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x,b)=L$

c) Si el $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = \lim\limits_{y\to b} f(a,y) = L$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

66. Del $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,1)} \frac{(x+3)^2 y-(x+3)^2}{(x+3)^4+y^2-2y+1}$, es cierto que:

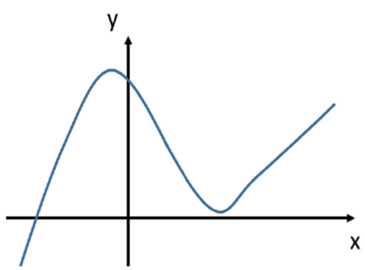
a) Las trayectorias que permiten calcularlo pasan por el punto $(0,0)$.
b) El límite no existe.
c) El límite es 0.
d) Las trayectorias que permiten calcularlo pasan por el punto $(-3,1)$.



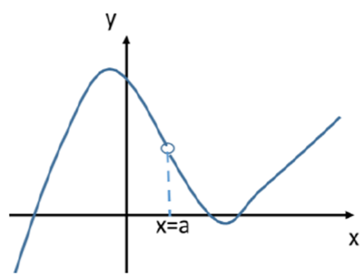
Capítulo 6

Continuidad de funciones de varias variables

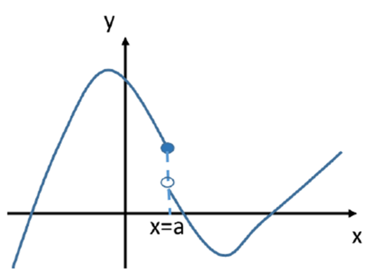
Recordando el concepto de continuidad en una función de una variable nos damos cuenta que está conectado con el concepto de límite. En este caso la función es continua en un valor, siempre que el límite y la imagen de este coincidan. Esta misma caracterización se aplica a las funciones continuas de varias variables. En seguida se presentan los tres casos que corresponden a la caracterización de las funciones:



La función f es continua en su dominio



La función f es discontinua en $x = a$ (hueco)



La función f es discontinua en $x = a$ (salto)

Definición

Una función f de dos variables es continua en un punto (a, b) si se satisface

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Si f no es continua en el punto (a, b), entonces (a, b) se llama una discontinuidad de f.

Observación

Como la definición de continuidad para una función f de dos variables es análoga a la de continuidad para una función en una variable, por lo tanto, la interpretación geométrica es similar. Es decir, la gráfica de la superficie correspondiente a una función continua de dos variables no presenta ninguna interrupción (huecos o saltos).

Antes de definir el concepto de continuidad en una región $\mathrm{R} \subset \mathrm{R}^2$, necesitamos definir primero el concepto de región abierta y cerrada en dos dimensiones. Denominaremos "disco abierto" a la región interior de una circunferencia y "disco cerrado" a la región interior de la circunferencia junto con los puntos de esta.

Definición

i) Un punto (a, b) en R se denomina "punto interior" de R, si existe por lo menos un disco abierto centrado en (a, b) que está dentro de R.

ii) Un punto (a, b) en R se denomina "punto frontera" de R, si todo disco abierto centrado en (a, b) contiene puntos dentro de R y fuera de R.

iii) Un conjunto R es cerrado si contiene todos sus puntos frontera.

iv) Un conjunto R es abierto si no contiene ni uno de sus puntos frontera.

Definición

i) Una función f de dos variables es continua en un conjunto abierto R, si f es continua para todo $(a, b) \in R$.

ii) Una función f de dos variables es continua en un conjunto cerrado R, si f es continua en el abierto y si f es continua en todo punto frontera (a, b) en R. Esto es, si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b), (x,y) \in R$$

Observación

La notación adicional $(x, y) \in R$ indica que el límite se toma a lo largo de todas las trayectorias contenidas completamente en el interior de R.

Puesto que la definición de continuidad está en términos de límites, tenemos de manera inmediata los siguientes resultados:

Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuas en (a, b), entonces las siguientes funciones también son continuas en (a, b): $f + g$, $f - g$, $f \bullet g$ y f/g, donde $g(a, b) \neq 0$ en el último caso.

Observación

Al igual que en las funciones continuas en una variable, se cumple que las funciones de dos variables de la forma: polinómicas, racionales, radicales, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas son continuas en todo su dominio.

El siguiente resultado demuestra que podemos usar todos nuestros resultados establecidos para la continuidad en funciones de una variable, al considerar funciones de varias variables.

Teorema

Sean $f(x, y)$ una función continua en (a, b) y g una función continua en $f(a, b)$. Entonces,

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) \text{ es continua en } (a, b)$$

Observación

Todos los análisis que se hicieron para funciones continuas en dos variables se extienden a funciones de tres (o más) variables, en forma natural.

Definición

Una función f de tres variables es continua en (x, y, z) si se satisface

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$$

Si f no es continua en (a, b, c), entonces llamamos a (a, b, c) una discontinuidad de f.

Ejercicios complementarios

Analice la continuidad de la función indicada.

1. $f(x,y) = \frac{x^2}{y-1}$

Solución

La función f es continua en todos los puntos del plano que se encuentran fuera de la recta $y = 1$.

2. $h(x,y) = sen\,\frac{y}{x^2}$

Solución

La función h es continua en todos los puntos del plano que se encuentran fuera del eje y.

3. $g(x,y) = \ln(25 - x^2 - y^2)$

Solución

La función g es continua en todos los puntos del plano que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en el origen y radio 5 (sin tomar los puntos de la circunferencia).

4. $f(x,y) = cos^{-1}(x+y)$

Solución

La función f es continua en los puntos (x,y), tales que $-1 \leq x + y \leq 1$. Es decir, en la región del plano que se encuentra entre las rectas $x + y = 1$ y $x + y = -1$, incluyendo los puntos de ellas.

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución

La función f es continua en todos los puntos del plano diferentes del origen, porque en este conjunto está representada por $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, la cual siempre es continua allí. Se debe determinar f si es o no continua en $(0, 0)$. Para esto, se utiliza la definición

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(0,0)$$

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\, r\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{r} =$$

$$\lim_{r\to 0} r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0 = f(0,0)$$

Por tanto, f también es continua en $(0, 0)$.

6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución

La función f es continua en todos los puntos del plano diferentes del origen (similar al ejercicio anterior). Verifiquemos si es continua en $(0, 0)$. Esto es, si se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = f(0,0)$$

En este caso se puede mostrar fácilmente que el límite no existe, considerando las siguientes trayectorias:

Trayectoria $y = x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Trayectoria $y = x^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, f no es continua en $(0,0)$.

7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(x+y)}{x+y} & si \quad x+y \neq 0 \\ 1 & si \quad x+y = 0 \end{cases}$

Solución

La función f es continua en todos los puntos del plano que se encuentran fuera de la recta $y = -x$, porque en dicho conjunto f es representada por $f(x,y) = \frac{sen(x+y)}{x+y}$, la cual siempre es continua en dicho conjunto.

Falta determinar si f es continua en los puntos que se encuentran en la recta $y = -x$. La característica de estos puntos es que la suma de sus componentes es cero. Por lo tanto, se debe determinar si

$$\lim_{x+y\to 0} \frac{sen(x+y)}{x+y} = 1$$

Entonces, si $u = x + y$, se obtiene

$$\lim_{x+y\to 0} \frac{sen(x+y)}{x+y} = \lim_{u\to 0} \frac{sen\, u}{u} = 1$$

Lo anterior muestra que f también es continua en todos los puntos de la recta $y = -x$.

8. $f(x,y,z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$

Solución

La función f es continua en todos los puntos del espacio que se encuentran fuera de la esfera con centro en el origen y radio 1 $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$.

9. $f(x, y, z) = \text{Ln}\,(36 - 4x^2 - y^2 - 9z^2)$

Solución

La función f es continua en los puntos del espacio que están dentro del elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{4} = 1$$

10. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & si \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 3 & si \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Solución

La función f es continua en todo el espacio, excepto posiblemente en el origen. Entonces, se debe determinar si es continua en $(0,0,0)$. Esto es,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = f(0,0,0)$$

Al igual que el ejercicio 6 se puede demostrar que el límite no existe usando trayectorias.

Trayectoria $x = 0$ y $z = 0$ (eje y)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Trayectoria $x = 0$ y $y = 0$ (eje z)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{0}{z^2} = \lim_{z\to 0} 0 = 0$$

Por tanto, f no es continua en $(0, 0, 0)$.

La función dada es discontinua en el origen, determine si la discontinuidad es evitable y en caso de serlo redefina la función para que esta sea continua en todo el plano.

11. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Solución

Recuérdese que la discontinuidad en un punto es evitable si el límite de la función en dicho punto existe. Por lo tanto, analizando el límite con coordenadas polares se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r^2\cos^2\theta)(r^2 sen^2\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2 sen^2\theta\cos^2\theta = 0$$

De lo anterior, la discontinuidad es evitable. Redefiniendo la función obtenemos

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

12. $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Solución

En esta función el límite en el origen no existe. Se pueden utilizar trayectorias o coordenadas polares.

Trayectoria $x = 0$ (eje y) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

Trayectoria $y = 0$ (*eje* x) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Como el límite de la función en el origen no existe, entonces la discontinuidad es inevitable.

13. $f(x,y) = \frac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución

Usando coordenadas polares se tiene,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2 \operatorname{sen}^2\theta - 3r^2 sen\theta cos\theta}{\sqrt{r^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(2\operatorname{sen}^2\theta - 3sen\theta cos\theta)}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} r(2\operatorname{sen}^2\theta - 3sen\theta cos\theta) = 0$$

Entonces, la discontinuidad es evitable. Por tanto, redefiniendo la función obtenemos

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

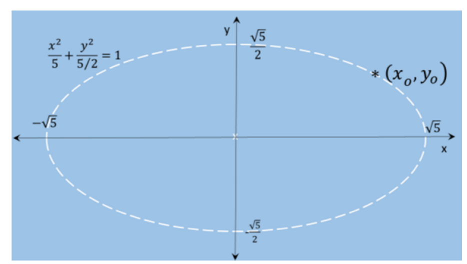
14. La función G está definida por

$$G(x,y) = \begin{cases} x^2+4y^2 & si \quad x^2+4y^2 \leq 5 \\ 3 & si \quad x^2+4y^2 > 5 \end{cases}$$

Muestre que la región de continuidad de G consta de todos los puntos en R^2, excepto los que se hallan en la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$.

Solución

Inicialmente, observe que la elipse divide al plano en dos regiones. En la región que se encuentra dentro y sobre la elipse, la función G está determinada por la función polinomica $G\,(x,y) = x^2 + 4y^2$ y fuera de la elipse por la función constante $G\,(x,y) = 3$



Por tanto, en los puntos del plano diferentes a los de la elipse, la función G es continua (es una función polinomica o constante).

Para demostrar que G no es continua en todo punto de la elipse, se debe mostrar que el límite en un punto arbitrario (x_0, y_0) de la elipse no existe. Para esto, hay que tener en cuenta dos casos. El primero, en donde se utilizan trayectorias totalmente contenidas dentro de la elipse (R_1) y, el segundo, trayectorias fuera de la elipse (R_2).

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2+4y^2) = {x_0}^2 + 4{y_0}^2 = 5$$

para todo $(x, y) \in R_1$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 3 = 3$$

para todo $(x, y) \in R_2$

Como se obtienen resultados diferentes, entonces

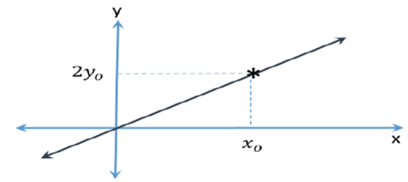
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) \quad \textit{no existe}$$

15. Considerando la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{x-2y} & si & x \neq 2y \\ g(x) & si & x = 2y \end{cases}$

Encuentre una expresión $g(x)$ para que la función f sea continua en todo R^2.

Solución

De forma similar al ejercicio anterior f es continua en todo punto del plano que se encuentra fuera de la recta $x = 2y$. Para encontrar $g(x)$ se analiza el límite de f en un punto arbitrario (x_0, y_0) sobre la recta $x = 2y$ $(x_0 = 2y_0)$. Esto es,



$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2-4y^2}{x-2y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x+2y) = x_0 + 2y_0 = x_0 + x_0 = 2x_0$$

Luego, para este punto (x_0, y_0), la expresión es $g(x) = 2x_0$. Entonces, de manera general, obtenemos que $g(x) = 2x$ para todo punto de la recta $x = 2y$. Reemplazando se tiene

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4y^2}{x-2y} & si & x \neq 2y \\ 2x & si & x = 2y \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

Encontrar el conjunto S donde las funciones dadas son continuas.

1. $f(x,y) = 4xy + \operatorname{sen} 3x^2y$

2. $f(x,y) = e^{3x-4y} + x^2 - y$

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$

4. $f(x,y) = \ln(3 - x^2 - y^2)$

5. $f(x,y) = \tan^{-1}(x + \sqrt{y})$

6. $f(x,y) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 + y^2 - 2)$

7. $f(x,y,z) = 4xe^{\frac{y}{z}}$

8. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$

9. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)}$

10. $f(x,y,z) = \sqrt{xy}\tan z$

Encuentre el conjunto de puntos en donde cada una de las siguientes funciones es discontinua.

11. $f(x,y) = \frac{y+1}{x(x^2+x-2)^2}$

12. $f(x,y) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{y+3}$

13. $f(x,y,z) = \frac{5}{x^2+y^2+z^2-1}$

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el punto crítico.

14. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2}{(x-2)^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (2,0) \\ 2 & si\ (x,y) = (2,0) \end{cases}$

15. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2} & si\ (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,1) \end{cases}$

16. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4(x-1)^2y}{(x-1)^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (1,0) \\ -3 & si\ (x,y) = (1,0) \end{cases}$

17. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

18. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x+xy}{x^2+|y+3|} & si\ (x,y) \neq (0,-3) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,-3) \end{cases}$

19. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

20. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

21. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 5 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

22. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^6+y^6+z^3} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

23. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Determinar, si la discontinuidad en el origen de las siguientes funciones es evitable. Si lo es, redefinir la función de manera que sea continua en dicho punto.

24. $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

25. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

26. $f(x,y) = \frac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

27. $f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\frac{x}{x^2+y^2}$

28. $f(x,y) = \frac{x(\cos y - 1)}{x^2+y^2}$

29. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

30. Determinar si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justificar su respuesta.

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x,b) = L,\ entonces \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,\ entonces\ \lim\limits_{x\to a} f(x,b) = L$

c) Si f es continua para todo (x, y) distintos de cero y $f(0, 0) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,\ entonces\ \lim\limits_{x\to a} f(x,b) = \lim\limits_{y\to b} f(a,y) = L$

e) $f(2{,}3) = 4,\ entonces\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 4$

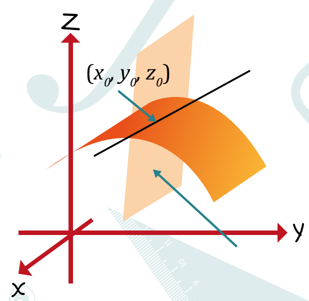
f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 4,\ entonces\ f(2{,}3) = 4$

31. La función F está definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & si \quad x^2 - 3y^2 \le 1 \\ 2 & si \quad x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre que F es continua en todos los puntos de R^2 excepto en aquellos de la hipérbola

$$x^2 - 3y^2 = 1$$



Capítulo 7

Derivada de funciones de varias variables

Sección 7.1. Derivadas parciales de primer orden y orden superior

Recordando, la derivada de una función f en una variable está dada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Partiendo del supuesto que el límite exista.

En esta sección nos enfocaremos a extender el concepto a funciones de dos y más variables, así como el concepto de derivadas parciales de orden superior.

Definición

Las primeras derivadas parciales de una función f de dos variables están dadas:

Derivada parcial en x $\qquad f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

Derivada parcial en y $\qquad f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

Partiendo del supuesto que los límites existan.

EJEMPLO

Aplicando la definición, encontrar las primeras derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = x^2y^3$$

Solución

Considerando y como una constante, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y^3 - x^2y^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(2xy^3 + hy^3) = 2xy^3$$

Considerando x como una constante, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2(y+h)^3 - x^2y^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(3x^2y^2 + 3x^2yh + x^2h^2) = 3x^2y^2$$

Observaciones

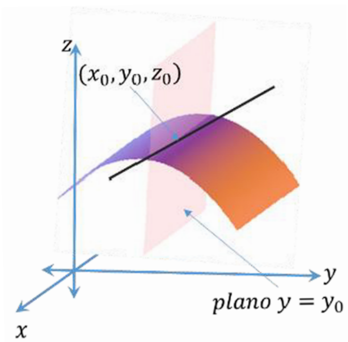
i) Otras notaciones que se utilizan para mostrar las primeras derivadas parciales de la función $f(x,y)$ son:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)], \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]$$

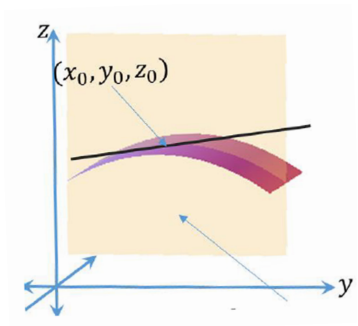
ii) Al igual que ocurrió con las funciones en una variable, las primeras derivadas parciales de la función $f(x,y)$ se pueden interpretar como límites, razones de cambio instantáneas en direcciones paralelas a los ejes coordenados y, a continuación, veremos que también representan la pendiente de una recta tangente en un punto dado.

iii) De la definición se desprende que para derivar parcialmente una función de varias variables con respecto a una de ellas, se consideran las demás variables como constantes y se utilizan las derivadas ordinarias en dicha variable.

iv) Interpretación geométrica. Consideremos la superficie $z = f(x,y)$



El plano $y = y_0$ corta a la superficie en una curva C. La recta tangente a la curva C en $p(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene como pendiente $m = f_x(x_0, y_0)$



El plano $x = x_0$ corta a la superficie en una curva C. La recta tangente a la curva C en $p(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene como pendiente $m = f_y(x_0, y_0)$

EJEMPLO

Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera, el modelo auto estable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas auto ajustable y y de inserción en una chimenea es:

$$C(x, y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050$$

Calcular los costos marginales $\left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}\right)$, cuando $x = 80$ y $y = 20$.

Solución

Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 32\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + 175 + 0 + 0 = 16\sqrt{\frac{y}{x}} + 175$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 32x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + 0 + 205 + 0 = 16\sqrt{\frac{x}{y}} + 205$$

Por tanto,

$$\frac{\partial C}{\partial x}(80{,}20) = 16\sqrt{\frac{y}{x}} + 175 = 16\sqrt{\frac{20}{80}} + 175 = 16\frac{1}{2} + 175 = 8 + 175 = 183$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(80{,}20) = 16\sqrt{\frac{x}{y}} + 205 = 16\sqrt{\frac{80}{20}} + 205 = 16 \cdot 2 + 205 = 32 + 205 = 237$$

EJEMPLO

La superficie $z = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$, y el plano $y = 1$ se intersecan en una curva C. Encuentre la pendiente de la recta tangente a C en el punto $(\sqrt{2}, 1, 2)$.

Solución

La pendiente de esta recta tangente está dada por $f_x(\sqrt{2}, 1)$. Entonces

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{9 - 2x^2 - y^2}}(-4x) = \frac{-2x}{\sqrt{9 - 2x^2 - y^2}}$$

Por tanto,

$$m = f_x(\sqrt{2}, 1) = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{2}.$$

EJEMPLO

Hallar las primeras derivadas parciales de la función $f(x, y) = xe^{(x/y)}$.

Solución

Para hallar $f_x(x, y)$, se debe resolver como la derivada de un producto considerando a y constante. Entonces

$$f_x(x, y) = 1e^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}} + \left(\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}$$

Para encontrar $f_x\,(x, y)$ se considera a x como constante. Por tanto

$$f_y(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y^2}e^{x/y}$$

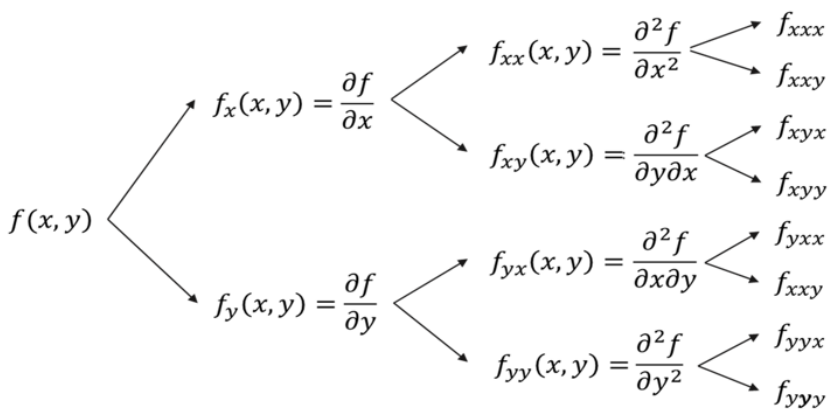
El concepto de derivadas parciales se extiende en forma natural a funciones de tres o más variables independientes. Esto es, si $u = f\,(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n)$ es una función en n-variables, entonces las primeras derivadas parciales están dadas.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Para todo $i = 1,2,\ldots,n$. Partiendo del supuesto que los límites existan.

Derivadas parciales de orden superior

De igual manera que ocurrió para funciones en una variable, podemos encontrar las derivadas parciales de una función de varias variables, de orden 2, orden 3, etc. Veamos un diagrama considerando una función en dos variables $f\,(x, y)$, el cual se puede extender a funciones de tres o más variables.



EJEMPLO

Calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función

$$z = 2xe^y - 3ye^{-x}$$

Solución

Las primeras derivadas parciales son

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^y + 3ye^{-x}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xe^y - 3e^{-x}$

Considerando la función $\frac{\partial z}{\partial x}$, se deriva con respecto a x e y

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - 3ye^{-x} = -3ye^{-x}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2e^y + 3e^{-x}$

Ahora, derivando la función $\frac{\partial z}{\partial y}$ con respecto a x e y se tiene

- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2xe^y$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^y + 3e^{-x}$

Observación

En el diagrama se puede ver que una función de dos variables $f\,(x, y)$ tiene dos primeras derivadas parciales, cuatro derivadas parciales de orden dos, ocho derivadas parciales de orden tres, dieciséis derivadas parciales de orden cuatro y así sucesivamente. De las cuatro derivadas parciales de orden dos, hay dos que se denominan derivadas cruzadas (f_{xy} y f_{yx}). De orden tres hay dos ternas que se denominan derivadas cruzadas ($f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}$ y $f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx}$), etc. Estas derivadas cruzadas tienen la característica de que el resultado se extiende a las derivadas cruzadas de tercer orden y más.

Teorema de Clairaut

Si $f_{xy}(x, y)$ y $f_{yx}(x, y)$ son continuas en un conjunto abierto que contiene a (x_0, y_0), entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = fyx\,(x_0, y_0)$$

EJEMPLO

Muestre que las derivadas parciales cruzadas (mixtas), para la función que aparece a continuación son iguales

$$z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Solución

Para encontrar $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, primero se deriva la función con respecto a x y luego este resultado en y. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-1(x^2+y^2) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Para encontrar $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, primero se deriva la función con respecto a y y luego este resultado en x. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1(x^2+y^2) - 2x(x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ejercicios complementarios

1. La deformidad f de un pistón en la cámara de admisión, depende del coeficiente de rozamiento μ y de la temperatura a la cual es sometida. En la siguiente tabla se presentan los datos de la deformidad de un pistón:

	T (°F)			
μ (%)	800	1000	1200	1400
40	0.03	0.04	0.06	0.07
50	0.05	0.06	0.1	0.11
60	0.07	0.09	0.12	0.14
70	0.09	0.13	0.16	0.18

Encuentre la razón de cambio de la deformidad f con respecto a cada variable independiente en

a) $\mu = 50\%$, $T = 1000$ °F **b)** $\mu = 60\%$, $T = 1200$ °F

Solución

a) $$f_\mu(50{,}1000) = \frac{f(60{,}1000) - f(40{,}1000)}{60 - 40} = \frac{0.09 - 0.04}{20} = 0.0025$$

$$f_T(50{,}1000) = \frac{f(50{,}1200) - f(50{,}800)}{1200 - 800} = \frac{0.1 - 0.05}{400} = 0.000125$$

b) $$f_\mu(60{,}1200) = \frac{f(70{,}1200) - f(50{,}1200)}{70 - 50} = \frac{0.16 - 0.1}{20} = 0.003$$

$$f_T(60{,}1200) = \frac{f(60{,}1400) - f(60{,}1000)}{1400 - 1000} = \frac{0.14 - 0.09}{400} = 0.000125$$

2. En la siguiente tabla se presentan los datos del índice calorífico I que depende de la temperatura T y de la humedad relativa H.

	H							
T (°F)	50	55	60	65	70	75	80	85
90	96	98	100	103	106	109	112	115
92	100	103	105	108	112	115	119	123
94	104	107	111	114	118	122	127	132
96	109	113	116	121	125	130	135	141
98	114	118	123	127	133	138	144	150
100	119	124	129	135	141	147	154	161

Encuentre la tasa de cambio del índice calorífico I con respecto a cada variable independiente en

a) $T = 92$ °F , $H = 80$ **b)** T = 96 °F , $H = 65$

Solución

a) $$I_T(92{,}80) = \frac{I(94{,}80) - I(90{,}80)}{94 - 90} = \frac{127 - 112}{4} = 3.75$$

$$I_H(92{,}80) = \frac{I(92{,}85) - I(92{,}75)}{85 - 75} = \frac{123 - 115}{10} = 0.8$$

b) $$I_T(96{,}65) = \frac{I(98{,}65) - I(94{,}65)}{98 - 94} = \frac{127 - 114}{4} = 3.25$$

$$I_H(96{,}65) = \frac{I(96{,}70) - I(96{,}60)}{70 - 60} = \frac{125 - 116}{10} = 0.9$$

Utilice la definición para encontrar las primeras derivadas parciales de la función dada.

3. $f(x,y) = \sqrt{2x+4y}$

Solución

Partiendo de la definición se encuentra la derivada parcial en x

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)+4y}-\sqrt{2x+4y}}{h}$$

Multiplicando por el conjugado del numerador

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2(x+h)+4y}-\sqrt{2x+4y})(\sqrt{2(x+h)+4y}+\sqrt{2x+4y})}{h(\sqrt{2(x+h)+4y}+\sqrt{2x+4y})}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+4y)-(2x+4y)}{h(\sqrt{2(x+h)+4y}+\sqrt{2x+4y})} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2(x+h)+4y}+\sqrt{2x+4y})}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)+4y}+\sqrt{2x+4y}} = \frac{2}{\sqrt{2x+4y}+\sqrt{2x+4y}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+4y}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x+4y}}$$

De igual manera, encontramos la derivada parcial en y

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+4(y+h)}-\sqrt{2x+4y}}{h}$$

Multiplicando por el conjugado del numerador

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2x+4(y+h)}-\sqrt{2x+4y})(\sqrt{2x+4(y+h)}+\sqrt{2x+4y})}{h(\sqrt{2x+4(y+h)}+\sqrt{2x+4y})}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{(2x+4y+4h)-(2x+4y)}{h(\sqrt{2X+4(y+h)}+\sqrt{2x+4y})} = \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h(\sqrt{2x+4(y+h)}+\sqrt{2x+4y})}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{4}{\sqrt{2x+4(y+h)}+\sqrt{2x+4y}} = \frac{4}{\sqrt{2x+4y}+\sqrt{2x+4y}} = \frac{4}{2\sqrt{2x+4y}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2}{\sqrt{2x+4y}}$$

4. $f(x,y) = 3xy^2 - 5x^2 + 3$

Solución

Derivada parcial en x

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)y^2-5(x+h)^2+3]-[3xy^2-5x^2+3]}{h}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{3xy^2+3hy^2-5x^2-10xh-5h^2+3-3xy^2+5x^2-3}{h}$$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{3hy^2-10xh-5h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3y^2-10x-5h)}{h} = \lim_{h\to 0}(3y^2-10x-5h)$$

$f_x(x,y) = 3y^2 - 10x$

Derivada parcial en y

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3x(y+h)^2-5x^2+3]-[3xy^2-5x^2+3]}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{3xy^2+6xyh+3xh^2-5x^2+3-3xy^2+5x^2-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6xyh+3xh^2}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{h(6xy+3xh)}{h} = \lim_{h\to 0}(6xy+3xh) = 6xy$$

Encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada.

5. $f(x,y) = y\,sen\,x^2 + x^3$

Solución

$f_x\,(x, y) = y(\cos x^2)(2x) + 3x^2 = 2xy(\cos x^2) + 3x^2$

$f_y\,(x, y) = 1(\operatorname{sen} x^2) + 0 = \operatorname{sen} x^2$

6. $f\,(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(xy) - 3y^3$

Solución

$f_x\,(x, y) = 2x \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)yx^2 - 0 = 2x \operatorname{sen}(xy) + x^2 y \cos(xy)$

$f_y\,(x, y) = x^2 \cos(xy)\, x - 9y^2 = x^3 \cos(xy) - 9y^2$

7. $f(x,y) = 4e^{\frac{x}{y}} - \frac{y}{x}$

Solución

$$f_x(x,y) = 4e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\right) - y\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{4}{y}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) + \left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$f_y(x,y) = 4e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{1}{x} = -\frac{4x}{y^2}\left(e^{\frac{x}{y}}\right) - \frac{1}{x}$$

8. $f\,(x, y, z) = 3x \operatorname{sen} y + 4x^3 y^2 z$

Solución

$f_x\,(x, y, z) = 3 \operatorname{sen} y + 12x^2 y^2 z$

$f_y\,(x, y, z) = 3x \cos y + 4x^3\, 2yz = 3x \cos y + 8x^3 yz$

$f_z\,(x, y, z) = 0 + 4x^3 y^2(1) = 4x^3 y^2$

9. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}} + \frac{x^2-3z}{y+z}$

Solución

$$f_x(x,y,z) = \frac{y}{z}\left(x^{\frac{y}{z}-1}\right) + \frac{2x}{y+z}$$

$$f_y(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}(\ln x)\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{0-1(x^2-3z)}{(y+z)^2} = \left(\frac{1}{z}\right)x^{\frac{y}{z}}(\ln x) - \frac{x^2-3z}{(y+z)^2}$$

$$f_z(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}(\ln x)\left(-\frac{y}{z^2}\right) + \frac{-3(y+z)-1(x^2-3z)}{(y+z)^2} = -\left(\frac{y}{z^2}\right)x^{\frac{y}{z}}(\ln x) - \frac{x^2+3y}{(y+z)^2}$$

Encuentre las derivadas parciales indicadas.

10. $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z};\ f_z(3{,}2{,}1).$

Solución

$$f_z(x,y,z) = \frac{0-1(x)}{(y+z)^2} = -\frac{x}{(y+z)^2}, \qquad luego\ f_z(3{,}2{,}1) = -\frac{3}{(2+1)^2} = -\frac{1}{3}$$

11. $f\,(u, v, w) = w\tan(uv);\quad f_v\,(2{,}0{,}3)$

Solución

$f_v\,(u, v, w) = w \sec^2(uv)u = uw(\sec(uv))^2$,

luego $f_v\,(2{,}0{,}3) = 2(3)\,(\sec(0))^2 = 6$

12. *Si* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, encuentre $f_x(0{,}0)$

Solución

Para encontrar $f_x(0, 0)$ se debe utilizar la definición, porque al aplicar las reglas de derivación y evaluar $f_x(x, y)$ en el origen no se puede concluir nada (verificar).

Partiendo de la definición general

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Evaluando en el origen se obtiene

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^3+0^3}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Halle todos los puntos donde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^4$

Solución

Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 - 4x^3 = 2x - 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2y - 0 = 2y$$

Igualando a cero las primeras derivadas parciales se obtiene un sistema de ecuaciones de orden 2 x 2.

$$(1)2x - 4x^3 = 0, \quad (2)2y = 0$$

Resolviendo la primera ecuación en x, obtenemos

$$2x - 4x^3 = 0 \leftrightarrow 2x(1-2x^2) = 0 \leftrightarrow x = 0, \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y de la segunda ecuación se tiene que $y = 0$. Por tanto, los puntos son $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

14. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

Solución

Realizando un procedimiento similar, tenemos

$$f_x(x,y) = (e^{-x^2-y^2})(-2x) = -2xe^{-x^2-y^2}, \quad f_y(x,y) = (e^{-x^2-y^2})(-2y) = -2ye^{-x^2-y^2}$$

El sistema de ecuaciones es

$$(1)\ -2xe^{-x^2-y^2} = 0, \quad (2)\ -2ye^{-x^2-y^2} = 0$$

Como la función exponencial nunca se anula, se obtiene que la única solución es: $x = 0$ y $y = 0$. Es decir, el único punto es $(0,0)$.

15. La temperatura en un punto (x, y) en una placa metálica plana está dada por $T(x,y) = \frac{60}{1+x^2+y^2}$, donde T se mide en °C y x e y en metros. Encuentre la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia del punto $(2,1)$ en (a) la dirección x y (b) la dirección y.

Solución

En el problema se pide encontrar las primeras derivadas parciales de la temperatura en el punto $(2,1)$. Entonces,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{0-2x(60)}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{120x}{(1+x^2+y^2)^2}, \textit{entonces } \frac{\partial T}{\partial x}(2,1) = -\frac{240}{36} = -\frac{20}{3}\frac{°C}{m}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{0-2y(60)}{(1+x^2+y^2)^2} = -\frac{120y}{(1+x^2+y^2)^2}, \textit{entonces } \frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = -\frac{120}{36} = -\frac{10}{3}\frac{°C}{m}$$

Observación

El signo negativo nos indica que la temperatura en el punto $(2,1)$ en las dos direcciones está disminuyendo.

16. Encuentre $\frac{\partial R}{\partial R_1}$, donde R es la resistencia total producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2, R_3, conectadas en un circuito eléctrico en paralelo está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Solución

Inicialmente se reescribe la función R realizando la suma de las fracciones.

$$\frac{1}{R}=\frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}, \qquad \text{entonces } R=\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}$$

Ahora, se deriva el cociente con respecto a R_1

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R_2R_3(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)-(R_2+R_3)(R_1R_2R_3)}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1}=\frac{R_2^2R_3^2+R_1R_2R_3^2+R_1R_2^2R_3-R_1R_2R_3^2-R_1R_2^2R_3}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2}=\frac{R_2^2R_3^2}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2}$$

17. El valor de una inversión de 1.000 dólares a una tasa r por 5 años con una tasa de impuesto de 28% es $V=1000\left(\frac{1+0.72r}{1+I}\right)^5$, donde I es la tasa de inflación. Calcule $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial I}$ y analice cuál de las dos tasas (inversión o inflación) tiene mayor influencia en el valor de la inversión.

Solución

Las razones de cambio de la inversión con respecto a las tasas de interés e inflación están dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial r}=5000\left(\frac{1+0.72r}{1+I}\right)^4\left(\frac{0.72}{1+\mathrm{I}}\right)=3600\frac{(1+0.72r)^4}{(1+I)^5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial I}=5000\left(\frac{1+0.72r}{1+I}\right)^4\left(\frac{0-1(1+0.72r)}{(1+I)^2}\right)=-5000\frac{(1+0.72r)^5}{(1+I)^6}$$

Tiene mayor influencia la tasa de inversión $\frac{\partial V}{\partial r}$

18. El elipsoide $4x^2+2y^2+z^2=16$ interseca al plano $y=2$ en una elipse. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 2)$.

Solución

Recordando las ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio son:

$x=x_0+at,\ y=y_0+bt,\ z=z_0+ct,$ donde (x_0, y_0, z_0) es un punto de la recta, que para nuestro ejercicio es $(1, 2, 2)$ y el vector director es $v=ai+bj+ck$.

Puesto que la recta tangente está en el plano $y=2$, entonces la componente en j del vector director vale cero $(b=0)$ y para hallar las componentes en i y k es necesario la pendiente de la recta tangente $\left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)\right)$, que determina los valores de a y c.

Si $z=\sqrt{16-4x^2-2y^2}$, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(16-4x^2-2y^2)^{-\frac{1}{2}}(-8x)=-\frac{4x}{\sqrt{16-4x^2-2y^2}}.$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la elipse dada es: $m=\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=\frac{-4}{2}=-2.$

Esta pendiente determina el cociente entre c y a. Es decir, $c/a=-2$ (existen infinitas posibilidades).

Si consideramos, por ejemplo, los valores de $a=1$ y $c=-2$, obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas $x=1+t$, $y=2$, $z=2-2t$.

19. Halle todas las segundas derivadas parciales de la función $f(x, y)=y\tan 2x$

Solución

Primero se encuentran las primeras derivadas parciales

$f_x(x, y)=y\sec^2 2x(2)=2y\sec^2 2x,\quad f_y(x, y)=(1)\tan 2x=\tan 2x$

Ahora, consideremos a $f_x(x, y)=2y\sec^2 2x$ y se deriva tanto en x como en y.

$f_{xx}(x, y)=(2)2y\sec 2x\sec 2x\tan 2x(2)=8y\sec^2 2x\tan 2x,$

$f_{xy}(x, y)=2\sec^2 2x$

De igual manera se considera a $f_y(x, y) = \tan 2x$, y se deriva tanto en x como en y.

$$f_{yx}(x, y) = \sec^2 2x(2) = 2\sec^2 2x, \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

Obsérvese que las derivadas parciales cruzadas son iguales $f_{xy} = f_{yx}$

20. Verifique que se cumple el *teorema de Clairaut* $U_{xy} = U_{yx}$, para $U(x, y) = xye^y$

Solución

Para hallar U_{xy} debemos derivar la función U con respecto a x y luego el resultado con respecto a y.

$$U_x(x, y) = (1)ye^y = ye^y \longrightarrow U_{xy}(x, y) = (1)(e^y) + (y)(e^y) = e^y + ye^y$$

Ahora se realizan las derivadas parciales en el orden contrario

$$U_y(x, y) = (x)(1e^y + ye^y) = x(ye^y + ye^y) \longrightarrow U_{yx}(x, y) = (1)(e^y + ye^y) = e^y + ye^y$$

Por tanto, se observa que $U_{xy} = U_{yx}$

21. Para la función $f(x, y, z) = xy^2 z^3 - e^{xyz}$, halle las derivadas parciales que se indican

$$f_{yy}, f_{zz}, f_{xyy}$$

Solución

$$f_y(x, y, z) = x(2y) z^3 - e^{xyz}(xz) = 2xyz^3 - xze^{xyz}$$

Luego,

$$f_{yy}(x, y, z) = 2xz^3 - xze^{xyz}(xz) = 2xz^3 - x^2 z^2 e^{xyz}$$

Ahora,

$$f_z(x, y, z) = xy^2(3z^2) - e^{xyz}(xy) = 3xy^2 z^2 - xye^{xyz}$$

Entonces,

$$f_{zz}(x, y, z) = 3xy^2(2z) - xye^{xyz}(xy) = 6xy^2 z - x^2 y^2 e^{xyz}$$

Finalmente,

$$f_x(x, y, z) = y^2 z^3 - e^{xyz}(yz) = y^2 z^3 - yze^{xyz}$$

Luego,

$$f_{xy}(x, y, z) = 2yz^3 - (ze^{xyz} + yze^{xyz}(xz)) = 2yz^3 - ze^{xyz} - xyz^2 e^{xyz}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f_{xyy}(x, y, z) &= 2z^3 - ze^{xyz}(xz) - (xz^2 e^{xyz} + xyz^2 e^{xyz}(xz)) \\ &= 2z^3 - 2xz^2 e^{xyz} - x^2 yz^3 e^{xyz} \end{aligned}$$

22. Halle la derivada parcial indicada de la función

$$z = \ln \operatorname{sen}(x - y); \ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x - y)} \cos(x - y)(1) = \cot(x - y) \ \rightarrow \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -csc^2(x - y)(1) = -csc^2(x - y)$$

Entonces,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = -2\csc(x - y)(-\csc(x - y)\cot(x - y))(-1) = -2csc^2(x - y)\cot(x - y)$$

23. Verifique que la función $u = e^{(-\gamma^2 k^2 t)} \operatorname{sen} kx$ es una solución de la ecuación de conducción de calor $u_t = \gamma^2 u_{xx}$

Solución

Se encuentran las derivadas parciales u_t, u_{xx}

$$u_t = e^{-\gamma^2 k^2 t}(-\gamma^2 k^2) \operatorname{sen} kx = -\gamma^2 k^2 e^{-\gamma^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$$

$$u_x = e^{-\gamma^2 k^2 t} \cos kx \, k = ke^{-\gamma^2 k^2 t} \cos kx$$

$$u_{xx} = ke^{-\gamma^2 k^2 t}(-\operatorname{sen} kx)\, k = -k^2 e^{-\gamma^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$$

Reemplazando en la ecuación de calor $u_t = \gamma^2 u_{xx}$ se observa que la función sí es una solución de la ecuación.

24. Verifique que la función $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, sea solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

Solución

Inicialmente se encuentra u_{xx}

$$u_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Luego,

$$u_{xx} = -1(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2x)$$

Es decir,

$$u_{xx} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

De la misma forma se muestra que

$$u_{yy} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$u_{zz} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Por tanto,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{-3}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

25. Demuestre que la función $z = xe^y + ye^x$ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

Solución

Encontremos las derivadas parciales $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ y $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1e^y + ye^x = e^y + ye^x \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 + ye^x = ye^x \longrightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = ye^x$$

Ahora,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + 1e^x = xe^y + e^x \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y + 0 = xe^y \longrightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = xe^y$$

Además,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + 1e^x = xe^y + e^x \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y + 0 = xe^y \longrightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 1e^y = e^y$$

Finalmente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y + 1e^x = xe^y + e^x \longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y + e^x = e^y + e^x \longrightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0 + e^x = e^x$$

Reemplazando en la ecuación observamos

$$ye^x + xe^y = xe^y + ye^x$$

26. Si a usted le dicen que hay una función f, cuyas derivadas parciales están dadas por: $f_x(x, y) = x + 4y$, $f_y(x, y) = 3x - y$ y cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas, ¿debe creerlo?

Solución

La afirmación es falsa, porque por consiguiente se debería cumplir que las derivadas cruzadas $f_{xy}(x, y) = 4$ y $f_{yx}(x, y) = 3$ deben ser iguales, lo cual no es cierto.

27. Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Demuestre que $f_{xy}(0,0)=-1$ y $f_{yx}(0,0)=1$.

Solución

Para encontrar las primeras derivadas parciales de $f(x,y)$, se deriva a f en x e y como un cociente, para todo punto diferente del origen y utilizamos la definición para hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$. Entonces, para todo $(x,y)\neq(0,0)$

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(x,y)=\frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-y^5+x^4y+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-2y(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Ahora, utilizando la definición se encuentran $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3*0-h*0^3}{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0^3*h-0*h^3}{0^2+h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

Por tanto, se definen $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ de la siguiente forma

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{-y^5+x^4y+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para hallar $f_{xy}(0,0))$ y $f_{yx}(0,0)$ se debe utilizar nuevamente la definición

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-h^5+0^4h+4*0^2*h^3}{(0^2+h^2)^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{h^5}{h^4}-0}{h}$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to0}-1=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5-h*0^4-4*h^3*0^2}{(h^2+0^2)^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$$

Ejercicios propuestos

Calcule las primeras derivadas parciales de la función dada.

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$

2. $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$

3. $z = (2x + 3y)^{10}$

4. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

5. $f(\alpha, \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

6. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$

7. $f(w, t) = te^{w/t}$

8. $z = e^{\frac{y}{x}} \ln \frac{x^2}{y}$

9. $f(x,y) = \int_x^y \ln \operatorname{sen} t\, dt$

10. $f(x, y) = (3x^3 y^2 - 2xy^3)^4$

11. $f(x, y) = (\cos y)^{\operatorname{sen} x}$

12. $f(x, y) = y^3\, 5^{x^2 \operatorname{senh} 3y}$

13. $f(x,y) = (y^2 \operatorname{sen}^2 x + 5)^{\sqrt{y}}$

14. $f(x,y) = \frac{x \sec xy - y \tan^{-1} xy}{\cos x + y^x}$

15. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$

16. $f(x, y, z) = \ln(x+2y+3z)$

17. $f(x, y, z) = xy \operatorname{sen}^{-1}(yz)$

18. $f(x, y, z) = e^{xy} \operatorname{senh} 2z - e^{yz} \cosh 2x$

19. $f(x, y, z) = x^3 y^2 z - \cot x^z + \cosh z^y$

20. $f(x, y, z) = y \operatorname{sen} x + x \cos z - \operatorname{sen}^{-1} yz$

21. $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x^2 \sqrt{\tan y} - e^{\operatorname{sen} z} \cos y^2$

22. $f(x,y,z) = 2\sqrt{xy} - y3^{\frac{y}{z}}$

23. $f(x, y, z) = (\cos x)^{(\operatorname{sen} z)^{\cos y}}$

24. $f(x, y, z) = x^{y \tan^{-1} z}$

25. $f(x, y, z, t) = xyz^3 \tan(yt)$

26. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

27. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n)$

Determine las derivadas parciales indicadas.

28. $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right);\ f_x(3,4)$

29. $f(r,\theta) = r \tan\theta - r^2 \operatorname{sen}\theta\ ;\ f_r\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right),\ f_\theta(3,\pi)$

30. $f(x,y,z) = \frac{y}{x+y+z};\ f_y(2,1,-1)$

31. $f(x, y, z) = e^{xy^2} + \ln(y + z);\ f_x(3,0,17), f_y(1,0,2), f_z(0,0,1)$

Usando la definición, determinar las primeras derivadas parciales de la función dada.

32. $f(x, y) = xy^2 - x^3 y$

33. $f(x, y) = xy^2 - 5y + 6$

34. $f(x,y) = \frac{x+2y}{x^2-y}$

Mediante derivación implícita determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

35. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

36. $x - z = \tan^{-1}(yz)$

37. $3x^2 y^3 z + \ln 2yz^2 = e^{xyz}$

38. $4 \operatorname{sen} xyz + 2xy^2 z^3 = yz$

39. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x+3y}{2x-z^3} = 6$

Determine todas las segundas derivadas parciales de la función dada.

40. $f(x, y) = x^3 y^5 + 2x^4 y$

41. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

42. $z = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

Compruebe que se cumple el teorema de Clairaut, es decir, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(y, x)$

43. $f(x, y) = x\, sen(x + 2y)$

44. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

45. $f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}} + \ln\frac{y}{x}$

46. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

47. $f(x, y) = e^x\ cosy + tan^{-1}x \ln y$

48. $f(x, y) = 3x\, cosh\, y - sen^{-1}\, e^x$

Encuentre la derivada parcial indicada.

49. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3 y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

50. $f(x, y) = x^2\ cos\, e^y$; $f_{xyx},\ f_{yxy}$

51. $f(r, \theta) = e^{r\theta}$ sen θ; $f_{\theta rr}$

52. $f(x, y, z) = cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

53. $f(x, y, z) = tan^{-1}(3xyz)$; f_{xxz}, f_{xyz}

54. $w = \frac{3x^2}{y+2z}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

Determine si cada una de las siguientes funciones es una solución de la ecuación de Laplace. $U_{xx} + U_{yy} = 0$

55. $U = x^3 + 3xy^2$

56. $U = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

57. $U = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

58. $U = \tan^{-1}\frac{2xy}{x^2 - y^2}$

59. $U = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{x}{x^2+y^2}$

Demuestre que cada una de las siguientes funciones es una solución de la ecuación de onda. $U_{tt} = a^2 U_{xx}$

60. $U = sen(kx)\ sen(akt)$

61. $U = \frac{t}{a^2t^2 - x^2}$

62. $U = sen(x - at) + \ln(x + at)$

63. Sea $u = \text{sen}\frac{r}{t} + \ln\frac{t}{r}$. Verifique que $t\frac{\partial u}{\partial t} + r\frac{\partial u}{\partial r} = 0$

64. Sea $w = x^2y + y^2z + xz^2$. Verifique que $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$

65. La ley de los gases para una masa prefijada m de un gas ideal a temperatura absoluta T, presión P y volumen V, es $PV = mRT$, donde R es la constante de los gases. Demuestre que:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

66. La energía cinética de un cuerpo con masa m y velocidad v es $k = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre:

$$\frac{\partial k}{\partial m}\frac{\partial^2 k}{\partial v^2} = k$$

67. La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa delgada está dada por la función $T(x, y) = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Si la distancia se mide en centímetros, calcule la tasa de variación de la temperatura con respecto a la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones positivas de los ejes x y y, respectivamente, en el punto $(3, 1)$.

68. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie dada $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ con el plano $x = 1$ en el punto $(1, \sqrt{12}, -3)$

69. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ corta el plano $x = 1$ en una parábola. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$

70. Determine ecuaciones de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie dada $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $y = 2$ en el punto $(1, 2, 2)$

71. Suponga que la posición de una cuerda de guitarra de longitud L varía de acuerdo con $p(x, t)$ = *sen* x *cos* t, donde x representa la distancia sobre la cuerda, $0 \leq x \leq L$, y t representa el tiempo. Calcule $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial t}$

72. Suponga que la concentración de algún contaminante en un río, como función de la posición x, y el tiempo t, está dada por $p(x, t) = p_0\,(x - ct)\,e^{-ut}$ para las constantes p_0,c,u. Demuestre que $\frac{\partial p}{\partial t} = -c\frac{\partial p}{\partial x} - up$

73. En una reacción química, la temperatura T, la entropía S, la energía libre de Gibbs G, la entalpía H, se relacionan mediante $G = H - TS$. Demuestre que $\frac{\partial\left(\frac{G}{T}\right)}{\partial T} = -\frac{H}{T^2}$

74. Si $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_y\,(0,0)$

75. Si $f(x,y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\,e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, utilizando la definición determine $f_x\,(1,0)$

76. Si $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ encuentre $f_x(0,0), f_y\,(0,0)$

Calcule $f_{xy}\,(0, 0)$ y $f_{yx}\,(0, 0)$ si existen

77. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

78. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

79. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y} & si \quad xy \neq 0 \\ 0 & si \quad xy = 0 \end{cases}$

Sección 7.2. Plano tangente, aproximación lineal, diferenciales

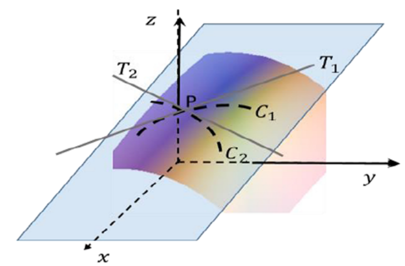
Recordando que, al aproximarse a un punto de la gráfica de una función en una variable diferenciable, la curva y su recta tangente en dicho punto tienden a confundirse y podemos aproximar la función con una función lineal. Este resultado se extiende a funciones diferenciables en dos variables.

Esto es, a medida que nos acercamos a un punto de una superficie, que es la gráfica de una función diferenciable en dos variables, la superficie y un plano (plano tangente) tienden a confundirse. Por tanto, podemos aproximar la función mediante una función lineal de dos variables.

Plano tangente

Sean $z = f\,(x, y)$ una superficie S, donde f tiene primeras derivadas parciales y $p(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S. Sean C_1 y C_2 las curvas de intersección de la superficie S con los planos dados por $y = y_0$ y $x = x_0$, respectivamente.

Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto p. Entonces el plano tangente a la superficie dada por $z = f\,(x, y)$ en el punto $p(x_0, y_0, z_0)$ es el plano que contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.



Para determinar la ecuación del plano tangente, partimos del hecho de que cualquier plano que pasa por el punto $p(x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector normal $v = ai + bj + ck$ tiene una ecuación de la forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Entonces, despejando se tiene

$$z - z_0 = -\frac{a}{c}(x - x_0) - \frac{b}{c}(y - y_0),\ \textit{donde}\ c \neq 0.$$

Si la ecuación anterior representa el plano tangente en p, entonces la intersección del mismo, con el plano $y = y_0$ debe ser la recta T_1. Sustituyendo, se obtiene

$$z - z_0 = -\frac{a}{c}(x - x_0);\ y = y_0$$

Pero en la sección anterior se vio que la pendiente de la recta tangente T_1 está dada por $f_x(x_0, y_0)$. Por tanto, tenemos que $-\frac{a}{c} = f_x(x_0, y_0)$.

De igual forma, si se intersecta con el plano $x = x_0$, obtenemos

$$z - z_0 = -\frac{b}{c}(y - y_0);\quad x = x_0$$

Donde, de forma similar se llega a que $-\frac{b}{c} = f_y(x_0, y_0)$.

Entonces, la ecuación del plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$, en el punto $p(x_0, y_0, z_0)$, está dada

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

EJEMPLO

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ en el punto $(1, -1, 1)$.

Solución

Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(4 - x^2 - 2y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}(4 - x^2 - 2y^2)^{-\frac{1}{2}}(-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}}$$

Luego,

$$f_x(1, -1) = \frac{-1}{\sqrt{4-1-2}} = -1 \quad y \quad f_y(1, -1) = \frac{2}{\sqrt{4-1-2}} = 2$$

Por tanto, reemplazando los valores se obtiene

$z - 1 = -1\ (x - 1) + 2\ (y - (-1)) \longrightarrow z - 1 = -x + 1 + 2y + 2 \longrightarrow z = -x + 2y + 4$

Observación

Más adelante se observara que el plano tangente a una superficie en un punto es aquel plano que contiene todas las rectas tangentes a las curvas que se encuentren en la superficie y pasen por el punto indicado.

Aproximaciones lineales

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La función lineal cuya gráfica es el plano tangente dado, es decir,

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se denomina "***linealización de f en*** (x_0, y_0)" y la aproximación

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se llama "***aproximación lineal de f en*** (x_0, y_0)".

EJEMPLO

Encuentre la linealización y aproximación lineal de la superficie dada por $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ en $(1, -1, 1)$.

Solución

En el ejemplo anterior se encontró la ecuación del plano tangente a la función dada en dicho punto. Por tanto, la linealización de f en $(1,-1)$ es $L(x, y) = -x + 2y + 4$ y la aproximación lineal

$\sqrt{4 - x^2 - 2y^2} \simeq -x + 2y + 4.$

Observación

Al inicio de la sección, se dijo que se quiere extender la interpretación geométrica de las funciones de una variable diferenciable, a funciones en dos variables diferenciables. Por lo tanto, hay que definir el concepto de diferenciabilidad para funciones en dos variables.

Definición (diferenciabilidad)

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Observación

Δz representa el incremento en z cuando f cambia de un punto (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ y Δx, Δy son los incrementos en x e y, respectivamente.

Si una función f de dos variables es diferenciable en un punto (x_0, y_0), significa geométricamente que la superficie $z = f(x, y)$ y el plano tangente en dicho punto tienden a confundirse.

A veces es difícil utilizar la definición para mostrar que una función f de dos variables es diferenciable. Por tanto, el siguiente resultado proporciona una herramienta fácil de usar.

TEOREMA

Si las derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen cerca de (x_0, y_0) y son continuas en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

EJEMPLO

Demuestre que $f(x, y) = e^x \cos xy$ es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución

Las derivadas parciales de f son

$f_x(x,y) = e^x \cos xy - ye^x \operatorname{sen} xy$, *luego* $f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x,y) = -xe^x \operatorname{sen} xy$, *entonces* $f_y(0, 0) = 0$

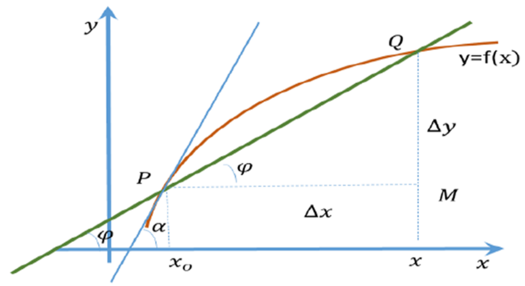
Tanto $f_x(x, y)$ como $f_y(x, y)$ son funciones continuas en $(0, 0)$, de modo que f es diferenciable en $(0, 0)$.

Diferenciales

Recordando, para una función de una variable $y = f(x)$, si consideramos el diferencial dx como una variable independiente, entonces, el diferencial dy se define como

$$dy = f'(x)dx$$

En la siguiente figura se muestra la relación entre el incremento Δy y el diferencial dy



- Δy representa el cambio en altura que sufre la curva cuando x cambia en un valor Δx.
- dy representa el cambio en altura que sufre la recta tangente cuando x cambia en un valor $dx = \Delta x$
- Si Δx es muy pequeño, entonces $\Delta y \approx dy$

Definición

Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos los diferenciales dx y dy como variables independientes. Entonces, el diferencial dz (diferencial total) se define

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

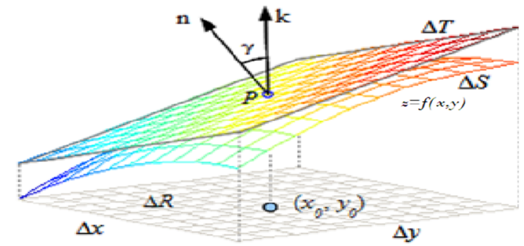
Considerando $dx = \Delta x = x - x_0$ y $dy = \Delta y = y - y_0$, entonces el diferencial dz es

$$dz = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Por tanto, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal se expresa.

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + dz.$$

En la siguiente figura se muestra la interpretación geométrica del diferencial dz y el incremento Δz. Donde: Δz representa el cambio en altura que sufre la superficie cuando (x, y) cambia del punto (x_0, y_0) al punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, dz representa el cambio en altura que sufre el plano tangente cuando x cambia un valor $dx = \Delta x$ y y cambia un valor $dy = \Delta y$. Además, Si Δx y Δy son muy pequeños, entonces $\Delta z \approx dz$



Observación

La aproximación lineal, la diferenciabilidad, y los diferenciales se definen de manera semejante para funciones de más de dos variables. Para el caso de una función de tres variables tenemos:

Aproximación lineal

$$f(x, y, z) \simeq f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Donde la parte derecha es la linealización $L(x, y, z)$.

Diferenciabilidad

Una función f de tres variables es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) si

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

Donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ siempre que $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$.

La diferencial dw

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

A continuación, se enuncia un resultado que se cumple para funciones diferenciables en una variable y se extiende a dos o más variables.

Teorema

Si f es una función de dos variables diferenciable en un punto (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

Ejercicios complementarios

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $z = sen\,(x + y)$, $(1, -1, 0)$

Solución

Las primeras derivadas parciales de f en $(1, -1)$ son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cos(x+y) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = cos(x+y) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = cos(0) = 1$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente está dada por
$z - 0 = 1(x - 1) + 1(y + 1)$, simplificando se tiene $z = x + y$

2. $z = e^x \ln y$, $(3,1,0)$.

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x\, ln\, y \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(3,1) = e^3\, ln\, 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{y} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(3,1) = \frac{e^3}{1} = e^3$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente está dada por:

$$z - 0 = 0(x-3) + e^3\,(y-1) \rightarrow z = e^3 y - e^3$$

Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Además, encuentre la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

3. $f(x,y) = e^x \cos xy$, $(0,0)$

Solución

Las primeras derivadas parciales de f son:

$$f_x(x,y) = e^x \cos xy - ye^x \, senxy, \qquad f_y(x,y) = -xe^x \, senxy$$

Por lo tanto, $f_x(0,0) = e^0 \cos 0 = 1$, $f_y(0,0) = 0$.

Puesto que $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen y son continuas en $(0,0)$, entonces, f es diferenciable en $(0,0)$. Además, $f(0,0) = e^0 \cos 0 = 1$, entonces $L(x,y)$ está dada

$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x\text{-}0) + f_y(0,0)(y-0)$
$L(x,y) = 1 + 1(x-0) + 0(y-0) = x + 1$

4. $f(x,y) = tan^{-1}(x+2y)$, $(1,0)$

Solución

Similar al ejercicio anterior se muestra que $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ existen y son continuas en $(1,0)$

Las primeras derivadas parciales de la función f en el punto $(1,0)$ son:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(x+2y)^2} \rightarrow f_x(1,0) = \frac{1}{1+(1+0)^2} = \frac{1}{2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{2}{1+(x+2y)^2} \rightarrow f_y(1,0) = \frac{2}{1+(1+0)^2} = 1$$

Además, $f(1,0) = tan^{-1}(1+0) = \frac{\pi}{4}$. Por tanto, la linealización está dada por

$$L(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + 1(y-0) \rightarrow L(x,y) = \frac{1}{2}x + y + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Encuentre la aproximación lineal de la función dada en el punto indicado y utilícela para aproximar el número dado.

5. $f(x,y) = \ln(x-3y)$ en $(7,2)$, aproximar $f(6.9, 2.06)$.

Solución

Se encuentra la linealización $L(x,y)$ en $(7,2)$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x-3y} \rightarrow f_x(7,2) = \frac{1}{7-6} = 1$$
$$f_y(x,y) = \frac{-3}{x-3y} \rightarrow f_y(7,2) = \frac{-3}{7-6} = -3$$
$f(7,2) = \ln(7-6) = 0$

Sustituyendo, se tiene,

$$L(x,y) = 0 + 1(x-7) - 3(y-2) = x - 3y - 1$$

Entonces, la aproximación lineal de la función es

$$\ln(x-3y) \simeq x - 3y - 1$$

Por tanto,

$$f(6.9, 2.06) \simeq 6.9 - 3(2.06) - 1 = -0.28$$

6. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en $(3,2,6)$ aproximar $f(3.02, 1.97, 5.99)$.

Solución

Haciendo un proceso similar, tenemos:

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow f_x(3,2,6) = \frac{3}{7}$$
$$f_y(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow f_y(3,2,6) = \frac{2}{7}$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \rightarrow f_z(3,2,6) = \frac{6}{7}$$

Sustituyendo, obtenemos,

$$L\,(x,y,z) = 7 + \frac{3}{7}\,(x-3) + \frac{2}{7}\,(y-2) + \frac{6}{7}(z-6) \rightarrow L\,(x,y,z) = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$$

Entonces, la aproximación lineal de la función es

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \simeq \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}\,y + \frac{6}{7}z$$

Por tanto,

$$f(3.02,1.97,5.99) \simeq \frac{3}{7}(3.02) + \frac{2}{7}\,(1.97) + \frac{6}{7}(5.99) = 6.99$$

Encuentre el diferencial de la función

7. $z = x^2y^3 \rightarrow dz = f_x\,(x,y)dx + f_y\,(x,y)dy = 2xy^3\,dx + 3x^2\,y^2\,dy$

8. $U = e^r sen\theta \rightarrow dU = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta = e^r sen\,\theta dr + e^r \cos\theta\; d\,\theta$

9. $U = \frac{r}{s+2t} = r(s+2t)^{-1}$

$$dU = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial s}ds + \frac{\partial u}{\partial t}dt = (s+2t)^{-1}dr - r(s+2t)^{-2}ds - r(s+2t)^{-2}2dt$$

$$dU = \frac{1}{s+2t}dr - \frac{r}{(s+2t)^2}ds - \frac{2r}{(s+2t)^2}dt$$

10. $w = x\; sen\; yz$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz = sen\,yz\,dx + x\cos yz(z)\,dy + x\cos yz(y)\,dz$$

$dw = senyz\,dx + xz\cos yz\,dy + xy\cos yz\,dz.$

11. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x,y) cambia de (1,2) a (1.05,2.1), compare los valores Δz y dz.

Solución

$\Delta z = f\,(x+\Delta x, y+\Delta y) - f\,(x,y)$, donde $(\Delta x = dx = 0.05)$ y $(\Delta y = dy = 0.1)$
$\Delta z = f\,(1.05,\,2.1) - f\,(1,2) = [5(1.05)^2 + (2.1)^2] - [5(1)^2 + (2)^2]$
$\Delta z = 9.9225 - 9 = 0.9225.$

Ahora se encuentra dz,

$dz = f_x\,(x,y)dx + f_y\,(x,y)\,dy = 10xdx + 2ydy$
$dz = (10)\,(1)(0.05) + (2)(2)(0.1) = 0.9$

Observe que $0.9225 \approx 0.9$

12. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x,y) cambia de $(3,-1)$ a $(2.96,\,-0.95)$, compare los valores Δz y dz.

Solución

$\Delta z = f\,(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, donde $(\Delta x = dx = -0.04)$ y $(\Delta y = dy = 0.05)$
$\Delta z = f\,(2.96,\,-0.95) - f\,(3,\,1)$
$\Delta z = [(2.96)^2 - (2.96)(-0.95) + 3(-0.95)^2] - [(3)^2 - (3)(-1) + 3(-1)^2]$
$\Delta z = 14.2811 - 15 = -0.7189$

El diferencial total es

$dz = f_x\,(x,y)dx + f_y\,(x,y)dy = (2x - y)dx + (-x + 6y)dy$
$dz = (2(3) - (-1))(-0.04) + (-3 + 6(-1))(0.05)$
$dz = -0.28 - 0.45 = -0.73$

Observe que $0.7189 \approx -0.73$

13. La longitud y ancho de un rectángulo son 30 y 24 cm, respectivamente, con un margen de error en la medición de 0.1 cm en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada del rectángulo.

Solución

La función que determina el área del rectángulo de lados x y y está dada

$$A(x,y) = xy \rightarrow dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

Sustituyendo los valores $x = 30$, $y=24$, $dx = dy = 0.1$, se tiene

$$dA = (24)(0.1) + (30)(0.1) = 5.4 \text{ cm}^2.$$

14. Las dimensiones de una caja rectangular cerrada son 80,60 y 50 cm, respectivamente, con un posible error de 0.2 cm en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada de la caja rectangular.

Solución

El área superficial de una caja de lados x, y, y ,z está dada

$$S(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

El diferencial dS está dado

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = (2y + 2z)dx + (2x + 2z)dy + (2x + 2y)dz$$

Remplazando los valores $x = 80$, $y = 60$, $z = 50$, $dx = dy = dz = 0.2$

$$dS = (120 + 100)(0.2) + (160 + 100)(0.2) + (160 + 120)(0.2) = 152\ cm^2.$$

15. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada con diámetro de 8 cm y altura de 12 cm, si la lámina tiene un grosor de 0.04.

Solución

El volumen de un cilindro circular recto de radio $\left(\frac{D}{2}\right)$ y altura h está dada

$$V(r,h) = \pi r^2 h \rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rh\, dr + \pi r^2 dh$$

Sustituyendo datos $r = 4$ cm, $h = 12$ cm, $dr = 0.04$ y $dh = 0.04 + 0.04 = 0.08$

$$dV = 2\pi(4)(12)(0.04) + \pi(4)^2\,(0.08) \approx 16.08\ cm^3.$$

16. Se pinta una franja de 3 pulgadas de ancho, como frontera alrededor de un rectángulo, cuyas dimensiones son 100 por 200 pies. Utilice diferenciales para aproximar el número de pies cuadrados de pintura en la franja.

Solución

El área del rectángulo de lados x,y y está dado

$$A(x,y) = xy \rightarrow dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

Remplazando los valores $x = 100$, $y = 200$, $dx = dy = \frac{3+3}{12} = \frac{1}{2}$. Se obtiene

$$dA = (200)\frac{1}{2} + (100)\frac{1}{2} = 150\, pies^2.$$

17. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de alto y 4 cm de diámetro, si el metal de la tapa y del fondo tienen 0.1 cm de grosor y el metal de los costados tiene un grosor de 0.05 cm.

Solución

El volumen del cilindro circular rector de radio $r\left(\frac{D}{2}\right)$ y altura h está dado.

$$V = \pi r^2 h \to dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi r h \, dr + \pi r^2 \, dh$$

Sustituyendo los datos $r = 2\ cm \left(\frac{D}{2}\right)$, $h = 10\ cm$, $dr = 0.05$, $dh = 0.2$ (2 tapas)

$$dV = 2\pi(2)(10)(0.05) + \pi(2)^2\,(0.2) \approx 8.8\ cm^3.$$

18. Cuatro números positivos, cada uno menor de 50, se redondean a una cifra decimal y luego se multiplican. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible en el producto calculado como resultado del redondeo.

Solución

Si a, b, c, d son los cuatro números positivos, menores que 50, entonces la función producto está dada

$$P(a, b, c, e) = abce \to dP = \frac{\partial P}{\partial a} da + \frac{\partial P}{\partial b} db + \frac{\partial P}{\partial c} dc + \frac{\partial P}{\partial e} de.$$

Entonces,

$$dP = (bce)da + (ace)db + (abe)dc + (abc)de$$

Donde los cuatro productos (bce), (ace), (abe) y (abc) son números menores que $(50)^3 = 125000$ (porque cada número es menor que 50) y el máximo error al redondear a una cifra decimal en cada uno de los cuatro números es 0.05, entonces

$da = db = dc = de = 0.05$.
Por tanto, $dP \le (125000)(0.05) + (125000)(0.05) + (125000)(0.05) + (125000)(0.05)$

$dP \le 4(125000)(0.05) = 25000$

19. Demuestre que la función $f(x, y) = xy - 5y^2$ es diferenciable, calculando los valores ε_1 y ε_2 que satisfacen la definición.

Solución

Recordando: una función f es diferenciable en todo punto del plano si

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ siempre que $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

Partiendo de la definición de Δz, tenemos

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [(x + \Delta x)(y + \Delta y) - 5\,(y + \Delta y)^2] - [xy - 5y^2]$

$\Delta z = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - 5y^2 - 10y\Delta y - 5\Delta y^2 - xy + 5y^2.$

$\Delta z = (y)\Delta x + (x - 10y)\Delta y + \Delta x\Delta y - 5\Delta y^2$

Simplificando y agrupando términos

$\Delta z = (y)\Delta x + (x - 10y)\Delta y + (\Delta y)\Delta x + (-5\Delta y)\Delta y.$

Donde, $f_x(x, y) = y, f_y(x, y) = x - 10y, \varepsilon_1 = \Delta y, \varepsilon_2 = -5\Delta y$
Obsérvese que si $\Delta y \to 0$, entonces $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Por tanto, queda demostrado que $f(x, y)$ es diferenciable en todo punto del plano.

Observación

Para funciones en una variable se tiene que f es diferenciable en x_0, o que f tiene derivada en x_0 son equivalentes. Este hecho no se extiende a funciones de dos o más variables como se aprecia en el siguiente ejercicio.

20. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \quad si & (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución

Para hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ se debe utilizar la definición. Entonces,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(h*0)}{h^2+0^2}-0}{h} \to f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(0*h)}{0^2+h^2}-0}{h} \to f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Luego, $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$

Para demostrar que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ se debe mostrar que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. Es decir, debemos probar que no existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

Utilizando trayectorias diferentes podemos observar que la función f tiende a valores diferentes.

Trayectorias: $y = mx$, $m \neq 0$ (rectas que pasan por el origen)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{m}{(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Ejercicios propuestos

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y, (-1,2,4)$

2. $z = sen\,(x + y), (1,-1,0)$

3. $z = e^{xy}\ \ln y, (-2,1,0)$

4. $z = e^{-x^2-y^2}, (1, 1, e^{-2})$

5. $z = \sqrt{xy},\ (1,1,1)$

6. $z = \operatorname{sen} x \cos y,\ \left(\frac{\pi}{2}, \pi, -1\right)$

7. $z = \sqrt{x^2+y^2},\ (8,\ -6, 10)$

8. $z = \frac{4x}{y},\ (-1,4,-1)$

9. $z = y \cos\,(x - y),\ \ (2,2,2)$

Explique por qué la función f es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x,y)$ de la función en ese punto.

10. $f(x,y) = x\sqrt{y},\ (1,4)$

11. $f(x,y) = \frac{x}{x+y},\ (2,1)$

12. $f(x,y) = e^{-xy}\ \cos y, (\pi, 0)$

13. $f(x,y) = \tan^{-1}(x+y) + \frac{1}{x-y}, (-2,3)$

14. $f(x,y) = y \ln x - \frac{x}{y}, (3,1)$

Verifique la aproximación lineal en el punto dado.

15. $\frac{2x+3}{4y+1} \approx 3 + 2x - 12y,\ (0{,}0)$

16. $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y,\ (0{,}0)$

17. $\sqrt{x^2+y^2} \approx x,\ (3{,}0)$

18. $\operatorname{sen} x \cos y \approx -x$, $(0,\pi)$

19. $xe^{y^2} - 4x \approx -3x$, $(2,0)$

Calcule la aproximación lineal de la función en el punto dado.

20. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0,-3)$

21. $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

22. $f(x,y) = xe^{xy^2} + 3y^2$, $(0,1)$

23. $f(x,y,z) = \operatorname{sen} yz^2 + x^3 z$, $(-2,0,1)$

24. $f(x,y,z) = xe^{yz} - \sqrt{x - y^2}$, $(4,1,0)$

25. $f(x,y,z,w) = xyw^2 - e^{yzw}$, $(3,1,0,-2)$

26. $f(x,y,z,w) = \cos xyz - x^2 w^3$, $(-1,4,0,2)$

27. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2,1)$ y con ella aproxime $f(1.95,1.08)$

28. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x,y) = \ln(-3x + 20y)$ en $(7,2)$ y con ella aproxime $f(6.89,1.96)$

29. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x,y,z) = \sqrt{2x^2 - y^2 + 3z^2}$ en $(3,2,6)$ y con ella aproxime $f(3.02,1.97,5.99)$

Determine la diferencial de la función.

30. $z = x^3 \ln(y^2)$

31. $m = p^5 q^3$

32. $f(x,y) = x^3 - x^2 y + 3y^2$

33. $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + 2y^{\frac{3}{2}}$

34. $R = \alpha\beta^2 \cos\gamma$

35. $z = ye^{-2x} - 3xy$

36. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$

37. $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

38. $w = x^2 yz^2 + \operatorname{sen} yz$

39. $w = e^y \cos x + z^2$

Si la función dada cambia de $(1,2)$ a $(1.05,2.01)$, compare los valores de Δz y dz

40. $z = 5x^2 + y^2$

41. $z = 9 - x^2 - y^2$

42. $z = x \operatorname{sen} y$

43. $z = xe^y$

44. Los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 20 y 34 cm, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada una de las dimensiones. Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del triángulo.

45. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada cuyo radio es 3 cm y altura 15 cm si el estaño tiene 0.02 de espesor.

46. Alrededor de un rectángulo de 80 por 220 pies, hay pintada una franja de 6 pulgadas de ancho, que sirve como límite. Emplee diferenciales para aproximar la cantidad de pies cuadrados de pintura en la franja.

47. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohm como $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50\Omega$ con un error posible de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

48. Un modelo para el área superficial de un cuerpo humano está dado por $S = 0.109w^{0.425}\,h^{0.725}$, donde w es el peso (libras), h es la altura (pulgadas), y S se mide en pies cuadrados. Si los errores en la medición de w y h son de 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área superficial calculada.

49. Una topógrafa desea determinar el área de cierto campo. Ella mide dos lados adyacentes, obteniendo $a = 500$ pies y $b = 700$ pies, con un error máximo posible de 1 pie en cada medición. Ella determina que el ángulo entre estos dos lados es $\theta = 30°$, con un error máximo posible de $0.25°$. El campo es triangular. Utilice diferenciales para estimar el máximo error posible en el cálculo del área de este campo.

50. Una compañía va a manufacturar 10000 cajas de madera cerrada con dimensiones de $3{,}4$ y 5 pies. El costo de la madera que va a ser usada es de 5 centavos por pie cuadrado. Si las máquinas que usan para cortar las piezas de madera tienen un posible error de 0.05 pies en cada dimensión, encontrar aproximadamente, usando diferenciales, el máximo error posible en la estimación del costo de la madera.

51. Suponga que el lector necesita saber una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $p(2,\ 1,\ 3)$. No tiene una ecuación para S pero sabe que las curvas

$$r_1\,(t) = (2 + 3t)\ \ \mathrm{i} + (1 - t^2)\ \ j + (3 - 4t + t^2)\ \ k$$
$$r_2\,(u) = (1 + u^2)\ \ \mathrm{i} + (2u^3 - 1)\ \ j + (2u + 1)\ \ k$$

Se encuentran ambas en S. Determine una ecuación del plano tangente en p.

Demuestre que la función dada tiene primeras derivadas parciales en el origen, pero f no es diferenciable en dicho punto.

52. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

53. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y}{x^3+y^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

54. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

55. Demuestre que f es diferenciable en (0,0,0)

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2} & si\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Sección 7.3. Regla de la cadena y derivación implícita

En el curso de cálculo diferencial se trabajó la regla de la cadena para funciones en una variable f y g diferenciables, donde establece que

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

El propósito de esta sección es extender la regla de la cadena a funciones de varias variables, la cual toma formas ligeramente diferentes, dependiendo del número de variables independientes. Debemos tener en cuenta que estas variaciones son de la ya conocida regla de la cadena para funciones de una sola variable.

Un primer caso corresponde a una función de dos variables $f(x, y)$ diferenciable en x e y, y a su vez suponer que x e y son funciones diferenciables en una variable t.

TEOREMA

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable en x e y. Si $x = g(t), y = h(t)$ son funciones diferenciables en t, entonces f es diferenciable en t, donde

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO

Usar la regla de la cadena para hallar $\frac{dz}{dt}$ de la función

$$f(x,y) = x^2y - \operatorname{sen} y, \quad x = \sqrt{t^2+1}, \quad y = e^t$$

Solución

Las derivadas parciales de f con respecto a x e y, y las derivadas de x e y, en t están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \cos y, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Reemplazando, se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) + (x^2 - \cos y)e^t$$

Sustituyendo las funciones x e y

$$\frac{dz}{dt} = \left(2\sqrt{t^2+1}\,e^t\right)\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) + \left((t^2+1) - \cos e^t\right)e^t$$

Por tanto,

$$\frac{dz}{dt} = 2te^t + t^2e^t + e^t - e^t\cos e^t$$

En un segundo caso, se puede considerar que las dos variables independientes x e y son funciones diferenciables en otras dos variables.

TEOREMA

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable en x e y. Si $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables en s y t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO

Use la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$, donde

$$f(x, y) = e^{xy}, \quad x = 3s \operatorname{sen} t, \quad y = 4st^2$$

Solución

Similar al ejemplo anterior se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{dx}{dt} = 3s\cos t\,, \quad \frac{dy}{dt} = 8st, \quad \frac{dx}{ds} = 3\operatorname{sen} t,$$
$$\frac{dy}{ds} = 4t^2$$

Por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (ye^{xy})(3\operatorname{sen} t) + (xe^{xy})(4t^2)$$

Expresando en términos de s y t, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (4st^2e^{12s^2t^2 sent})(3\operatorname{sen} t) + (3s\operatorname{sen} t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t})(4t^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial s} = 12st^2\operatorname{sen} t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t} + 12st^2\operatorname{sen} t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t} = 24st^2\operatorname{sen} t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (ye^{xy})(3s\cos t) + (xe^{xy})(8st)$$

Sustituyendo las funciones x e y, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (4st^2e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t})(3s\cos t\,) + (3\,s\operatorname{sen} t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t})(8st)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 12s^2t^2\cos t\, e^{12s^2t^2\operatorname{sen} t} + 24s^2tsente^{12s^2t^2\operatorname{sen} t}$$

Ahora, se puede extender la regla de la cadena a funciones en "n variables", donde cada una de las "n variables" son funciones diferenciables, en "m variables".

TEOREMA

Sea $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ una función diferenciable en $x_1, x_2, ..., x_n$, donde x_i es una función diferenciable en $t_1, t_2, ..., t_m$, para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

Para todo $j = 1, 2, 3, \ldots, m$

Derivación implícita

En el curso de cálculo diferencial se estudió un procedimiento para hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función implícita (es decir, aquella función f que no se puede expresar como: $y = f(x)$). En esta sección, inicialmente, se abordará el mismo problema, utilizando derivadas parciales y, luego, se extiende el tema a funciones de dos y más variables.

Supóngase que $F(x, y) = 0$, define implícitamente a y como función diferenciable en x. Utilizando la regla de la cadena para funciones de varias variables y considerando a x como variable interna, se obtiene

$$\frac{d}{dx}[F(x,y)] = \frac{d}{dx}[0] \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Puesto que $\frac{dx}{dx} = 1$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

EJEMPLO

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ de la función $x\,sen\,x^2y + e^{xy^2} = 3y^3$

Solución

Transponiendo todos los términos al lado izquierdo de la ecuación, se considera a F como

$$F(x, y) = x\, sen\, x^2 y + e^{xy^2} - 3y^3$$

Las derivadas parciales de F con respecto a x e y son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{sen} x^2 y + 2x^2 y \cos x^2 y + y^2 e^{xy^2} \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 \cos x^2 y + 2xye^{xy^2} - 9y^2$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\operatorname{sen} x^2 y + 2x^2 y \cos x^2 y + y^2 e^{xy^2}}{x^3 \cos x^2 y + 2xye^{xy^2} - 9y^2}$$

Supongamos que $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función diferenciable en x e y. Entonces, se pueden hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, usando la regla de la cadena. Esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,z)] = \frac{\partial}{\partial x}[0] \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Puesto que $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial x}[F(x,y,z)] = \frac{\partial}{\partial x}[0] \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Puesto que $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$, entonces $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$

EJEMPLO

Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la función $3yz^2 - e^{4x} \cos 4z - 3y^2 = 4$

Solución

Considerando $F(x, y, z) = 3yz^2 - e^{4x} \cos 4z - 3y^2 - 4$, entonces sus primeras derivadas parciales están dadas

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4e^{4x} \cos 4z, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3z^2 - 6y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 6yz + 4e^{4x} \operatorname{sen} 4z$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-4e^{4x} \cos 4z}{6yz + 4e^{4x} \operatorname{sen} 4z} = \frac{4e^{4x} \cos 4z}{6yz + 4e^{4x} \operatorname{sen} 4z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3z^2 - 6y}{6yz + 4e^{4x} \operatorname{sen} 4z} = \frac{6y - 3z^2}{6yz + 4e^{4x} \operatorname{sen} 4z}$$

Observación

De forma natural se puede extender la derivación implícita a funciones de tres o más variables.

Ejercicios complementarios

Use la regla de la cadena hallar $\frac{dz}{dt}$ o $\frac{dw}{dt}$

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$

Solución

Las primeras derivadas parciales de z con respecto a x e y, y la derivada de x e y en t son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \quad y \quad \frac{dy}{dt} = -2e^{-2t}$$

Por tanto,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(2e^{2t}) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(-2e^{-2t})$$

Sustituyendo las funciones x e y, se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}e^{2t}}{\sqrt{(e^{2t})^2+(e^{-2t})^2}} - \frac{2e^{-2t}e^{-2t}}{\sqrt{(e^{2t})^2+(e^{-2t})^2}} = \frac{2e^{4t}}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}} - \frac{2e^{-4t}}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}} = \frac{2e^{4t}-2e^{-4t}}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}}$$

2. $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$

Solución

De igual forma se hallan las primeras derivadas parciales de w con respecto a x ,y y z, y las derivadas de x ,y y z en t.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{y/z},\quad \frac{\partial w}{\partial y} = xe^{y/z}\frac{1}{z} = \frac{xe^{y/z}}{z},\quad \frac{\partial w}{\partial z} = xe^{y/z}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{xye^{y/z}}{z^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t,\quad \frac{dy}{dt} = -1 \quad y \quad \frac{dz}{dt} = 2$$

Entonces,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} = (e^{y/z})(2t) + \left(\frac{xe^{y/z}}{z}\right)(-1) + \left(-\frac{xye^{y/z}}{z^2}\right)(2)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2te^{\frac{1-t}{1+2t}} - \frac{t^2}{1+2t}e^{\frac{1-t}{1+2t}} - \frac{2t^2-2t^3}{(1+2t)^2}e^{\frac{1-t}{1+2t}} = e^{\frac{1-t}{1+2t}}\left(2t - \frac{t^2}{1+2t} - \frac{2t^2-2t^3}{(1+2t)^2}\right)$$

$$\frac{dw}{dt} = e^{\frac{1-t}{1+2t}}\left(\frac{8t^3+5t^2+2t}{(1+2t)^2}\right)$$

Utilice la regla de cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

3. $z = tan^{-1}(2x + y)$, $x = s^{2t}$, $y = s\ln t$

Solución

Al igual que en los ejercicios anteriores se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}(2) = \frac{2}{1+(2x+y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(2x+y)^2},\quad \frac{\partial x}{\partial s} = 2st,\quad \frac{\partial x}{\partial t} = s^2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \ln t \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{s}{t}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\left(\frac{2}{1+(2x+y)^2}\right)(2st)+\left(\frac{1}{1+(2x+y)^2}\right)(\ln t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{4st}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}+\frac{\ln t}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}=\frac{4st+\ln t}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\left(\frac{2}{1+(2x+y)^2}\right)(s^2)+\left(\frac{1}{1+(2x+y)^2}\right)\left(\frac{s}{t}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2s^2}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}+\frac{\frac{s}{t}}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}=\frac{2s^2+st^{-1}}{1+(2s^2t+s\ln t)^2}$$

4. $z=e^{xy}\,\tan y,\quad x=s+2t,\quad y=s/t$

Solución

De igual forma se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\tan y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\tan y+e^{xy}\sec^2 y,\quad \frac{\partial x}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial x}{\partial t}=2,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{t}\quad y\quad \frac{\partial y}{\partial t}=\frac{-s}{t^2}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=(ye^{xy}\tan y)(1)+(xe^{xy}\tan y+e^{xy}\sec^2 y)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{s}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}+\frac{s+2t}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}+\frac{1}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\sec^2\frac{s}{t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{2s}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}+2e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}+\frac{1}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\sec^2\frac{s}{t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=(ye^{xy}\tan y)(2)+(xe^{xy}\tan y+e^{xy}\sec^2 y)\left(-\frac{s}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{2s}{t}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}-\frac{s(s+2t)}{t^2}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}-\frac{s}{t^2}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\sec^2\frac{s}{t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{s^2}{t^2}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\tan\frac{s}{t}-\frac{s}{t^2}e^{(s+2t)\frac{s}{t}}\sec^2\frac{s}{t}$$

5. Utilice la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales indicadas

$$w=z\sec xy,\quad x=ab,\quad y=bc,\quad z=ac;\quad \frac{\partial w}{\partial a},\quad \frac{\partial w}{\partial b},\quad \frac{\partial w}{\partial c}$$

Solución

Entonces,

$$\frac{\partial w}{\partial x}=yz\sec xy\tan xy,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=xz\sec xy\tan xy,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=\sec xy,\quad \frac{\partial x}{\partial a}=b$$

$$\frac{\partial x}{\partial b}=a,\quad \frac{\partial x}{\partial c}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial b}=c,\quad \frac{\partial y}{\partial c}=b\,,\quad \frac{\partial z}{\partial a}=c,\quad \frac{\partial z}{\partial b}=0\ y\ \frac{\partial z}{\partial c}=a$$

Por tanto,

$$\frac{\partial w}{\partial a}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}=(yz\sec xy\tan xy)(b)+(xz\sec xy\tan xy)(0)+(\sec xy)(c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial a}=ab^2c^2\sec ab^2c\tan ab^2c+c\sec ab^2c$$

$$\frac{\partial w}{\partial b}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}=(yz\sec xy\tan xy)(a)+(xz\sec xy\tan xy)(c)+(\sec xy)(o)$$

$$\frac{\partial w}{\partial b}=a^2bc^2\sec ab^2c\tan ab^2c+a^2bc^2\sec ab^2c\tan ab^2c=2a^2bc^2\sec ab^2c\tan ab^2c$$

$$\frac{\partial w}{\partial c}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}=(yz\sec xy\tan xy)(o)+(xz\sec xy\tan xy)(b)+(\sec xy)(a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial c}=a^2b^2c\sec ab^2c\tan ab^2c+a\sec ab^2c$$

6. La temperatura en un punto (x,y) es $T(x,y)$, medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de modo que su posición después de t segundos está dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función de temperatura satisface $T_x(2,3) = 4$ y $T_y(2,3) = 3$. ¿Con qué rapidez está subiendo la temperatura en la trayectoria del insecto después de 3 segundos?

Solución

Se observa que la temperatura T es una función de dos variables y cada una de ellas depende del tiempo, entonces

$$\frac{dT}{dt} = T_x(x,y)\frac{dx}{dt} + T_y(x,y)\frac{dy}{dt}$$

Si $t = 3$ segundos, entonces $x = 2\ cm$, $y = 3\ cm$. Además,

$$T_x(2,3) = 4, \quad T_y(2,3) = 3, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, reemplazando los datos se tiene

$$\frac{dT}{dt}\Big|_{t=3} = (4)\left(\frac{1}{4}\right) + (3)\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 1 = 2 \textit{ grados Celcius/segundo}$$

7. La producción de trigo W, en un año dado, depende del promedio de temperatura T y la cantidad de lluvia anual R. Los expertos estiman que el promedio de temperatura está subiendo a razón de $0.15\ °C/año$ y la lluvia está decreciendo a razón de $0.1\ cm/año$. También estiman que en los niveles actuales de producción se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial T} = -2 \ \ y \ \ \frac{\partial w}{\partial R} = 8.$$

(a) ¿Qué representan los signos de estas derivadas parciales?

Solución

La primera derivada parcial $\frac{\partial w}{\partial T}$ nos indica que la producción de trigo disminuye con respecto a la temperatura y la segunda derivada parcial $\frac{\partial w}{\partial R}$ indica que la producción de trigo aumenta con respecto a la cantidad de lluvia.

(b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo $\frac{dw}{dt}$.

Solución

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial w}{\partial R}\frac{dR}{dt}, \quad donde \quad \frac{dT}{dt} = 0.15 \ \ y \ \ \frac{dR}{dt} = -0.1$$

Por tanto,

$$\frac{dw}{dt} = (-2)(0.15) + 8(-0.1) = -1.1$$

8. El voltaje V en un circuito eléctrico sencillo está decreciendo lentamente a medida que se consume la batería. La resistencia R está aumentando lentamente a medida que se calienta el resistor. Utilice la Ley de *Ohm* $V = IR$, para hallar cómo está cambiando la corriente I en el momento que $R = 400\ \Omega, I = 0.08\ A, \frac{dV}{dt} = -0.01\frac{V}{s}, dR/dt = 0.03\ \Omega/s$

Solución

En el momento en que
$R = 400\ \Omega$ e $I = 0.08\ A$, entonces $V = (400)(0.08) = 32V$.

Partiendo de la función $I = \frac{V}{R}$ y utilizando la regla de la cadena para hallar $\frac{dI}{dt}$, se obtiene

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V}\frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R}\frac{dR}{dt} = \left(\frac{1}{R}\right)\frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$$

Remplazando los datos se encuentra

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{1}{400}\right)(-0.01)+\left(-\frac{32}{(400)^2}\right)(0.03)=-\frac{31}{1000000}=-0.000031$$

9. Si $z=f(x,y)$ donde $x=r\cos\theta$ y $y=r\,sen\,\theta$, demuestre

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

Solución

Se encuentra $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(\cos\theta)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(sen\,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(-rsen\ \theta)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(rcos\,\theta)$$

Partiendo del lado derecho de la ecuación se obtiene

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}sen\,\theta\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}r\,sen\,\theta+\frac{\partial z}{\partial y}rcos\,\theta\right)^2$$

$$=\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2cos^2\,\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,sen\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2sen^2\,\theta\right]+$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2r^2\,sen^2\,\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}r^2\cos\theta\,sen\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2r^2\,cos^2\,\theta\right]$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2cos^2\,\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,sen\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2sen^2\,\theta+$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2sen^2\,\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\,sen\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2cos^2\,\theta$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2cos^2\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2sen^2\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2sen^2\,\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2cos^2\,\theta$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2(sen^2\,\theta+cos^2\,\theta)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2(sen^2\,\theta+cos^2\,\theta)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

10. Si $z=f(x-y)$), demuestre que $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Solución

Se parte de la sustitución $u=x-y$ y utilizando la regla de la cadena se encuentran $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}(1)=\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}(-1)=-\frac{\partial z}{\partial u}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0$$

11. Si $z=f(x,y)$, donde $x=s+t, y=s-t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Solución

Se encuentra $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$, usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}(1)+\frac{\partial z}{\partial y}(1)=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}(1)+\frac{\partial z}{\partial y}(-1)=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Utilice las derivadas parciales para hallar $\frac{dy}{dx}$

12. $y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$

Solución

Considerando $F(x, y) = y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 - 12$, se encuentran sus primeras derivadas parciales. Esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy^2 + 20x^3 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 + 6x^2y$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6xy^2 + 20x^3}{5y^4 + 6x^2y}$$

13. $\cos(x - y) = xe^y$

Solución

Sea $F(x, y) = xe^y - \cos(x - y)$. Por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y + \operatorname{sen}(x - y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \operatorname{sen}(x - y)(-1) = xe^y - \operatorname{sen}(x - y)$$

Luego,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y + \operatorname{sen}(x - y)}{xe^y - \operatorname{sen}(x - y)}$$

Use derivadas parciales para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

14. $xyz = \cos(x + y + z)$

Solución

Si $F(x, y, z) = xyz - \cos(x + y + z)$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \operatorname{sen}(x + y + z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \operatorname{sen}(x + y + z), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \operatorname{sen}(x + y + z)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{yz + \operatorname{sen}(x + y + z)}{xy + \operatorname{sen}(x + y + z)} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{xz + \operatorname{sen}(x + y + z)}{xy + \operatorname{sen}(x + y + z)}$$

15. $\ln(x + yz) = 1 + xy^2z^3$

Solución

Sea $F(x, y, z) = \ln(x + yz) - xy^2z^3 - 1$. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x + yz} - y^2z^3 = \frac{1 - xy^2z^3 - y^3z^4}{x + yz}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{z}{x + yz} - 2xyz^3 = \frac{z - 2x^2yz^3 - 2xy^2z^4}{x + yz},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{y}{x + yz} - 3xy^2z^2 = \frac{y - 3x^2y^2z^2 - 3xy^3z^3}{x + yz}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{1 - xy^2z^3 - y^3z^4}{x + yz}}{\frac{y - 3x^2y^2z^2 - 3xy^3z^3}{x + yz}} = -\frac{1 - xy^2z^3 - y^3z^4}{y - 3x^2y^2z^2 - 3xy^3z^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{z - 2x^2yz^3 - 2xy^2z^4}{x + yz}}{\frac{y - 3x^2y^2z^2 - 3xy^3z^3}{x + yz}} = -\frac{z - 2x^2yz^3 - 2xy^2z^4}{y - 3x^2y^2z^2 - 3xy^3z^3}$$

Ejercicios propuestos

Use la regla de la cadena para hallar $\frac{dz}{dt}$ o $\frac{dw}{dt}$

1. $z = x^2y + xy^2,\ x = 2 + t^4,\ y = 1 - t^3$

2. $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2},\ x = e^{2t},\ y = e^{-2t}$

3. $z = \operatorname{sen} x \cos y,\ x = \pi t,\ y = \sqrt{t}$

4. $z = x \ln (x+2y),\ x = sen\ t,\ y = cos\ t$

5. $z = ye^x + xe^y,\ x = cos\ t,\ y = sen\ t$

6. $z = \ln xy + y^2,\ x = e^t,\ y = e^{-t}$

7. $w = ye^{z/x},\ x = 1 + 2t,\ y = t^2,\ z = 1 - t$

8. $w = xy + yz^2,\ x = e^t,\ y = e^t\ sen\ t,\ z = e^t\ cos\ t$

Utilice la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

9. $z = x^2 + xy + y^2,\quad x = s + 2t,\quad y = st$

10. $z = \frac{x}{y},\quad x = se^t,\quad y = 1 + se^{-t},$

11. $z = e^{xy} \tan x,\quad x = s + 2t,\quad y = \frac{s}{t}$

12. $z = e^r \cos\theta,\quad r = st,\quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

13. $z = sen\ r\ tan\ \beta,\quad r = 3s + t,\quad \beta = s - t$

14. $z = sen^{-1}(3x + y),\ x = r^2 e^s,\ y = sen\ rs$

Utilice la regla de la cadena para hallar las derivadas parciales indicadas.

15. $w = x^2 + y^2 + z^2,\quad x = st,\quad y = s\cos t,\quad z = s \operatorname{sen} t,\quad \frac{\partial w}{\partial s}\ y\ \frac{\partial w}{\partial t}$ cuando $s = 1, t = 0$

16. $u = xe^{-y},\ x = \tan^{-1} rst,\ y = \ln(3rs + 5st),\ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$

17. $u = xy + yz + xz,\quad x = st,\quad y = e^{st},\quad z = t^2,\quad \frac{\partial u}{\partial s}\ y\ \frac{\partial u}{\partial t}$ cuando $s = 0,\ t = 1$

18. $z = y^2 \tan x,\quad x = t^2uv,\quad y = u + tv^2,\quad \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ cuando $t = 2,\ u = 1,\ v = 0$

19. $z = \frac{x}{y},\quad x = re^{st},\quad y = rse^t,\quad \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$ cuando $r = 1,\ s = 2,\ t = 0$

20. $u = \frac{x+y}{y+z},\quad x = p + r + t,\quad y = p - r + t,\quad z = p + r - t,$ $\frac{\partial u}{\partial p}, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial t}$

21. Sean $u = 3xy - 4y^2,\ x = 2se^r,\ y = re^{-s}$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas:

a) Primero exprese u en términos de r y s.
b) Emplee la regla de la cadena.

22. Sean $u = 9x^2 + 4y^2,\quad x = r\ cos\ \theta,\quad y = r\ sen\ \theta$. Calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ en dos formas:
a) Primero exprese u en términos de r y s.
b) Emplee la regla de la cadena.

23. La demanda de cierto producto es $Q(x, y) = 200 - 10x^2 + 20xy$ unidades por mes, donde x es el precio del producto y y el precio de un producto competidor. Se estima que dentro de t meses el precio del producto será $x = 10 + 0{,}5t$ dólares por unidad mientras que el precio del producto competidor será $y = 12{,}8 + 0{,}2t^2$ dólares por unidad. ¿A qué razón cambiará la demanda del producto con respecto al tiempo dentro de 4 meses?

24. Suponga que el capital y el trabajo de una determinada compañía varían en el tiempo de la siguiente forma $k(t) = 2t^2$, $I(t) = 2t + 5$. Si dicha firma tiene una función de producción $Q(k, I) = kI^2$. Determine a qué tasa cambia la producción con el tiempo.

25. La longitud x de un lado de un triángulo está aumentando a razón de $3\ \frac{pulg}{s}$, la longitud y del otro lado está disminuyendo a razón de $2\ \frac{pulg}{s}$, y el ángulo θ, comprendido entre los dos lados, está creciendo a razón de $0{,}05\ \frac{rad}{s}$. Con razón está cambiando el área del triángulo cuando $x = 40\,pulg,\ \ y = 50\,pulg$, y $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianes

26. La temperatura T de una placa metálica en $T(x, y) = e^{-x-3y}$ grados. Un escarabajo camina hacia el noreste a razón de $\sqrt{8}\ \frac{pies}{min}$ (es decir, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 2$). Desde la perspectiva del escarabajo, ¿cómo cambia la temperatura con el tiempo cuando este cruza el origen?

27. La temperatura en grados Celsius de una región en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$. Una partícula se mueve en esta región y su posición en el tiempo t está dada por $x = 2t^2$, $y = 3t$, $z = -t^2$, donde el tiempo se mide en segundos y la distancia en metros. ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula, en grados Celsius por segundo, cuando la partícula está en el punto $p(8, 6, -4)$?

28. El radio de un cono circular recto está creciendo a razón de $1.8\,\frac{pulg}{s}$ mientras que su altura está decreciendo a razón de $2.5\,\frac{pulg}{s}$. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es de $120\ pulg$ y la altura es de $140\ pulg$?

29. La longitud l, el ancho w, y la altura h de una caja cambian con el tiempo. En cierto instante, las dimensiones son $l = 1\ m$, $w = h = 2\ m$, l y w aumentan a una razón de $2\,\frac{m}{s}$ mientras h esta decreciendo a una razón de $3\,\frac{m}{s}$. Halle la razón de cambio de las siguientes magnitudes en este instante:

a) El volumen.
b) La longitud de una diagonal.
c) El área superficial.

30. La presión de $1\ mol$ de un gas ideal está aumentando a razón de $0.05\,\frac{kPa}{s}$ y la temperatura está subiendo a razón de $0.15\,\frac{K}{s}$. Utilice la ecuación $PV = 8.31\ T$ para hallar la razón de cambio del volumen cuando la presión sea $20\ kPa$ y la temperatura sea $320\ K$.

31. El auto A se desplaza hacia el norte por la carretera 16 y el auto B viaja hacia el oeste por la carretera 83; cada uno se aproxima al cruce de estas carreteras. En cierto momento, el auto A está a $0.3\ km$ del cruce y viaja a $90\,\frac{km}{h}$ mientras que el auto B está a $0.4\ km$ del cruce y viaja a $80\,\frac{km}{h}$. ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre los autos en ese momento?

Use derivación implícita para hallar $\frac{dy}{dx}$

32. $y^5 + 3x^2y^2 - 4x^3y^2 = 15y + 7$

33. $x^3 + y^3 = 8xy$

34. $2x^3y + 3xy^3 = 5$

35. $x\ cos\ xy + y\ sen\ xy = 1$

36. $cos\ (x + y) = y\ sen\ x$

37. $sen\ (x - y) = ye^x + xe^y$

Use la derivación implícita para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

38. $xy^2 + yz^2 + x^2 z = 3$

39. $3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0$

40. $z = (x^2 + y^2)\ sen\ xz$

41. $ye^{xyz}\ \cos 3xz = 5$

42. $ze^{yz} + 2xe^{xz} - 4e^{xy} = 3$

43. $xe^y + yz + ze^x = 0$

44. $\ln(x^2 + yz^2) = 1 + xy^2$

45. $z = (x^2 + y^2)\ sen\ xz$

46. Si f es una función diferenciable de la variable u, considere $u = bx - ay$. Demuestre que se cumple que $z = f(bx - ay)$ satisface la ecuación $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, donde a y b son constantes.

47. Si $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, entonces las ecuaciones $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ se denominan ecuaciones de Cauchy-Riemann. Demuestre que las **ecuaciones de Cauchy-Riemann** son satisfechas si

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\ \ y\ \ v = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

48. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s \cos t$ y $y = e^s\ sen\ t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

49. Si $u = f(x,y)$), donde $x = e^s \cos t$ y $y = e^s\ sen\ t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

50. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\ sen\ \theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

Sección 7.4. Derivada direccional

Recordando que las derivadas parciales de una función f de dos variables $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ miden la razón de cambio o la pendiente de una recta tangente en dirección del eje x y el eje y; el objetivo de esta sección es estudiar la razón de cambio de f en cualquier dirección (derivada direccional). Pero antes de definirla, se necesita tratar un vector muy importante (vector gradiente).

Definición

Si f es una función de dos variables x,y, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} j$$

Si f es una función de tres variables x, y, z, entonces el gradiente de f está dado

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \kappa$$

EJEMPLO

Encuentre el gradiente de f

1. $f(x, y) = xe^{xy}$

Solución

Aplicando la definición se tiene

$$\nabla f(x, y) = (e^{xy} + xe^{xy}y)i + (xe^{xy}x)j = (e^{xy} + xye^{xy})i + (x^2e^{xy})j$$

2. $f(x, y, z) = xz\ sen\ (x + y + z)$

Solución

Por definición se obtiene

$$\nabla f(x,y,z) = (zsen(x+y+z) + xzcos(x+y+z))i + (xzcos(x+y+z))j +$$
$$(xsen(x+y+z) + xzcos(x+y+z))\kappa$$

Propiedades del operador gradiente

TEOREMA

Sea f una función de dos o tres variables. Entonces

$$\nabla[f(p) \pm g(p)] = \nabla f(p) \pm \nabla g(p)$$
$$\nabla[kf(p)] = k\nabla f(p)$$
$$\nabla[f(p)\,g(p)] = \nabla f(p)g(p) + f(p)\,\nabla g(p)$$
$$\nabla\left[\frac{f(p)}{g(p)}\right] = \frac{\nabla f(p)g(p) - f(p)\nabla g(p)}{[g(p)]^2}$$

A continuación se define la derivada direccional de una función f

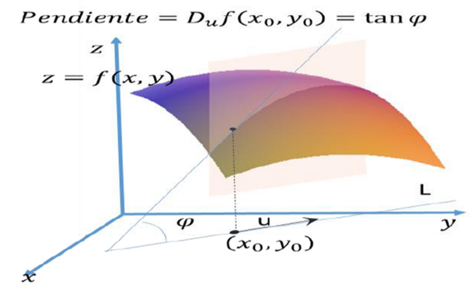
Definición

Sean f una función de dos variables y u un vector unitario. Si el límite

$$D_u f(p) = \lim_{h\to o} \frac{f(p+hu) - f(p)}{h}$$

Existe, luego $D_u f(p)$ se denomina "derivada direccional de f en p en la dirección del vector u".

La interpretación geométrica del concepto nos afirma que el vector u determina una recta L que contiene al punto (x_0, y_0). El plano que contiene a L y es perpendicular al plano xy corta a la superficie $z = f(x,y)$ en una curva C. La recta tangente a la curva C en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene como pendiente $D_u f(x_0, y_0)$.



Otra interpretación útil es que $D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u$ mide la razón de cambio de f con respecto a la distancia recorrida en la dirección u.

A continuación, se enuncia la relación que hay entre los dos conceptos de esta sección.

TEOREMA

Sean f una función diferenciable en el punto p y u un vector unitario. Entonces

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u$$

EJEMPLO

Encuentre la derivada direccional de f en el punto p en la dirección del vector v

1. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y; \quad p = \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad v = i + \sqrt{3}j$

Solución

El vector $\nabla f(p)$ y el vector unitario u están dados por

$$\nabla f(x.y) = e^x \operatorname{sen} y\, i + e^x \cos y\, j$$

Luego,

$$\nabla f\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = e^0 sen\left(\frac{\pi}{4}\right) i + e^0 cos\left(\frac{\pi}{4}\right) j = \frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j$$

Además,

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{i+\sqrt{3}j}{\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

Por tanto,

$$D_u f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\cdot\left(\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$$

2. $f(x, y, z) = z^3 - x^2 y; \quad p = (1,6,2), \quad v = 3i + 4j + 12\kappa$

Solución

$$\nabla f(x, y, z) = -2xyi - x^2 j + 3z^2\kappa$$

Luego,

$$\nabla f(1,6,2) = -12i - j + 12\kappa$$

Además,

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{3i + 4j + 12\kappa}{\sqrt{(3)^2+(4)^2+(12)^2}} = \frac{3}{13}i + \frac{4}{13}j + \frac{12}{13}\kappa$$

Entonces,

$$D_u f(1,6,2) = (-12i - j + 12\kappa)\cdot\left(\frac{3}{13}i + \frac{4}{13}j + \frac{12}{13}\kappa\right) = -\frac{36}{13} - \frac{4}{13} + \frac{144}{13} = \frac{104}{13}$$

Máxima razón de cambio

Dada una función f, es importante preguntarse en qué dirección cambia con mayor rapidez f en un punto p. Es decir, en qué dirección

es más grande $D_u f(p)$. Utilizando el teorema de esta sección y la fórmula del producto escalar ($u \cdot v = |u||v| cos\, \theta$), se obtiene

$D_u f(p) = \nabla f(p)\cdot u = |u||\nabla f(p)| \cos\theta = |\nabla f(p)| cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Se presentan dos casos

El mayor valor que toma la función coseno es (1) y ocurre cuando $\theta = 0°$, por tanto la función f crece con mayor rapidez en dirección del vector $\nabla f(p)$, a una tasa de $|\nabla f(p)|$.

Por otro lado el mínimo valor que toma la función coseno es de (-1) y ocurre cuando $\theta = 180°$, por tanto, la función f decrece más rápidamente en dirección del vector $-\nabla f(p)$ a una tasa de $-|\nabla f(p)|$.

EJEMPLO

¿En qué dirección u disminuye más rápido $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ en el punto $(-1, 2)$?

Solución

La función f decrece más rápido en la dirección del vector $-\nabla f(-1, 2)$. La función vectorial $\nabla f(x, y)$ está dada por

$$\nabla f(x,y) = -2x\,\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} \;\longrightarrow\; -\nabla f(x,y) = 2x\,\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} \;\longrightarrow\; -\nabla f(-1,2) = -2\,\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$

Por tanto, el vector unitario u es

$$u = \frac{-\nabla f(-1,2)}{|-\nabla f(-1,2)|} = -\frac{2}{\sqrt{20}}\,\hat{\imath} + \frac{4}{\sqrt{20}}\hat{\jmath} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$$

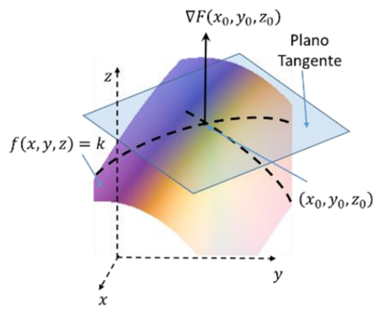
Plano tangente y recta normal

En la sección 4.2 se introdujo la noción de plano tangente a una superficie, pero se trabajó con superficies determinadas por funciones explicitas de dos variables ($z = f(x, y)$). Ahora, se quiere extender este concepto a funciones implícitas, las cuales determinan superficies dadas por $F(x, y, z) = k$. (Adviértase que si la superficie está dada por $z = f(x, y)$ se puede expresar como $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$).

Definición

Sea $F(x, y, z) = k$ una función que determina a una superficie y suponga que F es diferenciable en el punto $p(x_0, y_0, z_0)$, donde $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (vector nulo).

El plano que contiene a p y es perpendicular a $\nabla F(p)$ se denomina "***plano tangente a la superficie en p***".



La recta que pasa por p y tiene como vector director $\nabla F(p)$ se denomina "***recta normal a la superficie en p***"

Ecuaciones del plano tangente y la recta normal

Para la superficie $F(x, y, z) = k$, la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) está determinada.

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k}] = 0$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta normal están dadas por

$$[x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}] = (x_0, y_0, z_0) + \nabla F(x_0, y_0, z_0)t$$

EJEMPLO

Halle las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a $xe^{yz} = 1$ en el punto $(1, 0, 5)$

Solución

Para hallar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal se debe encontrar el gradiente a la función $F(x, y, z) = xe^{yz}$ en el punto $(1, 0, 5)$. Esto es,

$$\nabla F(x, y, z) = e^{yz}i + xze^{yz}j + xye^{yz}k \longrightarrow \nabla F(1,0,5) = i + 5j + 0k$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$1(x-1) + 5(y - 0) + 0(z - 5) = 0 \longrightarrow x + 5y = 1$$

$$x = 1 + t,\ \ y = 5t,\ \ z = 5$$

Ejercicios complementarios

Encuentre la derivada direccional de f en el punto dado, en la dirección indicada por el ángulo θ.

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$; $(4,-2)$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Solución

Para calcular $D_u f(4,-2)$ se necesita hallar el vector $\nabla f(4,-2)$ y el vector unitario $u = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$. Esto es,

$\nabla f(x,y) = \cos(x+2y)\,\hat{\imath} + 2\cos(x+2y)\,\hat{\jmath}$, luego $\nabla f(4,-2) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

$$u = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,j = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{\imath} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\hat{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}$$

Por tanto,

$$D_u f(4,-2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. $f(x,y) = xe^{-2y}$; $(5,0)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Solución

$\nabla f(x,y) = e^{-2y}\hat{\imath} - 2xe^{-2y}\hat{\jmath}$, luego $\nabla f(5,0) = \hat{\imath} - 10\hat{\jmath}$

$u = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\imath} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\hat{\jmath} = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Entonces,

$$D_u f(5,0) = 0 + (-10) = -10$$

Encuentre la derivada de la función en el punto dado en la dirección del vector v.

3. $f(x,y) = y^2 \ln x$; $(1,4)$, $v = \hat{\imath} - j$

Solución

De igual forma se encuentran los vectores: $\nabla f(1,4)$ y $u = \frac{V}{|V|}$

$\nabla f(x,y) = \frac{y^2}{x}\hat{\imath} + 2y\ln x\,\hat{\jmath}$, luego $\nabla f(1,4) = 16\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$

$u = \dfrac{\hat{\imath} - \hat{\jmath}}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$

Por tanto,

$$D_u f(1,4) = \frac{16}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

4. $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$; $(4,1,1)$, $v = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{\kappa}$. .

Solución

$\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{y+z}\hat{\imath} - \frac{x}{(y+z)^2}\hat{\jmath} - \frac{x}{(y+z)^2}\hat{\kappa}$, luego $\nabla f(4,1,1) = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{\kappa}$

$u = \dfrac{\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{\kappa}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\hat{\imath} + \dfrac{2}{\sqrt{14}}\hat{\jmath} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\hat{\kappa}$

Por lo tanto,

$$D_u f(4,1,1) = \frac{1}{2\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}} = -\frac{9}{2\sqrt{14}}$$

5. $f(x, y, z) = xy + z^2$ en dirección hacia $(5,-3, 3)$

Solución

La dirección está determinada por dos puntos, por tanto, se debe construir el vector director v. Sea $v = (5,-3,3) - (1,1,1) = 4\hat{\imath} - 4j + 2\kappa$. El vector gradiente y el vector unitario están dados

$\nabla f(x,y,z) = y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$, luego $\nabla f(1,1,1) = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{4\hat{\imath} - 4j + 2\kappa}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (2)}} = \frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}\kappa$$

Por tanto,

$$D_u f(1,1,1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

6. Encuentre las direcciones en los que la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2 + senxy$, en el punto $(1,0)$ tiene el valor de 1.

Solución

En el problema se pide encontrar los vectores unitarios u, tales que

$\nabla f(1,0) \cdot u = 1$. El vector gradiente está dado por

$\nabla f(x,y) = (2x + ycosxy)\hat{\imath} + (xcosxy)j$, *luego* $\nabla f(1,0) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$.

Ahora, considerando el vector unitario $u = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}$, se tiene

$$D_u f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot u = 2a + b = 1$$

Obsérvese que se debe resolver el siguiente par de ecuaciones

$$(1)\ \ a^2 + b^2 = 1 \ \text{ y } \ (2)\ \ 2a + b = 1$$

Despejando de la ecuación (2) a la incógnita $b = 1 - 2a$ y reemplazando en la ecuación (1) se tiene

$$a^2 + b^2 = a^2 + (1 - 2a)^2 = 1a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 5a^2 - 4a = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene: $a(5a - 4) = 0$.

Si $a = 0$, se obtiene la dirección de $u = 0\hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Si $a = \frac{4}{5}$, se obtiene $u = \frac{4}{5}\hat{\imath} - \frac{3}{5}\hat{\jmath}$

7. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar está dada por la función

$f(x,y) = 3000e^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}\, m$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el de las y hacia el norte. Un alpinista esta exactamente arriba del punto $(10,10)$. Si se mueve hacia el noroeste, ¿asciende o desciende y con qué pendiente?

Solución

Al preguntarse si el alpinista está ascendiendo o descendiendo y con qué pendiente, se pide encontrar la derivada direccional de f en el punto $(10,10)$. Entonces,

$$\nabla f(x,y) = 3000e^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}\left(\frac{-2x}{100}\right)\hat{\imath} + 3000e^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}\left(-\frac{4y}{100}\right)\hat{\jmath}$$

$$\nabla f(x,y) = -60xe^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}\,\hat{\imath} - 120ye^{-\frac{x^2+2y^2}{100}}\,\hat{\jmath}$$

Luego,

$$\nabla f(10,10) = -600e^{-3}\hat{\imath} - 1200e^{-3}\hat{\jmath}$$

Ahora, para hallar el vector unitario u, se considera otro punto sobre la recta que pasa por el punto $(10,10)$ y tiene dirección $\text{N}45^{\text{o}}\text{O}$; por ejemplo, considerando el punto $(8,12)$, se determina el vector v y se transforma en un vector unitario dividiéndose por su magnitud. Esto es, Sea

$v = (8,12) - (10,10) = -2\hat{\imath} + 2j$ *donde* $|v| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Entonces,

$$u = \frac{v}{|v|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}$$

Teniendo los vectores $\nabla f(10{,}10)$ y u se evalúa la derivada direccional

$$D_u f(10{,}10) = \nabla f(10{,}10)\cdot u = 300\sqrt{2}e^{-3} - 600\sqrt{2}e^{-3} = -300\sqrt{2}e^{-3}$$

Puesto que el resultado es negativo, significa que el alpinista está descendiendo con una pendiente de $300\sqrt{2}e^{-3}$.

8. La temperatura T en grados Celsius está dada $T(x,y,z) = \frac{10}{x^2+y^2+z^2}$ donde las distancias están en metros. Una abeja está volando desde un foco caliente que se encuentra en el origen con una trayectoria espiral, de tal manera que su vector posición en el tiempo t segundos es $r(t) = t\cos\pi t\hat{\imath} + t\,\mathrm{sen}\,\pi t\hat{\jmath} + t\hat{\kappa}$. Determine la razón de cambio de T con respecto a la distancia recorrida en $t = 1$ segundo.

Solución

Al igual que el ejercicio anterior se pide determinar la derivada direccional. Entonces,

$$\nabla T(x,y,z) = -\frac{20x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\hat{\imath} - \frac{20y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\hat{\jmath} - \frac{20z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\hat{\kappa}$$

Donde, transcurrido $t = 1$ segundo, la abeja se encuentra en el punto $r(1) = (-1{,}0{,}1)$.

Por tanto,

$$\nabla T(-1{,}0{,}1) = 5\imath + 0j - 5\kappa$$

Puesto que $r(t) = t\cos\pi t\ \hat{\imath} + t\,\mathrm{sen}\,\pi t\ j + t\kappa$ es el vector posición, su derivada $r'(t) = (\cos\pi t - \pi t\sin\pi t)\hat{\imath} + (\sin\pi t + \pi t\cos\pi t)j + (1)\kappa$, determina la distancia recorrida en un tiempo determinado. Entonces el vector unitario está dado por

$$u = \frac{r'(1)}{|r'(1)|} = \frac{-\hat{\imath} - \pi\hat{\jmath} + \hat{\kappa}}{\sqrt{(-1)^2 + (-\pi)^2 + (1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}}\hat{\imath} - \frac{\pi}{\sqrt{2+\pi^2}}j + \frac{1}{\sqrt{2+\pi^2}}\kappa$$

Entonces,

$$D_u T(-1{,}0{,}1) = \nabla T(-1{,}0{,}1)\cdot u = -\frac{5}{\sqrt{2+\pi^2}} - \frac{5}{\sqrt{2+\pi^2}} = -\frac{10}{\sqrt{2+\pi^2}}\frac{grados\ celsius}{min}$$

9. Encuentre un vector unitario en la dirección en la que f aumenta con mayor rapidez en p. ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección para la función dada?

$$f(x, y, z) = xe^{yz};\ \ p(2{,}0{,}-4)$$

Solución

Recordando, la dirección de mayor crecimiento de una función f en p está dada por $\nabla f(p)$. Entonces,

$$\nabla f(x,y,z) = e^{yz}\hat{\imath} + xze^{yz}\hat{\jmath} + xye^{yz}\hat{\kappa},\ \ luego\ \ \ \nabla f(2{,}0,-4) = \hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$$

Por tanto, el vector unitario que determina esta dirección es

$$u = \frac{\nabla f(2{,}0,-4)}{|\nabla f(2{,}0,-4)|},\ \textit{es decir}\ u = \frac{\hat{\imath}-8\hat{\jmath}}{\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}}\hat{\imath} - \frac{8}{\sqrt{65}}\hat{\jmath}$$

La razón de cambio de la función f en esa dirección es $|\nabla f(2{,}0,-4)| = \sqrt{65}$

10. Halle la dirección en la que la función $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ decrece con mayor rapidez, en el punto $(2, -3)$.

Solución

Se encuentra el vector gradiente en el punto dado, para luego hallar su vector con dirección opuesta, el cual representa la dirección de máximo decrecimiento. Entonces

$$\nabla f(x,y) = (4x^3y - 2xy^3)\hat{\imath} + (x^4 - 3x^2y^2)j$$

Luego,

$$\nabla f(2,-3) = (-96+108)\hat{\imath} + (16-108)\hat{\jmath} = 12\hat{\imath} - 92\hat{\jmath}$$

Por tanto, la dirección en la que la función decrece con mayor rapidez es

$$-\nabla f(2,-3) = -12\hat{\imath} + 92\hat{\jmath}$$

11. La temperatura T en una bola metálica es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola situado en el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es $120º$

a) Encuentre la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección que va hacia el punto $(2, 1, 3)$.

b) Demuestre que en cualquier punto en la bola metálica la dirección de máximo aumento de la temperatura está dada por un vector que apunta hacia el origen.

Solución

La función que describe el fenómeno físico es $T(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, donde $T(1, 2, 2) = 120º$. Por tanto, se encuentra el valor de la constante de proporcionalidad $\frac{k}{\sqrt{9}} = 120 \longrightarrow k = 360$. Reemplazando se obtiene la función

$$T(x,y,z) = \frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 360(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

En el inciso (a) se pide encontrar la derivada direccional $D_u T(1, 2, 2)$. Entonces

$$\nabla T(x,y,z) = \left[-180(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x\right]\hat{\imath} + \left[-180\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2y\right]\hat{\jmath} + \left[-180\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\right]\hat{k}$$

$$\nabla T(x,y,z) = -\frac{360x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath} - \frac{360y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\jmath} - \frac{360z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\kappa$$

Luego,

$$\nabla T(1,2,2) = -\frac{360}{27}\hat{\imath} - \frac{720}{27}j - \frac{720}{27}\kappa = -\frac{40}{3}\hat{\imath} - \frac{80}{3}j - \frac{80}{3}\kappa$$

Ahora, para encontrar el vector unitario u se considera el vector determinado por los puntos dados. Esto es, $v = (2,1,3) - (1,2,2) = \hat{\imath} - j - k$, Luego

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

Por tanto,

$$D_u T(1,2,2) = -\frac{40}{3\sqrt{3}} + \frac{80}{3\sqrt{3}} - \frac{80}{3\sqrt{3}} = -\frac{40}{3\sqrt{3}}$$

En el inciso (b) se debe mostrar que el vector $\nabla T(x_0, y_0, z_0)$ es paralelo y tiene dirección opuesta al vector $x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k}$. Esto es,

$$\nabla T(p_0) = -\frac{360x_0}{({x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\imath} - \frac{360y_0}{({x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{\jmath} - \frac{360z_0}{({x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}k$$

$$\nabla T(p_0) = -\frac{360}{({x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2)^{\frac{3}{2}}}(x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k})$$

En la ecuación se observa que los vectores cumplen las dos condiciones, son paralelos y tienen dirección opuesta.

12. Suponga que, en cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$$

a) Encuentre la razón de cambio del potencial en $p(3, 4, 5)$, en la dirección del vector $v = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

Solución

Los vectores $\nabla V(3,4,5)$ y $u = \frac{v}{|v|}$ están dados por

$$\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz)\hat{\imath} + (-3x + xz)\hat{\jmath} + (xy)\hat{k}$$

Luego,

$$\nabla V(3,4,5) = (30 - 12 + 20)\hat{\imath} + (-9 + 15)\hat{\jmath} + (12)\hat{k} = 38\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

Entonces, $D_u V(3,4,5) = \frac{38}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$

b) ¿En qué dirección cambia V más rápidamente en p?

Solución

Cambia más rápidamente en la dirección del vector

$$\nabla V(3,4,5) = 38\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 12\hat{k}$$

c) ¿Cuál es la mayor razón de cambio en P?

Solución

$$|\nabla V(3,4,5)| = \sqrt{(38)^2 + (6)^2 + (12)^2} = \sqrt{1624}$$

Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie dada en el punto especificado

13. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4, \quad (3,-2,-1)$

Solución

Recordando el vector normal del plano tangente y el vector director de la recta normal a la superficie dada es $\nabla F(3,-2,-1)$, donde

$$F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz$$

Entonces,

$$\nabla F(x,y,z) = (2x + yz)\hat{\imath} + (-4y + xz)\hat{\jmath} + (-6z + xy)\hat{k} \to \nabla F(3,-2,-1) = 8\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son:

$$8(x-3) + 5(y+2) + 0(z+1) = 0 \longrightarrow 8x + 5y = 14$$
$$x = 3 + 8t, \; y = -2 + 5t, \quad z = -1$$

14. $z + 1 = xe^y \cos z, \quad (1,0,0)$

Solución

Realizando un proceso similar y considerando

$$F(x,y,z) = z - xe^y \cos z$$

Se obtiene:

$$\nabla F(x,y,z) = (-e^y \cos z)\hat{\imath} + (-xe^y \cos z)\hat{\jmath} + (1 + xe^y \operatorname{sen} z)\hat{k} \longrightarrow \nabla F(1,0,0) = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

De esto, la ecuación del plano tangente y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$-1(x-1) - 1(y-0) + 1(z-0) \longrightarrow -x - y + z = -1 \longrightarrow x + y - z = 1$$
$$x = 1 - t, \quad y = -t, \quad z = t$$

15. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como

$$\frac{2x_0x}{a^2} + \frac{2y_0y}{b^2} = \frac{z+z_0}{c}$$

Solución

Considerando $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}$, se encuentra la función vectorial

$\nabla F(x,y,z) = \frac{2x}{a^2}\hat{\imath} + \frac{2y}{b^2}\hat{\jmath} - \frac{1}{c}\hat{k}$. Entonces, $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \frac{2x_0}{a^2}\hat{\imath} + \frac{2y_0}{b^2}\hat{\jmath} - \frac{1}{c}\hat{k}$.

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$\frac{2x_0(x-x_0)}{a^2}+\frac{2y_0(y-y_0)}{b^2}-\frac{1}{c}(z-z_0)=0$$

$$\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}-\frac{1}{c}z=\frac{2x_0{}^2}{a^2}+\frac{2y_0{}^2}{b^2}-\frac{1}{c}z_0 \quad (*)$$

Por hipótesis se tiene que $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=\frac{z_0}{c}$, luego, reemplazando en (*), se obtiene

$$2\left(\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}\right)-\frac{1}{c}z_0=\frac{2}{c}z_0-\frac{1}{c}z_0=\frac{1}{c}z_0$$

Por tanto, queda demostrado que se cumple

$$\frac{2x_0x}{a^2}+\frac{2y_0y}{b^2}=\frac{1}{c}z+\frac{1}{c}z_0=\frac{z+z_0}{c}$$

16. Encuentre los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$

Observación

Debe tener en cuenta que dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

Solución

Por lo anterior, se debe cumplir que $\nabla F(x,y,z)$ y el vector $n = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ deben ser vectores paralelos, donde $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Entonces,

$$\nabla F(x,y,z)=2x\hat{\imath}+4yj+6zk=\lambda(3i-j+3k); \quad \lambda\neq 0\,(escalar)$$

De la ecuación vectorial se extrae el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$2x=3\lambda, \quad 4y=-\lambda, \quad 6z=3\lambda \longrightarrow x=\frac{3}{2}\lambda, \quad y=-\frac{1}{4}\lambda, \quad z=\frac{1}{2}\lambda$$

Sustituyendo en la ecuación del elipsoide se obtiene

$$x^2+2y^2+3z^2=\frac{9}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\lambda^2+\frac{3}{4}\lambda^2=\frac{25}{8}\lambda^2=1 \longrightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{8}{25}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Portanto,lospuntosdelelipsoideson $\left(\frac{3\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{5},\frac{\sqrt{2}}{10},-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

17. Demuestre que la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ y el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$, son tangentes entre sí en el punto $(1, 1, 2)$. (esto significa que tienen un plano tangente común en el punto).

Solución

En la observación se afirma que se debe mostrar que la ecuación del plano tangente a cada superficie en el punto $(1, 1, 2)$ es la misma.

Elipsoide

Sea $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2 \longrightarrow \nabla F(x,y,z)=6x\hat{\imath}+4y\hat{\jmath}+2z\hat{k}$. Por tanto, $\nabla F(1,1,2)=6\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+4\hat{k}$. Luego, la ecuación del plano tangente es

$$6(x-1)+4(y-1)+4(z-2)=0 \longrightarrow 6x+4y+4z=18$$

Esfera

Sea $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z$, entonces

$$\nabla G(x,y,z)=(2x-8)\hat{\imath}+(2y-6)\hat{\jmath}+(2z-8)\hat{k} \longrightarrow \nabla G(1,1,2)=-6\hat{\imath}-4\hat{\jmath}-4\hat{k}.$$

La ecuación del plano tangente es

$$-6(x-1)-4(y-1)-4(z-2)=0 \longrightarrow -6x-4y-4z=-18$$

Es decir,

$$6x+4y+4z=18$$

Por tanto, las dos superficies son tangentes entre sí en el punto $(1,1,2)$

18. Demuestre que todo plano que sea tangente al cono $z^2=x^2+y^2$ pasa por el origen.

Solución

Se encuentra la ecuación del plano tangente al cono en (x_0, y_0, z_0).

Sea $F(x,y,x)=x^2+y^2-z^2 \longrightarrow \nabla F(x,y,z)=2x\hat{\imath}+2y\hat{\jmath}-2z\hat{k}$. Luego,

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=2x_0\hat{\imath}+2y_0 j-2z_0 k$$

Entonces, la ecuación del plano tangente es

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$$

Simplificando

$$x_0 x+y_0 y-z_0 z=x_0^{\,2}+y_0^{\,2}-z_0^{\,2}$$

Como $x_0^{\,2}+y_0^{\,2}-z_0^{\,2}=0$, porque (x_0, y_0, z_0) pertenece al cono, entonces queda demostrado que todo plano tangente al cono pasa por el origen.

19. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ pasa por el centro de la esfera.

Solución

Al igual que el ejercicio anterior se determinan las ecuaciones paramétricas para la recta normal a la esfera en el punto (x_0, y_0, z_0).

Sea $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \longrightarrow \nabla F(x_0,y_0,z_0)=2x_0\hat{\imath}+2y_0\hat{\jmath}+2z_0 k$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas para la recta normal en el punto (x_0, y_0, z_0) son

$$x=x_0+2x_0 t,\; y=y_0+2y_0 t,\; z=z_0+2z_0 t$$

Si $t=-\frac{1}{2}$, tenemos que $x=y=z=0$, independientemente del punto (x_0, y_0, z_0).

20. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2-y^2+2z^2=1$, donde la recta normal es paralela a la recta que la enlaza los puntos $(3,-1,0)$ y $(5,3,6)$.

Observación

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos.

Solución

Por tanto, los vectores $\nabla F(x,y,z)$ y $V=(5,3,6)-(3,-1,0)=2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+6\hat{k}$ deben ser paralelos, donde $F(x,y,x)=x^2-y^2+2z^2$. Entonces,

$$\nabla F(x,y,z)=2x\hat{\imath}-2y\hat{\jmath}+4z\hat{k}=\lambda\left(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}+6\hat{k}\right);\quad \lambda\neq 0\ (escalar)$$

Similar al ejercicio 16 tenemos,

$$2x=2\lambda,\quad -2y=4\lambda,\quad 4z=6\lambda \quad\longrightarrow\quad x=\lambda,\qquad y=-2\lambda,\qquad z=\frac{3}{2}\lambda$$

Remplazando en la ecuación del hiperboloide se tiene

$$\lambda^2-4\lambda^2+\frac{9}{2}\lambda^2=1 \;\rightarrow\; \frac{3}{2}\lambda^2=1 \;\rightarrow\; \lambda\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Por tanto, los puntos del hiperboloide son

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-2\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) y \left(-\sqrt{\frac{2}{3}},2\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Ejercicios propuestos

Halle el gradiente de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x,y) = 2e^{\frac{4x}{y}} - 2x$, $(2,-1)$

2. $f(x,y) = sen\ 3xy + y^2$, $(\pi,1)$

3. $f(x,y) = x^2\sqrt{y^2+1}$, $(2,0)$

4. $f(x,y,z) = 3x^2 y - z\cos x$, $(0,2,-1)$

5. $f(x,y,z) = z^2 e^{2x-y} - 4xz^2$, $(1,2,2)$

6. $f(x,y,z) = x\ tan\ (y+z)$, $(4,3,-1)$

Halle la derivada de la función en el punto dado en la dirección del vector v.

7. $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3,4)$, $v = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$

8. $g(x,y) = e^{-x}\operatorname{sen} y$, $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, $v = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$

9. $g(x,y) = \cos^{-1} xy$, $(1,0)$, $v = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

10. $h(x,y) = e^{x^2-y^2}$, $(-1,1)$, $v = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$

11. $g(x,y,z) = z^3 - x^2y$, $(1,6,2)$, $v = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k}$

12. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(1,2,-2)$, $v = -6\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

13. $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $(1,1,1)$, $v = 2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - \hat{k}$

14. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(1,2,-1)$, $v = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$

15. $f(x,y,z) = xyz$, $(2,1,1)$, $v = \langle 2,1,2\rangle$

16. $f(x,y,z) = x\tan^{-1} yz$, $(4,1,1)$, $v = \langle 1,2,-1\rangle$

Encuentre la derivada direccional de la función en P en dirección de Q.

17. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, $P(3,1)$, $Q(1,-1)$

18. $f(x,y) = \cos(x+y)$, $P(0,\pi)$, $Q(\frac{\pi}{2},0)$

19. $f(x,y) = e^{-x}\ cos\ y$, $P(0,0)$, $Q(2,1)$

20. $f(x,y) = \operatorname{sen} 2x\cos y$, $P(0,0)$, $Q(\frac{\pi}{2},\pi)$

21. $f(x,y,z) = ln(x+y+z)$, $P(1,0,0)$,$Q(4,3,1)$

22. $f(x,y,z) = xye^z$, $P(2,4,0)$, $Q(0,0,0)$

Encuentre la máxima y mínima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la que esta se verifica.

23. $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$, $(1,0)$

24. $f(x,y) = sen(xy)$,$(1,0)$

25. $f(x,y) = y^2\ e^{4x}$, $(0,-2)$

26. $f(x,y) = x\ cos\ 3y$, $(-2,\pi)$

27. $f(x,y,z) = x + \frac{y}{z}$, $(4,3,-1)$

28. $f(x,y,z) = 4x^2yz^3$, $(1,2,1)$

29. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(1,2,-2)$

30. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0,2)$ tiene el valor de 1.

31. Sea f una función de dos variables que tienen derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(2,7)$ y $D(6,15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector AB es 3 y la derivada direccional en A en la dirección del vector AC es 26. Encuentre la derivada direccional de f en A en la dirección del vector AD.

32. La temperatura T en una bola con centro en el origen está dada por

$$T(x,y,z) = \frac{200}{5 + x^2 + y^2 + z^2}$$

a) Por inspección, decida donde está más caliente la bola.
b) Encuentre un vector que apunte en dirección del máximo aumento de temperatura en el punto $(1,-1,1)$.
c) ¿Apunta hacia el origen el vector del inciso b?

33. Dado que $f_x\,(2,4) = -3$ y $f_y\,(2,4) = 8$, encuentre la derivada direccional de f en $(2,4)$ en dirección hacia $(5,0)$.

34. Sean $u = \frac{3}{5}\hat{\imath} - \frac{4}{5}\hat{\jmath}$ y $v = \frac{4}{5}\hat{\imath} + \frac{3}{5}\hat{\jmath}$. Suponga que la derivada direccional de f en el punto p en dirección de los vectores u y v es $D_u f = -6$ y $D_v f = 17$. Encuentre ∇f en p.

35. Suponga que la elevación de una colina está dada por $f(x,y) = 200 - y^2 - 4x^2$. Desde el lugar situado en $(1,2)$, ¿en qué dirección correrá el agua lluvia?

36. La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica es $T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto (3,4).

37. Si la temperatura en el punto (x, y, z) está dada por $T(x,y,z) = 80 + 5e^{-z}\,(x^{-2} + y^{-1})$

a) Halle la dirección desde el punto $(1,4,8)$ en la que la temperatura decrece más rápidamente.
b) Halle la dirección desde el punto $(1,4,8)$ en la que la temperatura crece más rápidamente.

38. La temperatura en un punto (x,y,z) está dada por

$$T(x,y,z) = 200e^{-x^2 - 3y^2 - 9z^2}$$

Donde T se mide en grados centígrados y x, y, z en metros.
a) Encuentre la razón de cambio de la temperatura en el punto $p(2,-1,2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3,-3,3)$.
b) ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura en p?
c) Encuentre la mayor razón de incremento en p.

39. Suponga que el lector está escalando un cerro cuya forma está dada por la ecuación $z = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$, y está en un punto de coordenadas $(60, 100, 764)$.
a) ¿En qué dirección debe avanzar inicialmente para llegar a la cima del cerro más rápidamente?
b) Si sube en esa dirección ¿con qué ángulo sobre la horizontal, debe subir inicialmente?

Halle las ecuaciones del (a) el plano tangente y (b) la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

40. $x^2 + 2y^2 + 3z = 21,\quad (4,-1,1)$

41. $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4,\quad (1,0,1)$

42. $x + 1 = ye^z\ \cos z,\quad (1,2,0)$

43. $y = e^x\ \cos z,\quad (1,e,0)$

44. $z = e^{3x}\,\mathrm{sen}\,3y,\ \left(0,\frac{\pi}{6},1\right)$

45. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 4,\ (4,1,1)$

46. $x^2 z - xy^2 - yz^2 = 18, \quad (0,-2,3)$

47. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$.

48. Encuentre la ecuación del plano tangente al hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en (x_0, y_0, z_0) y exprésela en forma semejante a la del ejercicio anterior.

49. Encuentre los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + y - 4z = 1$.

50. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ donde la recta normal es paralela a la recta que enlaza los puntos $(6,-2,0)$ y $(-5,-3,-6)$.

51. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ pasa por el centro de la esfera.

52. Demuestre que la suma de los puntos de intersección con los ejes x, y y z de cualquier plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$, es una constante.

53. Demuestre que el producto de los puntos de intersección con los ejes x, y y z, de cualquier plano tangente a la superficie $xyz = c^3$, es una constante.

54. Demuestre que las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - b)^2 + y^2 + z^2 = (b - a)^2$ son tangentes en el punto $(a, 0, 0)$

55. Demuestre que las superficies $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 108$ y $xyz = 36$ son tangentes en el punto $(3, 6, 2)$

56. Halle ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(-1, 1, 2)$

57. El plano $y + z = 3$ corta el cilindro $x^2 + y^2 = 5$ en una elipse. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 1)$.

58. Una abeja estaba en el punto $(1, 2, 1)$ en el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$ (distancia en pies). En $t = 0$, se fue a lo largo de la recta normal con una rapidez de $4 \frac{pies}{s}$. ¿Dónde y cuándo chocó con el plano $2x + 3y + z = 49$?

Determinar si la proposición es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa.

59. Si $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_u f(0, 0) = 0$ para todo vector unitario.

60. Si $f(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_u f(x,y) \leq 1$

61. Si $D_u f(x, y)$ existe, entonces $D_u f(x, y) = -D_{-u} f(x, y)$.

62. Si $D_u f(x_0, y_0) = c$ para todo vector unitario u, entonces $c = 0$.

63. Hallar una función f tal que $\nabla f(x, y, z) = e^x \cos y \; i - e^x \operatorname{sen} y \; j + z\, k$

Sección 7.5. Valores máximos y mínimos, multiplicadores de Lagrange

Una de las principales aplicaciones de las derivadas ordinarias es encontrar valores máximos y mínimos. En esta sección extenderemos esta aplicación a funciones de dos variables. En adelante, consideraremos un punto variable $p(x,y)$ y un punto fijo $p_0\,(x_0,y_0)$ en dos dimensiones

Definición

Sea f una función de dos variables con dominio S y p_0 un punto de S.

i) $f(p_0)$ es un valor máximo absoluto de f en S si $f(p_0) \geq f(p)$ para todo p de S.
ii) $f(p_0)$ es un valor mínimo absoluto de f en S si $f(p_0) \leq f(p)$ para todo p de S.
iii) $f(p_0)$ es un valor extremo absoluto de f en S si es un valor máximo absoluto o mínimo absoluto.
iv) $f(p_0)$ es un valor máximo relativo de f en S si $f(p_0) \geq f(p)$ para todo p cerca de p_0.
v) $f(p_0)$ es un valor mínimo relativo de f en S si $f(p_0) \leq f(p)$ para todo p cerca de p_0.

El siguiente resultado nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de los valores extremos absolutos.

Teorema

Si f es una función de dos variables continua en un conjunto cerrado y acotado S, entonces f alcanza un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.

Al igual que ocurre en las funciones de una variable, estos valores extremos se presentan en unos puntos llamados críticos, los cuales son de tres tipos:

i) Puntos frontera: un punto p_0 interior a S es un punto frontera si toda vecindad (circunferencia) de p_0 contiene puntos dentro y fuera de S.
ii) Puntos estacionarios: un punto p_0 interior a S se denomina punto estacionario si $\nabla f(p_0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$. En dicho punto, el plano tangente a la superficie es horizontal.
iii) Puntos singulares: un punto p_0 interior a S se denomina punto singular si f no es diferenciable en p_0. Por ejemplo, un punto de la superficie donde f tiene una esquina.

EJEMPLO

Encuentre los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 7$.

Solución

Como la función f es polinomica, solamente se pueden presentar puntos estacionarios. Los puntos críticos de la función están dados por: $\nabla f(x,y) = 0i + 0j$. Entonces,

$\nabla f(x,y) = (2x-6)i + (2y-8)j = 0i + 0j \;\rightarrow\; 2x - 6 = 0,\; 2y - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 3, \quad y = 4$

De modo que el único punto crítico es $(3,4)$. Además, completando cuadrados se expresa la función de la siguiente forma

$$f(x,y) = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 18$$

Observe que $f(x, y) \geq -18$, para todo punto (x, y). Por tanto, $f(3, 4) = -18$ es un valor mínimo relativo y de hecho es el valor mínimo absoluto de f. No hay valores máximos relativos.

Observación

Si una función f alcanza un valor máximo o mínimo relativo en un punto p_0, entonces p_0 es un punto crítico de f. Lo contrario no siempre es cierto. Es decir, podemos encontrar un punto crítico p_0 en donde $f(p_0)$ no es un valor ni máximo ni mínimo relativo.

A continuación se presenta un resultado para determinar los valores extremos relativos, el cual es análogo a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.

Teorema

Sea f una función de dos variables que tiene segundas derivadas parciales continuas en una vecindad de p_0, donde $\nabla f(p_0) = 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}$
Sea

$$D = f_{xx}(p_0)f_{yy}(p_0) - [f_{xy}(p_0)]^2$$

Entonces,

i) Si $D > 0$ y $f_{xx}(p_0) > 0$, entonces $f(p_0)$ es un valor mínimo relativo.
ii) Si $D > 0$ y $f_{xx}(p_0) < 0$, entonces $f(p_0)$ es un valor máximo relativo.
iii) Si $D < 0$, entonces $f(p_0)$ no es un valor extremo relativo, p_0 se denomina punto de silla.
iv) Si $D = 0$, el criterio no decide nada.

EJEMPLO

Encuentre los valores máximo y mínimo, y puntos de silla de la función

$$f(x, y) = x^3 y + 12x^2 - 8y$$

Solución

Inicialmente, se hallan los puntos críticos estacionarios con la ecuación vectorial

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 y + 24x)i + (x^3 - 8)j = 0i + 0j$$

Luego, primero hacemos $3x^2 y + 24x = 0$ y segundo $x^3 - 8 = 0$. De la segunda ecuación se tiene $x = 2$, por lo tanto, al reemplazar el valor en la primera ecuación se obtiene $12y + 48 = 0$, entonces $y = -4$. Es decir, el punto crítico es $(2,-4)$. Para determinar si allí se presenta un valor máximo o mínimo relativo, se encuentran las segundas derivadas parciales. Esto es,

$$f_{xx}(x, y) = 6xy + 24,\ f_{yy}(x, y) = 0,\ f_{xy}(x, y) = 3x^2.$$

Luego,

$$D = f_{xx}(2,-4)\ f_{yy}(2,-4) - [f_{xy}(2,-4)]^2 = (-24)(0) - (12)^2 = -144$$

Por lo tanto, el punto $(2,-4)$ es un punto silla.

Observación

Para hallar los valores extremos absolutos, garantizados en el primer resultado de esta sección, se procede de la siguiente manera:

i) Encuentre los puntos críticos de la función f dentro del conjunto cerrado y acotado S y evalúe la función en estos puntos.
ii) Halle los puntos críticos frontera y evalúe la función en dichos puntos.
iii) El resultado más grande es el valor máximo absoluto y el más pequeño es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO

Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, donde S es la región triangular cerrada con vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$.

Solución

La gráfica del triángulo y las primeras derivadas parciales de la función son

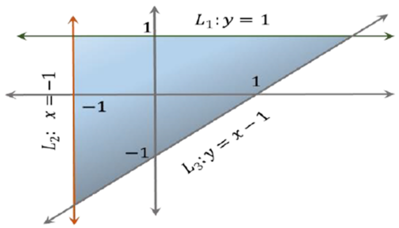
$$f_x(x, y) = 2x + 2y, \quad f_y(x, y) = 2x + 6y$$

Al resolver el sistema de ecuaciones

$$2x + 2y = 0, \quad 2x + 6y = 0$$

Se obtiene el punto crítico $(0, 0)$, donde

$$f(0, 0) = 0$$



Para encontrar los puntos frontera, analizamos la función f en cada recta L_1, L_2, L_3.

Para L_1: $y = 1$, $-1 \leq x \leq 2$. Entonces, $f(x,1) = x^2 + 2x + 3 \rightarrow \frac{df}{dx} = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$. Ahora, se evalúa la función f en los valores críticos -1 y en los extremos del intervalo -1 y 2. Esto es, $f(-1)=2, f(2) = 11$.

Para L_2: $x = -1$, $-2 \leq y \leq 1$. Por tanto, $f(-1,y) = 1 - 2y + 3y^2 \rightarrow \frac{df}{dx} = 12x - 8 = 0$, obteniéndose $y = \frac{1}{3}$, luego $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $f(-2) = 17$ y $f(1) = 2$.

Para L_3: $y = x - 1, -1 \leq x \leq 2$. Entonces, $f(x, x-1) = 6x^2 - 8x + 3 \rightarrow \frac{df}{dx} = 12x - 8 = 0$, obteniéndose $x = \frac{2}{3}$, *luego* $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $f(-1) = 17$. y $f(2) = 11$.

Por tanto, el valor máximo absoluto es 17 y el valor mínimo absoluto es 0.

A continuación, se muestra la solución de un problema que requiere minimizar una función.

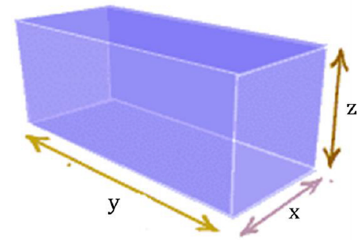
EJEMPLO

Un tanque de metal rectangular, sin tapa, debe contener 256 pies cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requiere menos material de construcción?

Solución

La función que se debe minimizar representa el área superficial del tanque

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$



Obsérvese que f es una función de tres variables; por tanto, es necesario extraer una ecuación que relacione las variables x, y, z, para transformar la función f en una función de dos variables. En el problema la ecuación mencionada está determinada por el volumen $V = xyz = 256$. Despejando a $z = \frac{256}{xy}$ y sustituyendo en la función f se obtiene

$$f(x, y) = xy + 2x\frac{256}{xy} + 2y\frac{256}{xy} = xy + \frac{512}{y} + \frac{512}{x}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$(1)\ f_x(x, y) = y - \frac{512}{x^2} = 0 \quad y \quad (2)\ f_y(x, y) = x - \frac{512}{y^2} = 0.$$

En la ecuación (1) se despeja a y, y se reemplaza en (2), obteniéndose

$$x - \frac{512}{\left(\frac{512}{x^2}\right)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{x^4}{512} \rightarrow x^4 - 512x = 0 \rightarrow x(x^3 - 512) = 0 \rightarrow$$

$$x = 0 \ o \ x = 8$$

Puesto que $x > 0$, se descarta el valor de cero, entonces $x = 8$ y $y = 8$. Es decir, el único punto crítico de f es $(8,8)$. Utilizando el teorema de las segundas derivadas parciales se puede mostrar que en este punto crítico se presenta el valor mínimo relativo.

$f(8,8) = (8)(8) + \frac{512}{8} + \frac{512}{8} = 192$ pies cúbicos. Por tanto, el tanque de metal rectangular se debe construir con dimensiones de $x = 8\,pies, y = 8\,pies, y\ \ z = \frac{256}{(8)(8)} = 4\,pies.$

Multiplicadores de lagrange

En el ejemplo anterior se minimizó la función $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$, sujeta a la restricción $xyz = 256$. A continuación se presenta el método llamado multiplicadores de Lagrange para optimizar una función $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Presentamos la base geométrica del método de Lagrange para funciones de dos variables. Por tanto, buscamos los valores extremos de $f(x, y)$ cuando se impone la restricción de que el punto (x, y) debe estar sobre la curva de nivel $g(x, y) = k$. Hacer máxima $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = k$ es hallar el máximo valor de C tal que la curva de nivel $f(x, y) = C$ corte a $g(x, y) = k$. O sea, esto ocurre cuando estas curvas se tocan solo en un punto, luego tienen una recta tangente común. Lo que significa que las rectas normales en el punto (x_0, y_0) donde se tocan, son idénticas. Por consiguiente, los vectores gradientes son paralelos, es decir,

$$\nabla f(x_0, y_0) = \mu \nabla g(x_0, y_0), , \quad \mu \text{ (escalar).}$$

Esta clase de argumento también se aplica a funciones en tres variables $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Para hallar los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujetos a la restricción $g(x, y, z) = k$

i) Encuentre todos los valores de x,y,z, y μ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \mu \nabla g(x, y, z), \quad g(x, y, z) = k$$

ii) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) resultantes. El valor más grande es el valor máximo de f. El valor más pequeño es el valor mínimo de f.

EJEMPLO

Veamos el ejemplo anterior, utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

Solución

Se debe minimizar la función $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ sujeta a la restricción $xyz = 256$. Entonces,

$$\nabla f(x, y, z) = (y+2z)i + (x + 2z)j + (2x + 2y)k,$$
$$\nabla g(x, y, z) = (yz)i + (xz)j + (xy)k$$

De la ecuación vectorial $\nabla f(x, y, z) = \mu \nabla g(x, y, z)$, y la restricción $xyz = 256$ se extrae el sistema de ecuaciones:

$$(1)\ \ y + 2z = \mu yz,\ \ (2)\ \ x + 2z = \mu xz,\ \ (3)\ \ 2x + 2y = \mu xy,\ \ (4)\ \ xyz = 256$$

Multiplicando la ecuación (1) por x y la ecuación (2) por y, se obtiene la ecuación

$$(5)\ \ xy + 2xz = xy + 2yz \ \rightarrow\ x = y$$

Ahora, si se multiplica la ecuación (2) por y y la ecuación (3) por z, se obtiene

$$(6)\ \ xy + 2yz = 2xz + 2yz \ \rightarrow\ y = 2z$$

Reemplazando la ecuación (5) y (6) en la ecuación (4) se tiene

$$(2z)(2z)z = 256 \ \rightarrow\ 4z^3 = 256 \ \rightarrow\ z^3 = 64 \ \rightarrow\ z = 4$$

Entonces, $x = 8,\ \ y = 8,\ \ z = 4,$ pies.

Ejercicios complementarios

Encuentre los valores máximo y mínimo relativos, y puntos de silla de la función dada.

1. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

Solución

Se encuentran los puntos críticos (estacionarios).

$$f_x(x, y) = -2xe^{4y - x^2 - y^2} \text{ y } f_y(x, y) = (4 - 2y)\, e^{4y - x^2 - y^2}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(1)\ -2xe^{4y - x^2 - y^2} = 0 \ \rightarrow\ x = 0, \qquad (2)\ (4 - 2y)\, e^{4y - x^2 - y^2} = 0 \ \rightarrow\ y = 2$$

Se obtiene el punto crítico $(0,2)$. Para determinar si en este punto se presenta un valor máximo o mínimo relativo, o es un punto de silla, se encuentran las segundas derivadas parciales.

$$f_{xx}(x, y) = -2e^{4y - x^2 - y^2} + 4x^2\, e^{4y - x^2 - y^2} = (4x^2 - 2)e^{4y - x^2 - y^2}$$
$$f_{yy}(x, y) = -2e^{4y - x^2 - y^2} + (4 - 2y)^2\, e^{4y - x^2 - y^2} = [(4 - 2y)^2 - 2]e^{4y - x^2 - y^2}$$
$$f_{xy}(x, y) = -2x\,(4 - 2y)e^{4y - x^2 - y^2}$$

Luego,

$$D = f_{xx}(0,2) f_{yy}(0,2) - [f_{xy}(0,2)]^2 = (-2e^4)(-2e^4) - (0) = 4e^8$$

Puesto que, $D > 0$ y $f_{xx}(0,2) = -2e^4 < 0$, entonces $f(0,2) = e^4$ es un valor máximo relativo.

2. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Solución

Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 6x^2 + y^2 + 10x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2xy + 2y$$

Se hallan los puntos críticos, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$(1)\ \ 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \quad (2)\ \ 2xy + 2y = 0$$

De la ecuación $(2)\ \ 2y(x + 1) = 0$, se tiene que, si $y = 0$, entonces la ecuación (1) se transforma en

$6x^2 + 10x = 0 \rightarrow 2x(3x + 5) = 0 \rightarrow x = 0,\ \ x = -\frac{5}{3}$. De igual forma si $x = -1 \rightarrow y^2 - 4 = 0 \rightarrow y = \pm 2$. Por tanto, los puntos críticos de la función son: $(0,0), \left(-\frac{5}{3}, 0\right), (-1, -2), (-1,2)$.

Ahora, se utiliza el teorema de las segundas derivadas parciales para cada punto crítico

$$f_{xx}(x, y) = 12x + 10,\ f_{yy}(x, y) = 2x + 2,\ f_{xy}(x, y) = 2y$$

Para $(0,0)$: $D = (10)(2) - (0)^2 = 20 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = 10 > 0$. Luego,

$$f(0,0) = 0 \ \ \textit{es un valor mínimo relativo}.$$

Para $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$: $D = (-10)\left(-\frac{4}{3}\right) - (0)^2 = \frac{40}{3} > 0$ y $f_{xx}\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = -10 < 0$
Luego,

$$f\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27} \ \ \textit{es un valor máximo relativo}.$$

Para $(-1, 2)$: $D = (-10)(0) - (4)^2 = -16 < 0$. Luego, $(-1, 2)$ *es un punto de silla*.

Para $(-1,-2)$: $D = (-2)(0) - (-4)^2 = -16 < 0$. Luego, $(-1,2)$ *es un punto de silla*.

3 $f(x,y) = \frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

Solución

Realizando un proceso similar se obtiene

$$f_x(x,y) = \frac{(2xy^2-8)(xy)-y(x^2y^2-8x+y)}{x^2y^2} = \frac{2x^2y^3-8xy-x^2y^3+8xy-y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2y^3-y^2}{x^2y^2}$$

$$f_x(x,y) = \frac{x^2y-1}{x^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(2x^2y+1)(xy)-x(x^2y^2-8x+y)}{x^2y^2} = \frac{2x^3y^2+xy-x^3y^2+8x^2-xy}{x^2y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^3y^2+8x^2}{x^2y^2} = \frac{xy^2+8}{y^2}$$

Por tanto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(1)\ \frac{x^2y-1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2y-1=0 \rightarrow y = \frac{1}{x^2} \quad (2)\ \frac{xy^2+8}{y^2} = 0 \rightarrow xy^2+8=0$$

Reemplazando la solución de (1) en (2) se obtiene

$$x\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + 8 = 0 \rightarrow \frac{1}{x^3} = -8 \rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

Entonces, el punto crítico es $\left(\frac{-1}{2},4\right)$ Ahora, se encuentran las segundas derivadas parciales

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy(x^2)-2x(x^2y-1)}{x^4} = \frac{2x^3y-2x^3y+2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2xy(y^2)-2y(xy^2+8)}{y^4} = \frac{2xy^3-2xy^3-16y}{y^4} = \frac{-16}{y^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por tanto,

$$D = f_{xx}\left(-\frac{1}{2},4\right) f_{yy}\left(-\frac{1}{2},4\right) - \left[f_{xy}\left(-\frac{1}{2},4\right)\right]^2 = (-16)\left(-\frac{1}{4}\right) - (1)^2 = 3$$

Como $f_{xx}\left(\frac{-1}{2},4\right) = -16 < 0$, entonces $f\left(\frac{-1}{2},4\right) = -6$ es un valor máximo relativo.

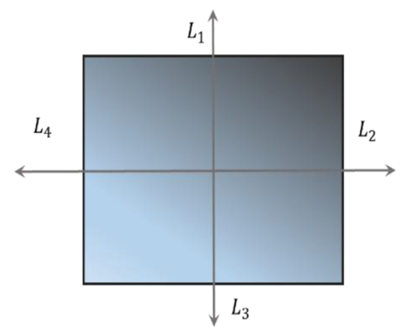
Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el conjunto S.

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4; \quad S = \{(x,y): |x| \le 1, |y| \le 1\}$

Solución

Las primeras derivadas parciales son
$f_x(x,y) = 2x + 2xy$ y $f_y(x,y) = 2y + x^2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones



(1) $2x + 2xy = 0$ (2) $2y + x^2 = 0$
Obtenemos de la ecuación (1)
$2x(1+y) = 0 \rightarrow x = 0; \quad y = -1$

Sustituyendo en la ecuación (2) se tiene

Si $x = 0$, entonces $2y = 0 \rightarrow y = 0$
Si $y = -1$, entonces se obtiene
$2(-1) + x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Por tanto, los puntos críticos son $(0,0), (\pm\sqrt{2},-1)$, pero $(\pm\sqrt{2},-1)$ son puntos que están fuera del conjunto S. Por tal motivo no se tienen en cuenta. Luego, se evalúa la función únicamente en (0,0). Esto es, $f(0,0) = 4$.

Para hallar los puntos frontera se analiza cada recta por separado.

Para L_1: $y = 1, -1 \le x \le 1$. Entonces, $f(x,1) = 2x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 4x = 0$ $\rightarrow x = 0$

Luego, evaluando la función f en el valor crítico 0 y en los extremos -1 y 1, se obtienen los valores $f(0) = 5$, $f(-1) = 7$, $f(1) = 7$

Para L_2: $x = 1, -1 \leq y \leq 1$. Entonces,
$f(1,y) = y^2 + y + 5 \rightarrow f'(y) = 2y + 1 = 0$

Obteniéndose $y = -\frac{1}{2}$, donde $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{4}$, $f(-1) = 5$, $f(1) = 7$.

Para L_3: $y = -1, -1 \leq x \leq 1$. En este caso se analiza una función constante $f(x) = 5$. Es decir, f siempre tiene como imagen 5 para todo valor real entre -1 y 1.

Para L_4: $x = -1, -1 \leq y \leq 1$. Entonces, $f(-1,y) = y^2 + y + 5$. Obsérvese que esta función se analizó en la recta L_2.

Comparando las imágenes de los puntos críticos, se tiene que el valor máximo absoluto es 7 y se presenta en los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$. El valor mínimo absoluto es 4 y se presenta en el punto crítico $(0,0)$.

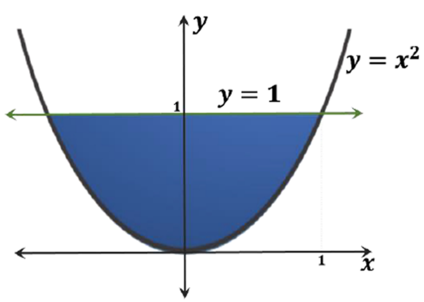
5. $f(x, y) = 1 + xy - x - y$ es la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

Solución

Los puntos críticos estacionarios se hallan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$f_x(x, y) = y - 1 = 0, \quad f_y(x, y) = x - 1 = 0$$

Obteniéndose el punto crítico $(1, 1)$, donde $f(1, 1) = 0$



Para hallar los puntos críticos frontera, se analiza por separado la parábola y la recta.

Para $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$. Entonces,
$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$

Utilizando la fórmula cuadrática se obtienen las raíces $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. Evaluando estos valores en la función tenemos $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$, $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$.

Para $y = 1, -1 \leq x \leq 1$. Entonces, $f(x, 1) = 0$. En este caso, se obtuvo una función constante al igual que el ejercicio anterior.

Por tanto, el valor máximo absoluto es $\frac{32}{27}$ y se presenta en el punto $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{9}\right)$ y el valor mínimo absoluto es 0 y se presenta en todos los puntos de la recta $y = 1$.

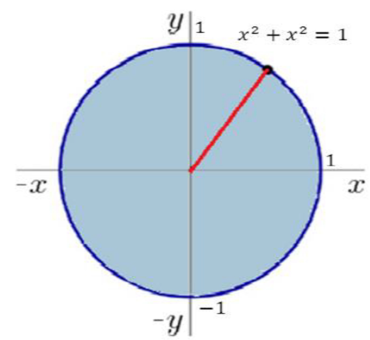
6. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $S = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución

Se encuentran los puntos críticos estacionarios resolviendo el sistema

$$f_x(x, y) = 6x^2 = 0, \quad f_y(x, y) = 4y^3 = 0$$

La solución es el punto $(0, 0)$, donde $f(0, 0) = 0$.



En este ejercicio se pueden analizar los puntos frontera, trabajando una sola curva (circunferencia) en donde se expresa a y en términos de x. Esto es $y^2 = 1 - x^2$. Entonces,

$$f(x) = 2x^3 + (1 - x^2)^2 \rightarrow f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Luego,

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x = 2x\,(2x^2 + 3x - 2) = 2x\,(2x - 1)(x + 2) = 0$$

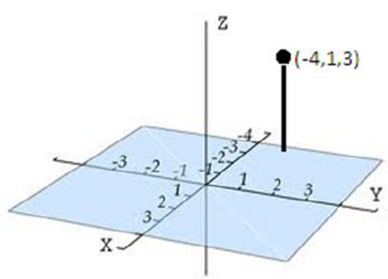
Por tanto, los valores críticos son: $\mathbf{0}, \frac{1}{2}, -\mathbf{2}$, en donde se descarta a -2 porque está fuera del intervalo [-1,1]. Evaluando, se tiene $f(0) = 1,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{16},\ f(-1) = -2,\ f(1) = 2$

Comparando los resultados, se observa que el valor máximo absoluto es 2 y ocurre en el punto (1,0) y el valor mínimo absoluto es –2 y ocurre en el punto (–1,0).

7. Encuentre el punto del plano $2x - y + z = 1$ que sea más cercano al punto (–4,1,3) y halle la distancia mínima.

Solución

En el problema, la función que se va a minimizar es la función distancia entre dos puntos. Entonces,
$d^2 = (x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$
y la ecuación que permite transformar esta función de tres a dos variables es la ecuación del plano $2x - y + z = 1$



Despejando a z de la ecuación del plano y sustituyendo en la función distancia, se construye una función de dos variables f. Es decir,

$$d^2\,(x, y, z) = f\,(x, y) = (x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (-2x + y - 2)^2$$

Para hallar los puntos críticos se resuelve el sistema de ecuaciones

(1) $f_x\,(x, y) = 2(x + 4) + 2(-2x + y - 2)(-2) = 10x - 4y + 16 = 0$

(2) $f_y\,(x, y) = 2(y - 1) + 2(-2x + y - 2) = -4x + 4y - 6 = 0$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene $\mathbf{6x + 10 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3}}$. Ahora, reemplazando el valor de x en cualquiera de las ecuaciones se encuentra que $\mathbf{y = -\frac{1}{6}}$. Entonces el punto crítico es $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{6}\right)$. Se debe demostrar que allí se presenta un valor mínimo. Por lo tanto, las derivadas parciales de orden dos son

$$f_{xx}\,(x, y) = 10,\ \ f_{yy}\,(x, y) = 4,\ \ f_{xy}\,(x, y) = -4a.$$

Obteniendo

$\mathbf{D = (10)\,(4) - (-4)^2 = 24 > 0}$ $\ y\ $ $\mathbf{f_{xx}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{6}\right) = 10 > 0}$, , luego $f\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{6}\right) = \frac{49}{6}$, es un valor mínimo relativo y absoluto.

Para determinar el punto del plano, falta hallar la componente en z, y se puede encontrar usando la ecuación del plano $z = -2x + y + 1$. Esto es, $z = -2\left(\frac{-5}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{25}{6}$

Por tanto, el punto es $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{25}{6}\right)$ y la distancia mínima es $\sqrt{\frac{49}{6}}$

8. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 100 y cuyo producto sea un máximo.

Solución

Si los números positivos son x, y y z, entonces la función a maximizar es $P(x, y, z) = xyz$, y la ecuación que relaciona a z en términos de x e y es $x + y + z = 100$. Despejando a la variable $z = 100 - x - y$, se obtiene la función producto

$$P\,(x, y, z) = f\,(x, y) = xy(100 - x - y) = 100xy - x^2 y - xy^2$$

Entonces,
$f_x\,(x, y) = 100y - 2xy - y^2 = y(100 - 2x - y) = 0$
$f_y\,(x, y) = 100x - x^2 - 2xy = x(100 - x - 2y) = 0$

Puesto que $x > 0, y > 0$, se tiene que

$$(1)\quad 100 - 2x - y = 0,\qquad (2)\quad 100 - x - 2y = 0$$

Para eliminar a y multiplicamos la ecuación (1) por -2 y se suma con la ecuación (2). Entonces, $-100 + 3x = 0 \rightarrow x = \frac{100}{3}$. Reemplazando en la ecuación (1) o (2) obtenemos que $y = \frac{100}{3}$, para hallar el valor de z se sustituyen los valores de x e y en la ecuación secundaria, obteniéndose que $z = \frac{100}{3}$. Como en el ejercicio anterior, se puede mostrar que en el punto crítico $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ se presenta un valor máximo relativo (absoluto).

Utilice multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción dada.

9. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

Solución

El gradiente de la función f y la restricción $g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$ son

$$\nabla f(x, y, z) = 2xi + 2yj + 2xk \quad \text{y} \quad \nabla g(x, y, z) = 4x^3\, i + 4y^3\, j + 4z^3\, k$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$(1) \quad 2x = 4\mu x^3 \rightarrow x = 2\mu x^3, \; (2) \quad 2y = 4\mu y^3 \rightarrow y = 2\mu y^3$$

$$(3) \quad 2z = 4\mu z^3 \rightarrow z = 2\mu z^3, \; (4) \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

Para hallar la solución se analizan tres casos:

i) Que las tres variables x, y, z sean diferentes de cero.
ii) Que dos de las tres variables sean diferentes de cero.
iii) Que una de las tres variables sea diferente de cero.

Veamos cada posibilidad. Supongamos que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, luego, de las tres primeras ecuaciones se obtiene $\mu = \frac{1}{2x^2}, \mu = \frac{1}{2y^2}, \mu = \frac{1}{2z^2}$, por tanto, $2x^2 = 2y^2 = 2z^2 \rightarrow x^2 = y^2 = z^2$. Reemplazando esta condición en la cuarta ecuación tenemos,

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \rightarrow 3x^4 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

De aquí se obtienen ocho puntos críticos, en donde la imagen de todos ellos es

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Supongamos que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$, luego de las dos primeras ecuaciones se obtiene que: $\mu = \frac{1}{2x^2} \rightarrow \mu = \frac{1}{2y^2} \rightarrow 2x^2 = 2y^2 \rightarrow x^2 = y^2$. Reemplazando en (4)

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \rightarrow 2x^4 = 1 \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

La imagen de los cuatro puntos críticos es

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Observe que en este caso hay otros ocho puntos críticos (cuando $x = 0$ o $y = 0$), pero la imagen también es $\sqrt{2}$.

Supongamos que $x \neq 0$, $y = 0$, $z = 0$, por tanto la cuarta ecuación se transforma

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Entonces, hay dos puntos críticos, en donde $f(\pm 1, 0, 0) = 1$. Al igual que en el caso anterior hay otros cuatro puntos críticos (cuando $y \neq 0$ o $z \neq 0$); pero la imagen de ellos también es 1.

Analizando los resultados se obtiene que el valor máximo absoluto es $\sqrt{3}$ y el valor mínimo absoluto es 1.

10. Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes, que pueda estar inscrita en el elipsoide $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$.

Solución

En el problema se pide maximizar la función $V(x, y, z) = xyz$ sujeta a la siguiente restricción $g(x, y, z) = 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36$.

Inicialmente se extrae el sistema de ecuaciones determinado por:
$\nabla V(x, y, z) = \mu \, \nabla g$ y $g(x, y, z) = 0$, donde
$\nabla V(x, y, z) = yz\, i + xz\, j + xy\, k$, $\nabla g(x, y, z) = 18x\, i + 72y\, j + 8z\, k$. Esto es,

$$(1)\ yz = 18\mu x \quad (2)\ xz = 72\mu y \quad (3)\ xy = 8\mu z$$
$$(4)\ 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

Ahora, multiplicando la ecuación (1) por la variable x y la ecuación (2) por la variable y, se igualan sus partes derechas. Esto es, $18\mu x^2 = 72\mu y^2 \rightarrow x^2 = 4y^2$.

Además, multiplicamos la ecuación (3) por la variable z e igualando a la ecuación (2) multiplicada por y, se obtiene $72\mu y^2 = 8\mu z^2 \rightarrow z^2 = 9y^2$.

Reemplazando las ecuaciones resultantes en (4)

$$9(4y^2) + 36y^2 + 4(9y^2) = 36 \rightarrow 108y^2 = 36 \rightarrow y^2 = \frac{1}{3},\ x^2 = \frac{4}{3},\ z^2 = 3$$

Considerando $x = \frac{2}{\sqrt{3}},\ y = \frac{1}{\sqrt{3}},\ z = \sqrt{3}$ (región en el primer octante) y multiplicando por ocho (octantes), el volumen máximo de la caja rectangular es

$$V = 8xyz = 8\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicios propuestos

Encuentre los valores máximo y mínimo relativos, y puntos de silla de la función dada.

1. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$

3. $f(x, y) = 1 + 2xy + x^2 - y^2$

4. $f(x, y) = xy - 2x - y$

5. $f(x, y) = e^x \cos y$

6. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

7. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

8. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

9. $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$

10. $f(x, y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$

11. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{y^2 - x^2}$

12. $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$

13. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1$

14. $f(x, y) = y^4 - 4y^3 + 2x^2 + 8xy$

15. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$

16. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad 1 \leq x \leq 7$

Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el conjunto S.

18. $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$, S es la región triangular cerrada con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 5)$

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16$, S es la región triangular cerrada con vértices $(0,0),(4,0),(0,8)$

20. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$, S es la región acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y el eje x.

21. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, S es la región triangular con vértices $(-1,1),(2,1),(-1,-2)$.

22. $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$, $S = \{(x,y): 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 5\}$.

23. $f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$, $S = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 4\}$.

24. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, S es el cuadrilátero cuyos vértices son $(-2,3),(2,3),(2,2),(-2,-2)$.

25. $f(x, y) = y^3 + x^2 - 3y$, S es la región limitada por la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

26. $f(x, y) = sen\, x + sen\, y$, S es la región acotada por el cuadrado con vértices en los puntos $(0,0),(\pi,0),(0,\pi),(\pi,\pi)$.

27. Encuentre la distancia más corta del punto $(2,-2,3)$ al plano $6x + 4y - 3z = 2$.

28. Encuentre los puntos de la superficie $z^2 = xy + 1$ que sean más cercanos al origen.

29. Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular situada en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

30. Encuentre el volumen de la mayor caja rectangular con bordes paralelos a los ejes, que pueda estar inscrita en el elipsoide $36x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$.

31. Una caja de cartón sin tapa debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones que hagan mínima la cantidad de cartón utilizado.

32. La base de una pecera con volumen dado V_0 está hecha de pizarra y, los lados, de vidrio. Si la pizarra cuesta 5 veces (por unidad de área) más que el vidrio, encuentre las dimensiones de la pecera que reduzca el mínimo costo de los materiales.

33. Encuentre el vector tridimensional de longitud g tal que la suma de sus componentes sea máxima.

34. Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia o beneficio P (en dólares) obtenido al producir x unidades de un reproductor de DVD y y unidades de un grabador de DVD se aproxima mediante el modelo

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es la ganancia?

35. Suponga que la temperatura T en la lámina circular $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ está dada por $T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$. Encuentre los puntos más calientes y más fríos de la lámina.

36. Una sonda espacial con la forma del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ entra a la atmósfera de la tierra y su superficie comienza a calentarse. Después de una hora, la temperatura en cada punto sobre la superficie de la sonda está dada: $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Determine el punto más caliente sobre la superficie de la sonda.

37. La función de producción de un fabricante de dulces es $f(x,y) = 4x + xy + 2y$, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Suponer que la cantidad total disponible para trabajo y capital es de $\$2000$, y que las unidades de trabajo y capital cuestan $\$20$ y $\$4$, respectivamente. Hallar el nivel de producción máximo de este fabricante.

38. Una empresa fabrica dos tipos de zapatos tenis: tenis para correr y tenis para baloncesto. El ingreso total de x unidades de tenis para correr y y unidades de tenis para baloncesto es

$$I(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

Donde x y y están en miles de unidades. Hallar x y y que maximizan el ingreso.

39. Mostrar que la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r es un cubo.

Utilice multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de la función, sujeto a la restricción dada.

40. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad x^2 + y^2 = 1$

41. $f(x,y) = x^2 y$, $\quad x^2 + 2y^2 = 6$

42. $f(x,y,z) = 2x + 6y + 10z$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

43. $f(x,y,z) = xyz$, $\quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

44. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

45. $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Utilice multiplicadores de Lagrange para dar una solución alternativa al ejercicio indicado en esta sección.

46. Ejercicio 27. **47.** Ejercicio 28.

48. Ejercicio 29. **49.** Ejercicio 30.

50. Ejercicio 31. **51.** Ejercicio 32.

52. Ejercicio 33. **53.** Ejercicio 34.

54. Ejercicio 35. **55.** Ejercicio 36.

56. Ejercicio 37. **57.** Ejercicio 38.

58. Ejercicio 39.

Capítulo 8

Integrales múltiples

Sección 8.1. Integrales dobles

De los procesos principales en cálculo están la derivación y la integración. En el capítulo anterior trabajamos el concepto de derivación en el espacio n-dimensional (particularmente en dos y tres dimensiones); por tanto, nuestro siguiente interés es considerar la integración en un espacio de dimensión n (en dos y tres dimensiones)

Integrales dobles sobre regiones rectangulares

Iniciemos recordando el concepto de la integral definida. Sea $f(x)$ una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$ en n-subintervalos de longitud $x_i = x_i - x_{i-1}$. Si $\bar{x}_i$ es un valor arbitrario de $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

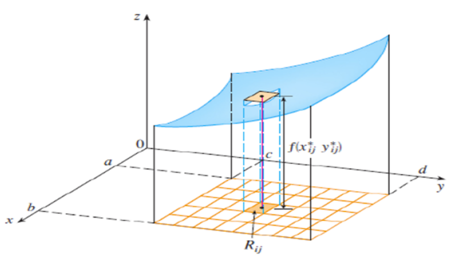
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

Siempre y cuando el límite exista.

Con un proceso similar definimos la integral de una función de dos variables. Sea R un rectángulo con los lados paralelos a los ejes coordenados, es decir, sea

$$R = \{(x, y): a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$$

Sea P una partición del rectángulo R en n-subrectángulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Sean x_i, y_i las longitudes de los lados de R_i, con área $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Si $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ es un punto arbitrario de R_i, entonces formamos la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta A_i$



Esta suma representa el volumen de las n-cajas (si $f(x, y) \ge 0$). Si realizamos la partición cada vez más fina, llegamos al concepto de integral doble.

Definición

Sea f una función de dos variables definida sobre un rectángulo cerrado R con los lados paralelos a los ejes coordenados. Si existe

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta A_i$$

Se dice que f es integrable en R. Además, $\iint_R f(x, y)\ dA$, denominada "integral doble de f sobre R" está dada

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta A_i$$

Observaciones

$|P|$= Norma de la partición, es la máxima diagonal de cualquiera de los subrectángulos de la partición. Además si $f(x, y) \ge 0$ para todo $(x, y) \in R$, entonces el volumen del sólido bajo la superficie dada por $z = f(x, y)$ y arriba del rectángulo R es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

El siguiente resultado presenta las condiciones necesarias y suficientes para que una función f de dos variables sea integrable sobre R.

Teorema de integrabilidad

Si f es acotada sobre R y es continua en esa región, excepto posiblemente en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R. En particular, si f es continua en R, entonces f es integrable en R.

Observación

Puesto que el concepto de integral doble es la extensión del concepto de la integral definida entonces, hereda la mayoría de las propiedades de la integral simple

i) Propiedad de linealidad

$$\iint_R k\, f(x,y)\, dA = k \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$$

ii) Propiedad aditiva sobre rectángulos

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

Donde $R = R_1 \cup R_2$, R_1 y R_2 no se superponen.

iii) Propiedad de comparación

Si $f(x,y) \le g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\, dA \le \iint_R g(x,y)\, dA$$

Todas estas propiedades se cumplen en conjuntos aún más generales que los rectángulos.

Evaluación de integrales dobles

Recuérdese que evaluar una integral definida utilizando la definición es difícil, sin embargo, el teorema fundamental del cálculo proporciona un método más fácil. La evaluación de una integral doble a partir de la definición es incluso más difícil, pero veremos la forma de expresar una integral doble como una integral "iterada", que se puede evaluar si se calculan dos integrales simples.

Sea f una función de dos variables continua sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. La notación $\int_c^d f(x,y)dy$ nos indica que integramos a f con respecto a y, considerando la variable x como constante; por tanto, el resultado es una expresión en términos de x $(g(x))$. Si ahora integramos la función $g(x)$ con respecto a x, desde a hasta b, obtenemos

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx$$

La integral del lado derecho se denomina "integral iterada". Entonces,

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx$$

Realizando un análisis similar e intercambiando el orden de las variables, se obtiene el otro tipo de "integral iterada". Esto es,

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy$$

EJEMPLOS

Evalúe las integrales iteradas

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 x \operatorname{sen} xy\, dy\, dx$

Solución

Inicialmente se evalúa la integral

$$\int_0^1 x \operatorname{sen} xy\, dy = \int_0^x \operatorname{sen} u\, du = -\cos u \Big|_0^x = -\cos x + 1$$

Donde $u = xy \Longrightarrow du = xdy$ (considerando a x constante). Luego,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 x\,sen\,xy\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos\,x)\,dx = x - sen\,x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy$

Solución

De forma similar, se evalúa primero la integral

$$\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\,dx = \int_y^{1+y} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_y^{1+y} = \frac{2}{3}\left[(1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right]$$

Donde $u = x^2 + y \Rightarrow du = 2xdx$ (considerando a y constante). Luego,

$$\int_0^3\int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int_0^3\left[(1+y)^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}\right]dy = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^3$$

$$= \frac{4}{15}\left[\left(4^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}\right) - \left(1^{\frac{5}{2}} - 0\right)\right] = \frac{4}{15}\left[32 - \sqrt{243} - 1\right] = \frac{4}{15}\left[31 - 9\sqrt{3}\right]$$

Observación

Para evaluar una integral doble no es necesario resolverla utilizando los dos tipos de integrales iteradas (órdenes de integración), puesto que el resultado es el mismo. Por tanto, al evaluar una integral doble, es aconsejable analizar la función f para decidir qué orden de integración es más aconsejable.

EJEMPLO

Evalúe sobre R la integral doble

$$\iint_R xe^{xy}\,dA, \qquad R = [0,1]\times[0,1]$$

Solución

Analizando la función $f(x, y) = xe^{xy}$ se observa que si se integra inicialmente con respecto a x, se debe hacer utilizando integración por partes, mientras que si se integra con respecto a y, es inmediata. Por tanto, es más conveniente integrar en y, y luego en x. Esto es,

$$\iint_R xe^{xy}\,dA = \int_0^1\int_0^1 xe^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 x\frac{e^{xy}}{x}\Big|_0^1\,dx = \int_0^1 e^{xy}\Big|_0^1\,dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx$$

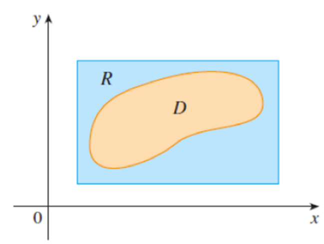
$$\iint_R xe^{xy}\,dA = e^x - x\Big|_0^1 = (e-1) - (1-0) = e - 2$$

Integrales dobles sobre regiones generales

En la integral definida, la región sobre la que se integra es siempre un intervalo, pero para las integrales dobles debemos ser capaces de integrar una función f de dos variables no solo sobre un rectángulo sino también sobre regiones D que tengan una forma más general.

Supongamos que D es una región acotada, lo cual significa que D puede encerrarse en una región rectangular R. Entonces, definimos una nueva función F.

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & Si\ (x,y) \in D \\ 0 & Si\ (x,y) \in R\ pero\ (x,y) \notin D \end{cases}$$



Si la integral doble de F sobre R existe, entonces se define la integral doble de f sobre D como

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

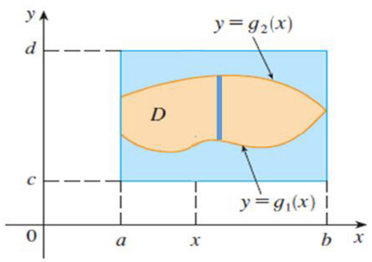
Los conjuntos con fronteras curvas pueden ser muy complicados. Para nuestro interés, nos limitaremos a considerar conjuntos denominados x-simple y y-simple (y las uniones finitas de tales conjuntos).

Un conjunto D es "y-simple" si hay funciones continuas $g_1(x)$, $g_2(x)$ en $[a,b]$ tal que

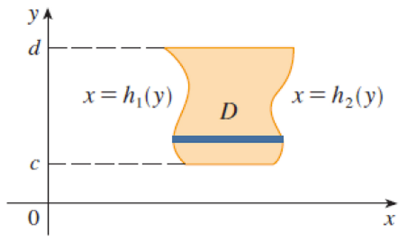
$$D = \{(x, y) : g_1(x) \le y \le g_2(x),\ a \le x \le b\}$$

Un conjunto D es "x-simple" si hay funciones continuas $h_1(y)$, $h_2(y)$ en $[c, d]$ tal que

$$D = \{(x, y) : h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}$$



Conjunto "y-simple"



Conjunto "x-simple"

Por tanto, para evaluar una integral doble de f sobre una región y-simple, se tiene

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)dy\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Puesto que $F(x,y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque (x, y) se encuentra fuera de D.

En forma similar, para evaluar una integral doble de f sobre una región x-simple se tiene

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b F(x,y)dx\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Puesto que $F(x, y) = 0$ si $x < h_1(y)$ o $x > h_2(y)$ porque (x, y) se encuentra fuera de D.

EJEMPLOS

1. Evalúe la integral iterada

$$\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}\,dx\,dy$$

Solución

Inicialmente, se evalúa la integral

$$\int_{-y}^{2y} xe^{y^3}dx = \frac{x^2}{2}e^{y^3}\Big|_{-y}^{2y} = \frac{1}{2}e^{y^3}((2y)^2 - (-y)^2) = \frac{3}{2}y^2e^{y^3}$$

Donde se considera la función e^{y^3} como una constante.

Luego,

$$\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}\,dx\,dy = \int_1^3 \frac{3}{2}y^2e^{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3 3y^2e^{y^3}\,dy$$

Si $u = y^3 \Rightarrow du = 3y^2\,dy$. Por tanto,

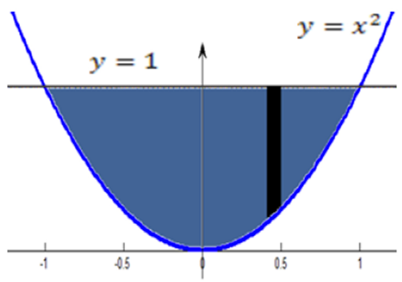
$$\int_1^3 \int_{-y}^{2y} xe^{y^3}dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^{27} e^u du = \frac{1}{2}e^u\Big|_1^{27} = \frac{1}{2}(e^{27} - e)$$

2. Evalúe la integral doble

$$\iint_D xy\,dA$$

D es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

Solución



Analizando la gráfica de la región acotada por las ecuaciones dadas, obsérvese que se puede considerar a D como una región "y-simple" o x-simple. Se evalúa la integral considerando a D como una región "y-simple".

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} xy\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x-x^5)\,dx$$

Luego,

$$\iint_D xy\,dA = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

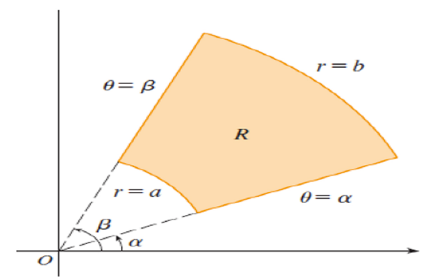
Observación

Para evaluar una integral doble, es aconsejable, inicialmente, hacer un análisis de la función f para determinar si es más fácil integrar primero en x o en y. Además, hay que observar la región D para escoger cuál orden de integración es más conveniente.

Integrales dobles en coordenadas polares

Existen ciertas curvas del plano, tales como circunferencias, cardioides y rosas, que son más fáciles de escribir en términos de coordenadas polares que en coordenadas cartesianas. Por tanto, para evaluar una integral doble $\iint_R f(x,y)\,dA$, donde R está encerrada por dichas curvas, será más fácil usar coordenadas polares.

Considérese una región plana R determinada por las circunferencias $r = a$, $r = b$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, la cual se denomina "rectángulo polar".

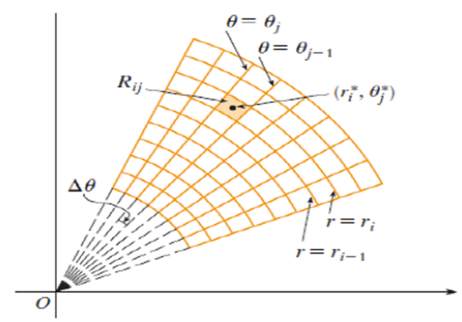


$$R = \{(r,\theta) : a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\},\ \text{donde } a \ge 0,\ \beta - \alpha \le 2\pi.$$

Sea $z = f(x, y)$ una función continua sobre R, por lo tanto, f es integrable sobre R. Expresando la función f en coordenadas polares se tiene,

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta) = F(r,\theta)$$

Si P es una partición de R en N-subrectángulos polares $R_1, R_2, \ldots, R_N$, siendo r_i y θ_i las dimensiones de R_i, de aquí se puede demostrar (usando el hecho de que el área de un sector circular con radio r y ángulo central θ está dado por $\frac{1}{2}r^2\theta$), que el área del rectángulo polar R_i es $A_i = \bar{r}\Delta r_i\Delta\theta_i$ donde $\bar{r}$ es el radio promedio de R_i.



$$\Delta A_i = \left(\tfrac{1}{2}b^2\Delta\theta\right) - \left(\tfrac{1}{2}a^2\Delta\theta\right)$$

$$\Delta A_i = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\Delta\theta$$

$$\Delta A_i = \frac{(b+a)}{2}(b-a)\Delta\theta$$

$$\Delta A_i = \bar{r}\Delta r\Delta\theta$$

Usando un procedimiento similar al que se utilizó en la integral doble $\iint_D f(x,y)\,dA$

D es un rectángulo o una región "x-simple" o "y-simple", se obtiene

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)r\,drd\theta$$

R es un rectángulo polar o una región denominada "r-simple" o "θ-simple".

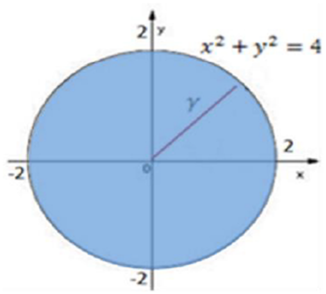
EJEMPLO

Evalúe la integral doble usando coordenadas polares.

1. $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$

R es la región encerrada por $x^2 + y^2 = 4$

Solución



En principio se dibuja la región R para extraer los límites del radio r y el ángulo θ.

Si $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$, entonces $x^2 + y^2 = r^2$, donde el radio r se mide desde el origen hasta la circunferencia. Es decir, el radio varía entre $r = 0$ y $r = 2$. El ángulo θ oscila entre 0 y 2π. Luego,

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2}r\,dr\,d\theta$$

Ahora, se evalúa la integral simple interna usando sustitución simple. Esto es,

Si $u = r^2 \Rightarrow du = 2rdr$. Entonces,

$$\int_0^2 e^{r^2}r\,dr = \int_0^4 e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-1)$$

Por tanto,

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\left(\frac{e^4-1}{2}\right)d\theta = \left(\frac{e^4-1}{2}\right)\theta\Big|_0^{2\pi} = \left(\frac{e^4-1}{2}\right)2\pi = (e^4-1)\pi$$

Ejercicios complementarios

Calcule la integral iterada

1. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} \, dy \, dx$

Solución

Resolviendo la integral interna en y, considerando a x como constante, se obtiene

$$\int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy = xe^x \ln y \Big|_1^2 = xe^x(\ln 2 - \ln 1) = (\ln 2)xe^x$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy \, dx = \int_0^1 (\ln 2)xe^x \, dx = \ln 2 \int_0^1 xe^x \, dx$$

Para evaluar la integral externa se utiliza integración por partes. Esto es, sean

$$u = x \Rightarrow du = dx; \;\; dv = e^x \, dx \Rightarrow v = e^x.$$

Luego,

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy \, dx = \ln 2 \int_0^1 xe^x \, dx = \ln 2 \left(xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \right) = \ln 2 \left(xe^x - e^x \Big|_0^1 \right)$$

$$= \ln 2 \left((1e^1 - e^1) - (0e^0 - e^0) \right) = \ln 2 \, (0 + 1) = \ln 2$$

2. $\int_0^2 \int_0^\pi r \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \, dr$

Solución

Se evalúa la integral interna en θ, considerando a r constante,

$$\int_0^\pi r \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta = r \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} r \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2} r \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^\pi \right)$$

$$= \frac{1}{2} r \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 0 \right) \right) = \frac{1}{2} r (\pi - 0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{2} r$$

Por tanto,

$$\int_0^2 \int_0^\pi r \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \, dr = \int_0^2 \frac{\pi}{2} r \, dr = \frac{\pi}{4} r^2 \Big|_0^2 = \pi - 0 = \pi$$

Evalúe la integral doble de f definida en el rectángulo R

3. $\iint_R \frac{x}{1 + xy} dA, \quad R = [0,1] \times [0,1]$

Solución

Analizando la función es conveniente integrar primero en y y luego en x. Es decir,

$$\iint_R \frac{x}{1 + xy} dA = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1 + xy} dy \, dx$$

Usando un procedimiento similar, se integra en y considerando a x constante

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1 + xy} dy \, dx = \int_0^1 x \frac{\ln(1 + xy)}{x} \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \ln(1 + xy) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 (\ln(1 + x) - \ln 1) \, dx$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1 + xy} dy \, dx = \int_0^1 \ln(1 + x) \, dx$$

Utilizando integración por partes tenemos que

$$u = \ln(1 + x) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{1 + x} dx; \quad dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$$

Entonces,

$$\iint_R \frac{x}{1+xy}\,dA = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

Realizando la división,

$$= x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 + \ln(1+x)\Big|_0^1 - x\Big|_0^1$$

$$= (x+1)\ln(1+x) - x\Big|_0^1 = (2\ln 2 - 1) - (1\ln 1 - 0) = 2\ln 2 - 1$$

4. $\displaystyle\iint_R xye^{x^2y}\,dA, \qquad R = [0,1]\times[0,2]$

Solución

En esta integral doble es conveniente integrar primero en x y luego en y

$$\iint_R xye^{x^2y}\,dA = \int_0^2\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx\,dy$$

Utilizando sustitución simple para evaluar la integral en x, se tiene

Sea $u = x^2y \Rightarrow du = 2xydx$. Entonces,

$$\int_0^2\int_0^1 xye^{x^2y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^y e^u\,du\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 e^u\Big|_0^y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^y - 1)\,dy$$

Por tanto,

$$\iint_R xye^{x^2y}\,dA = \frac{1}{2}\left(e^y - y\Big|_0^2\right) = \frac{1}{2}\left((e^2-2)-(e^0-0)\right) = \frac{e^2-3}{2}$$

5. $\displaystyle\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dA, \qquad R = \{(x,y)\colon\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1\}$

Solución

Para esta integral doble se puede utilizar cualquiera de los dos órdenes de integración (la integral es inmediata). Por tanto,

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dA = \int_0^1\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x+\frac{1}{3}x^3}{1+y^2}\Big|_0^1\,dy = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{3}}{1+y^2}\,dy = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dA = \frac{4}{3}\tan^{-1} y\Big|_0^1 = \frac{4}{3}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0) = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{3}$$

Evalúe la integral doble de f definida sobre la región D.

6. $\displaystyle\iint_D y^2e^{xy}\,dA, \quad D = \{(x,y)\colon\ 0\le y\le 4, 0\le x\le y\}$

Solución

Cuando la región donde se define la función f no es rectangular, es importante tener en cuenta la región D al momento de decidir qué orden de integración va a elegir. En este caso, se observa que la función que se va a integrar es conveniente evaluarla en x (es inmediata) y no en y. Además, como está definida la región, ya se tienen los límites de integración. Entonces,

$$\iint_D y^2e^{xy}\,dA = \int_0^4\int_0^y y^2e^{xy}\,dx\,dy$$

Usando sustitución simple:

$$\int_0^4\int_0^y y^2e^{xy}\,dx\,dy=\int_0^4 y^2\frac{e^{xy}}{y}\Big|_0^y dy=\int_0^4 ye^{xy}\Big|_0^y dy=\int_0^4 y(e^{y^2}-e^0)\,dy$$

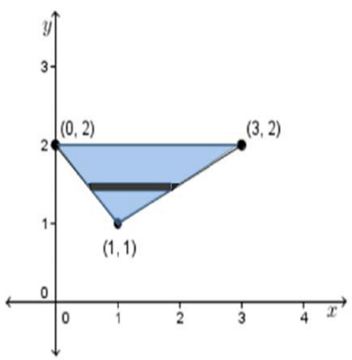
$$=\int_0^4(ye^{y^2}-y)\,dy=\int_0^4 ye^{y^2}dy-\int_0^4 y\,dy=\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4=\frac{1}{2}e^{16}-\frac{17}{2}$$

7. $\iint_D y^3\,dA$

D es la región triangular con vértices $(0{,}2)$, $(1{,}1)$ y $(3{,}2)$

Solución

Si se utiliza el orden de integración $dA = dydx$, la región D se divide en dos, porque tiene como límite inferior dos curvas diferentes. Mientras que, con el orden de integración $dA = dxdy$ se construye una sola integral iterada. Inicialmente se determinan las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos $(0{,}2),(1{,}1)$ y $(1{,}1),(3{,}2)$.



Para la recta que pasa por los puntos $(0{,}2)$ y $(1{,}1)$ su ecuación está determinada por

$$y-1=-1(x-1)\rightarrow x=-y+2$$

Para la recta que pasa por los puntos $(1{,}1)$ y $(3{,}2)$ se tiene

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\rightarrow x=2y-1$$

Entonces,

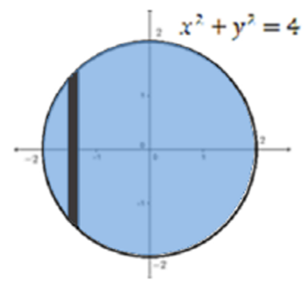
$$\iint_D y^3\,dA=\int_1^2\int_{-y+2}^{2y-1}y^3\,dx\,dy=\int_1^2 y^3x\Big|_{-y+2}^{2y-1}dy=\int_1^2 y^3[(2y-1)-(-y+2)]\,dy$$

$$=\int_1^2 y^3(3y-3)\,dy=3\int_1^2(y^4-y^3)\,dy=\frac{3}{5}y^5-\frac{3}{4}y^4\Big|_1^2=\frac{147}{20}$$

8. $\iint_D (2x-y)\,dA$

D está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2.

Solución



Analizando la función y la región donde está definida comprendemos que el grado de dificultad en los dos órdenes de integración es igual.

Considérese el orden de integración $dA = dy\,dx$, donde

$$-\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\quad -2\le x\le 2.$$

Entonces,

$$\iint_D(2x-y)\,dA=\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(2x-y)\,dy\,dx=\int_{-2}^2\left(2xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\int_{-2}^2\left[\left(2x\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}(4-x^2)\right)-\left(-2x\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{2}(4-x^2)\right)\right]dx$$

$$=\int_{-2}^2\left(4x\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

Utilizando sustitución simple obtenemos: si $u = 4 - x^2$, entonces $du = -2x\,dx$. Por tanto,

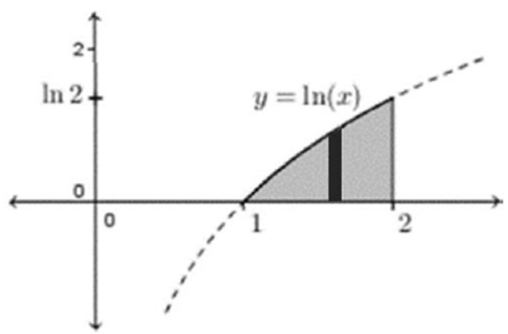
$$\iint_D (2x - y)\, dA = \int_{-2}^{2} \left(4x\sqrt{4 - x^2}\right) dx = -2\int_0^0 u^{1/2}\, du = 0$$

9. Bosqueje la región donde se define la función y cambie el orden de integración de

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$$

Solución

Los límites para x e y en la región son: $0 \leq y \leq \ln x,\ 1 \leq x \leq 2$. Al cambiar el orden de integración los límites son: $e^y \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \ln 2$



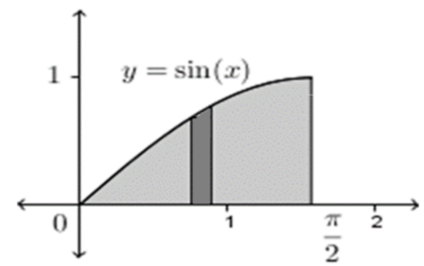
Por tanto,

$$\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} f(x, y)\, dx\, dy$$

10. Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración de

$$\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$$

Solución



Se realiza la gráfica de la región D con límites $\operatorname{arcsen} y \leq x \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq y \leq 1$.

Al cambiar el orden de integración, los límites para x e y son:
$0 \leq y \leq \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi/2$.

Entonces,

$$\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{sen} x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, y \Big|_0^{\operatorname{sen} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} \cos x \operatorname{sen} x\, dx$$

Usando sustitución simple se tiene:
si $u = 1 + \cos^2 x,\ du = -2 \cos x \operatorname{sen} x\, dx$.

Entonces,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} \cos x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2}\int_2^1 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\, du = \frac{1}{2}\frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\sqrt{8} - 1)$$

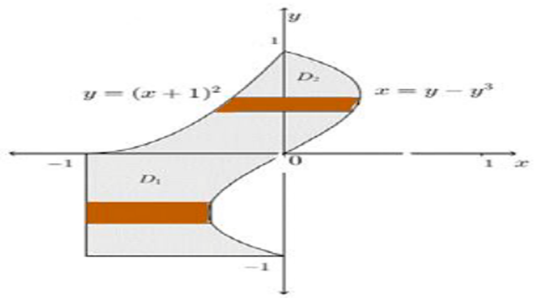
11. Exprese a D como una unión de regiones y-simple o x-simple y evalúe la integral

$$\iint_D xy\, dA$$

Solución

Consideremos a D como la unión de dos regiones D_1 y D_2 de la forma x-simple. Los límites para las regiones D_1 y D_2 son

$D_1: -1 \leq x \leq y - y^3, \quad -1 \leq y \leq 0 \quad D_2: \sqrt{y} - 1 \leq x \leq y - y^3, \quad 0 \leq y \leq 1$



Entonces,

$$\iint_D xy\,dA = \iint_{D_1} xy\,dA + \iint_{D_2} xy\,dA = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{y-y^3} xy\,dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} xy\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x^2y \Big|_{-1}^{y-y^3} dy + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2y \Big|_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} [(y^2 - 2y^4 + y^6) - (-1)^2]y\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left[(y^2 - 2y^4 + y^6) - \left(y - 2y^{1/2} + 1\right)\right] y\,dy$$

Luego,

$$\iint_D xy\,dA = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (y^7 - 2y^5 + y^3 - y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left(y^7 - 2y^5 + y^3 - y^2 + 2y^{3/2} - y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}y^8 - \frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{-1}^{0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}y^8 - \frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{4}{5}y^{5/2} - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{0}^{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{15}\right) = \frac{7}{30}$$

12. Al evaluar una integral doble sobre una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas, como sigue:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Bosqueje la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

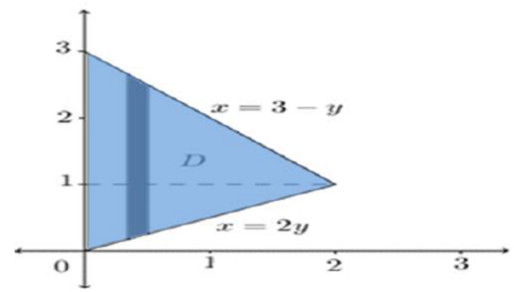
Solución

Los límites para las variables de la primera región son:

$$0 \leq x \leq 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

De la segunda región son:

$$0 \leq x \leq 3 - y, \; 1 \leq y \leq 3$$



Por tanto, cambiando el orden de integración se tiene

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

13. Evalúe la integral doble

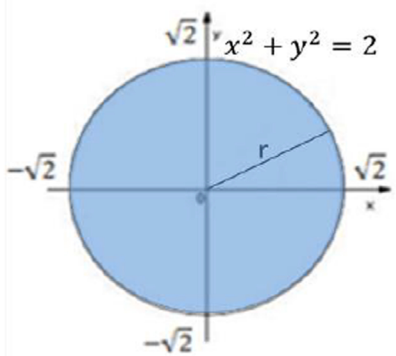
$$\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4)\,dA, \quad D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Sugerencia: utilice el hecho de que D es simétrica con respecto a ambos ejes.

Solución

Aplicando la propiedad aditiva obtenemos,

$$\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4)\, dA = \iint_D x^2 \tan x\, dA + \iint_D y^3\, dA + 4\iint_D dA$$



El resultado de las dos primeras integrales dobles es cero, porque $x^2 \tan x$ es una función impar y D es simétrica con respecto al eje y. De la misma manera y^3 también es una función impar y D es simétrica con respecto al eje x. Por tanto,

$$\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4)\, dA = 4\iint_D dA = 8\pi$$

Evalúe la integral iterada

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

Solución

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Utilizando sustitución simple, si $u = \cos\theta$, entonces $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$.

Por tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{3}\int_1^0 u^3(-du) = \frac{1}{3}\int_0^1 u^3\, du = \frac{1}{12}u^4\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

Solución

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2}\operatorname{sen}\theta \Big|_0^{1-\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Usando sustitución simple, si $u = \cos\theta$, entonces $du = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$.

Entonces,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_1^{-1}(1 - 2u + u^2)(-du) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - 2u + u^2)\, du$$

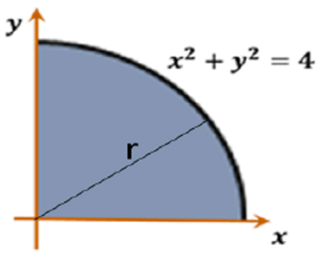
$$= \frac{1}{2}\left(u - u^2 + \frac{1}{3}u^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - 1 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Evalúe, usando coordenadas polares. Dibuje primero la región de integración.

16. $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$

D es la región en el primer cuadrante encerrada por $x^2 + y^2 = 4$.

Solución



La ecuación $x^2 + y^2 = 4$, en coordenadas polares equivale a $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$. Luego, observando la región tenemos:

$$0 \le r \le 2, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces,

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 e^{r^2} r\, dr\, d\theta$$

Por sustitución simple obtenemos, si $u = r^2$, entonces $du = 2r\, dr$. Por tanto,

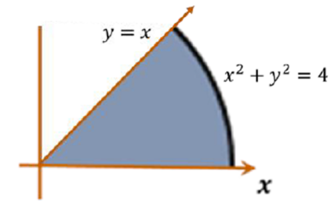
$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 e^u \frac{du}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \Big|_0^4 d\theta = \frac{e^4-1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{e^4-1}{2}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA = (e^4-1)\frac{\pi}{4}$$

17. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{4+x^2+y^2} dA$

D es el sector del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 4$ entre $y = 0$ y $y = x$.

Solución



En el dibujo de la región se observa que $0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Luego,

$$\iint_D \frac{1}{4+x^2+y^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \frac{1}{4+r^2} r\, dr\, d\theta$$

Empleando sustitución simple se tiene: si $u = 4 + r^2$, $du = 2r\, dr$. Entonces,

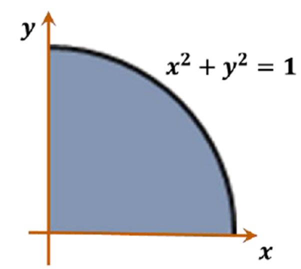
$$\iint_D \frac{1}{4+x^2+y^2} dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_4^8 \frac{1}{u}\frac{du}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln u \Big|_4^8 d\theta = \frac{\ln 8 - \ln 4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\ln 2}{2}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\iint_D \frac{1}{4+x^2+y^2} dA = \frac{(\ln 2)\pi}{8}$$

18. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} sen(x^2+y^2)\, dx\, dy$

Solución

Para dibujar la región obsérvese que $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$. Por tanto, la región es la cuarta parte del círculo $x^2 + y^2 = 1$ que se encuentra en el primer cuadrante.



Los límites para el radio r y el ángulo θ son $0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Entonces,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} sen(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sen(r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

Por sustitución simple, si $u = r^2$, entonces $du = 2rdr$. Luego,

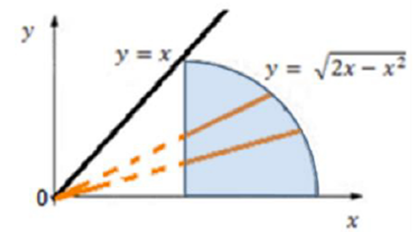
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sen(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sen\,u \frac{du}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos u)\Big|_0^1 d\theta = \frac{1-\cos 1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= \frac{(1-\cos 1)\pi}{4}$$

19. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx$

Solución

Al igual que el ejercicio anterior, los límites para x e y son: $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$, $1 \le x \le 2$, donde $y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ representa una circunferencia con centro en $(1,0)$ y radio 1, pero se considera solamente la región donde $y \ge 0$, $1 \le x \le 2$.



Transformamos a polares la circunferencia dada por $y = \sqrt{2x-x^2}$, y la recta $x = 1$

a) Si $y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, entonces $r = 2\cos\theta$

b) Si $x = 1 \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta} = sec\,\theta$

Por tanto, los límites para r y θ son: $sec\,\theta \le r \le 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. Entonces,

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)^{-1/2}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{sec\,\theta}^{2\cos\theta} (r^2)^{-\frac{1}{2}}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{sec\,\theta}^{2\cos\theta} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos\theta - sec\,\theta)\,d\theta = 2\,sen\,\theta - \ln|sec\,\theta + \tan\theta|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(2\,sen\frac{\pi}{4} - \ln\left|sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right|\right) - (2\,sen\,0 - \ln|sec\,0 + \tan 0|)$$

$$= 2\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln|\sqrt{2}+1| - 0 + \ln|1| = \sqrt{2} - \ln|\sqrt{2}+1|$$

20. Cambie a coordenadas cartesianas y evalúe la integral iterada

$$\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} \int_0^{-5\,sec\,\theta} r^3\,sen^2\,\theta\,dr\,d\theta$$

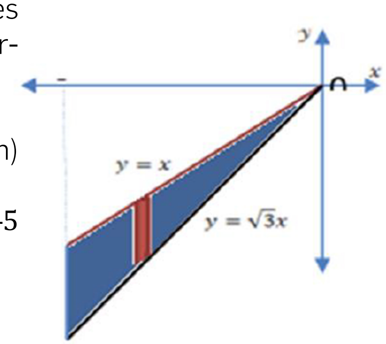
Solución

Se transforman las ecuaciones polares $r = 0$ y $r = -5\,sec\,\theta$ a coordenadas cartesianas.

a) Si $r = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ (origen)

b) Si $r = -5\,sec\,\theta \Rightarrow r = \frac{-5}{\cos\theta} \Rightarrow r\cos\theta = -5$

Obteniéndose $x = -5$.



De otro lado, los rayos $\theta = \frac{5\pi}{4}$ y $\theta = \frac{4\pi}{3}$ están sobre las rectas $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$.

Para evaluar la integral doble en coordenadas cartesianas es más adecuado utilizar el orden de integración $dA = dy\,dx$.

Por tanto,

$$\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}}\int_0^{-5\sec\theta} r^3\,sen^2\,\theta\,dr\,d\theta = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}}\int_0^{-5\sec\theta} r^2\,sen^2\,\theta\,r dr\,d\theta = \int_{-5}^{0}\int_{\sqrt{3}x}^{x} y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_{-5}^{0} \frac{y^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{3}x}^{x} dx = \int_{-5}^{0}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3\sqrt{3}x^3}{3}\right)dx = \frac{1-3\sqrt{3}}{3}\int_{-5}^{0} x^3\,dx = \frac{1-3\sqrt{3}}{3}\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-5}^{0}$$

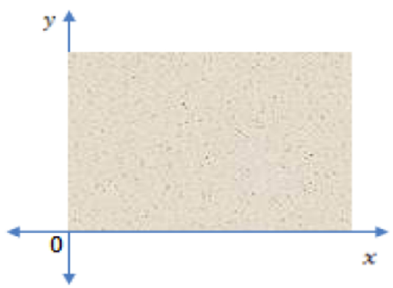
$$= \frac{1-3\sqrt{3}}{12}(0-625) = \frac{625(3\sqrt{3}-1)}{12}$$

21. Demuestre

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dy\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Solución

La región es todo el primer cuadrante, por tanto, se tiene que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ y $r \ge 0$.



Entonces,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr\,d\theta$$

Resolviendo inicialmente la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2}dr = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{r}{(1+r^2)^2}dr = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{1+r^2}\Bigg|_0^b\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{1+b^2}+1\right) = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^2} r dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{2}\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicios propuestos

Calcule la integral iterada.

1. $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y})\, dxdy$

2. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x + y)\, dydx$

3. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dydx$

4. $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2}\, dxdy$

5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\, dxdy$

6. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\, dydx$

7. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dxdy$

8. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)\, dydx$

9. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, drd\theta$

10. $\int_0^1 \int_0^u \sqrt{1 - u^2}\, dwdu$

11. $\int_0^{2\pi} \int_0^6 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, drd\theta$

12. $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, drd\theta$

13. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r drd\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1-\cos\theta} \operatorname{sen}\theta\, rdrd\theta$

15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} rdrd\theta$

16. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, drd\theta$

Dibujar la región D y evaluar la integral iterada.

17. $\int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y)\, dydx$

18. $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y\, dydx$

19. $\int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y)\, dxdy$

20. $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} x^2 y^2\, dxdy$

21. $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y)\, dydx$

22. $\int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y}\, dxdy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y}\, dxdy$

Evalúe la integral iterada impropia.

23. $\int_1^{\infty} \int_0^{1/x} y\, dydx$

24. $\int_0^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + y^2}\, dydx$

25. $\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{xy} dxdy$

26. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$

Calcule la integral doble de f sobre la región rectangular R.

27. $\iint_R xye^y\, dA$, donde $R = \{(x, y)\colon\ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

28. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$, donde $R = \{(x, y)\colon\ 0 \le x \le 1, -3 \le y \le 3\}$

29. $\iint_R \frac{1}{(x+1)(y+1)}dA$, donde $R = \{(x,y):\ 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$

30. $\iint_R \frac{1}{x+y}\ dA$, donde $R = [1,2]\ \text{x}\ [0,1]$

31. $\iint_R x\,\text{sen}(x+y)dA$, donde $R = \left[0,\frac{\pi}{6}\right] x \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

32. $\iint_R (1 - ye^{xy})\ dA$, donde R= $[0,2]\ \text{x}\ [0,3]$

33. $\iint_R \frac{x}{x^2+y^2}\ dA$, donde $R = [1,2]\ \text{x}\ [0,1]$

Haga una integral para cada orden de integración y utilice el orden más adecuado para evaluar la integral en la región D.

34. $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\ dA$ — D está limitada por $y = x, y = 2x, x = 2$

35. $\iint_D -2y\ln x\ \ dA$ — D es la región acotada por $y = 4 - x^2, y = 4 - x$

36. $\iint_D y\ dA$ — D es el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, $3x - 4y = 0, y = 0$

37. $\iint_D (x^2+y^2)\ dA$ — D es el semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$

Evalúe la integral doble

38. $\iint_D \frac{4y}{x^2+2}dA$ — $D = \{(x,y):\ 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x\}$

39. $\iint_D e^{y^2}dA$ — $D = \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$

40. $\iint_D e^{x/y}\ dA$ — $D = \{(x,y): 1 \le y \le 2, y \le x \le y^3\}$

41. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\ dA$ — $D = \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$

42. $\iint_D x\cos y\ dA$ — D está limitada por $y = 0, y = x^2$ y $x = 1$

43. $\iint_D (y^2 - x)dA$ — D está limitada por $x = y$, $x = 3 - 2y$

44. $\iint_D x^3 dA$ — D es la región triangular con vértices $(0,2), (1,1), (3,2)$

45. $\iint_D (2x - y)\ dA$ — D está limitada por el círculo con centro en el origen y radio 2

46. $\iint_D ye^x dA$ — D es la región triangular con vértices $(0,0), (2,4), (6,0)$

47. $\iint\limits_R \sqrt{|y-x^2|}\, dA$ $\quad R = [-1, 1] \times [0,2]$

48. $\iint\limits_D e^{x+y} dA$ $\quad D = \{(x, y): |x| + |y| \le 1\}$

49. $\iint\limits_D x\, dA$ $\quad D$ es el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25 - x^2}$, 3x-4y=0, y=0

Trace la región de integración y cambie el orden de integración.

50. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dydx$

51. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y)\, dxdy$

52. $\int_0^4 \int_{y/2}^{2} f(x, y)\, dxdy$

53. $\int_0^1 \int_{tan^{-1} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dydx$

54. $\int_0^4 \int_0^y f(x, y)\, dxdy$

55. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x, y)\, dxdy$

56. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dydx$

57. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y)\, dydx$

58. $\int_1^{10} \int_0^{\ln y} f(x, y)\, dxdy$

59. $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y)\, dydx$

60. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dydx$

61. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dydx$

Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

62. $\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\, dxdy$

63. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} \sqrt{x^2+1}\, dxdy$

64. $\int_0^3 \int_{y^2}^{9} y \cos x^2\, dxdy$

65. $\int_0^1 \int_{x^2}^{1} x^3 \operatorname{sen} y^3\, dydx$

66. $\int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\, dxdy$

67. $\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dydx$

68. $\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + sen^2 x}\, dxdy$

69. $\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}x^2}^{2} \sqrt{y} \cos y\, dydx$

70. $\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\, dydx$

71. $\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2\, dxdy$

Evalúe la integral doble pasando a coordenadas polares.

72. $\iint\limits_D y\, dA$ $\quad D$ es la región del primer cuadrante, limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$ y las rectas $y = x$, $y = 0$.

73. $\iint\limits_D xy\, dA$ $\quad D$ es la región del primer cuadrante, que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 25$

74. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA$ $\quad D = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 9, y \ge 0\}$

75. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$ — D es la región limitada por el semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ y el eje y

76. $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dA$ — D es la región del primer cuadrante interior al círculo $x^2 + y^2 = 16$.

77. $\iint_D (x^2+y^2)\, dA$ — D es la región limitada por las espirales $r = \theta$ y $r = 2\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$

78. $\iint_D x\, dA$ — D es la región del primer cuadrante que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$

79. $\iint_D (x+y)\, dA$ — $D: x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

80. $\iint_D e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}\, dA$ — $D: x^2 + y^2 \le 25, x \ge 0,$

81. $\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\, dA$ — $D: x^2 + y^2 \ge 1, x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x$

82. $\iint_D (9 - x^2 - y^2)\, dA$ — $D: x^2 + y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0$

83. $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dA$ — D es la región limitada por $x^2 + y^2 = 25$

84. $\iint_D x\, dA$ — D es la región limitada por $r = 1 - \cos\theta$

85. $\iint_D y\, dA$ — D es la región limitada por $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

Evalúe la integral iterada pasando a coordenadas polares.

86. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dydx$

87. $\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dxdy$

88. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2y^2\, dxdy$

89. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$

90. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\, dxdy$

91. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dydx$

92. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dydx$

93. $\int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$

94. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\, dydx$

95. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2\, dxdy$

96. Combinar la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada, pasando a coordenadas polares. Evaluar la integral resultante.

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\; dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\; dydx$$

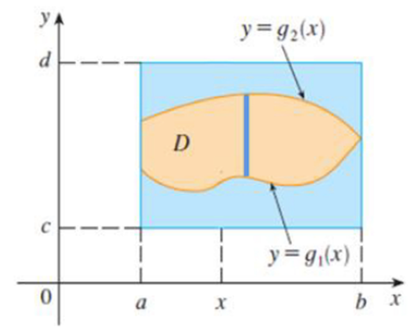
97. Utilice coordenadas polares para combinar la suma en una integral doble. En seguida, evalúe la integral doble.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\; dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\; dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\; dydx$$

Sección 8.2. Aplicaciones de las integrales dobles

Área, volumen, centro de masa

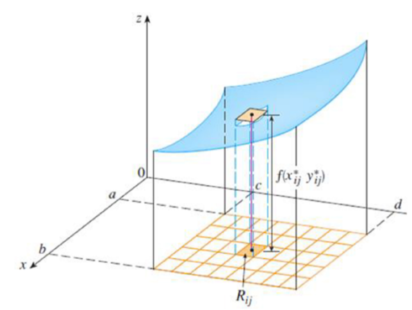
Al emplear las integrales dobles para solucionar problemas, es importante tener una idea clara de cada componente en una integral. Consideremos una función continua y positiva f definida sobre un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. Sea $D = \{(x, y):\ a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$.



En la sección anterior se vio que el volumen V situado bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región D está dado por

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b A(x)\, dx$$

Donde $A(x)$ es el área de la sección transversal del sólido correspondiente a ese valor particular de x. En el siguiente dibujo se observa qué representa cada elemento de la integral doble en el volumen de cada caja.



Al escribir una integral iterada que representa el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y arriba del conjunto
$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, de ahí que

$$V = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

El elemento $f(x, y)$ representa la altura de la caja, dy ancho de la base de la caja, y dx el largo de la base de la caja. De igual forma se puede obtener una interpretación considerando la región $D = \{(x, y): \ c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$.

Ahora bien, para cualquier región $D \subset \mathbb{R}^2$, $\iint_D 1\, dA$, la cual se escribe simplemente $\iint_D dA$, representa el volumen bajo la superficie $z = 1$ y sobre la región D en el plano xy. Puesto que todas las secciones transversales paralelas al plano xy son iguales, el sólido es un cilindro y, por tanto, su volumen es el producto de la altura por el área transversal. Es decir,

$$\iint_D dA \;=\; (1)(\text{área de } D) \;=\; \text{área de } D$$

Por tanto, se tiene la opción de emplear una integral doble para hallar el área de una región plana.

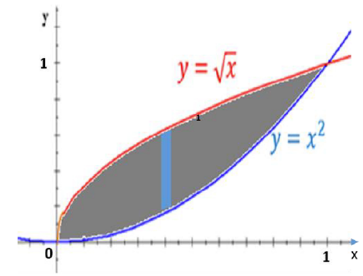
EJEMPLO

Emplee una integral doble para calcular el área de la región limitada por las curvas.

1. $y = x^2, \ \ x = y^2$

Solución

Se realiza el dibujo de la región limitada por las curvas dadas.



Del dibujo se observa que las curvas se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. Además, se puede utilizar cualquier orden de integración puesto que el grado de dificultad es igual. Entonces,

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ u^2$$

Por otro lado, se ha visto que el volumen de un sólido situado bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre el conjunto D está dado $V = \iint_D f(x, y)\, dA$, entonces ¿dónde está la dificultad? La dificultad de plantear integrales iteradas radica en observar la región D de modo que el sólido esté encima y determinar luego los límites de integración para las integrales iteradas.

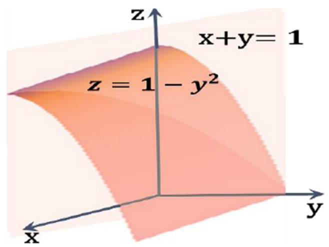
EJEMPLO

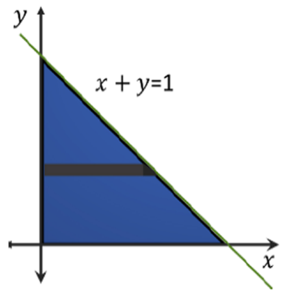
Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies dadas.

$z = 1 - y^2$, $x + y = 1$, y los tres planos coordenados, en el primer octante.

Solución

Se dibuja del sólido limitado por el cilindro $z = 1 - y^2$ y el plano $x + y = 1$





En la gráfica se observa que el sólido que está arriba del conjunto D es el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, y la región D del plano xy está limitada por las rectas $x + y = 1$, $x = 0, y = 0$.

Analizando la función que se va a integrar $f(x, y) = 1 - y^2$ y la región D se observa que los dos órdenes de integración tienen el mismo grado de dificultad. Por tanto, se escogerá el orden $dA = dxdy$

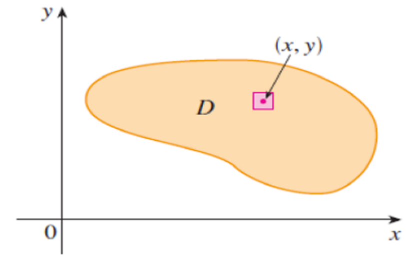
$$V = \iint_D f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-y^2)dxdy = \int_0^1 (1-y^2)x\Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1 (1-y^2)(1-y)dy$$

$$V = \int_0^1 (1-y-y^2+y^3)dy = y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\Big|_0^1 = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{5}{12}u^3$$

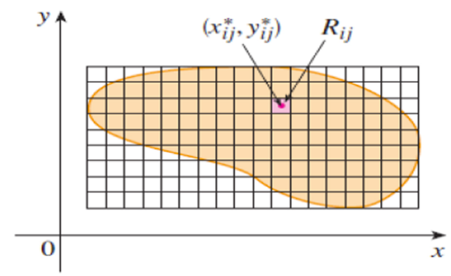
Momentos y centros de masa

Considérese una región $D \subset R^2$ que representa una lámina plana delgada cuya densidad (masa por unidad de área) no es constante (es decir, algunas áreas de la lámina son más densas que otras). Desde la visión de la ingeniería, es importante encontrar el punto donde un soporte puede equilibrar la lámina. Este punto se denomina centro de masa de la lámina.

Nuestro primer objetivo es encontrar la masa total de la lámina. Supóngase que la lámina tiene la forma de la región D y cuya función densidad está dada por $\rho(x, y)$.



Realizando una partición de la región D en n-subrectángulos y considerando que la norma de la partición $|P|$ es pequeña, por tanto, la densidad será casi constante en cada rectángulo de la partición. Entonces, para todo $i = 1,2,3,4,...,n$ y para algún punto $(x_i, y_i) \in R_i$, se tiene que la masa m_i de la porción de la lámina correspondiente al rectángulo R_i, está dada aproximadamente por $m_i = \rho(x_i, y_i)\Delta A_i$, donde A_i representa el área de R_i. Por lo tanto, la masa total de la lámina está dada aproximadamente por



$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i$$

Para obtener la masa con exactitud, se toma el límite cuando $|P| \to 0$, el cual se debe reconocer como una integral doble

$$m = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\,\Delta A_i = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

Ahora, si se quiere balancear la lámina de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, será necesario hallar los primeros momentos, de izquierda a derecha (se denomina momento respecto al eje y) y de arriba hacia abajo (se denomina momento respecto al eje x). Recordando, el momento con respecto a un eje se define como el producto de la masa por la distancia al eje. Por consiguiente, si suponemos que la masa del i-ésimo rectángulo R_i está centrada en el punto (x_i, y_i), se tiene

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i\, \rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i \qquad M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i\, \rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

Tomando el límite cuando $|P|$ tiende a cero, se obtiene

$$M_y = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i\, \rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i = \iint_D x\rho(x,y)\, dA$$

$$M_x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i\, \rho(x_i, y_i)\, \Delta A_i = \iint_D y\rho(x,y)\, dA$$

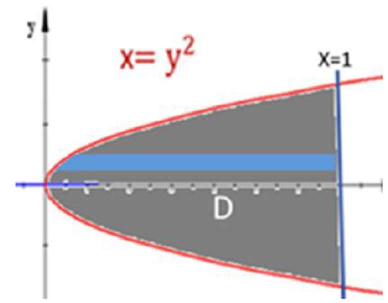
Entonces, el centro de masa de la lámina es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ definido

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

EJEMPLO

Hallar el centro de masa de la lámina limitada por $x = y^2$ y $x = 1$, con densidad $\rho(x, y) = y^2 + x + 1$.

Solución



Al analizar la gráfica de la región D que representa la lámina, se observa que es más conveniente utilizar el orden de integración $dA = dxdy$. La masa y los momentos con respecto a los ejes coordenados de la lámina son

Masa

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} (y^2 + x + 1)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(y^2x + \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_{y^2}^{1}\right) dy$$

$$m = \int_{-1}^{1} \left[\left(y^2 + \frac{1}{2} + 1\right) - \left(y^4 + \frac{1}{2}y^4 + y^2\right)\right] dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}y^4\right) dy$$

$$m = \frac{3}{2}y - \frac{3}{10}y^5 \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{10}\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{10}\right) = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Momento con respecto al eje y

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} (xy^2 + x^2 + x)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{y^2}^{1}\right) dy$$

$$M_y = \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}y^6 + \frac{1}{3}y^6 + \frac{1}{2}y^4\right)\right] dy = \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{5}{6}y^6 + \frac{1}{2}y^4\right)\right] dy$$

$$M_y = \left(\frac{5}{6}y + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{10}y^5 - \frac{5}{42}y^7\right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{164}{105}$$

Momento con respecto al eje x

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}(y^3+xy+y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(xy^3+\frac{1}{2}x^2y+xy\Big|_{y^2}^{1}\right)dy$$

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\left[\left(y^3+\frac{1}{2}y+y\right)-\left(y^5+\frac{1}{2}y^5+y^3\right)\right]dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y^5\right)dy$$

$$M_x = \left(\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{4}y^6\right)\Big|_{-1}^{1} = 0\text{. Por tanto, } \bar{x} = \frac{\frac{164}{105}}{\frac{12}{5}} = \frac{41}{63},\ \bar{y} = \frac{0}{\frac{12}{5}} = 0$$

Es decir, el centro de masa está localizado en el punto $\left(\frac{41}{63},0\right)$

Momentos de inercia y radio de giro

Los momentos de inercia de una lámina que tiene la forma de la región D con densidad $\rho(x,y)$, con respecto a los ejes x e y (I_x, I_y) miden la dificultad de giro de la lámina alrededor del eje x y del eje y, respectivamente. Estos segundos momentos se definen de la siguiente forma.

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dA \qquad\qquad I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\,dA$$

Además, se define el momento de inercia de la lámina con respecto al origen I_o como

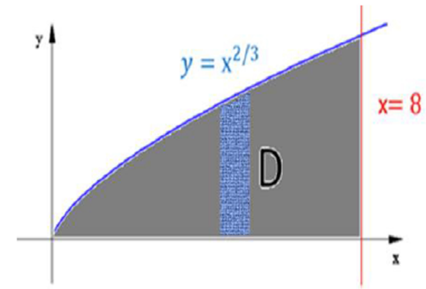
$$I_o = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA = I_x + I_y$$

EJEMPLO

Halle los momentos de inercia I_x, I_y, I_o de la lámina limitada por la recta $x = 8$, la curva $y = x^{\frac{2}{3}}$, y el eje x, con densidad $\rho(x,y) = xy$

Solución

Considerando el orden de integración $dA = dydx$, se tiene



$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dA = \int_0^8\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy^3dydx = \int_0^8 x\frac{y^4}{4}\Big|_0^{x^{\frac{2}{3}}}dx = \frac{1}{4}\int_0^8 x^{\frac{11}{3}}dx = \frac{3}{56}x^{\frac{14}{3}}\Big|_0^8 = \frac{6144}{7}$$

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dA = \int_0^8\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} x^3ydydx = \int_0^8 \frac{x^3y^2}{2}\Big|_0^{x^{\frac{2}{3}}}dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{\frac{13}{3}}dx = \frac{3}{32}x^{\frac{16}{3}}\Big|_0^8 = 6144$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{6144}{7} + 6144 = \frac{49152}{7} \approx 7021.71$$

El radio de giro de una lámina alrededor de un eje es el número R tal que $mR^2 = I$, donde m es la masa de la lámina e I es el momento de inercia alrededor del eje dado. En particular, el radio de giro $\bar{\bar{y}}$ con respecto al eje x, y el radio de giro $\bar{\bar{x}}$ con respecto al eje y están dados

$$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad\qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Entonces, $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})$ es el punto en donde se puede concentrar la masa de la lámina sin cambiar los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados.

EJEMPLO

Halle los radios de giro de la lámina del ejemplo anterior alrededor del eje x y del eje y.

Solución

Primero se determina la masa de la lámina

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xy\, dydx = \int_0^8 \left(x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^{\frac{2}{3}}} \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^8 x^{\frac{7}{3}}\, dx = \frac{3}{20} x^{\frac{10}{3}} \Big|_0^8 = \frac{768}{5}$$

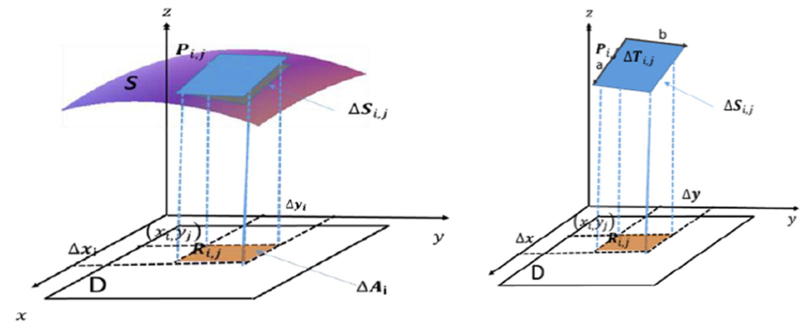
Por tanto, los radios de giro son

$$\bar{\bar{x}} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{6144}{\frac{768}{5}}} = \sqrt{40} \approx 6.3245 \qquad \bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{6144}{7}}{\frac{768}{5}}} = \sqrt{\frac{40}{7}} \approx 2.3904$$

Área de una superficie

Considérese una superficie S con ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Supóngase que $f(x, y) \geq 0$ y que el dominio de $f(D)$ es un rectángulo (para simplificar la deducción de la fórmula y hallar el área de la superficie). Realizando una partición de D en n-subrectangulos R_i con $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Sea (x_i, y_i) el vértice de R_i más cercano al origen, y sea $P(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ el punto de S.

El plano tangente a S en P es una aproximación a S cerca de P. Por tanto, el área T_i de la parte de este plano tangente (que es un paralelogramo), que se encuentra directamente arriba de R_i, es una aproximación del área Δs_i de la parte de S que está directamente arriba de R_i. Entonces, la suma $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$ es una aproximación del área total de S, y esta aproximación es cada vez mejor cuando el número de rectángulos aumenta. De esta forma se define el "área de una superficie S" como $A(S) = \lim\limits_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i$



Ahora, consideremos los vectores a y b que coinciden con los lados del paralelogramo de área ΔT_i y tiene origen en P, entonces $\Delta T_i = |a \times b|$. Además, recuerde que $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ son las pendientes de las rectas tangentes que pasan por P en las direcciones de a y b.

Por tanto,

$$a = \Delta x_i + f_x(x_i, y_i)\Delta x\, k$$
$$b = \Delta x_j + f_y(x_i, y_i)\Delta y\, \mathrm{k}$$

Entonces,

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_i)\Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_i)\Delta y \end{vmatrix} = -f_x(x_i, y_i)\Delta x \Delta y \hat{\imath} - f_y(x_i, y_i)\Delta x \Delta y \hat{\jmath} + \Delta x \Delta y \hat{k}$$

$$axb = \left[-f_x(x_i, y_i)i - f_y(x_i, y_i)j + k\right] \Delta A$$

Luego,

$$\Delta T_i = |a \times b| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + \left[f_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1}\ \Delta A$$

Tomando el límite cuando n tiende al infinito se obtiene el área de la superficie S.

$$A(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + \left[f_y(x_i, y_i)\right]^2 + 1}\ \Delta A$$

Usando la definición de integral doble se tiene que el área de la superficie $z = f(x, y)$, donde $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son continuas, está dada

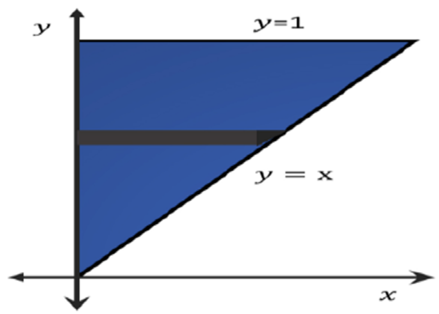
$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\; dA$$

EJEMPLO

Encuentre el área de la parte de la superficie $z = 2x + y^2$ que se encuentra arriba de la región triangular D del plano xy con vértices $(0,0),(0,1),(1,1)$

Solución

Si $f(x, y) = 2x + y^2$, entonces $f_x(x, y) = 2$, $f_y(x, y) = 2y$.



$$A(S) = \iint_D \sqrt{[2]^2 + [2y]^2 + 1}dA = \int_0^1\int_0^y \sqrt{5+4y^2}\,dxdy$$

Si $u = 5 + 4y^2$, *entonces* $du = 8ydy$. *Por lo tanto,*

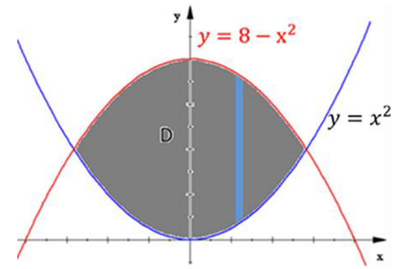
$$A(S) = \int_0^1 \sqrt{5+4y^2}\,y\,dy = \frac{1}{8}\int_5^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{12}u^{\frac{3}{2}}\Big|_5^9 = \frac{1}{12}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)u^2$$

Ejercicios complementarios

Utilice una integral doble para hallar el área de la región D.

1. D está limitada por $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

Solución



Se encuentran los puntos de corte de las parábolas

$x^2 = 8 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$. Luego, los puntos son $(\pm 2,4)$.

Analizando la región es conveniente usar el orden de integración $dA = dydx$. Entonces,

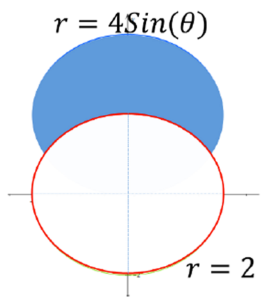
$$A = \iint_D dA = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} dydx = \int_{-2}^{2} y\Big|_{x^2}^{8-x^2} dx = \int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx = 8x - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}$$

$$A = \iint_D dA = \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}\,u^2$$

2. D es la región interior al círculo $r = 4\,sen\,\theta$, $r = 2$ y el exterior al círculo $r = 2$

Solución

Para graficar las circunferencias $r = 4\,sen\,\theta$, $r = 2$ se pueden realizar usando coordenadas polares o transformando la ecuación a coordenadas cartesianas, esto es



- $r = 4\,sen\,\theta \Rightarrow r^2 = 4r\,sen^2\theta \Rightarrow$
  $x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow$
  $x^2 + (y-2)^2 = 4$
- $r = 2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

En este ejercicio es conveniente usar coordenadas polares, donde $2 \le r \le 4\,sen\,\theta$ y para hallar los límites de θ se deben encontrar los puntos de corte de las curvas. Igualando las ecuaciones se tiene

$$4\,sen\,\theta = 2 \;\;=>\;\; sen\,\theta = \frac{1}{2} \;\;=>\;\; \theta = \frac{\pi}{6} \;\; y \;\; \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Por tanto,

$$A = \iint_D dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{2}^{4sen\theta} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{2}^{4sen\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8sen^2\theta - 2) d\theta$$

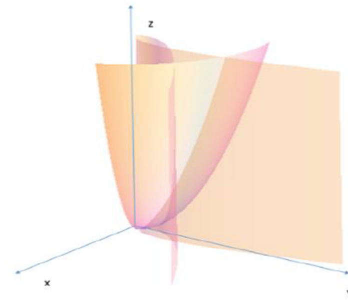
$$A = \iint_D dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[8\left(\frac{1-cos2\theta}{2}\right) - 2\right] d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4cos2\theta) d\theta = 2\theta - 2sen2\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

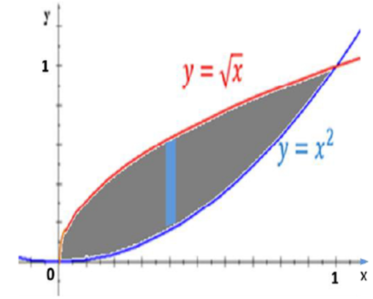
$$A = \iint_D dA = \left(\frac{5\pi}{3} - 2sen\frac{5\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{3} - 2sen\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,u^2$$

Encuentre el volumen del sólido dado

3. Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región limitada por $y = x^2$, $x = y^2$.

Solución





Utilizando el orden de integración $dA = dydx$, obtenemos

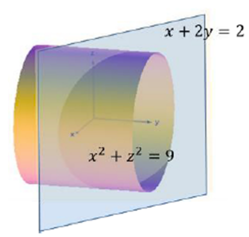
$$V = \iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,dydx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{x^2}^{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

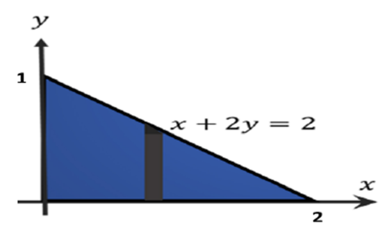
$$V = \int_0^1 \left[\left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) - \left(x^4 + \frac{1}{3}x^6\right)\right] dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx$$

$$V = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \Big|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{6}{35}u^3$$

4. Limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y = 2$ en el primer octante.

Solución





Analizando la función para integrar, $f(x,y)=\sqrt{9-x^2}$, es conveniente hacerlo primero en y (porque f es constante). Es decir, usando el orden de integración $dA = dydx$. Entonces,

$$V=\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2\int_0^{\frac{2-x}{2}} \sqrt{9-x^2}\,dydx = \int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,y\Big|_0^{\frac{2-x}{2}}\,dx$$

$$V=\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,x\,dx$$

Se resuelven las dos integrales (indefinidas), usando, en la primera, sustitución trigonométrica; y, en la segunda, sustitución simple.

Si $x = 3\,sen\,t$, $\sqrt{9-x^2} = 3\cos t$, $dx = 3\cos t\,dt$, entonces

$$\int\sqrt{9-x^2}dx = 9\int cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{9}{2}t+\frac{9}{4}sen\,2t + C$$

$$=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}sen\,t\cos t + C = \frac{9}{2}\,arcsen\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}+C = \frac{9}{2}\,arcsen\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\,x\sqrt{9-x^2}+C$$

Ahora, si $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, luego

$$\int\sqrt{9-x^2}\,xdx = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

Por tanto,

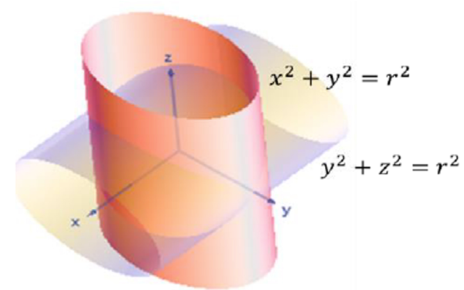
$$V=\int_0^2\sqrt{9-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{9-x^2}\,x\,dx = \frac{9}{2}arcsen\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\,x\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{6}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

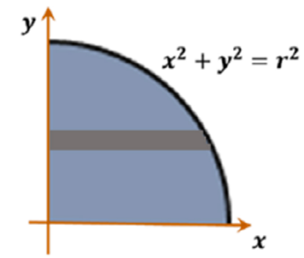
$$V=\frac{9}{2}\left(arcsen\frac{2}{3}-arcsen\,0\right)+\frac{1}{2}(2\sqrt{5}-0)+\frac{1}{6}\left(\left(\sqrt{5}\right)^3-27\right) = 2.883232412\,u^3$$

5. Limitado por los cilindros $x^2+y^2=r^2$ y $y^2+z^2=r^2$

Solución

Para calcular el volumen del sólido limitado por dos cilindros es más sencillo analizar el primer octante y multiplicar el resultado por ocho (debido a que el sólido es simétrico con respecto a los ejes)





Para la función que se va a integrar, $f(x,y)=\sqrt{r^2-y^2}$, es más útil realizarlo en x (porque f es constante) y la región D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2=r^2$ (primer cuadrante).

Por tanto,

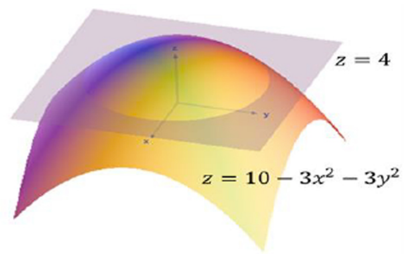
$$V=\iint_D f(x,y)dA = \int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}}\sqrt{r^2-y^2}\,dxdy = \int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,x\Big|_0^{\sqrt{r^2-y^2}}dy = \int_0^r(r^2-y^2)\,dy$$

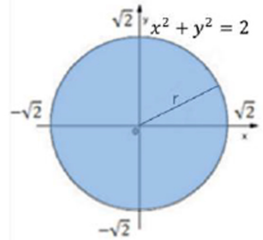
$$V=\iint_D f(x,y)dA = r^2y-\frac{1}{3}y^3\Big|_0^r = \left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-(0) = \frac{2}{3}r^3\;u^3$$

Puesto que el volumen del sólido en el primer octante es $\frac{2}{3}r^3$ unidades cúbicas, se tiene que el volumen total es $\frac{16}{3}r^3$ unidades cúbicas

6. Interior al paraboloide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ y al plano $z = 4$.

Solución





Se encuentra la curva de intersección de las dos superficies, la cual se proyecta sobre el plano xy para determinar la región D. Esto es,

$$4 = 10 - 3x^2 - 3y^2 \;\; => \;\; 3x^2+3y^2 = 6 \;\; => \;\; x^2 + y^2 = 2$$

Esta ecuación representa una circunferencia con centro en $(0,0)$ y $r = \sqrt{2}$. Al igual que en el ejercicio anterior, utilizando coordenadas polares, se obtiene

$$V = \iint_D f(x,y)dA = \iint_D [(10 - 3x^2 - 3y^2) - (4)]dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3r^2)rdrd\theta$$

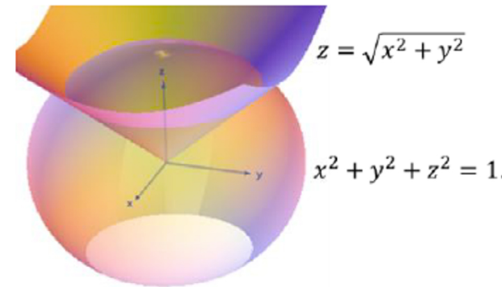
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (6r - 3r^3)drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(3r^2 - \frac{3}{4}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} (6-3)d\theta = 3\theta\,\Big|_0^{2\pi} = 6\pi\, u^3$$

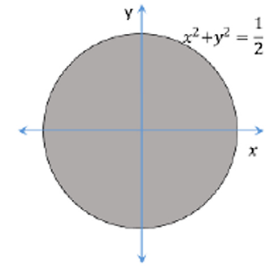
7. Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solución

Como en el ejercicio anterior se debe encontrar y proyectar sobre el plano xy la ecuación que describe la curva de intersección de las dos superficies. Esto es,

$$(x^2 + y^2) + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2(x^2 + y^2) = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$





Por tanto,

$$V = \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_D \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r\, drd\theta$$

Si $u = 1 - r^2$, $du = -2\, rdr$. Entonces,

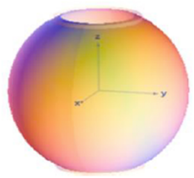
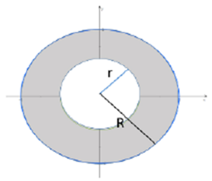
$$V = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{u}dud\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r^2\, drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{\frac{1}{2}}dud\theta - \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}/2} d\theta$$

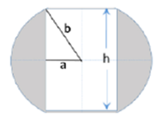
$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{12}d\theta = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{\sqrt{2}}{6}\pi = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

$V \approx 0.613434123\, u^3$

8. Se emplea una broca cilíndrica de radio a para taladrar un orificio que pasa por el centro de una esfera de radio b. Halle el volumen del anillo sólido que queda, y exprese este volumen en términos de la altura h del anillo.

Solución



La región sólida es simétrica con respecto al plano xy. Luego,

$$V = 2\iint_D f(x,y)\,dA = 2\iint_D \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}\,dA = 2\int_0^{2\pi}\int_a^b \sqrt{b^2 - r^2}\,r\,dr d\theta$$

Si $u = b^2 - r^2$, $du = -2r\,dr$. Entonces,

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_{b^2-a^2}^{0} \sqrt{u}\,\frac{du}{-2}d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{b^2-a^2} u^{\frac{1}{2}}du d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{b^2-a^2} d\theta = \frac{2}{3}(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$V = \frac{4\pi}{3}(b^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\ u^3$$

Además, usando un triángulo rectángulo de base a, hipotenusa b y altura $\frac{h}{2}$ se tiene

$$b^2 - a^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$$ (*teorema de Pitágoras*). Entonces,

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{h^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6}\,h^3$$

9. Una regadera agrícola distribuye agua en un círculo de 100 pies de radio. El agua es alimentada con una profundidad de e^{-r} pies por hora, a una distancia de r *pies* desde la regadera. ¿Cuál es la cantidad total de agua alimentada por hora en la región dentro del círculo de radio R con centro en la regadera?

Solución

La cantidad total de agua de la regadera cada hora en la región con radio R pies está dada por

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r} r\,dr d\theta$$

Resolviendo la integral indefinida interna por partes, se tiene

$u = r,\quad du = dr,\quad dv = e^{-r}\,dr,\quad v = -e^{-r}$

$$\int e^{-r} r dr = -re^{-r} + \int e^{-r} dr = -re^{-r} - e^{-r}$$

Por consiguiente,

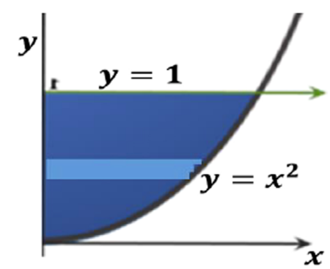
$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (-re^{-r} - e^{-r})\Big|_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} (-Re^{-R} - e^{-R} + e^0) d\theta$$

$V = (1 - Re^{-R} - e^{-R})\ 2\pi\ pies^3$

Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región D y tiene función densidad ρ dada

10. D es la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$; $\rho(x, y) = xy$.

Solución



Masa

$$m=\iint_D \rho(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} xydxdy=\int_0^1\left(y\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{y}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{6}y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

Momento con respecto al eje y

$$M_y=\iint_D x\rho(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^2ydxdy=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3y\Big|_0^{\sqrt{y}}\right)dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{5}{2}}dy=\frac{2}{21}y^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{21}$$

Momento con respecto al eje x

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)dA=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} xy^2dxdy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_0^{\sqrt{y}}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{8}y^4\Big|_0^1=\frac{1}{8}$$

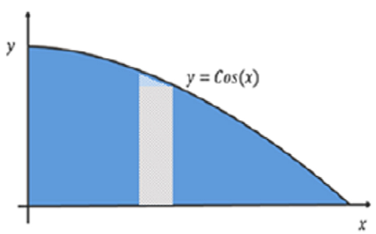
En consecuencia,

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{21}}{\frac{1}{6}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7},\qquad \bar{y}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

11. $D=\left\{(x,y):\ 0\le y\le cosx,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\};\ \rho(x,y)=x$

Solución

De acuerdo con la gráfica, es más adecuado utilizar el orden de integración $dA=dydx$



Masa

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{cosx} x\,dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(xy\Big|_0^{cosx}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosx\,dx$$

Usando integración por partes

$u=x,\ \ du=dx,\ \ dv=cos\,x\,dx,\ \ v=sen\,x$

$$m=x\,sen\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\,dx=x\,sen\,x+cos\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi}{2}+cos\frac{\pi}{2}\right)-(0+\cos 0)=\frac{\pi}{2}-1$$

Momento con respecto al eje x e y

$$M_y=\iint_D x\rho(x,y)dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{cosx} x^2dydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2y\Big|_0^{cosx}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cosxdx$$

De igual forma, utilizando integración por partes dos veces se tiene

$u=x^2,\ \ du=2xdx,\ \ dv=cosx\,dx,\ \ v=sen\,x$. Luego,

$$M_y=x^2\,sen\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,sen\,x\,dx$$

$u=x,\ du=dx,\ dv=sen\ x\ dx,\ v=-\,cosx$

$$M_y=x^2\,sen\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\left(-xcosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx\right)=x^2\,sen\,x+2xcosx-2\,sen\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{cosx} xydydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^{cosx}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,cos^2xdx$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$$

$$M_x = \left(\frac{1}{8}x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x\ \mathrm{sen}\ 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{8}\frac{\pi}{2}\mathrm{sen}\,\pi - 0 + \frac{1}{16}(\cos\pi - \cos 0)$$

$$M_x = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{8}$$

Entonces,

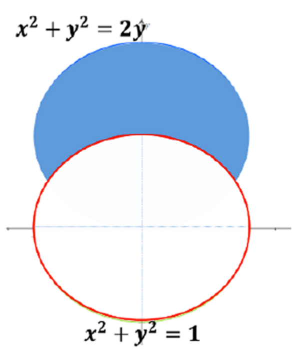
$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{\frac{\pi}{2} - 1} = 0.8188, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{8}}{\frac{\pi}{2} - 1} = 0.32134$$

12. Una lámina ocupa la región que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$, pero fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Halle el centro de masa, si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a la distancia al origen.

Solución

Para graficar la circunferencia $x^2 + y^2 = 2y$ se completa cuadrados en y. Esto es,

$$x^2 + y^2 = 2y \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \ \Rightarrow\ x^2 + (y-1)^2 = 1$$



La densidad de la lámina en cualquier punto está dada por

$$\rho(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Analizando la región D y la función densidad se observa que es conveniente usar coordenadas polares.

De tal modo que se debe transformar a polares las ecuaciones dadas. Esto es,

- $x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow r^2 = 2r\ \mathrm{sen}\ \theta \Rightarrow\ r = 2\ \mathrm{sen}\ \theta$
- $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$

Igualando las ecuaciones se obtienen los límites para θ y se evalúan las integrales

$$2\ \mathrm{sen}\ \theta = 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{sen}\ \theta = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{6} \ \ y \ \ \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \frac{1}{r} r\,dr\,d\theta = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(r\Big|_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)d\theta = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\,\mathrm{sen}\,\theta - 1)\,d\theta$$

$$m = k(-2\cos\theta - \theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = k\left[\left(2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(2\cos\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$m = k\left(2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) = k\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Momento con respecto al eje y

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)\,dA = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\cos\theta\,dr\,d\theta = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{r^2}{2}\cos\theta\Big|_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\right)d\theta$$

$$M_y = \frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (4\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta - \cos\theta)\,d\theta = \frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}\mathrm{sen}^3\theta - \mathrm{sen}\,\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$M_y = \frac{k}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\mathrm{sen}^3\frac{5\pi}{6} - \mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}\right) - \left(\frac{4}{3}\mathrm{sen}^3\frac{\pi}{6} - \mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

Momento con respecto al eje x

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)\,dA = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\int_{1}^{2\,sen\,\theta} r\,sen\,\theta\,dr\,d\theta = k\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{r^2}{2}sen\,\theta\,\Big|_{1}^{2\,sen\,\theta}\right)d\theta$$

$$M_x = \frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(4sen^3\theta - sen\,\theta)d\theta = \frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 4(1-cos^2\theta)\,sen\,\theta\,d\theta - \frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} sen\,\theta\,d\theta$$

u = cosθ, du = –sen θ dθ

$$M_x = \frac{k}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} 4(u^2-1)du - \frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} sen\,\theta\,d\theta = \frac{k}{2}\left(4u-\frac{4}{3}u^3\right)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{k}{2}(-cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$M_x = \frac{k}{2}\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3+2\sqrt{3}-\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3\right)-\frac{k}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{k}{2}\left(4\sqrt{3}-\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-\sqrt{3}\right)$$

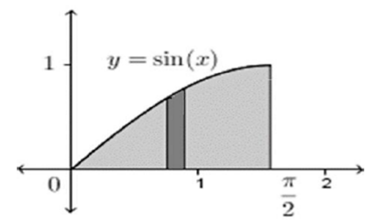
$$M_x = \frac{k}{2}(2\sqrt{3})\ Mx = k\sqrt{3}$$

Entonces,

$$\bar{x} = \frac{0}{k\left(2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{k\sqrt{3}}{k\left(2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}}$$

13. Una lámina con densidad constante ocupa la región bajo la curva $y = sen\,x$, de $x = 0$ hasta $x = \pi$. Halle los momentos de inercia I_x, I_y y los radios de giro $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$.

Solución



La función densidad de la lámina está dada por $\rho(x, y) = k\,y$ utilizando el orden de integración $dA = dydx$, se obtiene

Momento de inercia con respecto a x

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dA = \iint_D ky^2dA = k\int_0^{\pi}\int_0^{sen\,x} y^2dydx = k\int_0^{\pi}\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{sen\,x}dx$$

$$I_x = k\int_0^{\pi}\frac{1}{3}y^3\Big|_0^{sen\,x}dx = \frac{k}{3}\int_0^{\pi} sen^3x\,dx = \frac{k}{3}\int_0^{\pi}(1-cos^2x)\,sen\,x\,dx$$

Haciendo la sustitución $u = cosx$, $du = -\,sen\,x\,dx$, se tiene

$$I_x = \frac{k}{3}\int_1^{-1}(1-u^2)(-du) = \frac{k}{3}\int_{-1}^{1}(1-u^2)du = \frac{k}{3}\left(u-\frac{1}{3}u^3\Big|_{-1}^{1}\right) =$$

$$\frac{k}{3}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$I_x = \frac{k}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{k}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4k}{9}$$

Momento de inercia con respecto a y

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dA = \iint_D kx^2dA = k\int_0^{\pi}\int_0^{sen\,x} x^2dydx = k\int_0^{\pi} x^2y\Big|_0^{sen\,x}dx =$$

$$k\int_0^{\pi} x^2\,sen\,x\,dx$$

Aplicando integración por partes

$u = x^2$, $du = 2xdx$, $dv = sen\, x\, dx$, $v = -\cos x$

$$I_y = k\int_0^{\pi} x^2\, sen\, x\, dx = k\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos x dx\right]$$

Utilizando nuevamente integración por partes

$u = x$, $du = dx$, $dv = \cos x\, dx$, $v = sen\, x$

$$I_y = k\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi} + 2\left(x\, sen\, x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sen\, x\, dx\right)\right] = k\left(-x^2\cos x + 2x\, sen\, x + 2\cos x\Big|_0^{\pi}\right)$$

$I_y = k\,[(-\pi^2\cos\pi + 2\pi sen\pi + 2\cos\pi) - (0 + 0 + 2\cos 0)] = k(\pi^2 - 4)$

Para los radios de giro $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ es necesario calcular la masa de la lámina

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA = \int_0^{\pi}\int_0^{sen\, x} kdydx = \int_0^{\pi} ky\Big|_0^{sen\, x} dx = k\int_0^{\pi} sen\, x\, dx = -k\cos x\Big|_0^{\pi} = 2k$$

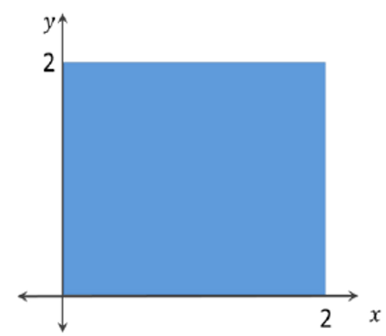
Entonces,

$$\bar{\bar{x}} = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{k(\pi^2-4)}{2k}} = \sqrt{\frac{\pi^2-4}{2}}, \qquad \bar{\bar{y}} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{4k}{9}}{2k}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

14. Considere la hoja cuadrada de un ventilador con lados de longitud 2 y el vértice inferior izquierdo colocado en el origen. Si la densidad de la hoja es de $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, ¿será más difícil hacer girar la hoja alrededor del eje x o del eje y?

Solución

Hay que encontrar los momentos de inercia I_x, I_y para determinar quién tiene el resultado más grande



Momento de inercia con respecto a x

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dA = \int_0^2\int_0^2 (y^2 + 0.1xy^2)dxdy = \int_0^2 \left(xy^2 + 0.05x^2y^2\Big|_0^2\right)dy$$

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dA = \int_0^2 (2y^2 + 0.2y^2)dy = \int_0^2 2.2y^2dy = \frac{2.2}{3}y^3\Big|_0^2 = \frac{17.6}{3} \approx 5.866$$

Momento de inercia con respecto a y

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dA = \int_0^2\int_0^2 (x^2 + 0.1x^3)dydx = \int_0^2 (x^2 + 0.1x^3)y\Big|_0^2 dx$$

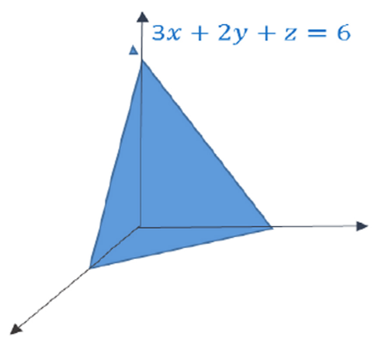
$$I_y = \frac{2}{3}x^3 + 0.05x^4\Big|_0^2 \approx 6.133$$

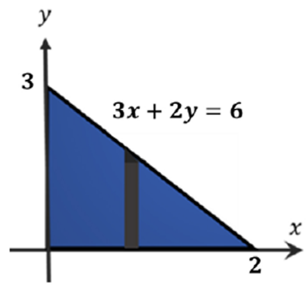
Por lo cual, es más difícil hacer girar la hoja alrededor del eje y

Encuentre el área de la superficie

15. La parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está en el primer octante.

Solución





La función que representa el plano es $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$, luego sus primeras derivadas parciales son: $f_x(x,y) = -3$, $f_y(x,y) = -2$

Luego,

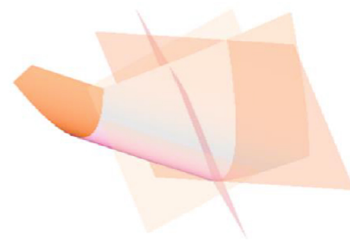
$$A(S) = \iint_D \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1}\, dA = \sqrt{14}\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dydx = \sqrt{14}\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}x\right) dx$$

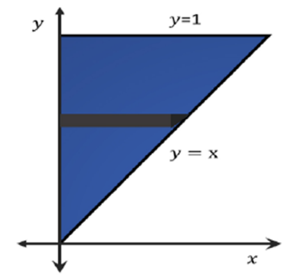
$$A(S) = \sqrt{14}\left(3x - \frac{3}{4}x^2 \Big|_0^2\right) = \sqrt{14}[(6-3)-(0)] = 3\sqrt{14}\ u^2$$

16. La parte de la superficie $z = x + y^2$ que está arriba del triángulo con vértices $(0,0),(1,1),(0,1)$.

Solución

Si $f(x,y) = x + y^2$, de modo que $f_x(x,y) = 1$, $f_y(x,y) = 2y$





Entonces,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(1)^2 + (2y)^2 + 1}\ dA = \iint \sqrt{4y^2 + 2}\ dA$$

Analizando la función que se va a integrar es adecuado hacerlo en x (porque es constante el integrando). Entonces,

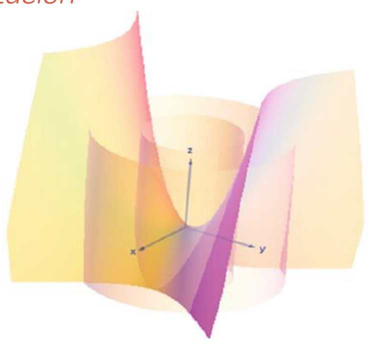
$$A(S) = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 2}\, dxdy = \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 2}\ x \Big|_0^y dy = \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 2}\ y\, dy$$

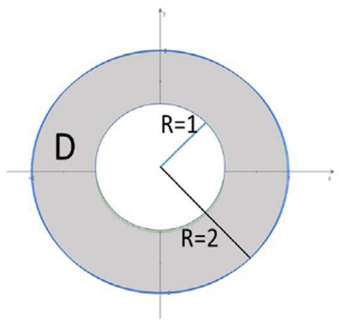
Utilizando la sustitución $u = 4y^2 + 2$, $du = 8ydy$, obtenemos

$$A(S) = \frac{1}{8}\int_2^6 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{8}\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^6 = \frac{1}{12}\left(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)\ u^2$$

17. La parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Solución





La región D (en el plano xy) está limitada por las circunferencias dadas por: $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Ahora, si $f(x, y) = y^2 - x^2$, luego $f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = 2y$. Por tanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(-2x)^2 + (2y)^2 + 1}\ dA = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\ dA$$

Debido al integrando y la región D se utilizan coordenadas polares para evaluar la integral doble, donde $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Por lo tanto,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_5^{17} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8} d\theta$$

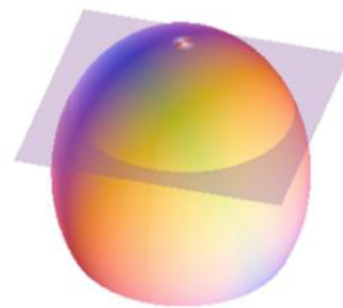
$$A(S) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_5^{17} d\theta$$

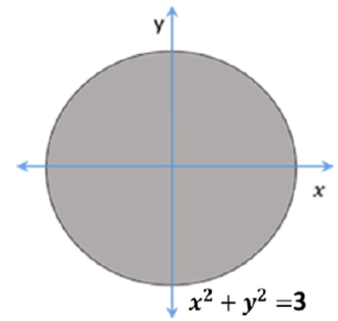
$u = 4r^2 + 1$, $du = 8r\, dr$

$$A(S) = \frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\left(17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)\pi}{6}\ u^2$$

18. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está arriba del plano $z = 1$.

Solución





La función que determina la superficie a la cual se quiere encontrar el área es $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Además, se observa que el plano $z = 1$ corta a la superficie en una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 3$, la cual se proyecta sobre el plano xy para determinar la región D. Entonces,

Si $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, se tiene

$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Por consiguiente,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1}\ dA$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2} + 1}\ dA = \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{4 - x^2 - y^2}}\ dA$$

$$A(S) = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_4^{1} u^{-\frac{1}{2}}(-du)\, d\theta$$

$u = 4 - r^2$, $du = -2rdr$

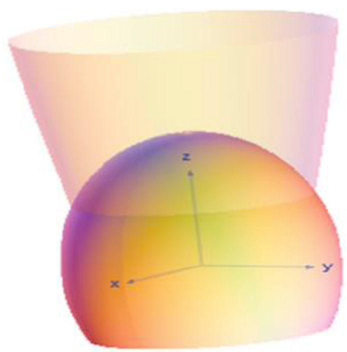
$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}\, du d\theta = \int_0^{2\pi} 2u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 d\theta = 2(2-1)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\theta\Big|_0^{2\pi} = 4\pi\, u^2$$

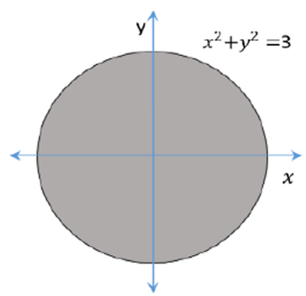
19. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$

Solución

Para graficar la esfera es necesario completar cuadrados en z. Esto es,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$





Se encuentra la curva de intersección de las dos superficies

$$(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 = 4(x^2+y^2) \Rightarrow (x^2+y^2)^2 - 3(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow$$
$$(x^2+y^2)((x^2+y^2)-3) = 0$$

Vemos que la esfera y el paraboloide se cortan el origen $(x^2 + y^2 = 0)$ y en una circunferencia con $c(0,0)$ y $r = \sqrt{3}$ $((x^2+y^2)-3 = 0)$, la cual se proyecta sobre el plano xy, obteniéndose la región D. La función que da la superficie es $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + 2$, donde sus derivadas parciales son

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad y \quad f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Entonces,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{-x}{4-x^2-y^2}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2 + 1} \;\; dA$$

Esta integral doble es igual a la del ejercicio anterior, por tanto, $A(S) = 4\pi\, u^2$

Ejercicios propuestos

Utilizar una integral doble para calcular el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, x=0, y=0$

2. $y=x^{3/2},\ \ y=2x$

3. $2x-3y=0, x+y=5, y=0$

4. $xy=9, y=x, y=0, x=9$

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

6. $y=x^2, y=8-x^2$

7. $y=x^3,\ y=x^2$

8. $r=3+2\ sen\ \theta$

9. $r=3\ cos\ \theta$

10. Una hoja de $r=sen\ 3\theta$

11. Interior a $r=2\ sen\ 3\theta$ y exterior a $r=1$, en el primer cuadrante

12. Interior a $r=1$ y exterior a $r=2-2\ cos\ \theta$

Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies dadas.

13. $2x+3y+z=6$ y los tres planos coordenados

14. $z=1-x^2, x+y=1$ y los tres planos coordenados

15. $z=1-x^2-y^2, x+y=1$, y los tres planos coordenados

16. $z=x^2+y^2+1, z=0, y=x^2, y=2x+3$

17. Debajo de $z=x^2+y^2$, sobre $z=0$, dentro de $x^2+y^2=9$

18. Debajo de $z=\sqrt{x^2+y^2}$, sobre $z=0$,dentro de $x^2+(y-1)^2=1$

19. Debajo de $z=4-x^2-y^2$, entre $y=x, y=0, x=1$

20. Debajo de $z=\sqrt{x^2+y^2}$,debajo de $z=4$,sobre el plano xy, entre $y=x, y=2x$

Encontrar la masa y el centro de masa de la lámina limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas y con la densidad especificada.

21. $x^2+y^2=a^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \rho(x,y)=x^2+y^2$

22. $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=4,\ \rho(x,y)=xy$

23. $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=0,\ x=-1,\ x=1,\ \rho(x,y)=k$

24. $y=9-x^2,\ y=0,\ \rho(x,y)=y^2$

25. $xy=4, y=0, x=1\ ,\ x=4,\ \rho(x,y)=x^2$

26. $y=\sqrt{a^2-x^2},\ y=0,\ y=x,\ \rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

27. $x^2+(y-1)^2=1,\ \rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

28. $r=2-2\cos\theta,\ \rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

29. $y=x^2-4,\ y=5,\ \rho(x,y)$ es el cuadrado de la distancia desde el eje y

30. $r=2\cos 3\theta,\ -\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{6},\ \rho(x,y)=k$

31. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2+y^2\leq 1$ en el primer cuadrante. Halle el centro de masa, si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje x.

Hallar $I_x, I_y, I_o, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$,para la lámina limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

32. $y=\sqrt{a^2-x^2},\ y=0,\ \rho(x,y)=y$

33. $y=4-x^2,\ y=0,\ x\geq 0\ ,\ \rho(x,y)=x$

34. $y = x,\ y = x^2,\ \rho(x, y) = xy$

35. $y = x^2,\ x = y^2,\ \rho(x, y) = x^2 + y^2$

36. $y = x^3,\ y = 4x,\ \rho(x, y) = |y|$

Encontrar el valor promedio de f en la región D, donde el valor promedio de una función es $\frac{1}{A}\iint_D f(x,y)dA$ y A es el área de D.

37. $f(x, y) = x$, *D es el rectángulo con vértices* $(0,0),(4,0),(4,2),(0,2)$

38. $f(x, y) = xy$, *D es el rectángulo con vértices* $(0,0),(4,0),(4,2),(0,2)$

39. $f(x, y) = e^{x+y}$, *D es el triángulo con vértices* $(0,0),(0,0),(1,0)$

Encuentre el área de la superficie $z = f(x, y)$ sobre la región D.

40. $f(x, y) = 2 + x^{3/2}$, D es el rectángulo con vértices $(0,0)$, $(0,4)$, $(3,4)$, $(3,0)$

41. $f(x,y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2},\ D = \{\,(x,y)\colon\ 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2 - x\,\}$

42. $f(x,y) = \ln|\sec x|,\ D = \{(x,y);\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \ \ 0 \le y \le \tan x\,\}$

43. $f(x, y) = 9 + x^2 - y^2,\ D = \{(x, y);\ x^2+y^2 \le 4\}$

44. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ D = \{(x,y)\colon\ 0 \le f(x,y) \le 1\}$

45. $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ D = \{(x,y)\colon\ \ x^2 + y^2 \le b^2,\ \ 0 < b < a\}$

46. Porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante.

47. Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$

48. Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

49. Una carga eléctrica está distribuida sobre el disco unitario $x^2 + y^2 \le 1$ de modo que la densidad de la carga en (x, y) es $\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Halle la carga total sobre el disco $\left(Q = \iint_D \rho(x,y)\,dA\right)$

50. La carga eléctrica se distribuye sobre el disco $x^2 + y^2 \le 4$, de modo que la densidad de la carga en (x, y) es $\rho(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Calcule la carga total sobre el disco.

51. Se construye un auditorio sobre una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 50 pies. Así, forma una región D acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 50^2$ con $x \ge 0$, $y \ge 0$. Las ecuaciones son modelo para el suelo y el techo. Suelo: $z = \frac{x+y}{5}$ y techo: $z = 20 + \frac{xy}{100}$

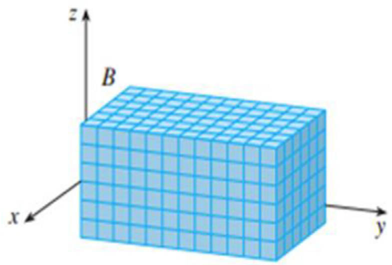
a) Hallar el volumen del auditorio, lo cual es un requisito para determinar los requerimientos para la calefacción y el aire acondicionado.
b) Hallar el área de la superficie del techo.

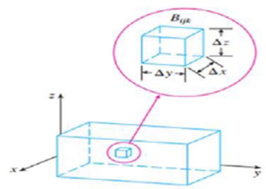
52. Una empresa produce un objeto esférico de 25 cm de radio. Hacemos una perforación de 4 cm de radio a través del centro del objeto. Calcular

a) El volumen del objeto
b) El área de la superficie exterior del objeto.

Sección 8.3. Integrales triples

Considérese una función f de tres variables definida sobre una caja B con caras paralelas a los planos coordenados. Sea P una partición de B en subcajas $B_1, B_2, \dots, B_n$. Si (x_i, y_i, z_i) es un punto muestra de B_i, entonces consideramos la suma riemanniana $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)$





$V_i = \Delta x_i\, \Delta y_i\, \Delta z_i$

La norma de la partición $|P|$ se define como la longitud de la máxima diagonal en todas las subcajas. Por tanto, la integral triple de f sobre B está dada por

$$\iiint_B f(x,y,z)dv = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

Observaciones

- Como ocurrió en la integral definida y la integral doble la condición necesaria y suficiente para que una función f de tres variables sea integrable sobre B es que f sea continua. Si la función f es discontinua en un numero finito de superficies suaves, entonces f debe ser acotada sobre B
- La integral triple tiene las propiedades de linealidad, aditividad de conjuntos que se traslapen solo en superficies frontera y la propiedad de comparación.
- Existen seis órdenes de integración. Esto es,

$$dV = dxdydz, \quad dV = dxdzdy, \quad dV = dydxdz$$
$$dV = dydzdx, \quad dV = dzdxdy, \quad dV = dzdydx$$

EJEMPLO

Evalúe $\iiint_B xyzdv$ donde $B = \{(x,y,z): 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2\}$

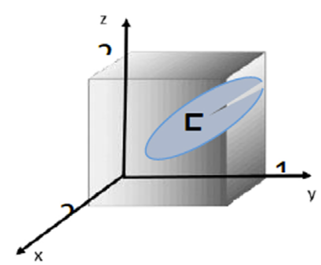
Solución

Utilizando el orden de integración $dv = dxdydz$

$$\iiint_B xyzdv = \int_1^2\int_0^1\int_1^2 xyzdxdydz = \int_1^2\int_0^1 \frac{1}{2}x^2yz\,\Big|_1^2 dydz = \frac{3}{2}\int_1^2\int_0^1 yzdydz$$
$$= \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{2}y^2z\,\Big|_0^1 dz$$

$$\iiint_B xyz\,dv = \frac{3}{4}\int_1^2 z\,dz = \frac{3}{4}\frac{z^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}\frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

Ahora, considere un conjunto E cerrado y acotado en el espacio R^3 y enciérrelo en una caja B con caras paralelas a los planos coordenados.

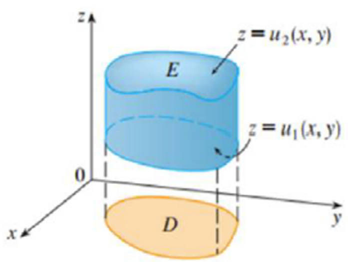


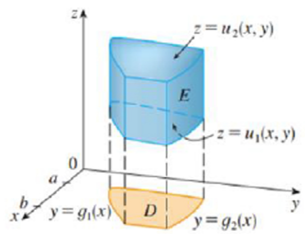
Sea $f(x, y, z)$ una función definida sobre E, donde $f(x, y, z) = 0$ para todo $(x, y, z) \notin E$. Entonces, se define

$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \iiint_B f(x,y,z)dv$$

Como se anotó anteriormente en las observaciones, hay seis órdenes de integración y para cada uno de ellos se puede hacer un dibujo que ilustre la integral iterada que se construye en cada caso. Veamos el orden de integración $dA = dzdydx$

Sea E un conjunto simple de z (las rectas verticales intersecan a E en segmentos de recta simples) y sea D su proyección sobre el plano xy. Entonces,





$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

Si además, D es un conjunto simple de y, podemos escribir una integral doble como una integral iterada. Esto es,

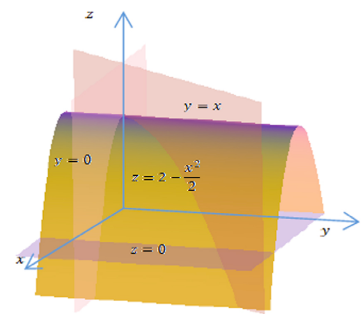
$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

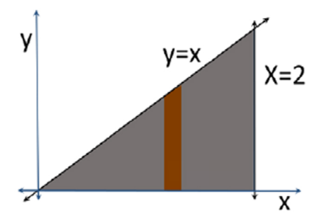
Pueden ser posibles otros cinco ordenamientos de la integración, según sea la forma de E, pero en cada caso se espera que los límites de la integral interior sean funciones de dos variables y que los de la integral exterior sean constantes. Veamos un ejemplo

EJEMPLO

Evalúe $\iiint_E 2xyzdv$, donde E es el sólido limitado por el cilindro parabólico $z = 2 - \frac{x^2}{2}$ y los planos $z = 0, y = x, y = 0$

Solución





Observando la región sólida E, se tiene un conjunto z-simple y su proyección sobre el plano xy es y-simple. Consideremos el orden de integración $dv = dzdydx$. Entonces,

$$\iiint_E 2xyz\,dv = \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{x^2}{2}} 2xyzdzdydx = \int_0^2 \int_0^x xyz^2 \Big|_0^{2-\frac{x^2}{2}} dydx$$

$$\iiint_E 2xyz\,dv = \int_0^2 \int_0^x xy\left(4 - 2x^2 + \frac{x^4}{4}\right) dydx$$

$$\iiint_E 2xyz\,dv = \int_0^2 \left(4x - 2x^3 + \frac{x^5}{4}\right)\frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^2 \left(2x^3 - x^5 + \frac{x^7}{8}\right) dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \Big|_0^2$$

$$\iiint_E 2xyz\,dv = \frac{1}{2}(16) - \frac{1}{6}(64) + \frac{1}{64}(256) = 8 - \frac{32}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

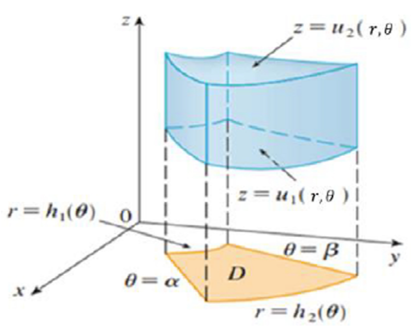
Existen integrales triples de las cuales no es conveniente evaluarlas en coordenadas cartesianas, debido a la región sólida E donde se define la función $f(x, y, z)$. Si la región sólida es simétrica con respecto a un eje, es decir, aquellas regiones sólidas limitadas por cilindros, paraboloides elípticos, conos o esferas, por lo tanto, usamos coordenadas cilíndricas en donde se considera invariante a la variable que representa el eje de simetría y transformamos las otras dos variables a coordenadas polares. Suponiendo que el eje de simetría es z, entonces las coordenadas cilíndricas están relacionadas por las ecuaciones

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,sen\,\theta, \quad z = z$$

Como resultado de ello, la función $f(x, y, z)$ se transforma en

$$f(x, y, z) = f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta, z) = F(r, \theta, z)$$

Supongamos ahora, que tenemos que evaluar $\iiint_E f(x, y, z)dv$, donde E es una región sólida simétrica con respecto al eje z. Consideremos una partición P del sólido E mediante una malla cilíndrica, en la que un elemento de volumen tiene la forma



Este elemento de volumen se denomina “prisma cilíndrico”, y su volumen está dado por

$$v_i = r_i\ \Delta r_i\ \Delta\theta_i\ \Delta z_i$$

Por tanto, la suma riemanniana que aproxima la integral es

$$\sum_{i=1}^{n} f(r_i, \theta_i, z_i) r_i \Delta z_i \Delta r_i \Delta\theta_i$$

Realizando la partición cada vez más fina, se llega a una nueva integral triple en coordenadas cilíndricas. Sea E un sólido z-simple y supongamos que su proyección sobre el plano xy es r-simple como se muestra en la figura. Si f es continua sobre E

$$E = \{(r, \theta, z): u_1(r, \theta) \leq z \leq u_2(r, \theta),\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

Entonces,

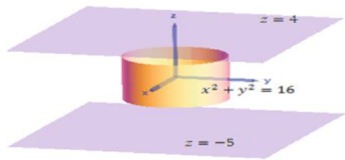
$$\iiint_E f(x, y, z)dv = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{u_1(r,\theta)}^{u_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta, z) r\,dz\,dr\,d\theta$$

EJEMPLO

Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}dv$, donde E es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$

Solución

Observando la región sólida E se tiene que el eje de simetría es el eje z. Entonces, las ecuaciones cilíndricas son



$x = r\cos\theta, \quad y = r\,sen\,\theta, \quad z = z$
$-5 \le z \le 4, \quad 0 \le r \le 4, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$

Por tanto,

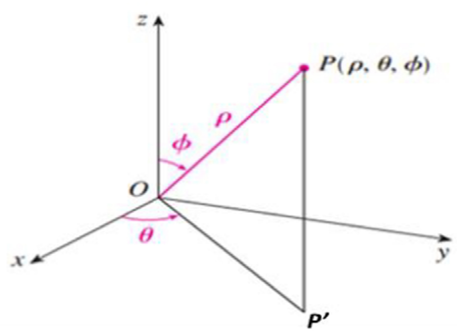
$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{-5}^4 \sqrt{r^2}\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_{-5}^4 r^2\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2 z\Big|_{-5}^{4} dr\,d\theta$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dv = 9\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\,dr\,d\theta = 9\int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^4 d\theta = 9\,\frac{64}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = 192\theta\Big|_0^{2\pi} = 192(2\pi)$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dv = 384\,\pi$$

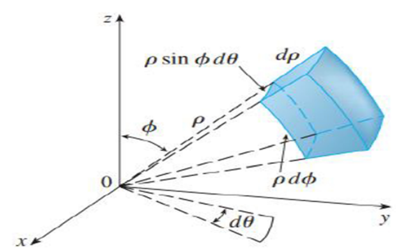
Integrales triples en coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son muy importantes en aquellas integrales triples en donde la función $f(x, y, z)$ está definida sobre una región sólida E, la cual es simétrica con respecto a un punto. Es decir, aquellas regiones sólidas limitadas por esferas o conos. Recordando las ecuaciones rectangulares para conversión en coordenadas esféricas son



$x = \rho\, sen\emptyset\, cos\theta, y = \rho\, sen\emptyset\, sen\theta, z = \rho\, cos\emptyset$. Donde $\rho \ge 0, 0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \emptyset \le \pi$. La variable ρ mide la distancia del origen hasta el punto P, θ mide el ángulo desde el eje positivo de las x hasta el vector $\overrightarrow{OP}$, en sentido contrario a las manecillas del reloj y $\emptyset$ mide el ángulo desde el eje positivo de las z hasta el vector $\overrightarrow{OP}$.

Supongamos que se quiere evaluar $\iiint_E f(x, y, z)dv$, donde E es una región sólida simétrica con respecto a un punto. Consideremos una partición P del sólido E mediante una malla esférica, en la que un elemento de volumen tiene la forma



Este elemento de volumen se denomina "prisma esférico", y su volumen está dado por

$$dv = \rho^2\, sen\, \emptyset d\rho d\theta d\emptyset$$

Formando la sumatoria adecuada y tomando el límite, llegamos a una integral en la que el diferencial de volumen $dv = dzdydx$ equivale a $dv = \rho^2\, sen\emptyset d\rho d\theta d\emptyset$, de aquí obtenemos

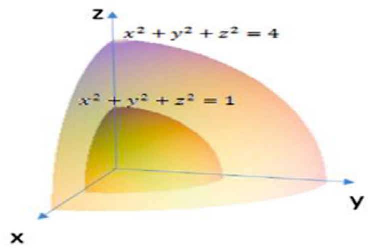
$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \iiint_E f(\rho sen\emptyset cos\theta, \rho sen\emptyset sen\theta, \rho cos\emptyset)\rho^2 sen\emptyset d\rho d\theta d\emptyset$$

Donde $E = \{(\rho, \theta, \emptyset): \alpha \le \theta \le \beta, c \le \emptyset \le d, g_1(\theta, \emptyset) \le \rho \le g_2(\theta, \emptyset)\}$

EJEMPLO

Evalúe $\iiint_E zdv$, donde E está entre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

Solución



Se transforman las ecuaciones cartesianas que representan las esferas a coordenadas esféricas.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$

Obteniéndose que $E = \left\{(\rho,\theta,\emptyset):\ 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Por tanto,

$$\iiint_E z\,dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (\rho\cos\emptyset)\rho^2 sen\emptyset\, d\rho d\theta d\emptyset = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \rho^3 sen\emptyset\cos\emptyset\, d\rho d\theta d\emptyset$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_1^2 sen\emptyset\cos\emptyset\, d\theta d\emptyset = \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\emptyset\cos\emptyset\, d\theta d\emptyset = \frac{15}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\emptyset\cos\emptyset\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\emptyset$$

$$= \frac{15}{4}\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\emptyset\cos\emptyset\, d\emptyset = \frac{15}{8}\pi\frac{sen^2\emptyset}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{16}\pi\left(sen^2\frac{\pi}{2} - sen^2 0\right) = \frac{15}{16}\pi$$

Ejercicios complementarios

1. Evalúe la integral iterada

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^y z e^{-y^2} dx dy dz = \int_0^1\int_0^z z e^{-y^2} x\Big|_0^y dy dz = \int_0^1\int_0^z z e^{-y^2} y\, dy dz$$

$u = -y^2, \quad du = -2ydy$

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^y z e^{-y^2} dx dy dz = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{-z^2} z e^{u} du dz = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-z^2}^{0} z e^{u} du dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z e^{u}\Big|_{-z^2}^{0} dz$$

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^y z e^{-y^2} dx dy dz = \frac{1}{2}\int_0^1 z\left(1 - e^{-z^2}\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(z - z e^{-z^2}\right)dz = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}e^{-z^2}\Big|_0^1\right)$$

$$\int_0^1\int_0^z\int_0^y z e^{-y^2} dx dy dz = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4e}$$

Evalúe la integral triple

2. $\iiint_E yz\cos x^5\, dv$, donde $E = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, x \le z \le 2x\}$

Solución

Observando el conjunto E se debe usar el orden de integración *dzdydx* o *dydzdx*. Entonces,

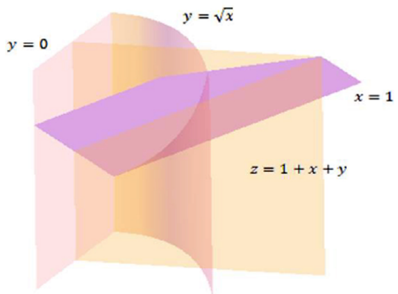
$$\iiint_E yz\cos x^5 dv = \int_0^1\int_0^x\int_x^{2x} yz\cos x^5 dz dy dx = \int_0^1\int_0^x y\cos x^5 \frac{z^2}{2}\Big|_x^{2x} dy dx$$

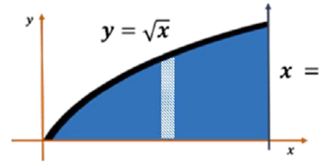
$$\iiint_E yz\cos x^5\, dv = \int_0^1\int_0^x y\cos x^5 \frac{3x^2}{2} dy dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x \cos x^5 x^2\, dx = \frac{3}{4}\int_0^1 \cos x^5 x^4 dx$$

Si $u = x^5$, $du = 5x^4\ dx$

$$\iiint_E yz\cos x^5 dv = \frac{3}{4}\int_0^1 \cos u\frac{du}{5} = \frac{3}{20}\operatorname{sen} u\Big|_0^1 = \frac{3}{20}(\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0) = \frac{3}{20}\operatorname{sen} 1$$

3. $\iiint_E 6xydv$, donde E está bajo el plano $z = 1 + x + y$ y arriba de la región del plano xy limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$





Solución

Analizando la descripción del sólido E, se utiliza el orden de integración $dA = dzdydx$, donde

$0 \le z \le 1 + x + y$, $0 \le y \le \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$

Entonces,

$$\iiint_E 6xydv = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{1+x+y} 6xydzdydx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} 6xyz\Big|_0^{1+x+y} dydx$$

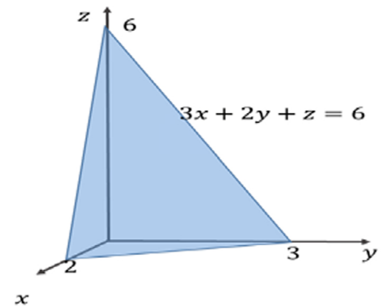
$$\iiint_E 6xydv = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} (6xy + 6x^2y + 6xy^2)dydx = \int_0^1 (3xy^2 + 3x^2y^2 + 2xy^3\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

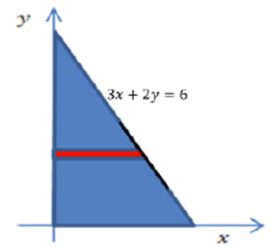
$$\iiint_E 6xydv = \int_0^1 \left(3x^2 + 3x^3 + 2x^{\frac{5}{2}}\right)dx = x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{7} = \frac{65}{28}$$

4. $\iiint_E xdv$, donde E está limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 2y + z = 6$

Solución

Se integra primero en z $(0 \le z \le 6 - 3x - 2y)$, y luego en cualquiera de las otras dos variables (x o y). Usando el orden $dzdxdy$, se tiene





$$\iiint_E xdv = \int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}}\int_0^{6-3x-2y} xdzdxdy = \int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}} xz\Big|_0^{6-3x-2y} dxdy$$

$$\iiint_E xdv = \int_0^3\int_0^{\frac{6-2y}{3}} (6x - 3x^2 - 2xy)dxdy = \int_0^3 (3x^2 - x^3 - x^2y)\Big|_0^{\frac{6-2y}{3}} dy$$

$$\iiint_E xdv = \int_0^3 \left(3\left(\frac{6-2y}{3}\right)^2 - \left(\frac{6-2y}{3}\right)^3 - \left(\frac{6-2y}{3}\right)^2 y\right)dy$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{1}{3}(36 - 24y + 4y^2) - \frac{1}{27}(216 - 216y + 72y^2 - 8y^3) - \frac{1}{9}(36 - 24y + 4y^2)y\right)dy$$

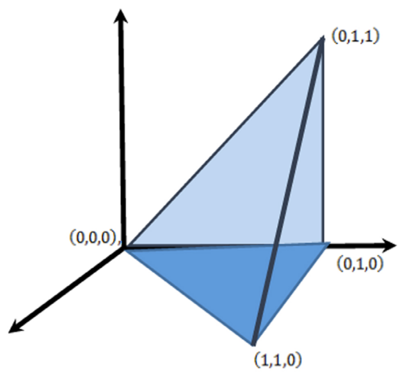
$$\iiint_E xdv = \int_0^3 \left[12 - 8y + \frac{4}{3}y^2 - 8 + 8y - \frac{8}{3}y^2 + \frac{8}{27}y^3 - 4y + \frac{8}{3}y^2 - \frac{4}{9}y^3\right]dy$$

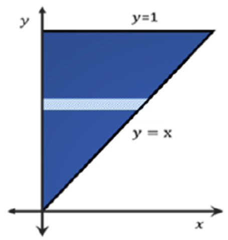
$$= \int_0^3 \left[4 - 4y + \frac{4}{3}y^2 - \frac{4}{27}y^3\right] dy = 4y - 2y^2 + \frac{4}{9}y^3 - \frac{1}{27}y^4 \Big|_0^3 = (12 - 18 + 12 - 3) = 3$$

5. La $\iiint_E xzdv$, donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,1,1)$

Solución

Para integrar inicialmente en z debemos encontrar la ecuación del plano determinado por los puntos $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,1)$.





Para esto se construyen dos vectores y con ellos se halla el vector normal. Por lo tanto,

Sean $\vec{u} = 0i + j + k$, $\vec{v} = i + j + 0k$, entonces $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = -i + j - k$
Si consideramos el origen $(0,0,0)$, se obtiene $-1(x-0)+1(y-0)-1(z-0)=0$.
Luego, la ecuación del plano es $-x + y - z = 0$

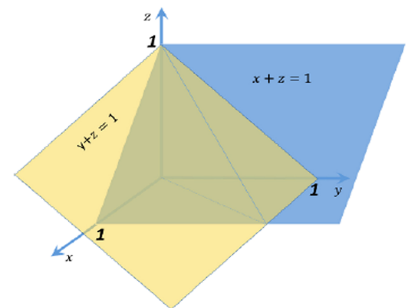
Ahora, analizando la región D sobre el plano xy se observa que es más aconsejable considerar los rectángulos horizontalmente. Por consiguiente, se utiliza el orden de integración $dzdxdy$, donde $0 \le z \le -x + y$, $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$. De ahí,

$$\iiint_E xzdv = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{-x+y} xzdzdxdy = \int_0^1 \int_0^y x\frac{z^2}{2}\Big|_0^{-x+y} dxdy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2}x(x^2 - 2xy + y^2)dxdy$$

$$\iiint_E xzdv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^y (x^3 - 2x^2y + xy^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\right)\Big|_0^y dy$$

$$\iiint_E xzdv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{y^4}{4} - \frac{2y^4}{3} + \frac{y^4}{2}\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{12}y^4\right) dy = \frac{1}{24}\frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}\frac{1}{5} = \frac{1}{120}$$

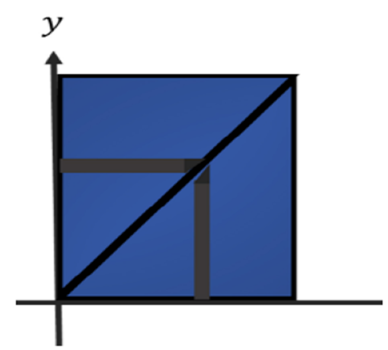
6. $\iiint_E zdv$, donde E está limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, $x + z = 1$



Solución

Al observar el sólido E se analiza a z como la primera variable de integración, teniendo en cuenta que existen dos superficies como límite superior, de tal manera que de la integral triple se deducen dos integrales iteradas.

Para extraer los límites para las variables x y y sobre el plano xy, obsérvese que el cuadrado se divide por la recta $y = x$ en dos triángulos, en donde sobre cada uno de ellos están las superficies $z = 1 - x$ y $z = 1 - y$. Si en la región D_1 se consideran rectángulos verticales y en la región D_2 rectángulos horizontales se obtiene



$$\iiint\limits_E z\,dv = \int_0^1\int_0^x\int_0^{1-x} z\,dz\,dy\,dx + \int_0^1\int_0^y\int_0^{1-y} z\,dz\,dx\,dy$$

Las dos integrales iteradas son equivalentes, lo cual implica que se puede resolver una de las dos y se multiplica por dos. Entonces,

$$\iiint\limits_E z\,dv = 2\int_0^1\int_0^x\int_0^{1-x} z\,dz\,dy\,dx = 2\int_0^1\int_0^x \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x} dy\,dx = \int_0^1\int_0^x (1-x)^2\,dy\,dx$$

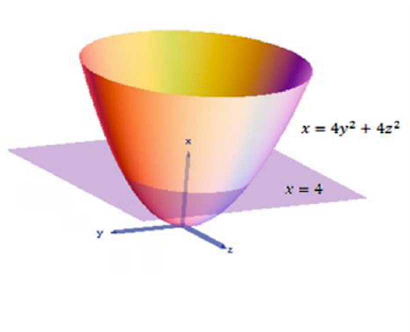
$$\iiint\limits_E z\,dv = \int_0^1 (1-2x+x^2)y\Big|_0^x dx = \int_0^1 (1-2x+x^2)x\,dx = \int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx$$

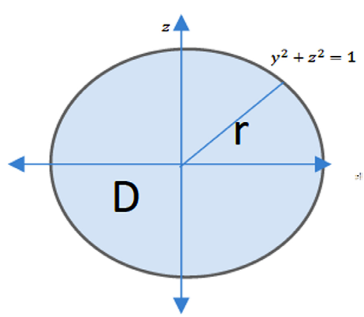
$$\iiint\limits_E z\,dv = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

7. $\iiint_E x\,dv$, donde E está limitado por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$

Solución

La curva de intersección del paraboloide y el plano es $y^2 + z^2 = 1$.





La integral triple se evalúa, en primera instancia, en la variable x (eje sobre el cual abre el paraboloide), y se plantea la integral doble externa, la cual es más fácil de resolverla en coordenadas polares. Por consiguiente,

$$\iiint\limits_E x\,dv = \iint\limits_D \left[\int_{4(y^2+z^2)}^{4} x\,dx\right] dA = \iint\limits_D \left[\frac{1}{2}x^2\Big|_{4(y^2+z^2)}^{4}\right] dA = \iint\limits_D [8 - 8(y^2+z^2)^2]\,dA$$

$$\iiint\limits_E x\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [8-8r^4]\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [8r-8r^5]\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[4r^2 - \frac{4}{3}r^6\right]\Big|_0^1 d\theta$$

$$\iiint\limits_E x\,dv = \int_0^{2\pi}\left[4 - \frac{4}{3}\right] d\theta = \frac{8}{3}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}$$

Observación

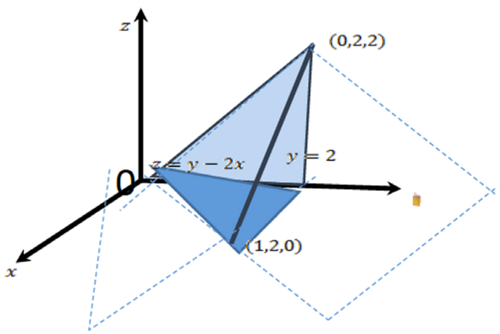
En el fondo la integral triple se evalúa usando coordenadas cilíndricas tomando a x como variable invariante.

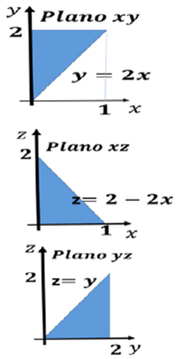
Exprese la integral $\iiint_E f(x,y,z)\,dv$ como una integral iterada en seis formas diferentes, donde E es el sólido limitado por las superficies dadas

8. $z = 0,\ x = 0,\ y = 2,\ z = y - 2x$

Solución

La gráfica del sólido E y su proyección en los tres planos coordenados son:





Entonces,

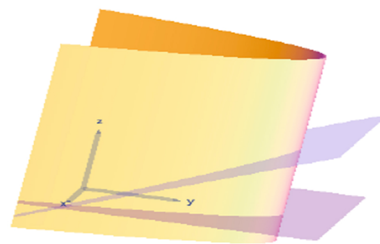
$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \int_0^1\int_{2x}^2\int_0^{y-2x} f(x,y,z)dzdydx = \int_0^2\int_0^{\frac{y}{2}}\int_0^{y-2x} f(x,y,z)dzdxdy$$

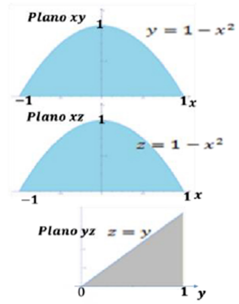
$$= \int_0^1\int_0^{2-2x}\int_{2x+z}^2 f(x,y,z)dydzdx = \int_0^2\int_0^{1-\frac{z}{2}}\int_{2x+z}^2 f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int_0^2\int_0^y\int_0^{\frac{y-z}{2}} f(x,y,z)dxdzdy = \int_0^2\int_z^2\int_0^{\frac{y-z}{2}} f(x,y,z)dxdydz$$

9. $z = 0, z = y, y = 1 - x^2$

Solución





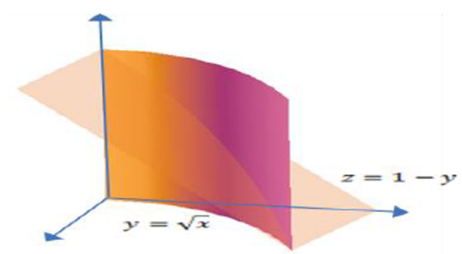
Entonces,

$$\iiint_E f(x,y,z)dv = \int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_0^y f(x,y,z)dzdydx = \int_0^1\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\int_0^y f(x,y,z)dzdxdy$$

$$= \int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_z^{1-x^2} f(x,y,z)dydzdx = \int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_z^{1-x^2} f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int_0^1\int_0^y\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y,z)dxdzdy = \int_0^1\int_z^1\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y,z)dxdydz$$

10. La figura siguiente muestra la región de integración para la integral dada

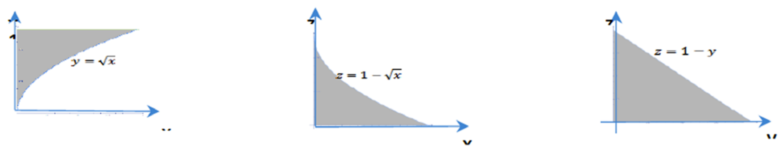


$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$$

Escriba otras cinco integrales iteradas equivalentes.

Solución

Al igual que en los dos ejercicios anteriores se dibuja la proyección del sólido sobre los tres planos coordenados



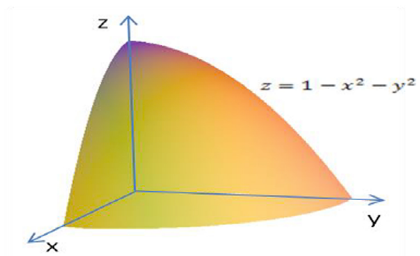
Entonces,

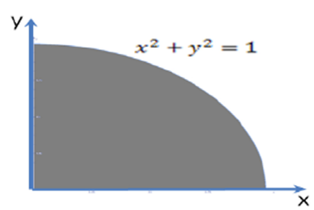
$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdxdy = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)dydzdx = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x,y,z)dxdzdy = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)dxdydz$$

Utilice coordenadas cilíndricas

11. Evalúe $\iiint_E (x^3 + xy^2)\ dv$, donde E es el sólido del primer octante que está debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$





Solución

Como el sólido es simétrico con respecto al eje z, se deja invariante a z y se transforman las variables x e y a coordenadas polares. Es decir, si $x = r\cos\theta, y = r\,sen\,\theta, z = z$, se obtiene

$$\iiint_E (x^3 + xy^2)dv = \iiint_E x(x^2 + y^2)dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} (r\cos\theta)(r^2)rdzdrd\theta$$

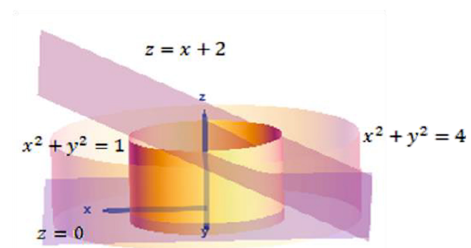
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r^4\cos\theta dzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^4\cos\theta z\Big|_0^{1-r^2} drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r^4 - r^6)\cos\theta drd\theta$$

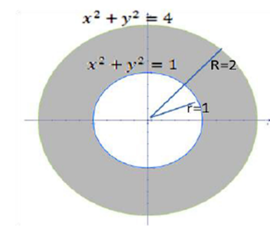
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7}\right)\Big|_0^1 \cos\theta d\theta = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2}{35} sen\,\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{35}\left(sen\frac{\pi}{2} - sen\,0\right) = \frac{2}{35}$$

12. Evalúe $\iiint_E y\,dv$ donde E es el sólido que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, arriba del plano xy, y abajo del plano $z = x + 2$

Solución

Al igual que en el ejercicio anterior se obtiene:





$$\iiint_E ydv = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r\cos\theta + 2} (r\,sen\,\theta)rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{r\cos\theta + 2} r^2\,sen\,\theta\,dzdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\, z \Big|_0^{r\cos\theta+2} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^3\cos\theta \operatorname{sen}\theta + 2r^2 \operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta$$

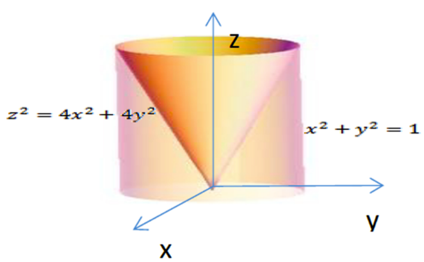
$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} r^4\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen}\theta\right)\Big|_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{4}\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \frac{14}{3} \operatorname{sen}\theta\right)d\theta$$

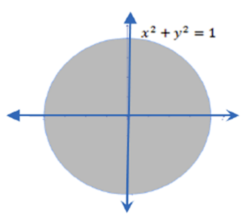
$$= -\frac{15}{4}\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{14}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

13. Evalúe $\iiint_E x^2\,dv$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, arriba del plano $z=0$, y abajo del cono $z^2=4x^2+4y^2$

Solución

Si $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, z = z$, entonces





$$\iiint_E x^2\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} (r\cos\theta)^2 r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2r} r^3\cos^2\theta\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\, z\Big|_0^{2r} dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^4\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{5} r^5\cos^2\theta\Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

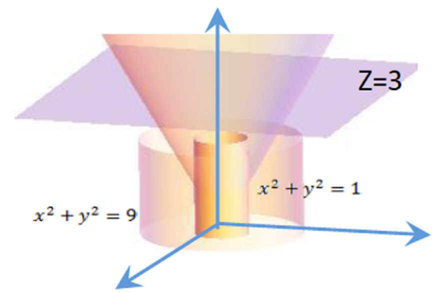
$$= \frac{1}{5}\left(\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{5}\left[\left(2\pi+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 4\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right)\right] = \frac{1}{5}(2\pi) = \frac{2}{5}\pi$$

14. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

$$\int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_r^3 r\,dz\,d\theta\,dr$$

Solución

Analizando los límites de integración se tiene que con respecto a z, el límite inferior es $z = r = \sqrt{x^2+y^2}$ (semicono) y el límite superior es $z = 3$ (paralelo al plano xy). Además, en el plano xy la región está comprendida por: $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$, en el primer cuadrante.



Entonces,

$$\int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_r^3 r\,dz\,d\theta\,dr = \int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} rz\Big|_r^3 d\theta\,dr = \int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3r-r^2)\,d\theta\,dr = \int_1^3 (3r-r^2)\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$\int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_r^3 r\,dz\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\int_1^3(3r-r^2)\,dr = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}r^2-\frac{1}{3}r^3\right)\Big|_1^3 = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{27}{2}-9\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_r^3 r\,dz\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{20}{6}\right) = \frac{5}{3}\pi$$

15. Transforme a coordenadas cilíndricas y evalúe la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx$$

Solución

El sólido está limitado en z por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - y^2$, en donde la intersección es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La proyección de la circunferencia sobre el plano xy representa la región D donde se extraen los límites para r y θ. Por tanto, los límites en coordenadas cilíndricas son:

$$r^2 \le z \le 2 - r^2, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Entonces,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{2-r^2}(r^2)^{\frac{3}{2}}\,rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4dzdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} r^4z\Big|_{r^2}^{2-r^2} drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(2r^4-2r^6)drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5}r^5-\frac{2}{7}r^7\right)\Big|_0^1 d\theta$$

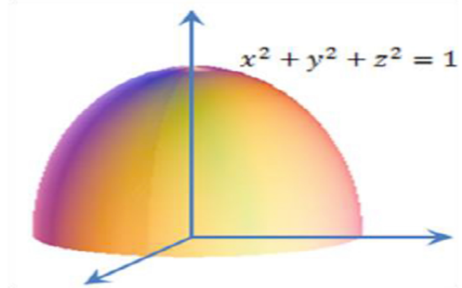
$$= \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{35}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{35}\pi$$

Utilice coordenadas esféricas.

16. Evalúe $\iiint_E (x^2 + y^2)dv$, donde E es la región semiesférica que está arriba del plano xy y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solución

Como la región E es la mitad positiva de la esfera dada se tiene que



$$0 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Si $x = \rho sen\emptyset cos\theta, y = \rho sen\emptyset sen\,\theta, z = \rho cos\emptyset$, entonces $x^2 + y^2 = \rho^2\ sen^2\emptyset$

Luego,

$$\iiint_E (x^2+y^2)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}(\rho^2\,sen^2\emptyset)\rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1}\rho^4 sen^3\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 sen^3\emptyset d\emptyset d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3\emptyset d\emptyset d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2\emptyset)sen\emptyset d\emptyset d\theta$$

Si $u = cos\emptyset$, $du = -sen\emptyset d\emptyset$, entonces

$$\iiint_E (x^2+y^2)dv = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_1^{0}(1-u^2)(-du)d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1-u^2)dud\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{1}{5}\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{15}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{15}2\pi = \frac{4}{15}\pi$$

17. Evalúe $\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dv$, donde E es el sólido que se encuentra entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$ en el primer octante.

Solución

Se transforman las ecuaciones cartesianas de las esferas a coordenadas esféricas. Esto es,

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1,\ x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2$$

Además, los límites de integración son

$1 \le \rho \le 2,\ \ 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2}$ (eje positivo z), $\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$(primer cuadrante del plano xy)

Luego, si $x=\rho sen\emptyset cos\theta$, $y=\rho sen\emptyset sen\theta$, $z=\rho cos\emptyset$, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. Entonces,

$$\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2(\rho sen\emptyset cos\theta)\,e^{(\rho^2)^2}\rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 e^{\rho^4}\rho^3 sen^2\emptyset cos\theta d\rho d\emptyset d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{16} e^u sen^2\emptyset cos\theta\frac{du}{4}d\emptyset d\theta$$

Donde $u=\rho^4$, $du=4\rho^3\,d\rho$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}e^u\Big|_1^{16}\ sen^2\emptyset cos\theta d\emptyset d\theta=\frac{1}{4}(e^{16}-e)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-cos2\emptyset}{2}\right)cos\theta d\emptyset d\theta$$

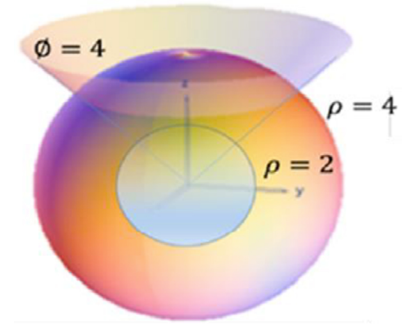
$$=\frac{1}{8}(e^{16}-e)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\emptyset-\frac{1}{2}sen2\emptyset\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta d\theta=\frac{1}{8}(e^{16}-e)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{16}(e^{16}-e)\pi\left(sen\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{16}(e^{16}-e)\pi$$

18. Evalúe $\iiint_E xyzdv$, E está entre las esferas $\rho=2$, $\ \rho=4$ y sobre el cono $\varphi=\frac{\pi}{3}$

Solución

Los límites de las variables son: $2 \le \rho \le 4, 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \theta \le 2\pi$



$$\iiint_E xyz\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^4\rho^3 sen^2\emptyset cos\emptyset sen\theta cos\theta\,\rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$\iiint_E xyz\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^4\rho^5 sen^3\emptyset cos\emptyset sen\theta cos\theta d\rho d\emptyset d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\rho^6}{6}\Big|_2^4 sen^3\emptyset cos\emptyset sen\theta cos\theta d\emptyset d\theta$$

$$\iiint_E xyz\,dv=672\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}sen^3\emptyset cos\emptyset sen\theta cos\theta d\emptyset d\theta=672\int_0^{2\pi}\frac{sen^4\emptyset}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}sen\theta cos\theta d\theta$$

$$\iiint_E xyz\,dv=\frac{672}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\int_0^{2\pi}sen\theta cos\theta d\theta=\frac{189}{2}\frac{sen^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{189}{4}(sen^2 2\pi-sen^2 0)=0$$

19. Transforme a coordenadas esféricas y evalúe la integral

$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dzdxdy$$

Solución

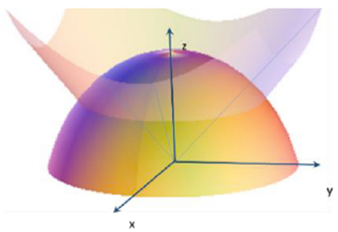
Los límites de integración para la variable z son

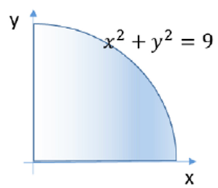
$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2}$ (inferior el cono y superior la esfera)

La intersección de las dos superficies es

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{18-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 18-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=9$

Una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 3. Observando los límites para x e y, se tiene que solamente se considera la parte de la circunferencia ubicada en el primer cuadrante. Entonces la región sólida E está dada





$$0 \le \rho \le \sqrt{18}\ (x^2+y^2+z^2=18),$$

$$0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{4}\left(dentro\ del\ cono\ z=\sqrt{x^2+y^2}\right),\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Por tanto,

$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)dzdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{18}} (\rho^2)\rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{18}} \rho^4 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^5}{5} sen\emptyset \Big|_0^{\sqrt{18}} d\emptyset d\theta = \frac{(\sqrt{18})^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -cos\emptyset \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{(\sqrt{18})^5}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\sqrt{18})^5}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2} = 486\left(\frac{\sqrt{2}-1}{5}\right)\pi$$

20. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

Solución

Como la región sólida E es todo el espacio (R^3), entonces $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \emptyset \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2+y^2+z^2}e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^3 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sen\emptyset d\emptyset \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho$$

$$= \left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-cos\emptyset\Big|_0^{\pi}\right)\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho = 4\pi\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho$$

La integral se resuelve usando integración por partes, donde $u=\rho^2$ y $dv = e^{-\rho^2}\rho d\rho$

$$= 4\pi \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\rho^2}\rho^3 d\rho = 4\pi \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\rho^2 e^{-\rho^2} - \frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^b\right)$$

$$= 4\pi \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^{\rho^2}}\Big|_0^b\right) = 4\pi \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{b^2}{e^{b^2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^{b^2}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 4\pi\left(-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^{b^2}} - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{b^2}} + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\right)$$

Para evaluar el primer límite se aplica la regla de L'Hopital dos veces y se muestra que el resultado es 0, el segundo límite vale 0 y el tercero $\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 4\pi\left(0+0+\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

Ejercicios propuestos

Evalúe las integrales iteradas.

1. $\displaystyle\int_0^2\int_1^z\int_0^{\sqrt{\frac{x}{z}}} 2xyzdydxdz$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^z\int_0^y sen\,(x+y+z)\,dxdydz$

3. $\displaystyle\int_{-2}^4\int_{x-1}^{x+1}\int_0^{\sqrt{\frac{2y}{x}}} 3xyz\;dzdydx$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{sen2z}^0\int_0^{2yz} sen\left(\frac{x}{y}\right)dxdydz$

5. $\displaystyle\int_1^4\int_0^1\int_0^x 2ze^{-x^2}dydxdz$

6. $\displaystyle\int_1^4\int_1^{e^2}\int_0^{\frac{1}{xz}} \ln z\,dydzdx$

7. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 r\cos\theta\;dr d\theta dz$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2\int_0^{2-r} rz\;dzdrd\theta$

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos^2\theta}\int_0^{4-r^2} rsen\theta dxdrd\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\int_0^2 e^{-\rho^3}\rho^2 d\rho d\theta d\emptyset$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\emptyset} \rho^2 sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\theta} \rho^2 sen\emptyset\cos\emptyset\;d\rho d\theta d\emptyset$

Evalúe la integral triple.

13. $\displaystyle\iiint_E (3x-2y)\,dv$

donde E es el tetraedro limitado por $4x + y + 3z = 12$ y los planos coordenados.

14. $\iiint_E y\,dv$ donde E está acotada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$.

15. $\iiint_E 2xy\,dv$ donde E está limitado por $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$.

16. $\iiint_E (x^2 + y^2)\,dv$ donde E está limitado por $z = 6 - x - y, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

17. $\iiint_E x^3 e^{yz} dv$ donde E está acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

18. $\iiint_E xy\,dv$ donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$.

19. $\iiint_E x^2 e^y dv$ donde E está acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.

20. $\iiint_E (x + 2y)\,dv$ donde E está acotada por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $x = z, x = y, z = 0$.

21. $\iiint_E z\,dv$ donde E está acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0, y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante.

22. $\iiint_E (y + 2)\,dv$ donde E es la región bajo $x + z = 4$, situada en el primer octante entre $y = 1$ y $y = 2$.

23. $\iiint_E xydv$ donde $E = \{(x, y, z): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le x, 0 \le z \le x + y\}$

24. $\iiint_E xy\,dv$ donde E es el tetraedro sólido con vértices $(0,0,0)$, $(1/3,0,0)$, $(0,1,0),(0,0,1)$.

Dar los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida E.

$$\iiint_E xyz\,dv$$

25. $E = \{(x, y, z):\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le 3\}$

26. $E = \{(x, y, z):\ 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4, 0 \le z \le 2 - x\}$

27. $E = \{(x, y, z):\ x^2 + y^2 \le 9, 0 \le z \le 4\}$

28. $E = \{(x, y, z):\ 0 \le x \le 1, y \le 1 - x^2, 0 \le z \le 6\}$

Use coordenadas cilíndricas para evaluar:

29. $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,dv$ E es la región que se halla dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -10$ y $z = 10$.

30. $\iiint_E e^z dv$ donde E está encerrada por el paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 5$ y el plano xy.

31. $\iiint_E x\,dv$ donde E está encerrada por los planos $z = 0, z = x + y + 3$ y por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$.

32. $\iiint_E y^2z^2\,dv$ donde E está acotada por el paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ y el plano $x = 0$.

33. $\iiint_E z\,dv$ donde E está acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ y el cilindro circular $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.

34. $\iiint_E yz\,dv$ donde E está arriba del plano $z = 0$, debajo del plano $z = y$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

35. $\iiint_E e^{x^2+y^2}\,dv$ donde E es la región interior a $x^2 + y^2 = 4$ y situada entre $z = 1$ y $z = 2$.

36. $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dv$ donde E es la región entre $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 0$, e interior a $x^2 + y^2 = 4$.

37. $\iiint_E e^z\,dv$ donde E es la región interior a $x^2 + y^2 = 4$ y situada entre $z = x^2 + y^2$ y $z=0$.

38. $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,e^z\,dv$ donde E es la región interior a $x^2 + y^2 = 1$ y situada entre $z = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ y $z = 0$.

39. $\iiint_E 2x\,dv$ donde E es la región entre $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 0$, e interior a $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

40. $\iiint_E \frac{y}{x}\,dv$ donde E es la región entre $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 0$, e interior a $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

41. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydx$

42. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\,dzdxdy$

Use coordenadas esféricas para evaluar:

43. $\iiint_E (x^2+y^2+z^2)\,dv$ donde E es una esfera con centro en el origen y radio 5.

44. $\iiint_E (9-x^2-y^2)\,dv$ donde E es la semiesfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

45. $\iiint_E z\,dv$ donde E yace entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

46. $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dv$ donde E está encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el primer octante.

47. $\iiint_E x^2\,dv$ donde E está acotada por el plano xz y los hemisferios $y = \sqrt{9-x^2-z^2}$ y $y = \sqrt{16-x^2-z^2}$.

48. $\displaystyle\iiint_E z^3\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$ donde E es la semiesfera sólida que está arriba del plano xy y tiene centro en el origen y radio 1.

49. $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$ donde E es el sólido que está acotado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$

50. $\displaystyle\iiint_E e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv$ donde E está limitada por el hemisferio dado por $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y el plano xy.

51. $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}dv$ donde E está limitada por $x^2+y^2+z^2=2$, $z=0$ y el plano xy.

52. $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dv$ donde E es la región interior a las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$.

53. $\displaystyle\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dv$ donde E está limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2$, $z\geq 0$ y el plano xy.

54. $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$ donde E está limitada por el hemisferio dado por $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ y el plano xy.

55. $\displaystyle\iiint_E \cos(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dv$ donde E es la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2\leq 1$

56. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dzdydx$

57. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z+y^2z+z^3)\,dzdxdy$

Convertir la integral triple de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y esféricas, y evaluar la integral más sencilla

58. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4} x\,dzdydx$

59. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$

60. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$

61. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\,dzdydx$

62. Determinar el valor de a en la integral triple

$$\int_0^1\int_0^{3-a-y^2}\int_a^{4-x-y^2} dzdxdy=\frac{14}{15}$$

63. Evalúe $\displaystyle\iiint_E (xy+xz+yz)\,dzdxdy$

Donde la región sólida es $E=\left\{(x,\ y,\ z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$

64. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar $\iiint_E z\sqrt{x^2+y^2}\,dv$.

Donde E es la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y los planos $y = 0$, $z = 0$ y $z = 3$.

65. Utilice coordenadas esféricas para evaluar $\iiint_E z\sqrt{x^2+y^2}\,dv$
Donde E es la parte interna de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

66. De la integral $\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$

a) Dibuje el sólido.
b) Cambie el orden de integración indicado a $dzdxdy$ y $dydxdz$.

Sección 8.4. Aplicaciones de la integral triple y cambio de variables

Nuestro primer objetivo es dar un significado geométrico a la integral triple. Recordando $\iint_R dA$ representa el área de una región R, entonces de manera semejante se debe observar que si $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in E$, se tiene que $\iiint_E dv$ representa el volumen del sólido E.

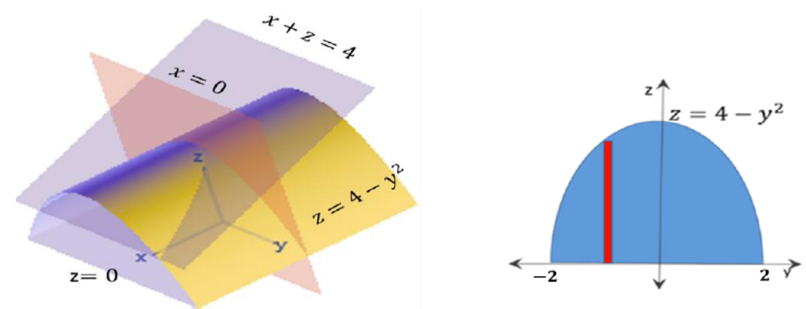
EJEMPLO

Use la integral para hallar el volumen del sólido E limitado por las superficies

$$z = 4 - y^2, \quad x + z = 4, \quad x = 0, \quad z = 0$$

Solución

En este caso, es conveniente analizar el sólido primero en x, cuyos límites son desde $x = 0$, hasta el plano $x = 4 - z$.



Al proyectar el sólido sobre el plano yz se obtiene la región limitada por la parábola

$z = 4 - y^2$ y el eje y. Por tanto, tomando el orden de integración $dxdzdy$, se tiene

$$V = \iiint_E dV = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}\int_{0}^{4-z} dxdzdy = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2} x\Big|_0^{4-z} dzdy = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-y^2}(4-z)dzdy$$

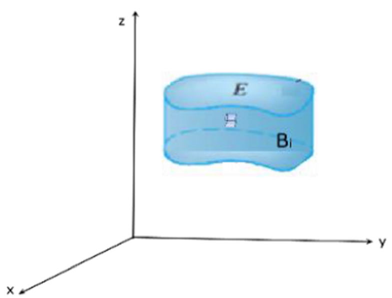
$$V = \int_{-2}^{2}\left(4z - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{4-y^2} dy = \int_{-2}^{2}\left[4(4-y^2) - \frac{1}{2}(4-y^2)^2\right]dy$$

$$V = \int_{-2}^{2}\left(16 - 4y^2 - 8 + 4y^2 - \frac{1}{2}y^4\right)dy = \int_{-2}^{2}\left(8 - \frac{1}{2}y^4\right)dy$$

$$V = 8y - \frac{1}{10}y^5\Big|_{-2}^{2} = \left(16 - \frac{16}{5}\right) - \left(-16 + \frac{16}{5}\right) = 32 - \frac{32}{5} = \frac{128}{5}\ u^3$$

Masa y centro de masa

Los conceptos de masa y centro de masa de una lámina se generalizan a regiones sólidas. Sea $\rho(x, y, z)$ la función densidad (masa por unidad de volumen) en el punto (x, y, z).



La masa y los primeros momentos con respecto a los planos coordenados de cada subcaja B_i están dados

- $m(B_i) = \rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$
- $M_{xy}(B_i) = z_i\,\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$
- $M_{xz}(B_i) = y_i\,\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$
- $M_{yz}(B_i) = x_i\,\rho(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$

Por lo tanto, la masa y los primeros momentos respecto de los planos coordenados de la región sólida E están determinados por

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)dv, \quad M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)dv, \quad M_{xz} = \iiint_E y\rho(x,y,z)dv$$

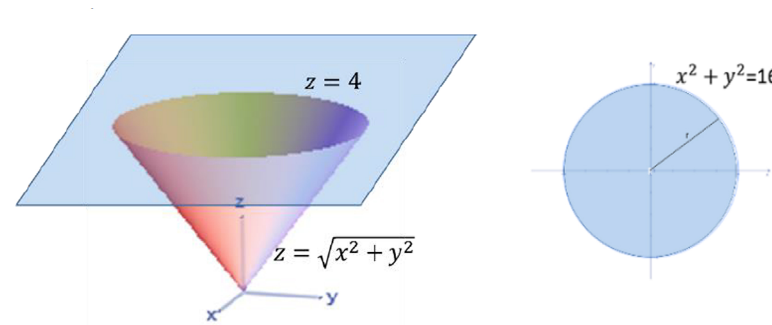
$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)dv$$

Luego, las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ son:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m},\ \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

EJEMPLO

Halle el centro de masa del sólido de densidad constante k limitado por las gráficas del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$.



Solución

En este caso es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para evaluar las integrales triples. Si $x = r\cos\theta, y = r\,sen\,\theta, z = z$, entonces

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)dv = \iiint_E k dv = k\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 r dz dr d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^4 rz\Big|_r^4 dr d\theta$$

$$m = k\int_0^{2\pi}\left(2r^2 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^4 d\theta = k\int_0^{2\pi}\left(32 - \frac{64}{3}\right)d\theta = k\int_0^{2\pi}\frac{32}{3}d\theta = k\left(\frac{32}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = k\left(\frac{64}{3}\pi\right)$$

Momento con respecto al plano *xy*

$$M_{xy}=\iiint_E z\rho(x,y,z)dv=\iiint_E kzdv=k\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 rzdzdrd\theta=k\int_0^{2\pi}\int_0^4 r\frac{z^2}{2}\Big|_r^4 drd\theta$$

$$M_{xy}=k\int_0^{2\pi}\int_0^4\left(8r-\frac{1}{2}r^3\right)drd\theta=k\int_0^{2\pi}\left(4r^2-\frac{1}{8}r^4\right)\Big|_0^4 d\theta=k\int_0^{2\pi}(64-32)d\theta$$

$$M_{xy}=k\int_0^{2\pi}32d\theta=k\left(32\,\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=k(64\pi)$$

Momento con respecto al plano xz

$$M_{xz}=\iiint_E y\rho(x,y,z)dv=\iiint_E kydv=k\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 r^2\,sen\,\theta\,dzdrd\theta$$

$$M_{xz}=k\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\,sen\,\theta\,z\Big|_r^4 drd\theta=k\int_0^{2\pi}\int_0^4(4r^2-r^3)\,sen\,\theta\,drd\theta$$

$$M_{xz}=k\int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\Big|_o^4\right)sen\,\theta\,d\theta=k\int_0^{2\pi}\left(\frac{256}{3}-64\right)sen\,\theta\,d\theta=\frac{64}{3}k\int_0^{2\pi}sen\,\theta\,d\theta$$

$$M_{xz}=\frac{64}{3}k\left(-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{64}{3}k(0)=0$$

Momento con respecto al plano yz

$$M_{yz}=\iiint_E x\rho(x,y,z)dv\iiint_E kxdv=k\int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 r^2\cos\theta\,dzdrd\theta$$

$$M_{yz}=k\int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\cos\theta\,z\Big|_r^4 drd\theta=k\int_0^{2\pi}\int_0^4(4r^2-r^3)\cos\theta\,drd\theta$$

$$M_{yz}=k\int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\Big|_o^4\right)\cos\theta\,d\theta=\frac{64}{3}k\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$M_{yz}=\frac{64}{3}k\left(sen\,\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{64}{3}k(0)=0$$

Luego,

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{0}{\frac{64}{3}\pi k}=0,\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{0}{\frac{64}{3}\pi k}=0,\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{64\pi k}{\frac{64}{3}\pi k}=3$$

Momentos de inercia

Los momentos de inercia de una región sólida E alrededor de los ejes coordenados son

$$I_x=\iiint_E(y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_y=\iiint_E(x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_z=\iiint_E(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$$

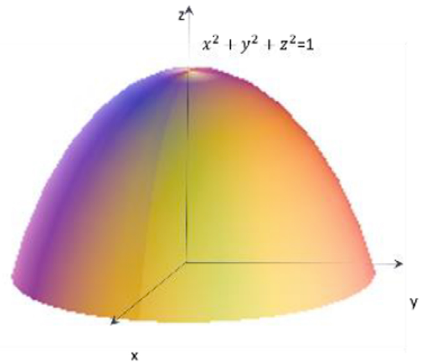
EJEMPLO

Plantee, pero no evalúe la integral triple para hallar el momento de inercia alrededor del eje z, en el hemisferio $x^2+y^2+z^2\leq 1$, $z\geq 0$ con función densidad dada por

$$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Solución

La región sólida E está limitada abajo por el plano $z=0$ y arriba por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.



Utilizando coordenadas esféricas: $x = \rho\ sen\ \emptyset\ \ cos\ \theta, y = \rho\ sen\ \emptyset\ \ sen\ \theta$, $z = \rho\ cos\ \emptyset$, donde $0 \leq \rho \leq 1,\ \ 0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces,

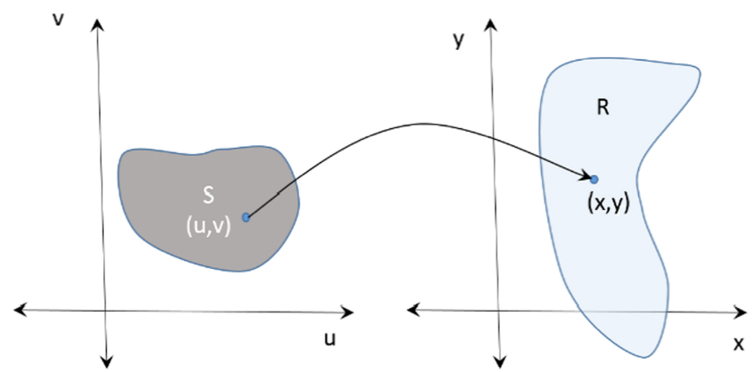
$$I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv = \iiint_E (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dv$$

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (\rho^2\ sen^2\ \emptyset)\sqrt{\rho^2}\ \rho^2\ sen\ \emptyset\ \ d\rho d\emptyset d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^5\ sen^3\ \emptyset\ \ d\rho d\emptyset d\theta$$

Cambio de variables

Una de las primeras herramientas utilizadas para evaluar una integral definida es "sustitución simple". En esta técnica de integración observe que no solo se cambia el integrando sino que además también debe cambiar el intervalo sobre el cual se integra. Hasta el momento ya se han implementado cambios de variables en integrales múltiples. En las integrales dobles se utilizaron coordenadas polares y en las triples coordenadas cilíndricas y esféricas. En cada caso, se terminó simplificando el integrado y transformando la región de integración. Lo que se quiere en esta sección es generalizar el procedimiento para evaluar integrales dobles y triples, donde no es conveniente usar coordenadas polares (integrales dobles) y coordenadas cilíndricas o esféricas (integrales triples). Inicialmente se debe introducir el concepto de "transformación en varias variables".

Una transformación T del plano uv al plano xy es una función que asigna a cada punto del plano uv un único punto del plano xy, determinada por $T(u,v) = (x,y)$, donde $x = g(u,v)$ y $y = h(u,v)$, para algunas funciones g y h. Considérese los cambios de variables en las integrales dobles, definidos por una transformación T de una región S del plano uv sobre una región R del plano xy. Es decir, R es la imagen de S bajo la transformación T



La transformación T es uno a uno $(1-1)$ si para todo punto (x,y) en R existe un único punto (u,v) en S tal que $T(u,v) = (x,y)$. Esto implica que se puede resolver para u y v en términos de x e y (es decir existe una transformación T^{-1} de R en S). Además, solo se consideran las transformaciones para los cuales g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en la región S. La razón principal para introducir un cambio de variables en una integral múltiple es simplificar el cálculo de la integral. Veamos un ejemplo de cómo hallar una transformación T de S en R.

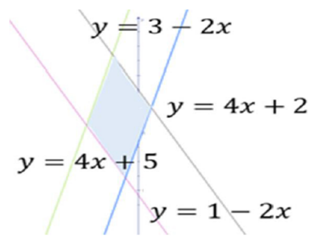
EJEMPLO

Halle una transformación T de una región rectangular S del plano uv en la región R. R está limitada por: $y = 4x+2$, $\ \ y = 4x+5$, $y = 3-2x$, $y = 1-2x$

Solución

En primer lugar se dibuja la región R limitada por las cuatro rectas

Las rectas que determinan la región R se pueden expresar como $y - 4x = 2$, $y - 4x = 5$, $y + 2x = 3$, $y + 2x = 1$. Esto sugiere las sustituciones $u = y - 4x$, $v = y + 2x$.



Estas sustituciones transforman la frontera de R en las rectas $u = 2$,$u = 5$,$v = 3$ y $v = 1$, respectivamente, formando las fronteras de la región S correspondiente, en el plano uv.

Por tanto, resolviendo para x e y se tiene la transformación que se pide. Esto es,

Si $u = y - 4x$, $v = y + 2x$, entonces $v - u = 6x$ y $u + 2v = 3y$, luego la transformación T se define por

$$x = \frac{1}{6}(v - u), \qquad y = \frac{1}{3}(u + 2v)$$

El cambio de variables $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ introduce un factor llamado "jacobiano" de x e y con respecto a u y v.

Definición

Si $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, entonces el jacobiano de x y y con respecto a u y v, denotado por $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ se define

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

EJEMPLO

Hallar el jacobiano para el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ (cambio a coordenadas polares).

Solución

Se encuentran las derivadas parciales de x e y con respecto a r y θ.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

Entonces,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = r$$

A continuación se enuncia el resultado para un cambio de variable en integrales dobles

TEOREMA

Sean R y S las regiones de los planos xy y uv que están relacionadas por las ecuaciones $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ de manera que cada punto en R es la imagen de un único punto en S. Si f es continua en R, g y h tienen derivadas parciales continuas en S, y el jacobiano de la transformación T determinada por las ecuaciones dadas es distinto de cero en S, entonces,

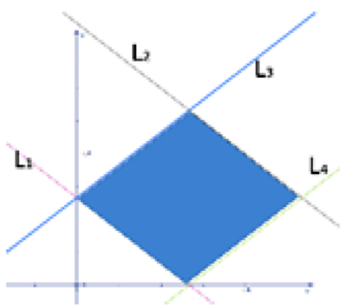
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f\big(g(u,v), h(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du dv$$

Observación

El cambio de variables puede simplificar el proceso de integración. La simplificación se puede dar de varias maneras. Se puede hacer un cambio de variables para simplificar la región R o el integrando $f(x,y)$, o ambos.

EJEMPLO

Evalúe la integral doble $\iint_R (x+y)^2\, sen^2\,(x-y)\, dA$, donde R es la región limitada por el cuadrado cuyos vértices son $(0,1),(1,2),(2,1),(1,0)$



Solución

Obsérvese que las ecuaciones de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 son:

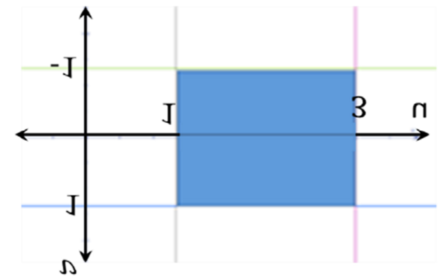
Para L_1: $x+y=1$.
Para L_2: $x+y=3$.
Para L_3: $x-y=1$.
Para L_4: $x-y=-1$.

Realizando las sustituciones $u = x + y$, $v = x - y$, se tiene que $u+v=2x$ y $u-v=2y$.

Entonces, la transformación T se define:

$$x=\frac{1}{2}(u+v),\;\; y=\frac{1}{2}(u-v)$$

la cual transforma la región R del plano xy en la región S del plano uv, donde si $x+y=1$, entonces $u=1$, si $x+y=3$, entonces $u=3$, si $x-y=1$, entonces $v=1$, si $x-y=-1$, entonces $v=-1$



Además, el jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\iint_R (x+y)^2\, sen^2(x-y)\, dA=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{3} u^2\, sen^2\, v\left|-\frac{1}{2}\right| du dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^3}{3}\, sen^2\, v\,\Big|_1^3 dv$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{26}{3}\right)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-\cos 2v}{2}\right)dv=\frac{13}{6}\left(v-\frac{1}{2}sen\, 2v\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{13}{6}\left[\left(1-\frac{1}{2}sen\, 2\right)-\left(-1-\frac{1}{2}sen(-2)\right)\right]=\frac{13}{6}(2-sen\, 2)\approx 2.363$$

El resultado para el cambio de variables en una integral doble se extiende de forma natural para el cambio de variable en una integral triple.

Sea T una transformación que delimita una región S del espacio uvw sobre una región R en el espacio xyz dada por $x=g(u,v,w)$, $y=h(u,v,w)$, $z=k(u,v,w)$. El "jacobiano" de la transformación T se define

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

y el cambio de variable para una integral triple es

$$\iiint_R f(x,y,z)dv=\iiint_S f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

EJEMPLO

Utilice el resultado anterior para deducir la fórmula para integración triple en coordenadas esféricas.

Solución

La transformación T está dada: $x=\rho\, sen\, \emptyset\ \cos\theta$, $y=\rho\, sen\,\emptyset\ sen\theta$, $z=\rho\cos\emptyset$.

Calculando el jacobiano de la transformación T se tiene

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\emptyset)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \emptyset}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \emptyset}\\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \emptyset}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} sen\,\emptyset\cos\theta & -\rho\, sen\,\emptyset\, sen\,\theta & \rho\cos\emptyset\cos\theta\\ sen\,\emptyset\, sen\,\theta & \rho\, sen\,\emptyset\cos\theta & \rho\cos\emptyset\, sen\,\theta\\ \cos\emptyset & 0 & -\rho\, sen\,\emptyset\end{vmatrix}$$

Usando como base la tercera fila para encontrar el determinante obtenemos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\emptyset)}=\cos\emptyset\begin{vmatrix}-\rho\, sen\,\emptyset\, sen\,\theta & \rho\cos\emptyset\cos\theta\\ \rho\, sen\,\emptyset\cos\theta & \rho\cos\emptyset\, sen\,\theta\end{vmatrix}-\rho\, sen\,\emptyset\begin{vmatrix} sen\,\emptyset\cos\theta & -\rho\, sen\,\emptyset\, sen\,\theta\\ sen\,\emptyset\, sen\,\theta & \rho\, sen\,\emptyset\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=\cos\emptyset\,(-\rho^2\ sen\,\emptyset\ \cos\emptyset\ sen^2\theta-\rho^2\ sen\,\emptyset\ \cos\emptyset\cos^2\theta)\\ &\qquad -\rho\ sen\,\emptyset\,(\rho\ sen^2\emptyset\ \cos^2\theta+\rho\, sen^2\emptyset\, sen^2\theta)\\ &=-\rho^2\ sen\,\emptyset\cos^2\emptyset\,(sen^2\theta+\cos^2\theta)-\rho^2\ sen^3\emptyset\,(\cos^2\theta+sen^2\theta)\\ &=-\rho^2\ sen\,\emptyset\,(\cos^2\emptyset+sen^2\emptyset)=-\rho^2\ sen\,\emptyset\end{aligned}$$

Utilizando el resultado para el cambio de variable se tiene,

$$\iiint_R f(x,y,z)dv=\iiint_S f(\rho\, sen\,\emptyset\cos\theta\,,\rho\, sen\,\emptyset\, sen\,\theta\,,\rho\cos\emptyset)|-\rho^2\, sen\,\emptyset|d\rho d\theta d\emptyset$$

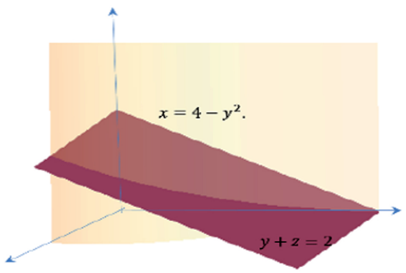
Donde, $|-\rho^2\ sen\,\emptyset\,|=\rho^2\ sen\,\emptyset$

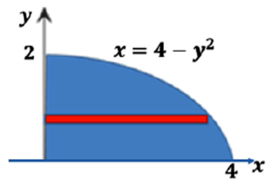
Ejercicios complementarios

Use una integral triple para calcular el volumen de la región sólida dada

1. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y + z = 2$, y el cilindro $x = 4 - y^2$.

Solución





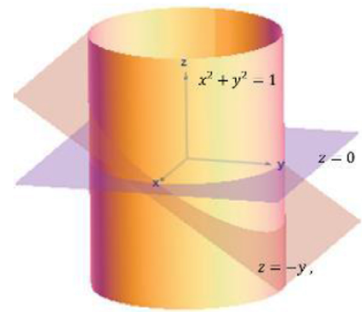
$$V = \iiint_E dv = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_0^{2-y} dz\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} z\Big|_0^{2-y} dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} (2-y)\;dx\,dy$$

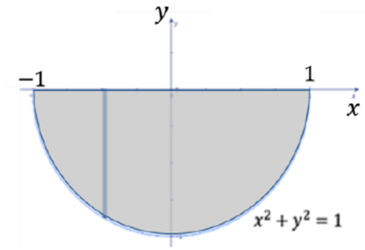
$$V = \int_0^2 (2-y)x\,\Big|_0^{4-y^2} dy = \int_0^2 (2-y)(4-y^2)dy = \int_0^2 (8-4y-2y^2+y^3)dy$$

$$V = 8y - 2y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\,\Big|_0^2 = \left(16 - 8 - \frac{16}{3} + 4\right) - (0) = \frac{20}{3}\;u^3$$

2. De la cuña definida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por los planos $z = -y$, $z = 0$.

Solución





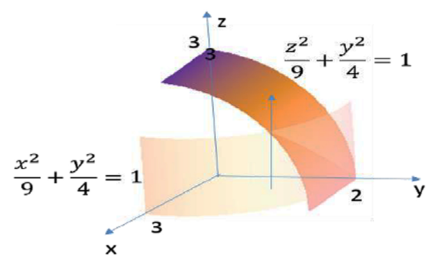
$$V = \iiint_E dv = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \int_0^{-y} dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} z\,\Big|_0^{-y} dydx \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} -y\;dydx$$

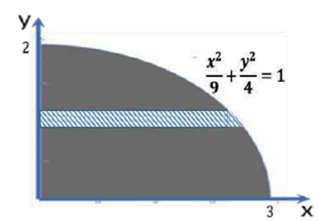
$$V = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{-\sqrt{1-x^2}} ydydx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}y^2\,\Big|_0^{-\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\;u^3$$

3. De la región común a los interiores de los cilindros $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, en el primer octante

Solución





$$V=\iiint_E dv=\int_0^2\int_0^{\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}}\int_0^{\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}} dzdxdy=\int_0^2\int_0^{\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}} z\Big|_0^{\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}}\ dxdy$$

$$V=\int_0^2\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}\ x\Big|_0^{\sqrt{9-\frac{9}{4}y^2}}dy=\int_0^2\left(9-\frac{9}{4}y^2\right)dy=9y-\frac{3}{4}y^3\Big|_0^2$$

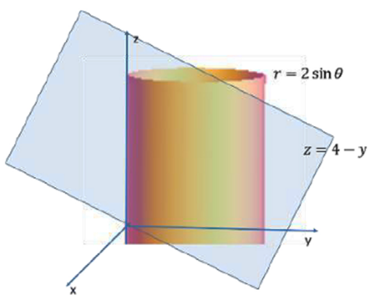
$$V=(18-6)=12\ u^3$$

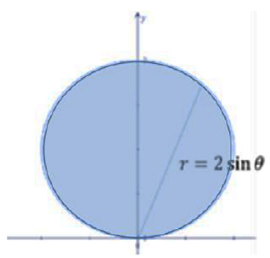
4. De la región acotada por $r=2\,sen\,\theta$, $z=0$, $z=4-y$

Solución

Observando el sólido es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas donde

$$0\le z\le 4-r\,sen\,\theta,\ 0\le r\le 2\,sen\,\theta,\ 0\le\theta\le\pi$$





$$V=\iiint_E dv=\iiint_E r dzdrd\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\,\theta}\int_0^{4-r\,sen\,\theta} rdzdrd\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\,\theta} rz\Big|_0^{4-r\,sen\,\theta}drd\theta$$

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\,\theta}(4r-r^2\,sen\,\theta)\,drd\theta=\int_0^{\pi}(2r^2-\frac{r^3}{3}sen\,\theta\ \Big|_0^{2\,sen\,\theta})\ d\theta$$

$$V=\int_0^{\pi}(8\,sen^2\,\theta-\frac{8}{3}\,sen^4\,\theta)\,d\theta$$

$$V=\int_0^{\pi}\left[8\left(\frac{1-cos\,2\theta}{2}\right)-\frac{8}{3}\left(\frac{1-cos\,2\theta}{2}\right)^2\right]d\theta$$

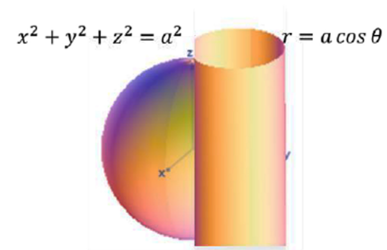
$$V=\int_0^{\pi}(4-4\,cos\,2\theta-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}cos\,2\theta-\frac{2}{3}cos^2\,2\theta)d\theta$$

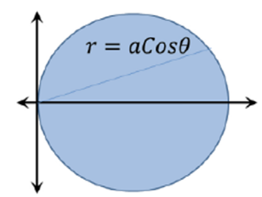
$$V=\int_0^{\pi}\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\,cos\,2\theta-\frac{2}{3}\left(\frac{1+cos\,4\theta}{2}\right)\right)d\theta=\int_0^{\pi}(3-\frac{8}{3}cos\,2\theta-\frac{1}{3}cos\,4\theta)\ d\theta$$

$$V=3\theta-\frac{4}{3}sen\,2\theta-\frac{1}{12}sen\,4\theta\Big|_0^{\pi}=\left(3\pi-\frac{4}{3}sen2\pi-\frac{1}{12}sen4\pi\right)-(0)=3\pi\ u^3$$

5. Del sólido que el cilindro $r=a\,cos\,\theta$ corta a la esfera de radio a con centro en el origen

Solución





Puesto que la región sólida es simétrica con respecto al plano xy consideremos la parte positiva del sólido y multiplicamos por dos el resultado. Además, al igual que el ejercicio anterior se usara coordenadas cilíndricas donde los límites son

$$0\le z\le\sqrt{a^2-r^2},\qquad 0\le r\le acos\theta,\qquad 0\le\theta\le\pi$$

$$V = \iiint_E dv = \iiint_E rdzdrd\theta = 2\int_0^{\pi}\int_0^{acos\theta}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta = 2\int_0^{\pi}\int_0^{acos\theta} rz \Big|_0^{\sqrt{a^2-r^2}} drd\theta$$

Si $u = a^2 - r^2$, $du = -2rdr$

$$V = 2\int_0^{\pi}\int_0^{acos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}\, drd\theta$$

$$V = 2\int_0^{\pi}\int_{a^2}^{a^2 sen^2\theta} \sqrt{u}\frac{du}{-2}d\theta = \int_0^{\pi}\int_{a^2 sen^2\theta}^{a^2} u^{\frac{1}{2}}du\, d\theta = \int_0^{\pi}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2 sen^2\theta}^{a^2} d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}\int_0^{\pi}(a^3 - a^3 sen^3\theta)d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}d\theta - \frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}(1-cos^2\theta)\, sen\,\theta\; d\theta$$

Si $u = cos\,\theta$, *entonces* $du = -sen\,\theta\, d\theta$

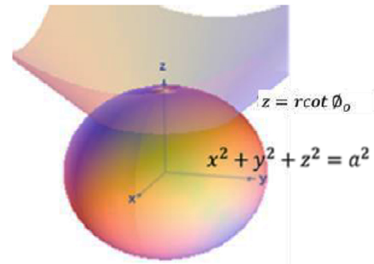
$$V = \frac{2a^3}{3}\theta\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3}a^3\int_{-1}^{1}(1-u^2)du = \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3(u - \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1}) = \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^3\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

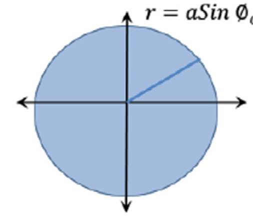
$$V = \frac{2\pi}{3}a^3 - \frac{8}{9}a^3 = \left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)a^3\;\; u^3$$

6. Utilice coordenadas cilíndricas para demostrar que el volumen del sólido limitado arriba por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y abajo por el cono recto $z = rcot\emptyset_0$, donde $0 < \emptyset_0 < \frac{\pi}{2}$, *es*

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - cos\emptyset_0)$$

Solución





Inicialmente se encuentra la ecuación de la curva de intersección de la esfera y el cono

Si $r^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow r^2 + (rcot\emptyset_0)^2 = a^2 \Rightarrow r^2(1 + cot^2\emptyset_0) = a^2 \Rightarrow r^2 csc^2\emptyset_0 = a^2$.

Luego, $r^2 = a^2 sin^2\emptyset_0 \Rightarrow r = asen\emptyset_0$. Por tanto, los límites para las variables son

$$rcot\emptyset_0 \le z \le \sqrt{a^2-r^2}, \qquad 0 \le r \le asen\emptyset_0, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Entonces, el volumen del solido está dado

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{asen\emptyset_0}\int_{rcot\emptyset_0}^{\sqrt{a^2-r^2}} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{asen\emptyset_0} rz\Big|_{rcot\emptyset_0}^{\sqrt{a^2-r^2}} drd\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{asen\emptyset_0} r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{asen\emptyset_0} r^2 cot\emptyset_0 drd\theta$$

Si $u = a^2 - r^2$, $du = -2rdr$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{a^2}^{a^2cos^2\emptyset_0}\sqrt{u}\frac{du}{-2}d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{asen\emptyset_0} r^2 cot\emptyset_0 drd\theta$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{a^2\cos^2\emptyset_0}^{a^2} u^{\frac{1}{2}}du\,d\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^{a\,sen\,\emptyset_0} r^2\cot\emptyset_0\,dr\,d\theta$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{a^2\cos^2\emptyset_0}^{a^2}d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^3\cot\emptyset_0\Big|_0^{a\,sen\emptyset_0}d\theta$$

$$V=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(a^3-a^3\cos^3\emptyset_0)d\theta-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^3\,sen^3\,\emptyset_0\cot\emptyset_0\,d\theta$$

$$V=\left(\frac{1}{3}(a^3-a^3\cos^3\emptyset_0)\,\theta-\frac{1}{3}a^3\,sen^2\,\emptyset_0\cos\emptyset_0\,\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$V=\frac{2\pi}{3}a^3(1-\cos^3\emptyset_0-sen^2\,\emptyset_0\,\cos\emptyset_0)=\frac{2\pi}{3}a^3[1-\cos\emptyset_0\,(\cos^2\emptyset_0+sen^2\,\emptyset_0)]$$

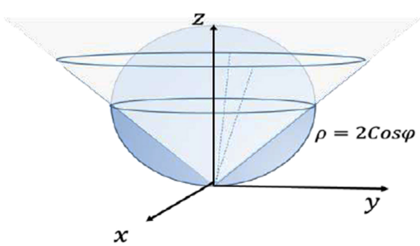
$$V=\frac{2\pi}{3}a^3(1-\cos\emptyset_0)$$

7. Del sólido acotado abajo por la esfera $\rho=2\cos\emptyset$, y arriba por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Solución

La ecuación de la esfera se transforma a coordenadas cartesianas

$$\rho=2\cos\emptyset\Rightarrow\rho^2=2\rho\cos\emptyset\ \Rightarrow\ x^2+y^2+z^2=2z\ \Rightarrow\ x^2+y^2+(z-1)^2=1$$



Para evaluar la integral triple se utilizan coordenadas esféricas, donde los límites son $0\le\rho\le 2\cos\emptyset$, $\frac{\pi}{4}\le\emptyset\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$. Entonces,

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\emptyset}\rho^2 sen\emptyset\,d\rho\,d\emptyset\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{3}\rho^3 sen\emptyset\Big|_0^{2\cos\emptyset}d\emptyset\,d\theta$$

$$V=\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^3\emptyset\,sen\emptyset\,d\emptyset\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi/4}\cos^3\emptyset\,(-sen\emptyset)d\emptyset\,d\theta$$

$$V=\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\emptyset}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4\frac{\pi}{4}-\cos^4\frac{\pi}{2}\right)d\theta=\frac{2}{3}\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{6}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{3}\ u^3$$

8. Halle el volumen de la cuña más pequeña, cortada de una esfera de radio a por dos planos que se intersectan a lo largo de un diámetro y forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$

Solución

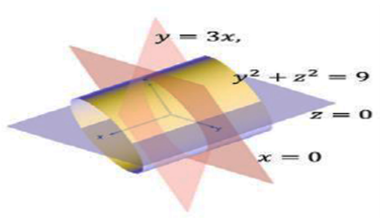
Realicemos las siguientes consideraciones: el centro de la esfera $(0,0,0)$, el diámetro de intersección el eje z, uno de los dos planos es el plano xz, y el otro plano uno que forme un ángulo $\theta=\frac{\pi}{6}$ con el plano xz. Luego, $0\le\rho\le a$, $0\le\emptyset\le\pi$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$, por tanto el volumen de la cuña está dado

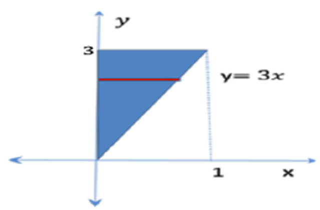
$$V=\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2 sen\emptyset\,d\rho\,d\emptyset\,d\theta=\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\rho^3 sen\emptyset\Big|_0^{a}d\emptyset\,d\theta=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-\cos\emptyset)\Big|_0^{\pi}d\theta$$

$$V=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/6}2d\theta=2\frac{a^3}{3}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{9}a^3\ u^3$$

9. Si E es el sólido limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0, y = 3x, z = 0$ en el primer octante con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ plantee pero no evalúe integrales triples para calcular las siguientes cantidades
a) La masa.
b) El centro de masa.
c) El momento de inercia alrededor del eje z.

Solución





a) Masa

$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)dv = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2+y^2)dzdxdy$$

b) Centro de masa

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)dv = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^3+xy^2)dzdxdy$$

$$M_{xz} = \iiint_E y\rho(x,y,z)dv = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2y+y^3)dzdxdy$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)dv = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2+y^2)zdzdxdy$$

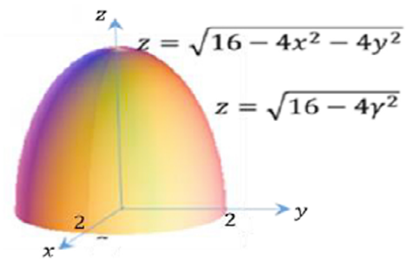
Donde, $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$

c) $I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} (x^2+y^2)^2 dzdxdy$

10. Halle la masa del sólido limitado por el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, siendo la densidad en un punto proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy.

Solución

La función densidad está dada $\rho\ (x, y, z) = kz$. Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene



$$m = \iiint_E \rho(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} kzr\, dzdrd\theta = k\int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{2}z^2 r \Big|_0^{\sqrt{16-4r^2}} drd\theta$$

$$m = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} \int_0^2 (16r - 4r^3)drd\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} (8r^2 - r^4)\Big|_0^2 d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} (32-16)d\theta = 8k\int_0^{2\pi} d\theta$$

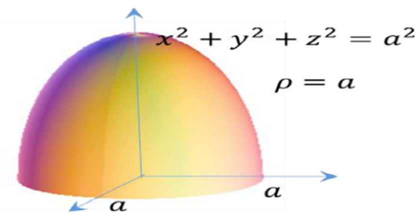
$$m = 8k\ \theta \Big|_0^{2\pi} = 16k\pi$$

11. Sea H una semiesfera sólida de radio a, cuya densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al centro de la base.

a) Calcule la masa de H.
b) Encuentre el centro de masa de H.
c) Calcule el momento de inercia de H alrededor de su eje.

Solución

Consideremos la semiesfera positiva en z con centro en el origen (también es el centro de la base). Es conveniente utilizar coordenadas esféricas debido a la región sólida y la función de densidad dada $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



a) Masa

$$m = \iiint_H \rho(x,y,z)dv = \iiint_H k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a}(\rho)(\rho^2 sen\,\emptyset)d\rho d\emptyset d\theta$$

$$m = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\rho^4}{4}sen\emptyset\Big|_0^a d\emptyset d\theta = \frac{a^4k}{4}\int_0^{2\pi}(-cos\emptyset)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{a^4k}{4}\int_0^{2\pi}(-0+1)d\theta = \frac{a^4k}{4}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$m = \frac{a^4\pi k}{2} = \frac{1}{2}a^4\pi k$$

b) Por simetría del sólido, el centro de masa se encuentra en el eje z, de manera que $M_{yz} = M_{xz} = 0$. Es decir, falta determinar M_{xy}

Entonces,

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)dv = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}(\rho cos\emptyset)(\rho)(\rho^2 sen\emptyset)d\rho d\emptyset d\theta$$

$$M_{xy} = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\rho^4\, sen\emptyset cos\emptyset d\rho d\emptyset d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^5}{5}sen\emptyset cos\emptyset\Big|_0^a d\emptyset d\theta$$

$$M_{xy} = \frac{a^5k}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\emptyset cos\emptyset d\emptyset d\theta = \frac{a^5k}{5}\int_0^{2\pi}\frac{sen^2\emptyset}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{a^5k}{10}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{a^5k}{10}2\pi$$

$$M_{xy} = \frac{a^5\pi k}{5} = \frac{1}{5}a^5k\pi$$

Luego, $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = 0,\ \bar{z} = \frac{\frac{a^5k\pi}{5}}{\frac{a^4k\pi}{2}} = \frac{2}{5}a$

c) $I_z = \iiint_H (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}k(\rho^2 sen^2\emptyset)(\rho)(\rho^2 sen\emptyset)d\rho d\emptyset d\theta$

$$I_z = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\rho^5 sen^3\emptyset\, d\rho\, d\emptyset\, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^6}{6}sen^3\emptyset\Big|_0^a d\emptyset\, d\theta$$

$$I_z = \frac{a^6k}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2\emptyset)\ sen\emptyset\, d\emptyset\, d\theta$$

Si $u = cos\emptyset$, $du = -sen\emptyset\, d\emptyset$

$$I_z = \frac{a^6k}{6}\int_0^{2\pi}\int_1^0 (1-u^2)\,(-du)d\theta = \frac{a^6k}{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-u^2)\,dud\theta = \frac{a^6k}{6}\int_0^{2\pi}\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\theta$$

$$I_z = \frac{a^6k}{6}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\theta = \frac{a^6k}{9}\theta\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{9}a^6k\pi$$

12. Calcule los momentos de inercia para un ladrillo rectangular con dimensiones a,b y c, masa M y densidad constante, si el centro del ladrillo está situado en el origen y las aristas son paralelas a los ejes de coordenados.

Solución

Puesto que el ladrillo E tiene las aristas paralelas a los ejes de coordenadas se puede describir

$$E = \left\{(x,y,z) - \tfrac{a}{2} \le x \le \tfrac{a}{2},\ -\tfrac{b}{2} \le y \le \tfrac{b}{2},\ -\tfrac{c}{2} \le z \le \tfrac{c}{2}\right\},$$

donde la función densidad está dada $\rho(x,y,z) = k$. Entonces,

$$I_x = k\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}(y^2+z^2)\,x\,\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\,dydz = ka\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}(y^2+z^2)\,dydz$$

$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv = k\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)dxdydz$$

$$I_x = ka\int_{-c/2}^{c/2}\left(\tfrac{1}{3}y^3+yz^2\right)\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dz = ka\int_{-c/2}^{c/2}\left(\tfrac{1}{12}b^3+bz^2\right)dz$$

$$I_x = ka\left(\tfrac{1}{12}b^3z+\tfrac{1}{3}bz^3\right)\Big|_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}$$

$$I_x = ka\left(\frac{1}{12}b^3c+\frac{1}{12}bc^3\right) = \frac{1}{12}kabc(b^2+c^2)$$

Usando la simetría del ladrillo se tiene que

$$I_y = \frac{1}{12}kabc(b^2+c^2) \qquad I_z = \frac{1}{12}kabc(b^2+c^2)$$

Cambio de variables en integrales múltiples

13. Encuentre el jacobiano de la transformación

$$x = e^{u-v},\ y = e^{u+v},\ z = e^{u+v+w}$$

Solución

Las primeras derivadas parciales de x,y,z con respecto a u,v y w son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^{u-v},\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -e^{u-v},\qquad \frac{\partial x}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^{u+v},\qquad \frac{\partial y}{\partial v} = e^{u+v},\qquad \frac{\partial y}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{u+v+w},\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = e^{u+v+w},\qquad \frac{\partial z}{\partial w} = e^{u+v+w}$$

De ahí que,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{u-v} & -e^{u-v} & 0 \\ e^{u+v} & e^{u+v} & 0 \\ e^{u+v+w} & e^{u+v+w} & e^{u+v+w} \end{vmatrix}$$

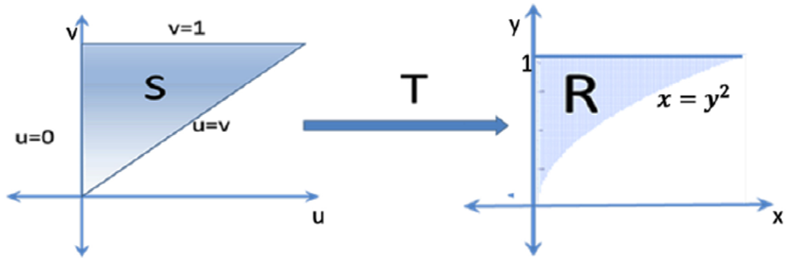
$$= 0 - 0 + e^{u+v+w}\left(e^{u-v}e^{u+v} + e^{u-v}e^{u+v}\right) = e^{u+v+w}\left(2e^{2u}\right) = 2e^{3u+v+w}$$

14. Encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación dada, donde S es la región triangular con vértices (0,0), (1,1), (0,1); $x = u^2$, $y = v$

Solución

El segmento de recta que enlaza los puntos (0,0) y (1,1) en el plano uv tiene como ecuación $v = u$, la cual se transforma en el plano xy en $x = y^2$, $0 \leq y \leq 1$.

El segmento de recta que une los puntos (0,0) y (0,1) en el plano uv tiene como ecuación $u = 0$, la cual se convierte en el plano xy en la ecuación $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$, y el segmento de recta que une los puntos (0,1) y (1,1) tiene ecuación $v = 1$, la cual se transforma en $y = 1$, $0 \leq x \leq 1$



15. Utilice la transformación dada para evaluar la integral $\iint_R (x^2 - xy + y^2)dA$, donde R es la región limitada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; T se define por las ecuaciones

$$x = \sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v, \quad y = \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v$$

Solución

El jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ahora, la región R limitada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$ se transforma en la siguiente región S del plano uv

$$\left(\sqrt{2}\,u - \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)^2 - \left(\sqrt{2}\,u - \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)\left(\sqrt{2}\,u + \sqrt{\frac{2}{3}}v\right) + \left(\sqrt{2}\,u + \sqrt{\frac{2}{3}}v\right)^2 = 2$$

$$2u^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}uv + \frac{2}{3}v^2 - 2u^2 + \frac{2}{3}v^2 + 2u^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}uv + \frac{2}{3}v^2 = 2 \rightarrow 2u^2 + 2v^2 = 2$$

Simplificando obtenemos la ecuación $u^2 + v^2 = 1$. Por tanto,

$$\iint_R (x^2 - xy + y^2)dA = \iint_S (2u^2 + 2v^2)\left|\frac{4}{\sqrt{3}}\right| dudv = \iint_S \frac{8}{\sqrt{3}}(u^2 + v^2)dudv$$

Puesto que la región S es una circunferencia con centro en el origen y radio 1, la integral doble se transforma en coordenadas polares haciendo $u = r\cos\theta$, $v = r\,sen\,\theta$. Entonces,

$$\iint_R (x^2 - xy + y^2)dA = \frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2)rdrd\theta = \frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

16. Evalúe $\iiint_E x^2\,ydv$, donde E es el sólido interior al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Utilice la transformación:

$x = au, y = bv, z = cw$

Solución

El jacobiano de la transformación dada es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc$$

La región sólida interior al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ se transforma en la esfera H con ecuación $u^2+v^2+w^2=1$. Luego,

$$\iiint_E x^2y\,dv=\iiint_H (au)^2(bv)|abc|\,dudvdw=a^3b^2c\iiint_H u^2v\,dudvdw$$

Transformando la integral triple en coordenadas esféricas y haciendo la siguiente sustitución $u=\rho\, sen\,\emptyset\ \cos\theta$, $v=\rho\, sen\,\emptyset\ sen\,\theta$, $w=\rho\cos\emptyset$, se obtiene

$$\iiint_E x^2y\,dv=a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}(\rho^2\,sen^2\emptyset\cos^2\theta)(\rho\,sen\,\emptyset\,sen\,\theta)(\rho^2\,sen\,\emptyset)d\rho d\emptyset d\theta$$

$$=a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^5\,sen^4\emptyset\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\rho d\emptyset d\theta$$

$$=a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^1 sen^4\emptyset\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\emptyset d\theta$$

$$=\frac{1}{6}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\emptyset}{2}\right)^2\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\emptyset d\theta$$

$$=\frac{1}{24}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-2\cos 2\emptyset+\cos^2 2\emptyset)\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\emptyset d\theta$$

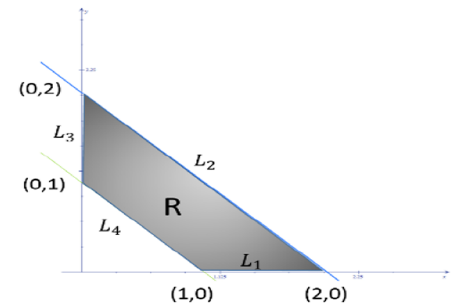
$$=\frac{1}{24}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\emptyset+\frac{1}{2}\cos 4\emptyset\right)\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\emptyset d\theta$$

$$=\frac{1}{24}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\emptyset-sen\,2\emptyset+\frac{1}{8}sen\,4\emptyset\right)\Big|_0^{\pi}\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{24}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\frac{3\pi}{2}\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\theta=\frac{\pi}{16}a^3b^2c\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{16}a^3b^2c\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{\pi}{16}a^3b^2c(0)=0$$

17. Evalúe la integral dada haciendo un cambio de variables apropiado $\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices (1,0),(2,0),(0,2),(0,1).



Solución

Las rectas L_1, L_2, L_3, L_4 que contienen los lados del trapecio son

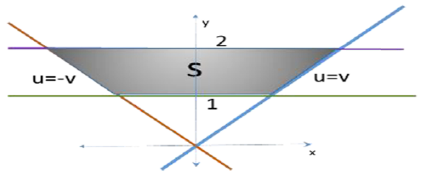
$$L_1:\ y=0\ (1\le x\le 2);\ L_2:\ x+y=2\ (0\le x\le 2)$$
$$L_3:\ x=0\ (1\le y\le 2);\ L_4:\ x+y=1\ (0\le x\le 1)$$

Analizando el integrando, la sustitución apropiada es $u=y-x$, $v=y+x$. Luego, $u+v=2y$ y $v-u=2x$. Entonces, la transformación T se define

$$x=\frac{1}{2}(v-u),\quad y=\frac{1}{2}(u+v)$$

La cual transforma la región R del plano xy en la región S del plano uv determinada por las siguientes ecuaciones

Si $y = 0$, entonces $u = -v$
Si $x + y = 2$, entonces $v = 2$
Si $x = 0$, entonces $u = v$
Si $x + y = 1$, entonces $v = 1$



El jacobiano de la trasformación T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Por consiguiente, la integral doble se transforma en

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \left|\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_1^2 sen\left(\frac{u}{v}\right) v \,\Big|_{-v}^{v} dv$$

$$\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA = \frac{1}{2}\int_1^2 (sen\,1 - sen(-1))vdv = sen\,1 \int_1^2 v\,dv$$

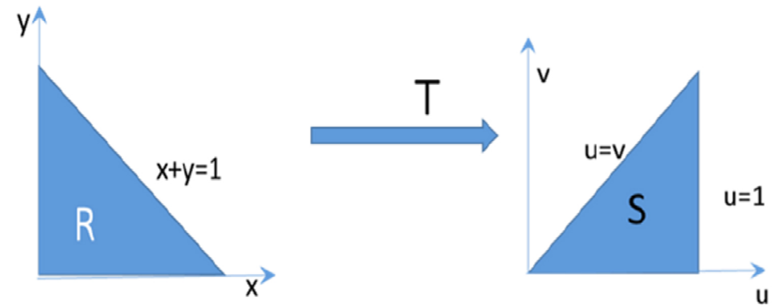
$$= sen\,1\left(\frac{v^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{3}{2} sen\,1$$

18. Sea f una función continua en $[0,1]$ y sea R la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$,$(0,1)$. Demuestre que

$$\iint_R f(x+y)dA = \int_0^1 uf(u)du$$

Solución

Considerando las sustituciones $u = x + y$, $v = y$, entonces la transformación T se define $x = u - v, y = v$, la cual transforma la región R del plano xy en la región S del plano uv



El jacobiano de T está dado

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto,

$$\iint_R f(x+y)dA = \int_0^1 \int_0^u f(u)|1|dvdu = \int_0^1 f(u)v\Big|_0^u d\mu = \int_0^1 uf(u)du$$

Ejercicios propuestos

Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

1. El tetraedro encerrado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z = 4$

2. El sólido acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0, z = 4$ y $y = 9$

3. El sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $y + z = 5,\ z = 1$

4. El sólido encerrado por el paraboloide $x = y^2 + z^2$ y el plano $x = 16$

5. El sólido acotado por $z = 9 - x^2, z = 0, x = 0, y = 2x$

6. El sólido acotado por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$

7. El sólido que es el interior común bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre el paraboloide $y = \sqrt{x^2 + z^2}$

8. El sólido acotado por $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 3$

9. El sólido acotado por $x = y^2, x = 4, x + z = 6, x + z = 8$

10. Encuentre el volumen del sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

11. El sólido acotado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$

12. El sólido interior a $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

13. El sólido interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y exterior a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

14. El sólido acotado por las gráficas de la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $r = a\cos\theta$

15. El sólido que se encuentra arriba del cono $\emptyset = \frac{\pi}{3}$ y debajo de la esfera $\rho = 4\cos\emptyset$

16. El sólido $\rho \leq a$ que está arriba del cono $\emptyset = \frac{\pi}{6}$ y debajo del cono $\emptyset = \frac{\pi}{3}$

17. El sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $b > a$, e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$

Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

18. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dydzdx$

19. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dxdzdy$

20. $\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 rdzd\theta dr$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} rdzdrd\theta$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\emptyset\, d\rho d\theta d\emptyset$

23. $\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\emptyset\, d\rho d\emptyset d\theta$

Encuentre la masa y el centro de masa del sólido E con la función densidad dada $\rho(x, y, z)$

24. E es el sólido bajo el plano $z = 1 + x + y$ y arriba de la región en el plano xy acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$; $\rho(x, y, z) = 2$

25. E está acotado por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1, x = 0, z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

26. E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

27. E es el cubo dado por $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

28. E es el sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

29. E es el sólido entre $z = x^2 + y^2$ y $z = 4$ e interior a $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $\rho(x, y, z) = 4$

30. E es el sólido limitado por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y el plano xy; $\rho(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2}$

31. Hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ si la densidad es:
   a) En cualquier punto, proporcional a la distancia entre el punto y el origen.
   b) En cualquier punto, proporcional a la distancia del punto al eje z.

32. Encuentre los momentos de inercia para un cubo de longitud L de lado, si un vértice está situado en el origen y tres aristas están a lo largo de los ejes coordenados.

33. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$

34. Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido limitado por el hemisferio $\rho = \cos\emptyset$, $\frac{\pi}{4} \le \emptyset \le \frac{\pi}{2}$ y el cono $\emptyset = \frac{\pi}{4}$

"***El valor promedio de una función** $f(x, y, z)$ **sobre una región sólida** E **se define como***

$$f_{prom} = \frac{1}{v(E)} \iiint_E f(x, y, z)\,dv$$

$v(E)$ es el volumen de E".

35. Halle el valor promedio de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo con arista de longitud L, que está en el primer octante, con un vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes coordenados.

36. Halle el valor promedio de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el tetraedro con vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

Encuentre el jacobiano de la transformación dada.

37. $x = au + bv$, $y = cu + dv$

38. $x = uv + 2u$, $y = uv$

39. $x = u \cos\theta - v \operatorname{sen}\theta$, $y = u \operatorname{sen}\theta + v \cos\theta$

40. $x = e^u \operatorname{sen} v$, $y = e^u \cos v$

41. $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v}{w}$, $z = \frac{w}{u}$

42. $x = v + w^2$, $y = w + u^2$, $z = u + v^2$

Encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

43. $S = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 2\}$; $x = 2u + 3v$, $y = u - v$

44. S es el cuadrado acotado por las líneas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $x = v$, $y = u(1 + v^2)$

45. S es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$; $x = u^2$, $y = v$

46. S es el círculo $u^2 + v^2 \le 1$; $x = au$, $y = bv$

Utilizar el cambio de variables indicado para hallar la integral.

47. $\iint_R xy\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotado por las líneas $y = x$, $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$; $x = \frac{u}{v}$, $y = v$

48. $\iint_R 4(x + y)\,e^{x-y}\,dA$, donde R es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$; $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$

49. $\iint_R e^{-\frac{xy}{2}}\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante comprendida entre las gráficas de

$$y=\frac{1}{4}x,\ y=2x,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{4}{x};\ x=\sqrt{\frac{v}{u}}, y=\sqrt{uv}$$

50. $\iint_R y\ sen\ xy\ dA$, donde R es la región comprendida entre las gráficas de $xy = 1, xy = 4, y = 1, y = 4$; $x=\frac{u}{v}$, y=v

51. $\iiint_E dv$, donde E es el sólido encerrado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $x = au, y = bv, z = cw$

52. $\iiint_E dv$, donde E es el sólido encerrado por la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ y los planos coordenados; $x = u^2$, $y = v^2, z = w^2$

Evalúe la integral mediante un cambio de variables apropiado.

53. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}dA$, donde R es el paralelogramo encerrado por las líneas $x - 2y = 0, x - 2y = 4, 3x - y = 1, 3x - y = 8$

54. $\iint_R (x + y)\ e^{x^2-y^2}\ dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las líneas $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0, x + y = 3$

55. $\iint_R sen\ (9x^2 + 4y^2)\ dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

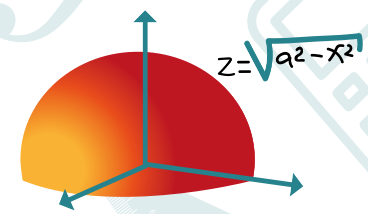
56. $\iint_R e^{x+y}\ dA$, donde R está acotado por la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$

Utilizar un cambio de variable para hallar el volumen de la región sólida que se encuentra bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región plana R.

57. $f(x, y) = (x + y)^2\ sen^2\ (x - y)$, donde R la región acotada por el cuadrado cuyos vértices son $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, (π,π), $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

58. $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2y^2}$, donde R es la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $xy = 1, xy = 4, x = 1, x = 4$.

$\left(\text{Sugerencia: hacer } x=u,\ y=\frac{u}{v}\right)$



Capítulo 9

Análisis vectorial

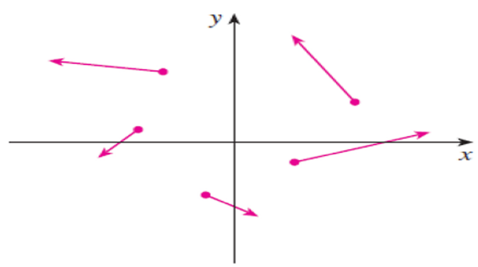
Sección 9.1. Campos vectoriales

De los estudios realizados en cursos anteriores tenemos que las funciones vectoriales asignan a cada número real un único vector. Se estudió que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo se estudiarán otros dos tipos de funciones vectoriales, las cuales asignan a cada punto del plano o del espacio un único vector en dos o tres dimensiones, respectivamente. Estas funciones se denominan campos vectoriales. Algunos ejemplos físicos comunes de campos vectoriales son: campo de velocidad, campo de fuerza, campo gravitacional, campo eléctrico, campo magnético.

Definición

Sean P y Q campos escalares de dos variables, definidos sobre una región $D \subseteq R^2$. Un campo vectorial F sobre R^2 es una función dada por

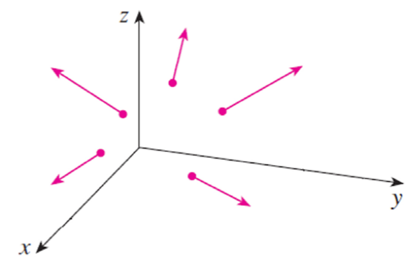
$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$



Definición

Sean P, Q, R campos escalares de tres variables, definidos sobre una región $E \subseteq R^3$. Un campo vectorial F sobre R^3 es una función dada por

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$



Observación

Como los campos vectoriales constan de un número infinito de vectores, no es posible hacer un dibujo de todo el campo completo. En lugar de esto, cuando se esboza un campo vectorial, el objetivo es dibujar vectores representativos que ayuden a visualizar el campo.
Recordando, en la sección 7.4 se definió el gradiente para una función de dos y tres variables, esto es

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\, i + f_y(x, y) j$$
$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z) i + f_y(x, y, z) j + f_z(x, y, z) k$$

Se puede observar que dichos gradientes son campos vectoriales sobre R^2 y R^3, respectivamente, los cuales se denominan "campos vectoriales gradiente".

EJEMPLO

Hallar el campo vectorial gradiente para la función escalar

1. $f(x, y) = 3x\cos 4y$

Solución

El campo vectorial gradiente es

$$\nabla f(x, y) = 3\cos 3x\cos 4y\ \mathrm{i} - 4\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 4y\ j$$

2. $g(x, y, z) = x\, sen^{-1}\, yz$

Solución

El campo vectorial gradiente es

$$\nabla g(x, y\, z) = \text{sen}^{-1}\, yz\ i + \frac{xz}{\sqrt{1-y^2z^2}}\, j + \frac{xy}{\sqrt{1-y^2z^2}}\, k$$

Definición

Un campo vectorial F es conservativo si existe una función de dos o tres variables f tal que $F = \nabla f$. La función f se denomina "función potencial para F".

EJEMPLO

El campo vectorial $F(x, y) = \frac{y}{x^2} i - \frac{1}{x} j$ es conservativo porque existe la función potencial

$$f(x, y) = -\frac{y}{x}\ \ tal\ \ que\ \ \nabla f(x, y) = \frac{y}{x^2} i - \frac{1}{x} j = F(x, y).$$

Muchos campos vectoriales importantes, incluyendo campos gravitacionales y campos de fuerzas eléctricas, son conservativos. El término ***conservativo*** se deriva de la ley física clásica con respecto a la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial, de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo, es constante. La energía cinética de una partícula es la energía debida a su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.

En el siguiente resultado se proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial en R^2 sea conservativo.

TEOREMA

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto D. El campo vectorial $F(x, y) = P(x, y)\mathrm{i} + Q(x, y)j$ es conservativo, si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

DEMOSTRACIÓN

Para mostrar que la condición dada es necesaria para que F sea conservativo, suponemos que existe una función potencial f tal que $F(x, y) = \nabla f\,(x, y) = P\, i + Q\, j$

De aquí, se tiene

$$f_x(x, y) = P \ \rightarrow\ f_{xy}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad f_y(x, y) = Q \ \rightarrow\ f_{yx}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Además, por la equivalencia de las derivadas parciales cruzadas $f_{xy}\,(x, y), f_{yx}\,(x, y)$, se puede concluir que: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in D$. Lo suficiente de la condición se muestra más adelante.

Observación

El teorema requiere que el dominio de F sea un disco abierto. Si D simplemente es una región abierta, la condición dada es necesaria pero no suficiente para producir un campo vectorial conservativo. En este caso, la región abierta debe ser simplemente conexa (no contiene agujeros y no puede estar formada por dos piezas separadas).

EJEMPLO

Determinar si el campo vectorial es conservativo.

1. $F(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} j$

Solución

Sean $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ entonces $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{0-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{2xy}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{0-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{2xy}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Puesto que $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces F es un campo vectorial conservativo.

2. $F(x,y)=15y^3\, i-5xy^2\, j$

Solución

Sean $P(x,y)=15y^3$ y $Q(x,y)=-5xy^2$, entonces $\frac{\partial P}{\partial y}=45y^2$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}=-5y^2$

Como $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, entonces F es un campo vectorial no conservativo.

Observación

El resultado anterior solamente aplica para campos vectoriales sobre R^2. También hay un teorema para campos vectoriales sobre R^3, pero es necesario definir antes el concepto de “rotacional de un campo vectorial en el espacio”.

Definición

El rotacional del campo vectorial
$F(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$, está dado

$$rot\,F(x,y,z)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

Observación

Para recordar más fácil esta definición introduzcamos el operador diferencial vectorial ∇ como

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k$$

Si consideramos ∇ como un vector con componentes $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$, entonces podemos definir el producto cruz de ∇ con el campo vectorial F como sigue

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k=rotF$$

Entonces, la forma más fácil de recordar el rotacional de un campo vectorial F sobre R^3 es

$$rot\,F=\nabla\times F$$

EJEMPLO

Calcular el rotacional del campo vectorial en el punto dado

$$f\,(x,y,z)=xyz\,i+y\,j+z\,k,\ (1,2,1)$$

Solución

El rotacional de F está dado por

$$rot\,F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & y & z\end{vmatrix}=(0-0)i-(0-xy)j+(0-xz)k$$

$rot\,F=0\,i+xy\,j-xz\,k$

Entonces, $rot\ F(1, 2, 1) = 2\,\boldsymbol{j} - k$

Observación

Partiendo del hecho de que el gradiente de una función f de tres variables es un campo vectorial en R^3, por tanto, se puede calcular su rotacional. El siguiente resultado dice que el rotacional de un campo vectorial gradiente es el vector nulo.

Teorema

Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $rot(\nabla f) = 0$

Demostración

$$rot\ \nabla f = \nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) i - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) k$$

$rot\ F = 0i + 0j + 0k$

En cada componente, las derivadas parciales de segundo orden son iguales por el teorema de Clairaut.

Observación

Si un campo vectorial F sobre R^3 es conservativo ($F = \nabla f$), entonces $rotF = 0$.

Este resultado nos proporciona una forma de verificar cuando un campo vectorial no es conservativo. Esto es ***"si rot F ≠ 0,entonces F no es conservativo***".

Ejemplo

Demuestre que el campo vectorial no es conservativo.

$$F(x, y, z) = xz\ i + xyz\ j - y^2\ k$$

Solución

El rotacional de F es

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = (-2y - xy)i - (0 - x)j + (yz - 0)k$$

$rot\ F = -y(2 + x)i + x\,j + yz\,k \neq 0$

Esto muestra que F no es conservativo.

El siguiente resultado nos muestra las condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial F sobre R^3 sea conservativo.

Teorema

Si F es un campo vectorial definido en todo R^3 (o el dominio es un conjunto simplemente conexo) cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y $rotF = 0$, entonces F es un campo vectorial conservativo.

Demostración

Su demostración requiere del teorema de Stokes que se esboza al final del capítulo.

Ejemplo

Demuestre que el campo vectorial dado es conservativo

$$F(x, y, z) = y^2 z^3\ \ i + 2xyz^3\ \ j + 3xy^2 z^2\ k$$

Solución

Puesto que el dominio de F es todo R^3, falta demostrar que $rotF = 0$. Entonces,

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$rot\ F = (6xyz^2 - 6xyz^2)i - (3y^2 z^2 - 3y^2 z^2)j + (2yz^3 - 2yz^3)k = 0i + 0j + 0k$

Por tanto, F es un campo vectorial conservativo.

Otra operación que se puede efectuar sobre un campo vectorial en R^3 y que es básica (*al igual que el rot F*) en la aplicación del cálculo vectorial en el estudio de los fluidos, así como en la teoría de electricidad y magnetismo, es la "divergencia de una campo vectorial".

Definición

Si $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ es un campo vectorial en R^3 y $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ existe, entonces "la divergencia de F" es la función de tres variables definida.

$$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

Observación

Nótese que el $rot\ F$ es un campo vectorial pero la $div\ F$ es un campo escalar. Si se considera el operador gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

La divergencia de F se puede expresar simbólicamente

$$div\ F = \nabla \bullet F$$

EJEMPLO

Calcular la divergencia del campo vectorial F en el punto dado

$$F(x, y, z) = x^2 z\, i - 2xz\, j + yz\, k, \quad (2, -1, 3)$$

Solución

La divergencia del campo vectorial F es

$div\ F = 2xz + 0 + y = 2xz + y \to div\ F(2, -1, 3) = 12 - 1 = 11$

Concluimos esta sección, enunciando un resultado que relaciona el rotacional y la divergencia de un campo vectorial F.

TEOREMA

Si $F = Pi + Qj + Rk$ es un campo vectorial en R^3 y P, Q, R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $div(rot\ F) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Usando las definiciones de la divergencia y rotacional, tenemos

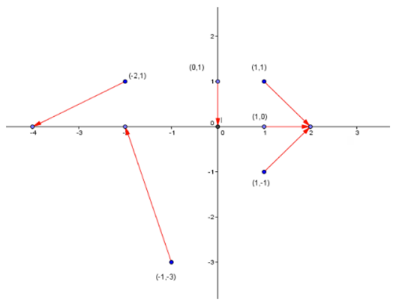
$$div\ rot\ F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$div\ rot\ F = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

Ejercicios complementarios

Dibujar varios vectores representativos del campo vectorial

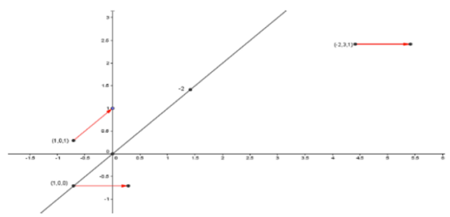
1. $F(x, y) = x\,i - y\,j$



Punto	Vector
(1, 0)	F(1, 0) = i
(0,1)	F(0, 1) = -j
(1, 1)	F(1, 1) = i-j
(-2, 1)	F(-2, 1) = -2i-j
(-1, -3)	F(-1, -3) = -i+3j
(1, -1)	F(1, -1) = i+j

2. $F(x, y, z) = i+j+k$

Punto	Vector
(1, 0, 0)	F(1, 0, 0) = i+j+k
(1, 0, 1)	F(1, 0, 1) = i+j+k
(-2, 3, 1)	F(-2, 3, 1) = i+j+k



Hallar el campo vectorial gradiente

3. $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + 10y^2$

Solución

El campo vectorial gradiente es

$$\nabla f(x, y) = (10x + 3y)i + (3x + 20y)\,j$$

4. $f(x, y, z) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{xz}{y}$

Solución

El campo vectorial gradiente es

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{z}{y}\right) i + \left(\frac{1}{z} - \frac{xz}{y^2}\right) j + \left(-\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x} + \frac{x}{y}\right) k$$

Verificar que el campo vectorial es conservativo

5. $F(x, y) = sen\,y\;\; i + x\cos y\;\; j$

Solución

Se debe mostrar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donde $P(x, y) = sen\,y$, $Q(x, y) = x\cos y$

Entonces,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por tanto, F es conservativo

6. $F(x, y) = \frac{1}{xy}(y\,i - x\,j)$

Solución

Primero obsérvese que $F(x, y) = \frac{1}{x}i - \frac{1}{y}j$, $P(x, y) = \frac{1}{x}$, $Q(x, y) = -\frac{1}{y}$
Luego,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por tanto, F es conservativo

Determinar si el campo vectorial es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

7. $F(x, y) = 2xye^{x^2y}\, i + x^2\, e^{x^2y}\, j$

Solución

Las funciones componentes son $P(x, y) = 2xye^{x^2y}$ y $Q(x, y) = x^2\, e^{x^2y}$. Entonces,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ entonces, F es un campo vectorial conservativo. Para encontrar la función potencial f, considérese

$$f_x(x, y) = P(x, y) = 2xye^{x^2y} \text{ y } f_y(x, y) = Q(x, y) = x^2\, e^{x^2y}$$

Para recuperar parcialmente la función potencial f se integra con respecto a x a la función $f_x(x, y)$ (o con respecto a y a la función $f_y(x, y)$). Entonces,

$f(x, y) = \int 2xye^{x^2y}dx \;=\; e^{x^2y} + g(y)$ (usando una sustitución simple $u = x^2 y$)

La expresión $g(y)$ nos indica que la constante de integración puede ser una función en términos de y *(variable que consideramos constante)*. Para hallar $g(y)$ se deriva la expresión $f(x, y)$ con respecto a y y se iguala el resultado con la función $Q(x, y)$. Esto es,

$$f_y(x, y) = x^2\, e^{x^2y} + g'(y) = x^2\, e^{x^2y}$$

De la ecuación anterior se deduce que $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = k$ *(función constante)*.

Por tanto, la familia de funciones potenciales es $f(x, y) = e^{x^2y} + k$. Como no se tiene en el problema una condición inicial para f, entonces se puede considerar cualquier valor real para k.

Observación

Si se trabaja con la función $f_y(x, y)$ se realiza un proceso similar, intercambiando el papel de las dos variables.

8. $F(x,y,z) = \frac{1}{y}\, i - \frac{x}{y^2}\, j + (2\,z - 1)\, k$

Solución

Inicialmente se muestra que el campo vectorial es conservativo mostrando que

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 2z-1 \end{vmatrix} = (0-0)\, i - (0-0)\, j + \left(-\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) k = \mathbf{0}$$

Ahora, se considera

$$f_x(x,y,z) = \frac{1}{y}, \quad f_y(x,y,z) = -\frac{x}{y^2}, \quad f_z(x,y,z) = 2z - 1$$

Se recupera parcialmente a $f(x, y, z)$ integrando a la función $f_x(x, y, z)$ con respecto a x

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{y}dx \;=\; \frac{x}{y} + g(y,z)$$

Para encontrar la función $g(y, z)$ se deriva el resultado obtenido con respecto a y, e igualando a $f_y(x, y, z)$ se tiene

$$f_y(x,y,z) = -\frac{x}{y^2} + g_y(y,z) = -\frac{x}{y^2}$$

Entonces,

$$g_y(y, z) = 0 \Rightarrow g(y, z) = h(z)$$

Sustituyendo en la función $f(x, y, z)$ se tiene

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + h(z)$$

Ahora, para encontrar $h(z)$ se deriva nuevamente a f con respecto a z y se iguala el resultado a la función $f_z(x, y, z)$. Entonces,

$$f_z(x,y,z) = 0 + h'(z) = 2z - 1 \quad => \quad h(z) = \int (2z-1)dz = z^2 - z + k$$

Por tanto, la familia de funciones potenciales es

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + z^2 - z + k$$

Al igual que en el ejercicio anterior se puede considerar cualquier valor real k para encontrar una función potencial f.

Calcular el rotacional del campo vectorial en el punto dado.

9. $F(x, y, z) = e^x \; sen\, y\, i - e^x \; cos\, y\, j$; $(0,0,3)$

Solución

El rotacional de f está dado

$$rot\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \operatorname{sen} y & -e^x \cos y & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\, i - (0-0)\, j + (-e^x \cos y - e^x \cos y)\, k$$

$rot\, F = 0\, i + 0\, j - 2e^x \; cos\, y \;\; k => rot\, F(0,0,3) = -2k$

10. $F(x, y, z) = e^{-xyz}\, i + e^{-xyz}\; j + e^{-xyz}\; k$; $(3,2,0)$

Solución

El rotacional de F está dado:

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-xyz} & e^{-xyz} & e^{-xyz} \end{vmatrix}$$

$rotF = (-xze^{-xyz} + xye^{-xyz})\; i - (-yze^{-xyz} + xye^{-xyz})\;\; j + (-\, yze^{-xyz} + xze^{-xyz})\;\; k$
$rotF = e^{-xyz}\; [(-xz + xy)i - (-yz + xy)\, j + (-yz + xz)\; k]$

Por tanto,

$$rotF\,(3, 2, 0) = e^0\, [(0 + 6)i \text{ - } (0 + 6)j + (0 + 0)k] = 6i - 6j$$

Calcular la divergencia del campo vectorial F en el punto dado.

11. $F(x, y, z) = xyz\; i + y\, j + z\; k$; $(1,2,1)$

Solución

La divergencia de F está dada

$$div\; F = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = yz + 1 + 1 = yz + 2 \quad => \quad div\; F(1,2,1) = 4$$

12. $F(x, y, z) = \ln\,(x^2 + y^2)\;\; i + xy\, j + \ln\,(y^2 + z^2)\;\; k$; $(1,-1,-1)$

Solución

La divergencia de F está dada

$$div\; F = \frac{\partial}{\partial x}(ln(x^2+y^2)) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(ln(x^2+z^2)) = \frac{2x}{x^2+y^2} + x + \frac{2z}{x^2+y^2}$$

Luego, la $div\; F\,(1,-1,-1) = 1 + 1 - 1 = 1$

13. Calcular $rot\,(F \times G)$, donde $F\,(x,y,z) = x\,i - z\,k$, $G(x,y,z) = x^2\; i + y\,j + z^2\; k$

Solución

Inicialmente se encuentra $F \times G$. Esto es,

$$F \times G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & 0 & -z \\ x^2 & y & z^2 \end{vmatrix} = (0 + yz)\,i - (xz^2 + x^2 z)\,j + (xy - 0)\,k$$

$= yz\,i - (xz^2 + x^2\,z)\;\;j + xy\,k$

Ahora, se halla el rotacional de $F \times G$

$$rot\,(F \times G) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz^2 - x^2 z & xy \end{vmatrix} = (x + 2xz + x^2)\,i - (y - y)\,j + (-z^2 - 2xz - z)\,k$$

14. Hallar la div $(F \times G)$, donde $F\,(x,y,z) = x\,i - z\,k$, $G(x,y,z) = x^2\,i + y\,j + z^2\; k$

Solución

En el ejercicio 13 se encontró $F \times G$, luego

$$div\,(F \times G) = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz^2 - x^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0\,i + 0\,j + 0\,k$$

15. Hallar $rot\,(rotF)$, donde $F\,(x,y,z) = x^2\,z\,i - 2xz\,j + yz\,k$

Solución

El rotacional del campo vectorial F está dado

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 z & -2xz & yz \end{vmatrix} = (z + 2x)\,i - (0 - x^2)\,j + (-2z - 0)\,k$$

$$= (2x + z)\,i + x^2\,j - 2z\,k$$

Entonces,

$$rot(rotF) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x + z & x^2 & -2z \end{vmatrix} = (0 - 0)\,i - (0 - 1)\,j + (2x - 0)\,k = j + 2x\,k$$

Ejercicios propuestos

Dibujar varios vectores representativos del campo vectorial dado.

1. $F(x, y) = i + x\, j$

2. $F(x, y) = (x - y)i + x\, j$

3. $F(x, y) = \frac{y\, i + x\, j}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4. $F(x, y, z) = k$

5. $F(x, y, z) = -y\, k$

6. $F(x, y, z) = -i + j$

Determine el campo vectorial gradiente ∇f.

7. $f(x, y) = xe^{xy}$

8. $f(x, y) = tan(3x - 4y)$

9. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

10. $f(x, y, z) = x\cos\frac{y}{z}$

Determine si F es un campo vectorial conservativo o no lo es. Si es así, encuentre una función potencial f.

11. $F(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\, i + (4xy + 3)\, j$

12. $F(x, y) = (ye^x + seny)\, i + (e^x + xcosy)\, j$

13. $F(x, y) = (xycosxy + senxy)\, i + (x^2\, cosxy)\, j$

14. $F(x, y) = (\ln y + 2xy^3)i + \left(3x^2y^2 + \frac{x}{y}\right)j$

15. $F(x, y) = (xycoshxy + senhxy)\, i + (x^2\, coshxy)\, j$

16. $F(x, y, z) = y^2 z^3\ i + 2xyz^3\ j + 3xy^2 z^2\ k$

17. $F(x, y, z) = xyz^2\ i + x^2 yz^2\ j + x^2 y^2 z\, k$

18. $F(x, y, z) = e^z\ i + j + xe^z\, k$

19. $F(x, y, z) = ye^{-x}\ i + e^{-x}\, j + 2z\, k$

20. $F(x, y, z) = ycosxy\, i + xcosxy\, j - senz\, k$

Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial.

21. $F(x, y, z) = i + (x + yz)j + (xy - \sqrt{z})k$

22. $F(x, y, z) = cosxz\, j - senxy\, k$

23. $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\, i + y\, j + z\, k)$

24. $F(x, y, z) = e^{xy}\mathrm{sen}z\, j + y\tan^{-1}\frac{x}{z}k$

25. $F(x, y, z) = < \ln x, \ln xy, \ln xyz >$

26. $F(x, y, z) = < e^x, e^{xy}, e^{xyz} >$

27. Sea f un campo escalar y F un campo vectorial. Diga si cada una de las siguientes expresiones tiene significado. Si no es así, explique la razón. Si tienen significado, diga si es un campo escalar o un campo vectorial

(a) $rot\ f$ (b) $grad\ f$ (c) $div\ F$ (d) $rot\ (grad\ f)$ (e) $grad\ F$
(f) $grad\ (div\ F)$ (g) $div\ (grad\ f)$ (h) $grad(div\ f)$ (i) $rot\ (rot\ F)$
(j) $div\ (div\ F)$ (k) $(grad\ f) \times (div\ F)$ (l) $div\ (rot\ (grad\ f))$

28. ¿Hay un campo vectorial G en R^3 tal que $rotG = < xseny, cosy, z - xy >$? Explique.

29. ¿Hay un campo vectorial G en R^3 tal que $rot\ G = < xyz, -y^2 z, yz^2 >$? Explique.

30. Sea $r = x\, i + y\, j + z\, k$ y $k = |r|$. Verifique cada identidad.

(a) $\nabla \bullet r = 3$
(b) $\nabla \bullet (kr) = 4k$

31. Calcular $rot\ (F \times G)$, donde $F\ (x, y, z) = i + 2x\ j + 3y\ k$ $G\ (x, y, z) = x\ i - y\ j + z\ k$

32. Hallar $rot\ (rot\ F)$, donde $F\ (x, y, z) = xyz\ i + y\ j + z\ k$

33. Calcular $div\ (F \times G)$, donde $F\ (x, y, z) = i + 2x\ j + 3y\ k$ $G(x, y, z) = x\ i - y\ j + z\ k$

34. Hallar $div\ (rotF)$, donde $F\ (x, y, z) = xyz\ i + y\ j + z\ k$

Sección 9.2. Integrales de línea

En esta sección se define un tipo de integral similar a una integral simple, excepto que, en lugar de integrar sobre un intervalo $[a, b]$, se integra sobre una curva suave C. Estas integrales se denominan "integrales de línea". Iniciemos con la definición del concepto de curva suave.

Definición

i) Una curva plana C con ecuación vectorial $r\ (t) = x(t)i + y(t)j$, $a \leq t \leq b$ es suave si $x'\ (t)$ y $y'(t)$ son continuas en $[a, b]$ y no se anulan simultáneamente en (a,b).

ii) Una curva en el espacio C con ecuación vectorial $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a{\leq}t{\leq}b$ es suave si $x'\ (t), y'\ (t)$ y $z'(t)$ son continuas en $[a, b]$ y no se anulan simultáneamente en (a,b).

iii) Una curva C es suave a trozos (o por partes) si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales C es suave.

Hasta el momento se ha hecho en cálculo un estudio de varios tipos de integrales. En una integral simple $\int_a^b f(x)dx$ se integró sobre un intervalo $[a,b]$. De manera similar en las integrales dobles y triples $\iint f\,(x, y)\ dA$, $\iiint f\,(x, y, z)dv$ se integró sobre una región R en el plano o una región E del espacio, respectivamente. En esta sección, se estudia un nuevo tipo de integral denominada "integral de línea" $\int_C f\,(x, y)\text{ds}$ o $\int_C f\,(x, y, z)ds$, en la que se integra una función de 2 o 3 variables sobre una curva suave a trozos.

Definición

Si f es una función de dos variables definida sobre una curva suave C, con ecuación vectorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$, $a \leq t \leq b$, luego la "integral de línea de f a lo largo de C" es

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

Suponiendo que el límite exista.

Observación

Recordando, al concepto de integración están ligadas tres palabras claves (rebane, aproxime e integre). En la integral de línea, rebane nos indica que la curva suave C se particiona en n-subarcos, donde (x_i, y_i) es un punto arbitrario del i-ésimo subarco y Δs_i representa la longitud del mismo. Para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Partiendo del hecho de que la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Entonces, la integral de línea de f a lo largo de C con ecuaciones paramétricas $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$ está dada por

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observación

El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva C, siempre que la curva se recorra exactamente una vez cuando t varía de a hasta b.

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada

$$\int_C \left(\frac{y}{x}\right) ds$$

Donde $C: x = t^4, y = t^3, 0 \le t \le 1$

Solución

Se encuentra el diferencial ds

$$ds = \sqrt{(4t^3)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \sqrt{16t^6 + 9t^4}\, dt = t^2\sqrt{16t^2 + 9}\, dt$$

Por tanto,

$$\int_C \left(\frac{y}{x}\right) ds = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{t^4}\right) t^2\sqrt{16t^2+9}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{16t^2+9}\, dt$$

Realizando la sustitución $u = 16t^2 + 9$, $du = 32t\, dt$, entonces se obtiene

$$\int_C \left(\frac{y}{x}\right) ds = \int_9^{25} \frac{1}{32}\sqrt{u}\, du = \frac{1}{32}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} = \frac{1}{48}\left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{49}{24}$$

Ahora, suponemos que C es una curva suave en el espacio, dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \le t \le b$ o por una ecuación vectorial dada por $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, a \le t \le b$. La integral de línea de una función f de tres variables que es continua en una región que contiene a C se define a continuación.

Definición

Si f es una función de tres variables definida sobre una curva suave C con ecuación vectorial $r(t), a \le t \le b$, entonces la "integral de línea de f a lo largo de C" está dada

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

Suponiendo que el límite exista.

Para convertir la integral de línea de $f(x, y, z)$ en una integral definida, debemos recordar que la longitud L de una curva C en el espacio es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Entonces, la integral de f a lo largo de C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ está dada por

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada.

$$\int_C xz\, ds$$

Donde $C: x = 6t, y = 3\sqrt{2}t^2, z = 2t^3, 0 \leq t \leq 1$

Solución

El diferencial ds es

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt = \sqrt{[6]^2 + \left[6\sqrt{2}t\right]^2 + [6t^2]^2}dt$$

$$\boldsymbol{ds = \sqrt{36 + 72t^2 + 36t^4 dt} = \sqrt{(6t^2+6)^2}\; dt = (6t^2+6)dt}$$

Por lo tanto,

$$\int_C xzds = \int_0^1 (6t)(2t^3)(6t^2+6)dt = 72\int_0^1 (t^4)(t^2+1)dt = 72\int_0^1 (t^6+t^4)dt$$

$$= 72\left(\frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = 72\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right) = 72\left(\frac{12}{35}\right) = \frac{864}{35}$$

Observación

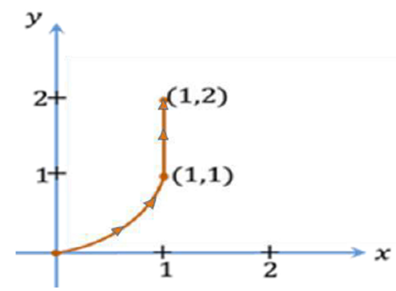
En algunas integrales de línea, la curva C, no se puede expresar por medio de un conjunto de ecuaciones paramétricas que la representen totalmente. Pero, si la curva C es una "curva suave a trozos", es decir C es la unión de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ donde, el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i. Entonces, definimos la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las partes suaves de C.

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea, don de C está formada por el arco de la parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido por el segmento de recta vertical de $(1,1)$ a $(1,2)$.

$$\int_C 2xds$$



Solución

Consideremos la parte de la parábola como la curva suave C_1 con ecuaciones paramétricas $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$. Luego, el diferencial

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2}\, dt = \sqrt{1+4t^2}\, dt$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du = \frac{1}{4}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 = \frac{1}{6}\left(5^{\frac{2}{3}}-1\right)$$

Donde $u = 1 + 4t^2$, $du = 8tdt$

Ahora, considerando el segmento de recta como la curva suave C_2 y recordando la representación vectorial de un segmento de recta con punto inicial r_0 y punto final r_1

$r(t) = (1-t)\,r_0 + tr_1 \Rightarrow r(t) = (1-t)(1,1) + t(1,2) \Rightarrow r(t) = (1, 1+t),\ 0 \le t \le 1$

Obteniéndose las ecuaciones paramétricas para C_2: $x = 1$, $y = 1 + t$, $0 \le t \le 1$. El diferencial ds está dado por

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \sqrt{(0)^2+(1)^2}\ dt = dt$$

Entonces,

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_0^1 2dt = 2t|_0^1 = 2$$

Por tanto,

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5^{\frac{3}{2}}-1}{6} + 2$$

Integrales de línea con respecto a x e y (o x,y,z)

Si se reemplaza Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ en la definición de integral de línea de f, se obtienen otras dos "integrales de línea de f a lo largo de C con respecto a x y y".

$$\int_C f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i \quad y \quad \int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta y_i$$

Estas integrales de línea también se pueden evaluar por medio de una integral definida. Esto es, si $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, entonces $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, obteniendose

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)dt$$

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea de f donde C es la curva dada

$$\int_C (xy + \ln x)dy$$

C es el arco de la parábola $y = x^2$ de (1,1) a (3,9)

Solución

Si se considera a x (variable independiente) como el parámetro, se tiene que C: $x = t$, $y = t^2$, $1 \le t \le 3$, entonces $dy = 2tdt$. Por tanto,

$$\int_C (xy+\ln x)dy = \int_1^3 (t^3 + \ln t)2tdt = 2\int_1^3 (t^4 + t\ln t)dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2\right)\Big|_1^3$$

$$= \left(\frac{2}{5}t^5 + t^2\ln t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{486}{5} + 9\ln 3 - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{2}{5} + 0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{464}{5} + 9\ln 3$$

Observación

Es frecuente que las integrales de línea con respecto a x e y aparezcan juntas. En este caso, se acostumbra a abreviar de la siguiente manera

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Ahora, suponemos que C es una curva suave en el espacio, dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Si se remplaza Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, o $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, entonces las integrales de línea de f a lo largo de C con respecto a x,y, y z son

$$\int_C f(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta xi = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\, x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta yi = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\, y'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta zi = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\, z'(t)dt$$

Al igual que para las integrales de línea en el plano, si aparecen las integrales de línea con respecto a x, y y z juntas, abreviamos como sigue

$$\int_C P(x,y,z)dx + \int_C Q(x,y,z)dy + \int_C R(x,y,z)dz$$

$$= \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada

$$\int_C z^2 dx - zdy + 2ydz$$

C está formada por los segmentos de recta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ y de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$.

Solución

La curva C se debe dividir en sus tres segmentos de recta que se denominarán C_1, C_2, C_3 y se parametriza cada segmento usando la ecuación vectorial $r(t) = (1-t)\, r_0 + tr_1, 0 \le t \le 1$.

Para C_1: $r(t) = (1-t)(0,0,0) + t\,(0,1,1) = (0,t,t)$. Entonces, si $x = 0$, $y = t$, $z = t$, $0 \le t \le 1$, se tiene $dx = 0$, $dy = dt$, $dz = dt$. Por tanto,

$$\int_{C_1} z^2 dx - zdy + 2ydz = \int_0^1 t^2\, 0 - t\; dt + 2t\; dt = \int_0^1 (-t + 2t)\; dt$$

$$= \int_0^1 t\; dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Para C_2: $r(t) = (1-t)(0,1,1\,) + t(1,2,3) = (t,1+t,1+2t)$. Entonces, si $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + 2t$, $0 \le t \le 1$, se tiene $dx = dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$. Por tanto,

$$\int_{C_2} z^2 dx - zdy + 2ydz = \int_0^1 (1+2t)^2 dt - (1+2t)dt + 2(1+t)2dt$$

$$= \int_0^1 (1 + 4t + 4t^2 - 1 - 2t + 4 + 4t)dt = \int_0^1 (4t^2 + 6t + 4)dt$$

$$= 4t^3 + 3t^2 + 4t|_0^1 = \frac{4}{3} + 3 + 4 = \frac{25}{3}$$

Para C_3: $r(t) = (1 - t)(1,2,3) + t\,(1,2,4) = (1,2,3 + t)$. Entonces, si $x = 1, y = 2, z = 3 + t$, donde $0 \leq t \leq 1$, se tiene $dx = 0, dy = 0, dz = dt$. Por tanto,

$$\int_{C_3} z^2dx - zdy + 2ydz = \int_0^1 (3+t)^2\,0 - (3+t)\,0 + (2\cdot 2)\,dt = \int_0^1 4\,dt = 4t|_0^1 = 4$$

Entonces,

$$\int_C z^2dx - zdy + 2ydz = \int_{C_1} z^2dx - zdy + 2ydz +$$

$$\int_{C_2} z^2dx - zdy + 2ydz + \int_{C_3} z^2dx - zdy + 2ydz$$

$$\int_C \boldsymbol{z^2dx - zdy + 2ydz} = \frac{1}{2} + \frac{25}{3} + 4 = \frac{77}{6}$$

Observación

Al evaluar la integral de línea de un campo escalar con respecto a cualquiera de sus variables independientes, se debe tener en cuenta la importancia de la orientación de la curva C, porque si $-C$ denota la curva C con orientación opuesta, entonces

$$\int_C f(x,y,z)dx = -\int_{-C} f(x,y,z)dx$$

$$\int_C f(x,y,z)dy = -\int_{-C} f(x,y,z)dy$$

$$\int_C f(x,y,z)dz = -\int_{-C} f(x,y,z)dz$$

Pero, si integramos con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea no cambia cuando se invierte la orientación de la curva. Esto es,

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{-C} f(x,y,z)ds$$

Lo anterior se debe a que si Δs_i siempre es positiva, mientras $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ cambian de signo cuando se invierte la orientación de C.

Masa y centro de masa de un alambre

Supongamos que $\rho(x, y)$ representa la densidad lineal, en un punto (x, y) de un alambre delgado, que tiene la forma de la curva C. Si (x_i, y_i) es un punto arbitrario del subarco de P_{i-1} a P_i con longitud Δs_i, entonces la masa de la parte del alambre es aproximadamente igual a $\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\,\Delta s_i$. Al realizar la partición cada vez más fina, obtenemos la masa "m" del alambre

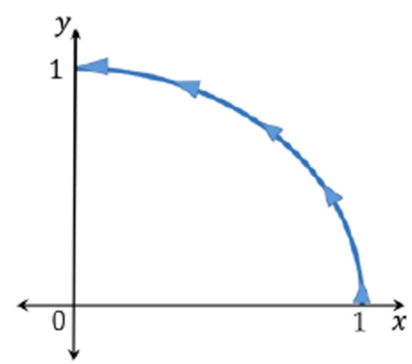
$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\Delta s_i = \int_C \rho(x\,,y)ds$$

Además, el "centro de masa" del alambre, con función de densidad $\rho\,(x\,,y)$ está ubicado en $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x\,,y)ds \qquad y \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x\,,y)ds$$

EJEMPLO

Halle la masa y el centro de masa de un alambre delgado en forma del cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, $x > 0, y > 0$, si la función de densidad es $\rho(x, y) = x + y$



Solución

Como la curva C es un cuarto de circunferencia con centro en el origen y radio r, entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = r\cos t, y = r\,sen\, t,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

El diferencial ds está dado

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(-r\ sen\, t)^2 + (r\cos t)^2} dt = \sqrt{r^2} dt = rdt$$

La masa del alambre es

$$m = \int_C \rho(x, y)ds = \int_C (x + y)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos t + r\ sen\, t)r\,dt$$

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos t + r^2\,sen\, t)\,dt$$

$$m = r^2(sen\, t - \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2\left[\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (sen(0) - \cos(0))\right] = 2r^2$$

Por tanto, las componentes del centro de masa son

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x(x + y)ds = \frac{1}{m}\int_C (x^2 + xy)ds = \frac{1}{2r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2 t + r^2\cos t\,sen\, t)rdt$$

$$\bar{x} = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\ 2t + \frac{sen^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{2}\left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0 + 0)\right] = \frac{(\pi + 2)r}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y(x + y)ds = \frac{1}{m}\int_C (xy + y^2)ds = \frac{1}{2r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos t\,sen\, t + r^2\,sen^2 t)rdt$$

$$\bar{y} = \frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t\,sen\, t + sen^2 t)\,dt = \frac{r}{2}\left(\frac{sen^2 t}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sen\ 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{y} = \frac{r}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - 0\right) - (0 + 0 - 0)\right] = \frac{(\pi + 2)r}{8}$$

Es decir,

$$\left(\frac{(\pi + 2)r}{8}, \frac{(\pi + 2)r}{8}\right)$$

Observación

Los segundos momentos o “momentos de inercia” del alambre que tiene la forma de la curva C alrededor de los ejes x e y están definidos como

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)ds$$

EJEMPLO

Plantee las integrales para encontrar los momentos de inercia I_x e I_y del alambre delgado del ejemplo anterior (se deja como ejercicio la evaluación de las integrales).

Solución

$$I_x = \int_C y^2(x + y)ds = \int_C (xy^2 + y^3)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^4\cos t\,sen^2 t + r^4 sen^3 t)dt$$

$$I_y = \int_C x^2(x + y)ds = \int_C (x^3 + x^2y)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^4\cos^3 t + r^4\cos^2 t\,sen\, t)dt$$

Observación

La masa, el centro de masa y los momentos de inercia para un alambre delgado que tiene la forma de una curva espacial C, se definen de forma equivalente. Esto es,

$$m = \int_C \rho(x, y, z)ds, \quad \bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x, y, z)ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y, z)ds$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y, z)ds, \quad I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds,$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)ds$$

Integral de línea de un campo vectorial

Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el trabajo realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas F. Este trabajo está determinado por la integral de línea del campo vectorial F, que se define a continuación

Definición

Sea F un campo vectorial continuo definido sobre una curva simple C, dada por una ecuación vectorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Entonces la integral de línea de F a lo largo de C es

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea $\int_C F \bullet dr$, donde C está dada por la función $r(t)$

1. $F(x, y) = x^2y^3 i - y\sqrt{x} j; \quad r(t) = t^2 i - t^3 j, \ 0 \leq t \leq 1$

Solución

Las ecuaciones paramétricas para C son: $x = t^2$, $y = -t^3$, $0 \leq t \leq 1$. Entonces, $f(x(t), y(t)) = -t^{13} i + t^4 j$, y $r'(t) = 2ti - 3t^2 j$. Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 (-2t^{14} - 3t^6)dt = -\frac{12}{15}t^{15} - \frac{3}{7}t^7\Big|_0^1 = -\frac{2}{15} - \frac{3}{7} = \frac{-59}{105}$$

2. $F(x, y, z) = x^2 i + xyj + z^2 k$; $r(t) = sen\, t\, i + cos\, t\, j + t^2 k, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Solución

Las ecuaciones paramétricas para C son $x = sen\, t$, $y = cos\, t$, $z = t^2$, $f(x(t), y(t), z(t)) = sen^2\, t\, i + sen\, t\, cos\, t\, j + t^4\, k$, y $r'(t) = cos\, t\, i - sen\, t\, j + 2t\, k$. Entonces,

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen^2 t \cos t - sen^2 t \cos t + 2t^5)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t^5 dt = \frac{1}{3}t^6\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{192}$$

Observación

Recordemos que el trabajo realizado por una fuerza variable $f(x)$ al mover una partícula de a hasta b a lo largo del eje x es $w = \int_a^b f(x)dx$. Además, el trabajo realizado por una fuerza constante F al mover un objeto de un punto P a otro punto Q, en el espacio, está dado por $W = D \bullet F$, donde $D = \overrightarrow{PQ}$ es el vector desplazamiento.

Ahora, supongamos que $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ es un campo de fuerzas continuo en R^3 (un campo de fuerzas en R^2 podría ser considerado como un caso especial cuando $R(x, y, z) = 0$, y las funciones componente P y Q solamente dependen de x e y). Entonces, el trabajo realizado por esta fuerza F al mover una partícula a lo largo de una curva suave C con ecuación vectorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$ está dado por

$$w = \int_C F \cdot dr$$

EJEMPLO

1. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y) = x^2\, i + xyj$ sobre una partícula que se mueve una vez alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, orientado en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Solución

Las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial para la curva C son:

$$x = 2\cos t \quad y = 2\, sen\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi,\ r(t) = 2\cos t\, i + 2\, sen\, t\, j$$

Entonces,
$F(x(t), y(t), z(t)) = 4\cos^2 t\, i + 4\cos t\ sen\, t\, j,\ r'(t) = -2\, sen\, t\, i + 2\cos t\, j$

Por tanto,

$$w = \int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (-8cos^2 t sent + 8cos^2 t\, sen\, t)\, dt = 0$$

2. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x, y, z) = xz\, i + xy\, j + yz\, k$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva $r(t) = t^2\, i - t^3\, j + t^4\, k,\ 0 \le t \le 1$.

Solución

Si $F(x(t), y(t), z(t)) = t^6\, i - t^5\, j - t^7\, k$ y $r'(t) = 2t\, i\text{-}3t^2\, j + 4t^3\, k$. Entonces,

$$w = \int_C F \cdot dr = \int_0^1 (2t^7 + 3t^7 - 4t^{10})dt = \int_0^1 (5t^7 - 4t^{10})dt = \frac{5}{8}t^8 - \frac{4}{11}t^{11}\Big|_0^1 = \frac{23}{88}$$

Observación

Finalmente, veamos la relación entre la integral de línea de campos vectoriales y la integral de línea de campos escalares.

Supongamos que el campo vectorial F en R^3 está dado $F(x, y, z) = P\, i + Q\, j + R\, k$ y $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, entonces

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_a^b (Pi + Qj + Rk) \cdot (x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k)dt$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria

En un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. A continuación, se presenta una generalización importante de este resultado, a la que se le conoce como teorema fundamental de las integrales de línea. El teorema fundamental para integrales de línea es similar al teorema fundamental del cálculo que establece que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad donde\ F'(x) = f(x)$$

Si consideramos el vector gradiente ∇f como una función f, de dos o tres variables, como una especie de derivada de f, por lo tanto, el siguiente resultado puede considerarse como una versión del teorema fundamental para integrales de línea.

Teorema fundamental de las integrales de línea

Sea C una curva suave a trozos con ecuación vectorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Sea f una función diferenciable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C, entonces

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

DEMOSTRACIÓN

Usando la definición de un campo vectorial continuo, tenemos

$$\int_C \nabla f \cdot dr = \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(r(t))dt$$

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Observación

El teorema dice que podemos evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo (el campo vectorial gradiente de la función potencial f) con solo conocer el valor de f en los puntos extremos de C.

EJEMPLO

Evalúe la integral de línea $\int_C F \bullet dr$, donde C es la curva dada.

$F(x, y) = 2xy\, i + (x^2 - y)\, j$, C es la curva $y = x^2$ desde $(1,1)$ hasta $(3,9)$

Solución

El campo vectorial F es conservativo porque

$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) = 2x$. Para determinar la función potencial f, se considera a $f_x(x, y) = 2xy$, y $f_y(x, y) = x^2 - y$.
Entonces,

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)dx = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

Para encontrar $g(y)$ se deriva el resultado de f con respecto a y y se iguala a la función $f_y(x, y) = x^2 - y$. Esto es,

$f_y(x, y) = x^2 + g'(y) = x^2 - y$. Entonces, $g'(y) = -y$. Integrando en y se obtiene,

$$g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + k$$

Si consideramos $k = 0$, obtenemos la función potencial $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2$. Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = f(3,9) - f(1,1) = \left(81 - \frac{81}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = 40$$

2. $F(x, y, z) = 2xy\, i + (x^2 + z^2)\, j + 2yz\, k$, C es el segmento de recta que une $(1,1,0)$ hasta $(0,2,3)$.

Solución

El campo vectorial F es conservativo porque

$$rot\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - 2z)\, i - (0 - 0)\, j + (2x - 2x)\, k = 0i + 0j + 0k$$

Realizando un procedimiento similar se considera

$f_x(x, y, z) = 2xy,\; f_y(x, y, z) = x^2 + z^2,\; f_z(x, y, z) = 2yz$

Entonces,

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z)dx = \int 2xydx = x^2y + g(y, z)$$

Ahora, se deriva el resultado con respecto a y e igualando a la función $f_y(x, y, z) = x^2 + z^2$, se obtiene

$$f_y(x,y,z) = x^2 + g_y(y,z) = x^2 + z^2\; g_y(y,z) = z^2 g(y,z) = \int z^2dy = yz^2 + h(z)$$

Remplazando $g(y, z)$ en la función f se tiene

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + h(z)$$

Finalmente, se deriva la función f con respecto a z e igualando a la función $f_z(x, y, z)$, tenemos

$f_z(x, y, z) = 2yz + h'(z) = 2yz \rightarrow h'(z) = 0 \rightarrow h(z) = k$

Considerando a $k = 0$, se obtiene la función potencial $f(x, y, z) = x^2y + yz^2$

Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = f(0,2,3) - f(1,1,0) = (0 + 18) - (1 + 0) = 17$$

Independencia de la trayectoria

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si F es un campo vectorial continuo y conservativo, el valor de $\int_C F \bullet \mathbf{dr}$ es el mismo para toda curva suave a trozos C que vaya de un punto fijo P a otro punto fijo Q. Esto se describe diciendo que la integral de línea $\int_C F \bullet dr$ es independiente de la trayectoria.

Una región en el plano (o en el espacio) es conexa si cada dos puntos en la región pueden ser unidos por una curva suave a trozos que se encuentre completamente dentro de la región. En regiones abiertas y conexas, la independencia de la trayectoria de $\int_C F \bullet dr$ es equivalente a la condición de que F sea conservativo.

Teorema

Si F es un campo vectorial continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C F \cdot dr$$

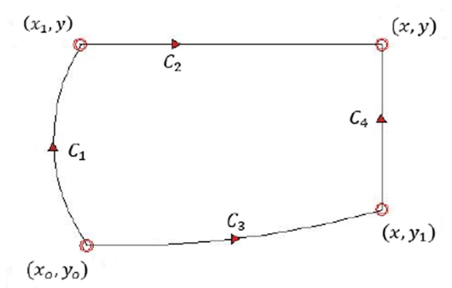
Es independiente de la trayectoria, si y solo si, F es conservativo.

Demostración

Si F es conservativo, entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ahora se demuestra el recíproco para una región plana conexa R. Sea $F(x, y) = P\,i + Q\,j$, y sea (x_0, y_0) un punto fijo en R. Si (x, y) es un punto cualquiera de R, elíjase una curva suave a trozos C que vaya de (x_0, y_0) a (x, y), y defínase f

$$f(x, y) = \int_C F \cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

La existencia de C en R está garantizada por el hecho de que R es conexa. Se puede mostrar que f es una función potencial de F, considerando dos trayectorias diferentes entre (x_0, y_0) y (x, y). Para la primera trayectoria, elíjase (x_1, y) en R tal que $x \neq x_1$. Esto es posible ya que R es abierta. Más adelante, elíjanse C_1 y C_2 como se muestra en la siguiente figura.



Utilizando la independencia de la trayectoria, se sigue que

$$f(x,y) = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Como la primera integral no depende de x, y como $dy = 0$ en la segunda integral se tiene

$$f(x,y) = g(y) + \int_{C_2} P\,dx$$

Entonces, la derivada parcial de f con respecto a x es $f_x\,(x, y)=P$. Para la segunda trayectoria, se elige un punto (x, y_1). Utilizando un razonamiento similar al empleado para la primera trayectoria, se concluye que $f_y\,(x, y) = Q$. Por tanto,

$$\nabla f\,(x, y) = f_x\,(x, y)i + f_y\,(x, y)j = p\,i + Q\,j = F(x, y)$$

Por consiguiente, F es conservativo.

Observación

Si F es un campo vectorial conservativo y C es una curva suave cerrada, es decir, $r(a) = r(b)$. Entonces,

$$\int_C F \cdot dr = 0$$

Teorema de Green

El teorema de Green establece la relación entre ciertas integrales de línea alrededor de una curva C cerrada simple (no se corta a sí misma, excepto en los extremos) e integrales dobles sobre la región plana D encerrada por la curva C. El teorema de Green es un resultado significativo con implicaciones muy importantes; por ejemplo, en el análisis de flujos de fluidos y en las teorías de electricidad y magnetismo.

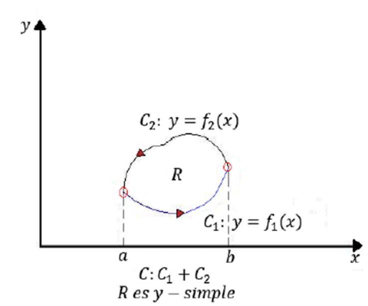
Teorema

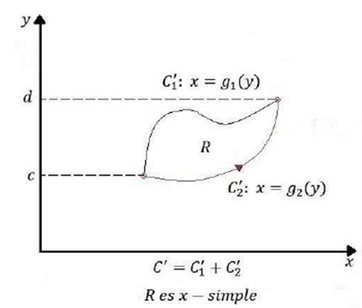
Sea C una curva suave a trozos, cerrada, simple con orientación positiva (contrario a las manecillas del reloj), y sea D la región limitada por C. Si las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C F \cdot dr = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Demostración

Se presenta una demostración solo para una región que es *x-simple y y-simple* como se muestra en las figuras





$$\int_C P\,dx = \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx$$

$$\int_C P\,dx = \int_a^b P(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, f_2(x))dx = \int_a^b [P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))]\,dx$$

Por otro lado,

$$\int_R \int \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_a^b P(x, y)|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\, dx$$

$$= \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]\, dx$$

En consecuencia tenemos,

$$\int_C P\,dx = -\int_R \int \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

De manera similar, se pueden usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que

$$\int_C Q\,dy = \int_R \int \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Sumando las integrales, llegamos a la conclusión establecida en el teorema.

EJEMPLO

Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, orientada positivamente

$$\int_C e^y\,dx + 2xe^y dy$$

C es el cuadrado con lados $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

Solución

Sean $P(x, y) = e^y$, $Q(x, y) = 2xe^y$, luego $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^y$

Entonces,

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D (2e^y - e^y)\,dA = \iint_D (e^y)\,dA$$

$$\int_C \mathbf{P(x, y)dx + Q(x, y)dy} = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{e^y\,dy\,dx} = \int_0^1 \mathbf{e^y|_0^1\,dx}$$

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_0^1 (e-1)dx = (e-1)x|_0^1 = (e-1)$$

Ejercicios complementarios

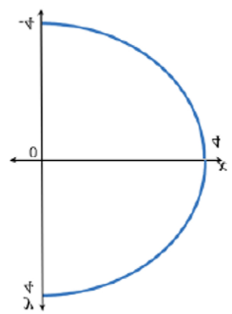
Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

1. $\int_C xy^4\, ds$, donde C es la mitad de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16, x \geq 0$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas que representan la mitad de la circunferencia (parte derecha) son

$x = 4\cos t, y = 4\,sen\, t, \; -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$



El diferencial ds es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(-4\,sent)^2 + (4\cos t)^2}dt$$

$$= \sqrt{16sen^2t + 16cos^2t}dt = 4dt$$

Por tanto,

$$\int_C xy^4 ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t)(4\,sen\,t)^4 4\,dt = 4096\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen^4 t\cos t\,dt = 4096\left.\frac{sen^5 t}{5}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4096}{5}\left(\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5 - \left(sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^5\right) = \frac{8192}{5}$$

2. $\int_C xe^{yz}\, ds$, C es el segmento de recta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.

Solución

La ecuación vectorial que representa el segmento de recta es

$r(t) = (1-t)(0,0,0) + t(1,2,3) = (t, 2t, 3t),\; 0 \leq t \leq 1$

Entonces, $x = t, y = 2t, z = 3t,\; 0 \leq t \leq 1$. El diferencial ds está dado por

$ds = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2}\, dt = \sqrt{14}\, dt$, por tanto

$$\int_C xe^{yz}\, ds = \int_0^1 te^{6t^2}\sqrt{14}\, dt = \sqrt{14}\int_0^1 te^{6t^2}\, dt = \frac{\sqrt{14}}{12}\int_0^6 e^u du$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{12}e^u\Big|_0^6 = \frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)$$

Donde $u = 6t^2, du = 12t\, dt$

3. Halle la masa y el centro de masa de un alambre en forma de hélice $x = 2sent, y = 2\cos t, z = 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Si la densidad es una constante k.

Solución

El diferencial ds está dado por

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\,sen\,t)^2 + (3)^2}\, dt$$

$$ds = \sqrt{4cos^2t + 4sen^2t + 9}\, dt = \sqrt{4 + 9}\, dt = \sqrt{13}\, dt$$

Por tanto,

$$m = \int_C \rho(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi} k\sqrt{13}dt = k\sqrt{13}t\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{13}\pi k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi k}\sqrt{13}k\int_0^{2\pi} 2\,sen\,t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sen\,tdt = \frac{1}{\pi}(-\cos t|_0^{2\pi})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi}(-1+1) = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi k}\sqrt{13}k\int_0^{2\pi} 2\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = \frac{1}{\pi}sen\,t|_0^{2\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi}(sen(2\pi) - sen(0)) = 0$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_C z\rho(x,y,z)ds = \frac{1}{2\sqrt{13}\pi k}\sqrt{13}k\int_0^{2\pi} 3tdt = \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} tdt = \frac{3}{2\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2\pi}2\pi^2 = 3\pi$$

Entonces, el centro de masa del alambre es (0,0,3π).

Evalúe la integral de línea $\int_C F \bullet dr$.

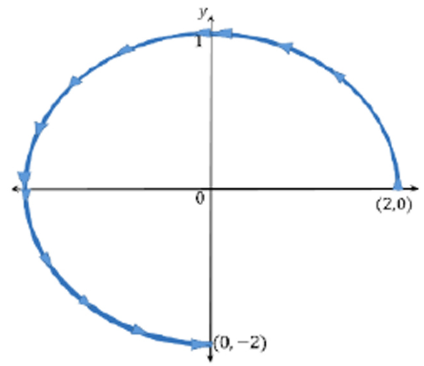
4. $F(x, y) = (x - y)\; i + xy\,j$, C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj de (2,0) a (0,–2).

Solución

Las ecuaciones paramétricas del arco de circunferencia están dadas por

$x = 2\cos t, y = 2\,sen\,t,\; 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$ y su ecuación vectorial es

$r(t) = 2\cos t\, i + 2\,sen\,t\,j,\; 0 \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$



Por tanto,

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} [(2\cos t - 2\,sen\,t)\,i + (4\cos t\,sen\,t)\,j]\cdot(-2\,sen\,t\,i + 2\cos t\,j)dt$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-4\cos t\,sen\,t + 4sen^2t + 8\cos^2 t\,sen\,t)dt$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (-4\cos t\,sen\,t + 2 - 2\cos 2t + 8\cos^2 t\,sen\,t)dt$$

$$\int_C F\cdot dr = 4\frac{\cos^2 t}{2} + 2t - 2\frac{sen2t}{2} - 8\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} = 2\cos^2 t - sen2t - \frac{8}{3}\cos^3 t + 2t|_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\int_C F\cdot dr = \left(2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 - sen(3\pi) - \frac{8}{3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^3 + 3\pi\right) - \left(2 - 0 - \frac{8}{3} + 0\right)$$

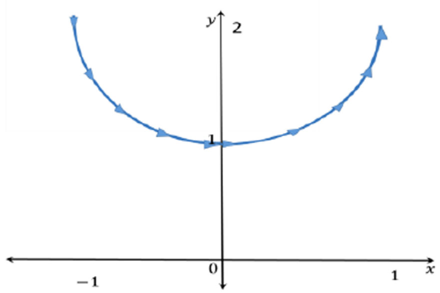
En consecuencia,

$$\int_C F\cdot dr = 3\pi + \frac{2}{3}$$

5. $F(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j$, es la parábola $y=x^2+1$ *de* $(-1,2)$ *a* $(1,2)$.

Solución

Considerando a x como el parámetro, se puede parametrizar la curva C de la forma $x=t, y=t^2+1, -1\le t\le 1$. Entonces, $F(r(t)), r(t), y$ $r'(t)$ están dados por



$$F(r(t))=\frac{t}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}}i+\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}}j,\qquad r(t)=t\,i+(t^2+1)\,j,\quad r'(t)=i+2t\,j$$

Por tanto,

$$\int_C F\cdot dr=\int_{-1}^{1}F(r(t))\cdot r'(t)\,dt=\int_{-1}^{1}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}}+\frac{2t^3+2t}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}}\right)dt$$

$$\int_C F\cdot dr=\int_{-1}^{1}\frac{2t^3+3t}{\sqrt{t^2+(t^2+1)^2}}dt=\frac{1}{2}\int_5^5 u^{-\frac{1}{2}}du=0$$

Donde $u=t^4+3t^2+1$, $du=(4t^3+6t)dt$

6. $F(x,y,z)=x\,i-z\,j+y\,k$, C: $r(t)=2t\,i+3t\,j-t^2\;k, -1\le t\le 1$

Solución

Si $F(r(t))=2t\,i+t^2\,j+3t\,k$, y $r'(t)=2\,i+3\,j-2t\,k$, entonces

$$\int_C F\cdot dr=\int_{-1}^{1}F(r(t))\cdot r'(t)dt=\int_{-1}^{1}(4t+3t^2-6t^2)dt=\int_{-1}^{1}(4t-3t^2)dt$$

$$\int_C F\cdot dr=2t^2-t^3|_{-1}^{1}=(2-1)-(2+1)=1-3=-2$$

7. Halle el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y)=x\,i+(y+2)j$, al mover un objeto a lo largo de un arco de cicloide

$$r(t)=(t-sen\;t)\;\;i+(1-\cos t)\;\;j,\;0\le t\le 2\pi$$

Solución

Las funciones $F(r(t))$ y $r'(t)$ son

$F(r(t))=(t\text{-}sen\;t)\;\;i+(3\text{-}\cos t)\;\;j$, $r'(t)=(1\text{-}\cos t)\;\;i+sen\;t\,j$

$$w=\int_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}[(t-sen\,t)(1-\cos t)+(3-\cos t)(sen\,t)]dt$$

$$w=\int_0^{2\pi}(t-t\cos t-sen\,t+sen\,t\cos t+3\,sen\,t-\cos t\,sen\,t)\,dt$$

$$w=\int_0^{2\pi}(t+2\,sen\,t-t\cos t)dt=\int_0^{2\pi}(t+2\,sen\,t)dt-\int_0^{2\pi}t\cos t\,dt$$

Utilizando integración por partes en la segunda integral

$$u=t,\;du=dt,\;dv=\cos t\,dt,\;v=sen\;t$$

$$w=\frac{t^2}{2}-2\cos t\Big|_0^{2\pi}-\left(tsent|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}sen\,t\,dt\right)=((2\pi^2-2)-(0-2))-(tsent+\cos t|_0^{2\pi})$$

$$w=2\pi^2-((2\pi\;sen\;2\pi+\cos 2\pi)-(0+\cos 0))=2\pi^2$$

8. Un hombre de 160 lb de peso sube con una lata de 25 lb de pintura por una escalera helicoidal que rodea a un silo, con radio de 20 pies. La lata de pintura tiene un agujero y se fugan 9 lb de pintura de la lata en forma estacionaria durante el ascenso del hombre. Si el silo mide 90 pies de alto y el hombre hace exactamente 3 revoluciones completas, ¿cuánto trabajo realiza el hombre contra la gravedad al subir hasta la parte superior?

Solución

El campo de fuerzas está dado por $F(x,y,z) = 0i + 0j + \left(185 - \frac{9}{6\pi}t\right)k$ y las ecuaciones paramétricas que describen la curva son

$$x = 20\cos t,\ y = 20\ sen\ t,\ z = \frac{15}{\pi}t,\ 0 \le t \le 6\pi$$

Por tanto,

$$w = \int_C F \cdot dr = \int_0^{6\pi} \left[0i + 0j + \left(185 - \frac{3}{2\pi}t\right)k\right] \cdot \left[-20\ sen\ t\ i + 20\cos t\ j + \frac{15}{\pi}k\right] dt$$

$$w = \int_0^{6\pi} \left[\left(185 - \frac{3}{2\pi}t\right)\left(\frac{15}{\pi}\right)\right] dt = \frac{15}{\pi}\int_0^{6\pi}\left(185 - \frac{3}{2\pi}t\right)dt = \frac{15}{\pi}\left(185t - \frac{3}{2\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{6\pi}\right)$$

$$w = \frac{15}{\pi}\left(185(6\pi) - \frac{3}{2\pi}\left(\frac{36\pi^2}{2}\right)\right) = \frac{15}{\pi}(1110\pi - 27\pi) = 15(1083) = 16245\ lb/pies$$

Encuentre una función f tal que $F = \nabla f$ (F es un campo vectorial conservativo) y utilícela para evaluar $\int_C F \bullet dr$ a lo largo de la curva C.

9. $F(x,y) = e^{2y}\ i + (1 + 2xe^{2y})\ j,\ \ C: r(t) = te^t\ i + (1+t)\ j,\ 0 \le t \le 1$

Solución

El campo vectorial F es conservativo porque

$\frac{\partial}{\partial y}(e^{2y}) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + 2xe^{2y}) = 2e^{2y}$. Para hallar $f(x,y)$ se parte del hecho que $f_x(x,y) = e^{2y}$, $f_y(x,y) = 1 + 2xe^{2y}$. Entonces,

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int e^{2y}\,dx = xe^{2y} + g(y)$$

Derivando con respecto a y la función f e igualando a $f_y(x,y) = 1 + 2xe^{2y}$, se obtiene

$f_y(x,y) = 2xe^{2y} + g'(y) = 1 + 2xe^{2y}$, entonces $g'(y) = 1$, *luego* $g(y) = y + k$

Si se considera $k=0$, entonces la función potencial es $f(x,y) = xe^{2y} + y$. Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = f(r(1)) - f(r(0)) = f(e,2) - f(0,1) = (e \cdot e^4 + 2) - (0+1) = e^5 + 1.$$

10. $F(x,y,z) = 4xe^z\ i + \cos y\ j + 2x^2 e^z\ k,\ \ C: r(t) = ti + t^2 j + t^4 k,\ 0 \le t \le 1$

Solución

El campo vertical F es conservativo porque

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xe^z & \cos y & 2x^2e^z \end{vmatrix} = (0-0)i - (4xe^z - 4xe^z)j + (0-0)k = 0i + 0j + 0k$$

Ahora, considerando $f_x(x,y,z) = 4xe^z$, $f_y(x,y,z) = \cos y$, $f_z(x,y,z) = 2x^2 e^z$, se encuentra la función potencial f. Esto es,

$$f(x,y,z) = \int f_x(x,y,z)dx = \int 4xe^z\,dx = 2x^2e^z + g(y,z)$$

Para encontrar la expresión $g(y,z)$ se deriva la función f con respecto a y e igualando a $f_y(x,y,z) = \cos y$, se obtiene

$$f_y(x,y,z) = g_y(y,z) = \cos y\,,\ \ entonces,\ g(y,z) = \int \cos y\,dy = sen\,y + h(z)$$

Reemplazando $g(y,z)$ en la función f se tiene $f(x,y,z) = 2x^2 e^z + sen\, y + h(z)$. De igual forma, para hallar $h(z)$ se deriva la función resultante f con respecto a z y se iguala a la función $f_z(x,y,z) = 2x^2 e^z$. Entonces,

$f_z(x,y,z) = 2x^2 e^z + h'(z) = 2x^2 e^z$, por lo tanto, $h'(z) = 0$, *luego* $h(z) = k$

Tomando $k = 0$ se obtiene la función potencial $f(x,y,z) = 2x^2 e^z + sen\, y$
Por consiguiente,

$$\int_C F \cdot dr = f(r(1)) - f(r(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = (2e + sen\ 1) - (0) = 2e + sen\ 1$$

11. Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral

$$\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy,$$

C es cualquier trayectoria de (1,1) a (3,2).

Solución

El campo vectorial $F(x,y) = (2y^2 - 12x^3y^3)i + (4xy - 9x^4y^2)j$ es conservativo porque

$$\frac{\partial}{\partial y}(2y^2 - 12x^3y^3) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 9x^4y^2) = 4y - 36x^3y^2$$

Entonces, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Para evaluar la integral obsérvese que una función potencial es $f(x,y) = 2xy^2 - 3x^4y^3$. Luego,

$$\int_C (2y^2 - 13x^3y^3)\,dx + (4xy - 9x^4y^2)dy = f(3,2) - f(1,1) = (24 - 1944) - (2 - 3)$$

$$\int_C (2y^2 - 13x^3y^3)\,dx + (4xy - 9x^4y^2)dy = -1919$$

12. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x,y) = \frac{y^2}{x^2} i - \frac{2y}{x} j$ al mover un objeto de (1,1) a (4,-2).

Solución

Observando que el campo vectorial F es conservativo, porque

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x}\right) = \frac{2y}{x^2}$$

Y una función potencial es $f(x,y) = -\frac{y^2}{x}$, se tiene entonces que

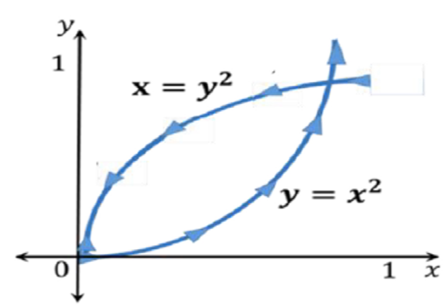
$$w = \int_C F \cdot dr = f(4,-2) - f(1,1) = (-1) - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva dada, positivamente orientada.

13. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)dy$, C es la frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$

Solución

Considerando las funciones $P(x,y) = y + e^{\sqrt{x}}$, $Q(x,y) = 2x + \cos y^2$, se tiene que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$. Por tanto,



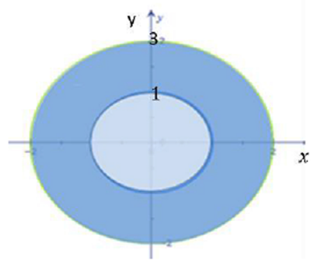
$$\int_C \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx+(2x+\cos y^2)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D dA=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}dydx$$

$$=\int_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}$$

14. $\int_C (x^3-y^3)\ dx+(x^3+y^3)dy$, C es la frontera de la región entre las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$.

Solución

Sean las funciones componentes $P(x,y)=x^3-y^3$, $Q(x,y)=x^3+y^3$. Entonces,



$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3y^2,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2$$

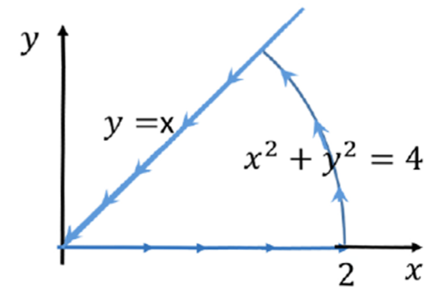
De tal forma,

$$\int_C (x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D (3x^2+3y^2)\,dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^3 3r^2r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\int_1^3 3r^3\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}r^4\Big|_1^3 d\theta$$

$$=\frac{3}{4}(80)\int_0^{2\pi}d\theta=60\theta|_0^{2\pi}=120\pi$$

15. $\int_C F\bullet dr$, donde $F(x,y)=(y^2-x^2y)\ i+xy^2\ j$, C está formada por las circunferencias $x^2+y^2=4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y los segmentos de recta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ y de $(0,0)$ a $(2,0)$



Solución

Sean las funciones componentes: $P(x,y)=y^2-x^2y$, $Q(x,y)=xy^2$. Entonces,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y-x^2,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$$

Por tanto,

$$\int_C F\cdot dr=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_D[(y^2)-(2y-x^2)]\,dA=\iint_D(x^2+y^2-2y)dA$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2(r^2-2r\,sen\theta)rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2(r^3-2r^2\,sen\theta)drd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4}r^4-\frac{2}{3}r^3sen\theta\Big|_0^2 d\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4-\frac{16}{3}sen\theta\right)d\theta=4\theta+\frac{16}{3}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\pi+\frac{16}{3}\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(0+\frac{16}{3}\cos 0\right)$$

$$=\left(\pi+\frac{16}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{16}{3}\right)=\pi+\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{16}{3}=\pi+\frac{8\sqrt{2}-16}{3}$$

16. Use el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza dada por $F(x, y) = x(x + y)\ \ i + xy^2\, j$ al mover una partícula desde el origen a lo largo del eje x hasta el punto $(0,1)$, luego a lo largo del segmento de recta hasta el punto $(0,1)$, y finalmente de regreso al origen, a lo largo del eje y.

Solución

Sean $P(x, y) = x^2 + xy, \quad Q(x, y) = xy^2$, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.
Por tanto,

$$w = \int_C F \cdot dr = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} (y^2 - x)dxdy = \int_0^1 \left(y^2x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{1-y}\right) dy$$

$$w = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + y + \frac{1}{2}y^2 - y^3\right) dy = -\frac{1}{12}$$

Ejercicios propuestos

Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

1. $\int_C y^3\, ds,\ C{:}\ x = t^3,\ \ y = t;\quad 0 \le t \le 2$

2. $\int_C x\ seny\ ds$, C es el segmento de recta de $(0,3)$ a $(4,6)$

3. $\int_C xyz\ ds,\ C{:}\ x = 2\ sen\ t, y = t, z = -2\ cos\ t\ 0 \le t \le \pi$

4. $\int_C (x^2\, y^3 - \sqrt{x})\ \ dy$, C es el arco de la curva $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$

5. $\int_C xe^y\, dx$, C es el arco de la curva $x = e^y$ de $(1,0)$ a $(e,1)$

6. $\int_C sen\, x\, dx + cos\, y\, dy$, C consiste en la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, desde $(1,0)$ a $(-1,0)$ y el segmento de recta de $(-1,0)$ a $(-2,3)$.

7. $\int_C (x + yz)dx + 2xdy + xyzdz$, C consta de los segmentos de recta de $(1,0,1)$ a $(2,3,1)$ y de $(2,3,1)$ a $(2,5,2)$.

8. Un alambre delgado está doblado en forma de semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4, x \ge 0$. Si la función de densidad lineal es la constante k, calcule la masa y el centro de masa del alambre.

9. Un alambre delgado tiene la forma de la parte de la circunferencia del primer cuadrante con centro en el origen y radio a. Si la función de densidad es $\rho(x,y) = kxy$, encuentre la masa y el centro de masa del alambre.

10. Un alambre toma la forma de una semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $y \ge 0$, y es más grueso cerca de la base que cerca de la parte superior. Determine los momentos de inercia I_x, I_y para el alambre si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde la recta $y = 1$.

11. Calcule la masa y el centro de masa de un alambre en forma de hélice $x = t, y = \cos t, z = \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$, si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

Evalúe la integral de línea $\int_C F \bullet dr$, C está dada por la función vectorial $r(t)$

12. $F(x, y) = xy\, i + y\, j$, C: $r(t) = 4 \cos t\, \mathrm{i} + 4 \operatorname{sen} t\, j,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

13. $F(x, y) = 3x\, i + 4y\, j$, C: $r(t) = t\, i + \sqrt{4-t^2}\, j, -2 \le t \le 2$

14. $F(x, y, z) = x^2 y\, i + (x - z)\ j + xyz\, k$, C: $r(t) = t\, i + t^2\, j + 2\, k, 0 \le t \le 1$

15. $F(x, y, z) = x^2\, i + y^2\, j + z^2\, k$,
$C: r(t) = 2 \operatorname{sen} t\, i + 2 \cos t\, j + \frac{1}{2} t^2 k,\ 0 \le t \le \pi$

Determine una función f tal que $F = \nabla f$ y use este resultado para evaluar $\int_C F \bullet dr$ a lo largo de la curva dada C.

16. $F(x,y) = xy^2\ i + x^2 y\, j$, C: $r(t) = \langle t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), t + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\rangle, 0 \le t \le 1$

17. $F(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}\ \mathrm{i} + 2y \arctan x\, j$, $C : r(t) = t^2\ i + 2t\, j, 0 \le t \le 1$

18. $F(x, y, z) = y^2 \cos z\ i + 2xy \cos z\ j - xy^2 \operatorname{sen} z\ k$,
C: $r(t) = t^2\, i + \operatorname{sen} t\, j + tk, 0 \le t \le \pi$

19. $F(x, y, z) = e^y\, i + xe^y\, j + (z + 1)\, e^z\, k$, C: $r(t) = t\, i + t^2\, j + t^3\, k, 0 \le t \le 1$

Evaluar la integral de línea, utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea.

20. $\int_C (y\, i + x\, j) \cdot dr$, C es la curva suave desde $(0,0)$ hasta $(3,8)$.

21. $\int_C (2(x + y)\ i + 2(x + y)\, j) \cdot dr$, C es la curva suave desde $(-2,2)$ hasta $(4,3)$.

22. $\int_C \cos x \operatorname{sen} y\, dx + \operatorname{sen} x \cos y\, dy$, C es la curva suave desde $(0, -\pi)$ hasta $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

23. $\int_C e^x \operatorname{sen} y\ dx + e^x \cos y\, dy$,
C es el cicloide $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ desde $(0,0)$ hasta $(2\pi,0)$.

24. $\int_C \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} dy$, C es el círculo $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ en el sentido de las manecillas del reloj desde $(7,5)$ hasta $(1,5)$

25. $\int_C (y + 2z)dx + (x - 3z)dy + (2x - 3y)dz$, C: es el segmento de recta desde $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$ a $(1,1,1)$

Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral

26. $\int_C \tan y\, dx + x \sec^2 y dy$, C es cualquier trayectoria desde $(0,1)$ a $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

27. $\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}\, dy$, C es cualquier trayectoria desde $(0,1)$ a $(1,2)$.

28. $\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, C: $r = 1 + \cos \theta$.

29. $\int_C 2 \arctan \frac{y}{x}\, dx + \ln(x^2 + y^2)dy$, C: $x = 4 + 2 \cos \theta, y = 4 + \operatorname{sen} \theta$

30. $\int_C e^x \cos 2y\, dx - 2e^x \operatorname{sen} 2y\, dy$, C: $x^2 + y^2 = a^2$

31. $\int_C \operatorname{sen} x \cos y\, dx + (y + \cos x \operatorname{sen} y)dy$, C es la frontera de la región comprendida entre las gráficas $y = xy, y = \sqrt{x}$

32. $\int_C \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - y\right) dx + \left(e^{-\frac{y^2}{2}} - x\right) dy$,
C: frontera de la región comprendida entre las gráficas del círculo $x = 5 \cos \theta, y = 5 \operatorname{sen} \theta$ y la elipse $x = 3 \cos \theta, y = 2 \operatorname{sen} \theta$

Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: (a) directamente y (b) por medio del teorema de Green.

33. $\int_C xydx + x^2y^3\,dy$, C es el triángulo con vértices $(0,0),(1,0),(1,2)$

34. $\int_C xdx + ydy$, C consta de los segmentos rectilíneos desde $(0,1)$ a $(0,0)$ y de $(0,0)$ a $(1,0)$ y la parábola $y = 1 - x^2$, desde $(1,0)$ a $(0,1)$.

Evalúe, mediante el teorema de Green, la integral de línea a lo largo de la curva con orientación positiva que se proporciona.

35. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, C es el límite de la región entre las circunferencias dadas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

36. $\int_C xy^2\,dx + 2x^2\,ydy$, C es el triángulo con vértices $(0,0),(2,2),(2,4)$.

37. $\int_C sen\,y\,dx + x\cos y\,dy$, C es la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Evalúe, mediante el teorema de Green, $\int_C F \bullet dr$ (compruebe la orientación de la curva antes de aplicar el teorema).

38. $F(x,\ y) = \langle\sqrt{x}+y^3, x^2 + \sqrt{y}\rangle$, C consiste en el arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ desde $(0,0)$ a $(\pi,0)$ y el segmento rectilíneo de $(\pi,0)$ a $(0,0)$

39. $F(x,y) = \langle y^2\cos x, x^2 + 2y\,sen\,x\rangle$, C es el triángulo desde $(0,0)$ a $(2,6)$ a $(2,0)$ a $(0,0)$

40. $F(x,y) = \langle e^x + x^2y, e^y - xy^2\rangle$, C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ orientada en el sentido de las manecillas del reloj.

41. $F(x,\ y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\rangle$, C es la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ orientada en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza F al desplazar un objeto desde P a Q

42. $F(x,y) = 2y^{\frac{3}{2}}\,i + 3x\sqrt{y}j$, $P(1,1)$, $Q(2,4)$

43. $F(x,y) = e^{-y}\ i - xe^{-y}\,j$, $P(0,1)$, $Q(2,0)$

44. Calcule el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $F(x,y) = x\,sen\,y\,i + y\,j$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde (-1,1) a (2,4).

45. Determine el trabajo que hace el campo de fuerzas $F(x,y,z) = \langle y + z, x + z, x + y\rangle$ sobre una partícula que se desplaza por el segmento rectilíneo desde $(1,0,0)$ a $(3,4,2)$.

46. Hallar el trabajo realizado por una persona que pesa 150 lb al subir una vuelta completa de una escalera helicoidal circular de radio 3 pies, si la persona asciende 10 pies.

47. Una partícula parte del punto $(-2,0)$, se mueve por el eje x hasta $(2,0)$ y luego por el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ hasta el punto de inicio. Use el teorema de Green para calcular el trabajo que hace el campo de fuerza $F(x\,,y) = \langle x, x^3 + 3xy^2\rangle$ sobre esta partícula.

48. Considere una partícula que se mueve a través del campo de fuerza dado por $F(x,y) = (y-x)i + xy\ j$ del punto $(0,0)$ al punto $(0,1)$ a lo largo de la curva con ecuaciones paramétricas $x = kt(1-t)$, $y = t$. Hallar el valor de k, tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sea 1.

Sección 9.3. Integrales de superficie

En la sección 8.2 se calculó el área de una superficie $z = f(x, y)$. Aquí se estudiarán superficies más generales, denominadas "superficies paramétricas" y se encontrarán sus áreas.

De lo ya estudiado, una curva en el plano o en el espacio se puede representar mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o, equivalente, por una función vectorial.

i) $r(t) = x(t)\ i + y(t)\ j$ curva en el plano
ii) $r(t) = x(t)\ i + y(t)\ j + z(t)\ k$ curva en el espacio

En esta sección, se estudiará cómo representar una superficie en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o por medio de una función vectorial. Obsérvese que en el caso de las curvas, la función vectorial r es una función de un solo parámetro t. En el caso de las superficies, la función vectorial es una función de dos parámetros u y v.

Definición

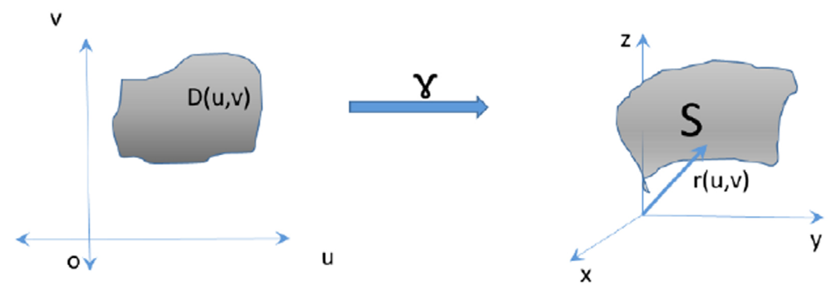
Sean x,y,z funciones de u y v, continuas en un conjunto D del plano uv. Al conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$r(u, v) = x(u, v)\ i + y(u, v)\ j + z(u, v)\ k$$

Se denomina ***superficie paramétrica de S*** y a las ecuaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, se denominan "ecuaciones paramétricas" para la superficie.

Observación

Cada par (u, v) proporciona un punto en S; al recorrer todos los posibles valores de u y v obtenemos toda la superficie S. En otras palabras, la superficie S resulta trazada por el extremo del vector de posición $r(u, v)$ cuando (u, v) recorre toda la región D.



EJEMPLO

Identifique y trace la superficie con ecuación vectorial dada $r(u, v) = u \cos v\ i + u \operatorname{sen} v\ j + u^2\ k$

Solución

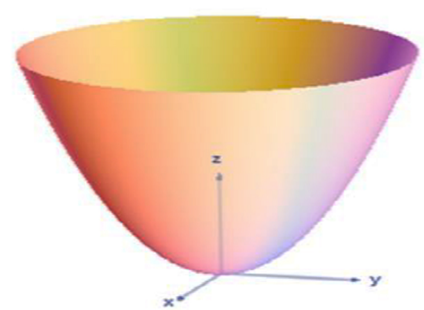
Las ecuaciones paramétricas para la superficie dada son:

$$x = u \cos v,\ y = u \operatorname{sen} v,\ z = u^2$$

Luego, para todo (x,y,z) sobre la superficie, se tiene

$$x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v = u^2 (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u^2$$

Como $z = u^2$, entonces la superficie S es el paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$



Observación

Intuitivamente, una "superficie suave" es una superficie que no tiene puntos angulosos o cúspides. Por ejemplo, esferas, elipsoides y paraboloides son suaves, mientras que el cono no es suave.

Definición

Sea S una superficie paramétrica suave con función vectorial

$$r(u,v) = x(u,v)\, i + y(u,v)\, j + z(u,v)\, k,$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv. Sea (u_0, v_0) un punto en D. Un vector normal en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$N = r_u(u_0,v_0) \times r_v(u_0,v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Donde las derivadas parciales de r con respecto a u y v se definen (vectores tangentes).

i) $r_u(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\, i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\, j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\, k$

ii) $r_v(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\, i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\, j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\, k$

EJEMPLO

Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica en el punto especificado

$$x = u + v,\ y = 3u^2,\ z = u - v;\ (2,3,0)$$

Solución

Los vectores tangentes r_u, r_v están dados

$$r_u(u,v) = i + 6u\, j + k \ \ y \ \ r_v(u,v) = i + 0j - k$$

Obsérvese que el punto (2,3,0) corresponde a los valores de los parámetros $u = 1$, $v = 1$, entonces

$$r_u(1,1) = i + 6j + k \quad y \quad r_v(1,1) = i + 0j - k.$$

Así, el vector normal al plano tangente es

$$N = r_u(1,1) \times r_v(1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6-0)i - (-1-1)j + (0-6)k$$

$$= -6i + 2j - 6k$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente en (2,3,0) es

$$-6(x-2) + 2(y-3) - 6(z-0) = 0 \longrightarrow -6x + 2y - 6z = -6 \longrightarrow 3x - y + 3z = 3$$

Definición

Sea S una superficie paramétrica suave dada por

$$r(u,v) = x(u,v)\ i + y(u,v)\ j + z(u,v)\ k$$

definida sobre una región abierta D, en el plano uv. Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D, entonces el área de la superficie S está dada por

$$A(s) = \iint_S ds = \iint_D \|r_u \times r_v\|\, dA$$

Observación

La expresión $\|r_u \times r_v\|$ representa la magnitud del vector normal. Para una superficie dada por $z = f(x, y)$, esta fórmula para el área de la superficie corresponde a la desarrollada en la sección 8.2; Para observar esto, se puede parametrizar la superficie utilizando la función vectorial $r(x, y) = x\ i + y\ j + f(x, y)\ \ k$, definida sobre la región R en el plano xy. Si consideramos $r_x = i + 0j + f_x(x, y)\ \ k$ y $r_y = 0i + j + f_y(x, y)\ \ k$ se tiene,

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{vmatrix} = -f_x(x,y)\, i - f_y(x,y)\, j + k$$

Entonces,

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2 + 1}$$

Esto implica, que el área de la superficie S es

$$A(s) = \iint_R \|r_x \times r_y\|\, dA = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + \left[f_y(x,y)\right]^2}\ dA$$

EJEMPLO

Hallar el área de la superficie dada

1. $r(u, v) = (2 + cos\ u)\ cos\ v\ i + (2 + cos\ u)\ sen\ v\ \ j + sen\ u\ \ k$; $0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi$.

Solución

Los vectores tangentes $r_u(u,v)$, $r_v(u,v)$ están dados por

$r_u(u, v) = -\,sen\ u\ \ cos\ v\ \ i - sen\ u\ \ sen\ v\ \ j + cos\ u\ \ k$
$r_v(u, v) = -(2 + cos\ u)\ \ sen\ v\ i + (2 + cos\ u)\ \ cos\ v\ \ j + 0k$

Entonces, el vector normal $N = r_u(u, v) \times r_v(u, v)$ es

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\,sen\, u\, cos\, v & -\,sen\, u\, sen\, v & cos\, u \\ -(2 + cos\, u)\, sen\, v & (2 + cos\, u)\, cos\, v & 0 \end{vmatrix}$$

$=(-(2 + cos\ u)\ \ cos\ v\ \ cos\ u)\ \ i-((2 + cos\ u)\ \ sen\ v\ \ cos\ u)\ \ j+$

$(-(2 + cos\ u)\ cos^2\ v\ sen\ u - (2 + cos\ u)\ sen^2\ v\ sen\ u)\ k$

$= -\,(2 + cos\ u)(cos\ v\ \ cos\ u\ \ i + sen\ v\ \ cos\ u\ \ j + sen\ u\ \ k)$

Lo que implica que,

$$\|r_u \times r_v\| = (2 + cos\, u)\sqrt{(cos\, v\, cos\, u)^2 + (sen\, v\, cos\, u)^2 + (sen\, u)^2}$$

$$\|r_u \times r_v\| = (2 + cos\, u)\sqrt{cos^2 u(cos^2 v + sen^2 v) + sen^2 u}$$

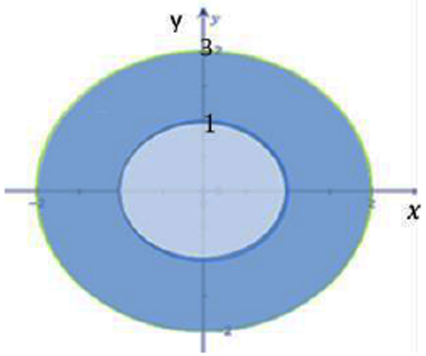
$$\|\boldsymbol{r_u \times r_v}\| = (2 + \boldsymbol{cos\, u})\sqrt{\boldsymbol{cos^2 u + sen^2 u}} = 2 + \boldsymbol{cos\, u}$$

Por tanto, el área de la superficie es

$$A(s) = \iint_D \|r_u \times r_v\|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (2 + cos\, u)\, du\, dv = \int_0^{2\pi} (2u + sen\, u|_0^{2\pi})\, dv$$

$$A(s) = \int_0^{2\pi} ((4\pi + sen\, 2\pi) - (0 + sen\, 0))dv = \int_0^{2\pi} 4\pi\, dv = 4\pi v|_0^{2\pi} = 8\pi^2\, u^2$$

2. La parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se encuentra entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.



Solución

Si $f(x,y) = y^2 - x^2$, entonces $f_x(x,y) = -2x$, $f_y(x,y) = 2y$. Por tanto, el área de la superficie es

$$A(s) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\, dA = \iint_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$A(s) = \iint_R \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Pasando a coordenadas polares, se obtiene

$$A(s) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_5^{17} \sqrt{u}\, \frac{du}{8} d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_5^{17} d\theta$$

$$A(s) = \frac{1}{12}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

Si $u = 1 + 4r^2$, $du = 8rdr$

Entonces,

$$A(s) = \frac{1}{12}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)\pi\, u^2$$

Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de integrales de superficie. Inicialmente se considerarán superficies dadas por $z = g(x, y)$. Más adelante, se analizarán superficies más generales dadas en forma paramétrica.

Definición

Sea S una superficie dada por $z = g(x,y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Supóngase que las funciones g, g_x, g_y son continuas sobre R y que f está definida en S. La integral de superficie de f sobre S se define

$$\iint f(x,y,z)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta s_i$$

Siempre que el límite exista.

Observación

El siguiente resultado nos afirma que la integral de superficie de f sobre S se puede evaluar mediante una integral doble.

Teorema

Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x,y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Si g, g_x, g_y son continuas en R y f es continua en S, entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\iint_S f(x,y,z)\, ds = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}\, dA$$

Observación

Para superficies descritas por funciones de x y z (o de y y z), al teorema anterior se le pueden hacer los siguientes ajustes:

Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R es su proyección sobre el plano xz, entonces

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_R f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+[g_x(x,z)]^2+[g_z(x,z)]^2}\,dA$$

Si S es la gráfica de $x = g\,(y, z)$ y R es su proyección sobre el plano yz, entonces

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_R f(g(y,z),y,z)\sqrt{1+[g_y(y,z)]^2+[g_z(y,z)]^2}\,dA$$

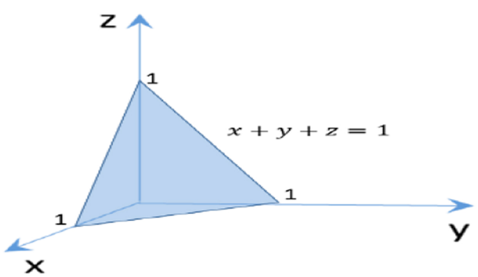
Si $f\,(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie de S.

EJEMPLO

Evalúe la integral de superficie.

$$\iint_S yz\,ds$$

S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante.



Solución

En la integral de superficie se puede expresar a S de las tres formas posibles.

Esto es, S se puede representar de las siguientes formas.

$$z = 1 - x - y \longrightarrow g(x,y) = 1 - x - y$$
$$y = 1 - x - z \longrightarrow g(x,z) = 1 - x - z$$
$$x = 1 - y - z \longrightarrow g(y,z) = 1 - y - z$$

Considerando a S como $z = g(x,y) = 1 - x - y => g_x\,(x,y) = -1, g_y\,(x,y) = -1$. Obteniéndose,

$$\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Por tanto,

$$\iint_S yz\,ds = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}\,dA = \iint_R y(1-x-y)\sqrt{3}\,dA$$

$$\iint_S yz\,ds = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-y}(y-xy-y^2)\,dx\,dy = \sqrt{3}\int_0^1\left(yx-\frac{yx^2}{2}-y^2x\Big|_0^{1-y}\right)dy$$

$$\iint_S yz\,ds = \sqrt{3}\int_0^1\left(y(1-y)-\frac{1}{2}y(1-y)^2-y^2(1-y)\right)dy$$

$$\iint_S yz\,ds = \sqrt{3}\int_0^1\left(y-y^2-\frac{1}{2}y+y^2-\frac{1}{2}y^3-y^2+y^3\right)dy$$

$$\iint_S yz\,ds = \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2}y-y^2+\frac{1}{2}y^3\right)dy = \sqrt{3}\left(\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{8}y^4\Big|_0^1\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

Observación

Las integrales de superficie tienen aplicaciones semejantes a las de las integrales que se ha estudiado antes. Por ejemplo, si una lámina delgada tiene la forma de una superficie S y la densidad (masa por unidad de área) en el punto (x, y, z) está dada $\rho\,(x, y, z)$, entonces la masa total de la lámina es

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,ds$$

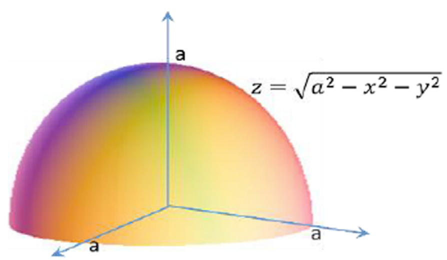
y el centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)\,ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)\,ds, \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)\,ds$$

De forma equivalente se pueden definir los momentos de inercia para una lámina.

EJEMPLO

Hallar la masa de la lámina bidimensional $\boldsymbol{S}$: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ de densidad $\rho\,(x, y, z) = kz$



Solución

Al proyectar S sobre el plano xy se obtiene la región R: $x^2 + y^2 \leq a^2$. Las derivadas parciales $g_x\,(x, y)$ y $g_y\,(x, y)$ son

$$g_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad g_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Luego,

$$\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2}\right] + \left[\frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}\right]} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Por tanto,

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,ds = \iint_R k\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}\,dA$$

$$m = k\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dA = Ka\iint_R dA = ka\int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta$$

$$m = ka\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^a d\theta = \frac{1}{2}ka^3\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{1}{2}ka^3\theta\Big|_0^{2\pi} = ka^3\pi$$

Observación

Se consideran a continuación superficies dadas en forma paramétrica. En este caso se puede mostrar que para una superficie S dada por la función vectorial

$$r(u, v) = x(u, v)\ \ i + y(u, v)\ \ j + z(u, v)\ \ k$$

definida sobre una región D en el plano uv, la integral de superficie de $f\,(x, y, z)$ sobre S está dada por

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\|\,dA$$

EJEMPLO

Evaluar

$\iint_S xy\,ds$, S: $r(u, v) = 2\cos u\ \ i + 2\,sen\,u\ \ j + v\,k$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq v \leq 2$.

Solución

Si $x = 2\cos u, y = 2\,sen\,u,\ z = v$, entonces los vectores r_u, r_v son

$$r_u(u,v) = -2\,sen\,u\ i + 2\cos u\ j + 0\,k \ \text{ y } \ r_v(u,v) = 0\,i + 0\,j + k$$

De modo que

$$r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\,sen\,u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos u\ i + 2\,sen\,u\ j + 0k$$

Entonces,

$$\|r_u(u,v) \times r_v(u,v)\| = \sqrt{4\cos^2 u + 4\,sen^2 u} = 2$$

Por tanto, la integral de superficie puede ser evaluada como

$$\iint_S xy\,ds = \iint_D (2\cos u)(2\,sen\,u)(2)\,dA = 8\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,u\cos u\,du\,dv = 8\int_0^2 \frac{sen^2 u}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dv$$

$$\iint_S xy\,ds = 4\int_0^2 dv = 4v|_0^2 = 8$$

Orientación de una superficie

Para inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores unitarios normales. Se dice que una superficie es orientable si, en todo punto de S que no sea un punto frontera, puede definirse un vector unitario normal N de manera tal que los vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S. Si esto es posible, S es una ***superficie orientada***.

Una superficie S orientable tiene dos caras. Así, cuando se orienta una superficie, se elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles.

Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger al vector unitario normal N, el que apunta hacia fuera de la esfera. Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipsoides y planos, son orientables.

En una superficie orientable, el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por, $z = g(x,y)$ se considera

$$G(x,y,z) = z - g(x,y)$$

Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

$$N = \frac{\nabla G(x,y,z)}{\|\nabla G(x,y,z)\|} = \frac{-g_x(x,y)\,i - g_y(x,y)\,j + k}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$

o por el vector unitario normal

$$N = \frac{-\nabla G(x,y,z)}{\|\nabla G(x,y,z)\|} = \frac{g_x(x,y)\,i + g_y(x,y)\,j - k}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$

Si la superficie suave orientable S está dada en forma paramétrica por

$$r(u,v) = x(u,v)\ i + y(u,v)\ j + z(u,v)\ k.$$

Entonces, los vectores unitarios normales están dados por

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \quad o \quad N = \frac{r_v \times r_u}{\|r_v \times r_u\|}$$

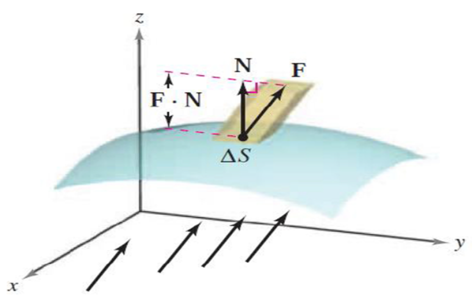
Observación

Si la superficie orientable está dada por $y = g(x,z)$ o $x = g(y,z)$. Entonces, para orientar la superficie se puede usar uno de los siguientes vectores gradiente

$$\nabla G(x,y,z) = -g_x(x,z)\ i + j - g_z(x,z)\ k \quad (G(x,y,z) = y - g(x,z))$$
$$\nabla G(x,y,z) = i - g_y(x,z)\ j - g_z(y,z)\ k \quad (G(x,y,z) = x - g(y,z))$$

Integrales de superficie de campos vectoriales

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S. Supóngase que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad F. Sea Δs el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual F es casi constante. Por consiguiente, la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $F \bullet N$, que se muestra en la figura.



El campo de velocidad F indica la dirección del flujo de fluido.

Es decir, $\Delta V = (altura)(área\ de\ base) = (F \bullet N)\Delta s$. Por lo tanto, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (llamada el flujo de F a través de S) es la integral de superficie de la siguiente definición.

Definición

Si F es un campo vectorial continuo en una superficie S orientada con un vector unitario normal N, luego la ***integral de superficie de F sobre S*** es

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot N\, dS$$

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por $z = g(x,y)$, se considera $G(x,y,z) = z - g(x,y)$. Entonces, $N\, ds$ puede escribirse como

$$N\,ds = \frac{\nabla G(x,y,z)}{\|\nabla G(x,y,z)\|} ds = \frac{\nabla G(x,y,z)}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}} \sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}\, dA$$

$$N\,ds = \nabla G(x,y,z)\, dA$$

Teorema

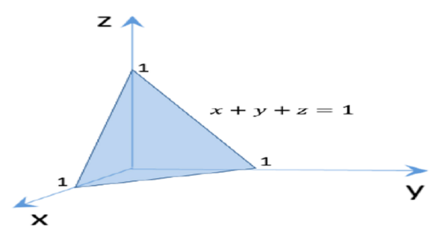
Sea S una superficie orientada por $z = g(x,y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Por lo tanto

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_R F \cdot \left[-g_x(x,y)\, i - g_y(x,y)\, j + k\right] dA \quad \textit{Orientada hacia arriba}$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_R F \cdot \left[g_x(x,y)\, i + g_y(x,y)\, j - k\right] dA \quad \textit{Orientada hacia abajo}$$

EJEMPLO

Hallar el flujo de F a través de S, $\iint_S F \bullet N\, dS$ donde N es el vector unitario normal a S, dirigido hacia arriba. $F(x,y,z) = 3z\, i - 4\, j + y\, k$; S: $x + y + z = 1$, Primer octante.



Solución

Si $g(x,y) = 1 - x - y$, entonces las primeras derivadas parciales de g son

$g_x(x,y) = -1, g_y(x,y) = -1$. De tal forma,

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_R F \cdot [-g_x(x,y)\, i - g_y(x,y)\, j + k]\, dA$$

$$= \iint_R [3(1-x-y)\, i - 4\, j + y\, k] \cdot (i + j + k)\, dA = \iint_R [(3-3x-3y) + (-4) + (y)]\, dA$$

$$= \iint_R (-1-3x-2y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (-1-3x-2y)\, dy\, dx = -\frac{4}{3}$$

Observación

Para una superficie orientada S dada por la función vectorial

$$r(u,v) = x(u,v)\; i + y(u,v)\; j + z(u,v)\; k$$

definida sobre una región D del plano uv, se puede definir la integral de flujo de F a través de S como

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_D F \cdot \left(\frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}\right) \|r_u \times r_v\|\, dA = \iint_D F \cdot (r_u \times r_v)\, dA$$

EJEMPLO

Halle el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = x\, i + y\, j + z\, k$ a través de la esfera con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, en el primer octante.

Solución

Usando la representación paramétrica

$$x = 6\, sen\, \emptyset\; cos\, \theta,\, y = 6\, sen\, \emptyset\; sen\, \theta,\, z = 6\, cos\, \emptyset$$

Es decir,

$$r(\emptyset,\theta) = 6\, sen\, \emptyset\, cos\, \theta\, i + 6\, sen\, \emptyset\, sen\, \theta\, j + 6\, cos\, \emptyset\, k,\;\; 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Obteniéndose,

$$F(r(\emptyset,\theta)) = 6\, sen\, \emptyset\;\; cos\, \theta\;\; i + 6\, sen\, \emptyset\;\; sen\, \theta\;\; j + 6\, cos\, \emptyset\; k$$

Además,

$$r_\emptyset = 6\, cos\, \emptyset\;\; cos\, \theta\; i + 6\, cos\, \emptyset\;\; sen\, \theta\; j - 6\, sen\, \emptyset\; k,$$
$$r_\theta = -6\, sen\, \emptyset\;\; sen\, \theta\; i + 6\, sen\, \emptyset\; cos\, \theta\; j + 0\; k$$

Entonces,

$$r_\emptyset \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6\, cos\, \emptyset\, cos\, \theta & 6\, cos\, \emptyset\, sen\, \theta & -6\, sen\, \emptyset \\ -6\, sen\, \emptyset\, sen\, \theta & 6\, sen\, \emptyset\, cos\, \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$r_\emptyset \times r_\theta = 36\, sen^2\emptyset cos\, \theta\; i + 36\, sen^2\emptyset sen\, \theta\, j + 36\, sen\, \emptyset\; cos\, \emptyset\; k$$

Por tanto,

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_D F \cdot (r_\emptyset \times r_\theta)\, dA$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_D [6\, sen\, \emptyset\, cos\, \theta\, i + 6\, sen\, \emptyset\, sen\, \theta\, j + 6\, cos\, \emptyset\, k] \cdot$$
$$[36\, sen^2\emptyset\, cos\, \theta\, i + 36\, sen^2\emptyset\, sen\, \theta\, j + 36\, sen\, \emptyset\, cos\, \emptyset\, k]\, dA$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_D [216\, sen^3\emptyset\, cos^2\theta + 216\, sen^3\emptyset\, sen^2\theta + 216\, sen\, \emptyset\, cos^2\emptyset]\, dA$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iint_D [216\, sen^3\emptyset + 216\, sen\, \emptyset\, cos^2\emptyset]\, dA = \iint_D 216\, sen\, \emptyset\, dA$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 216\, sen\, \emptyset\, d\emptyset\, d\theta$$

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -216\cos\emptyset\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 216\, d\theta = 216\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 216\frac{\pi}{2} = 108\pi$$

Finalmente, se presentan dos resultados muy importantes en las integrales de superficie: teorema de la divergencia y el teorema de Stokes.

Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia proporciona la relación entre una integral triple sobre una región sólida E y una integral de superficie sobre la superficie de E.

Teorema

Sea E una región sólida limitada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de E. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en E, entonces

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \iiint_E div\, F\, dv$$

Demostración

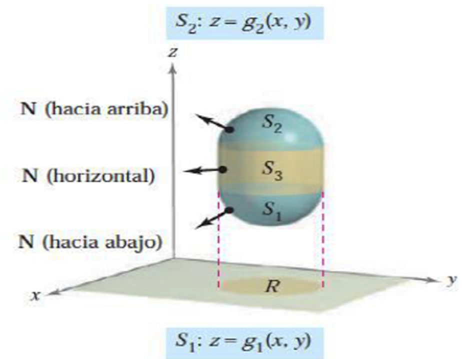
Si se considera $F(x, y, z) = P\,i + Q\,j + R\,k$, el teorema toma la forma

$$\iint_S F \cdot N\, dS = \int_S\int (P\,i \cdot N + Q\,j \cdot N + R\,k \cdot N)\, ds = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

Esto se puede demostrar verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas

$$\iint_S P\,i \cdot N\, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dv, \quad \iint_S Q\,j \cdot N\, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dv, \quad \iint_S R\,k \cdot N\, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dv$$

Como la verificación de las tres ecuaciones son similares, solo se realizará la tercera. La demostración se restringe a una región sólida simple, con superficie superior $z = g_2\,(x, y)$ y superficie inferior $z = g_1\,(x, y)$, cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y forman la región R. Si Q tiene una superficie lateral como S_3 en la figura dada



Luego, un vector normal es horizontal, lo cual implica que $R\,k \bullet N = 0$. Por consiguiente,

$$\iint_S R\,k \cdot N\, dS = \iint_{S_1} R\,k \cdot N\, dS + \iint_{S_2} R\,k \cdot N\, dS + 0$$

Sobre la superficie S_2, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior S_1, el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema anterior, se tiene lo siguiente:

$$\iint_{S_1} Rk \cdot N\, dS = \int_R\int R(x, y, g_1(x, y))k \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} i + \frac{\partial g_1}{\partial y} j - k\right) dA = -\int_R\int R(x, y, g_1(x, y))\, dA$$

$$\iint_{S_2} Rk \cdot N\,dS = \int_R \int R(x,y,g_2(x,y))k \cdot \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x} i - \frac{\partial g_2}{\partial y} j + k\right) dA = \int_R \int R(x,y,g_2(x,y))dA$$

Sumando estos resultados, se obtiene:

$$\iint_S R\,k \cdot N\,dS = \int_R \int [R(x,y,g_2(x,y)) - R(x,y,g_1(x,y))] = \int_R \int \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right] dA$$

$$\iint_S R\,k \cdot N\,dS = \int\int_E \int \frac{\partial R}{\partial z}\,dv$$

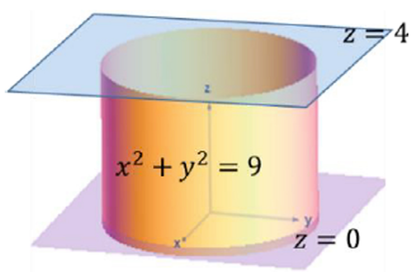
Observación

Al teorema de la divergencia a veces se le denomina ***teorema de Gauss***.

EJEMPLO

Utilizar el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S F \bullet N\,dS$, donde

$F(x, y, z) = x\,i + y^2\,j - zk$, S: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$.



Solución

La divergencia del campo vectorial es div $F = 1 + 2y - 1 = 2y$

Por tanto,

$$\iint_S F \cdot N\,dS = \iiint_E div\,F\,dv = \iiint_E 2y\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^4 (2r\,sen\,\theta)r dz dr d\theta$$

$$\iint_S F \cdot N\,dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^4 r^2\,sen\,\theta\,dz\,dr\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\,sen\,\theta\,z|_0^4\,dr\,d\theta$$

$$\iint_S F \cdot N\,dS = 8\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3\,sen\,\theta\Big|_0^3 d\theta = 72\int_0^{2\pi} sen\,\theta\,d\theta = -72\cos\theta|_0^{2\pi} = 0$$

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal N. Es decir, si se imagina que se toma el vector normal N con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de N, los demás dedos apuntaran en la dirección positiva de C.

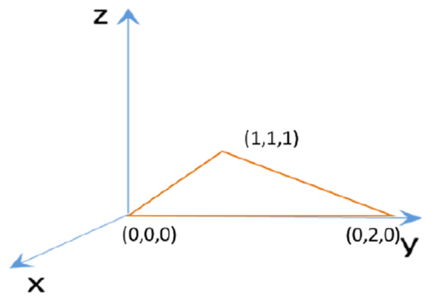
Teorema

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal N, acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C, con orientación positiva. Si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y C, entonces

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S (rotF) \cdot N\,ds$$

EJEMPLO

Usar el teorema de Stokes para hallar $\int_C F \cdot dr$, si $F(x,y,z) = 2y\,i + 3z\,j + x\,k$ y C: triángulo cuyos vértices son $(0,0,0)$,$(0,2,0)$ y $(1,1,1)$



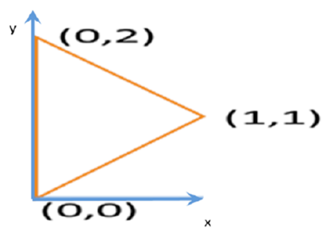
Solución

La superficie S definida por el plano que determina el triángulo, tiene como vector normal $u \times v$, donde $u = i + j + k$ y $v = 0i + 2j + 0k = 2j$. Esto es,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-2)\,i - (0-0)\,j + (2-0)\,k \;=\; -2\,i + 2k$$

Entonces, la ecuación del plano es:

$-2(x-0) + 0(y-0) + 2(z-0) = 0$. Es decir, $-x + z = 0$. Luego, S es la superficie $z = x$ y C es la traza de S en el plano xy



Como la superficie está dada por $z = g(x, y) = x$ y

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3z & x \end{vmatrix} = (0-3)\,i - (1-0)\,j + (0-2)\,k = -3i - j - 2k$$

Considerando un vector normal dirigido hacia arriba N, se tiene

$N\left[-g_x\,(x, y)\;i - g_y(x, y)\;j + k\right]dA$, donde $g(x,y) = x$

Por tanto,

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S (rotF) \cdot N\,ds = \iint_R (-3i - j - 2k) \cdot (-i + 0j + k)\,dA = \iint_R (3-2)\,dA$$

$$\int_C F \cdot dr = \iint_R dA = \int_0^1 \int_x^{2-x} dy\,dx = \int_0^1 y\,|_x^{2-x}\,dx = \int_0^1 (2-2x)\,dx = 2x - x^2|_0^1 = 1$$

Ejercicios complementarios

1. Hallar la ecuación rectangular de la superficie por eliminación de los parámetros de la función vectorial dada. Identificar la superficie y dibujar su gráfica.

$$r(u, v) = 3\cos v\ \cos u\ i + 3\cos v\ \operatorname{sen} u\ j + 3\operatorname{sen} v\ k$$

Solución

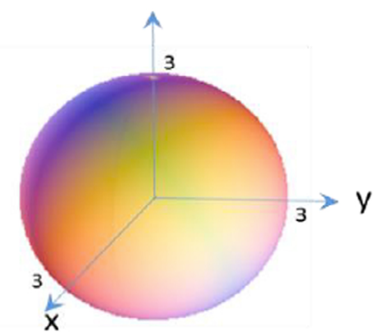
Si $x = 3\cos v\ \cos u$, $\ y = 3\cos v\ \operatorname{sen} u$, entonces

$$x^2 + y^2 = 9\cos^2 v \cos^2 u + 9\cos^2 v\operatorname{sen}^2 u = 9\cos^2 v$$

Por tanto, si $z = 3\operatorname{sen} v$, se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9\cos^2 v + 9\operatorname{sen}^2 v = 9$$

Se observa que la superficie dada es una esfera con centro en el origen y radio 3.



2. Hallar una función vectorial cuya gráfica sea la superficie de la parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Solución

Para parametrizar el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ se utilizan las ecuaciones: $x = u\cos v$, $\ y = u\operatorname{sen} v$, $\ 0 \le u \le 3$, $\ 0 \le v \le 2\pi$. Por tanto, la función vectorial cuya gráfica es la parte del plano $z = 4$ interior al cilindro es $r(u, v) = u\cos v\ i + u\operatorname{sen} v\ j\ 4k$, $\ 0 \le u \le 3$, $\ 0 \le v \le 2\pi$.

3. Hallar el área de la superficie (paraboloide) $r(u, v) = 4u\cos v\ i + 4u\operatorname{sen} v\ j + u^2 k$, donde $0 \le u \le 2$ y $0 \le v \le 2\pi$.

Solución

Inicialmente se encuentran los vectores r_u y r_v.

$$r_u(u, v) = 4\cos v\ i + 4\operatorname{sen} v\ j + 2u\,k,$$
$$r_v(u,v) = -4u\operatorname{sen} v\ i + 4u\cos v\ j + 0k$$

Entonces, el producto vectorial $r_u \times r_v$ es

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\cos v & 4\operatorname{sen} v & 2u \\ -4u\operatorname{sen} v & 4u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$r_u \times r_v = (0 - 8u^2\cos v)\ i - (0 + 8u^2\operatorname{sen} v)\ j + (16u\cos^2 v + 16u\operatorname{sen}^2 v)k$$
$$r_u \times r_v = -8u^2\cos v\ i - 8u^2\operatorname{sen} v\ j + 16u\ k$$

Por tanto,

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{(-8u^2\cos v)^2 + (-8u^2\operatorname{sen} v)^2 + (16u)^2}$$

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{64u^4\cos^2 v + 64u^4\operatorname{sen}^2 v + 256u^2}$$

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{64u^4 + 256u^2} = \sqrt{64u^2(u^2+4)} = 8u\sqrt{u^2+4}$$

Entonces,

$$A(s)=\iint_S ds \;=\; \iint_D \|r_u\times r_v\|\,dA \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 8u\sqrt{u^2+4}\,du\,dv$$

$$=\int_0^{2\pi}(4)\left(\frac{2}{3}\right)(u^2+4)^{3/2}\Big|_0^2\,dv$$

$$A(s)=\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left(8^{3/2}-8\right)dv=\frac{8}{3}\left(8^{3/2}-8\right)v\Big|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}\left(8^{3/2}-8\right)$$

4. Evaluar $\iint_S f(x,y,z)\,ds$, donde
$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\boldsymbol{S}: z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2\le 4$

Solución

La superficie está determinada de la forma $z=g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
Luego, las derivadas parciales de primer orden son

$$g_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad g_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}\;=\;\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

Por tanto,

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds \;=\; \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2}\;dA$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds=\iint_R \sqrt{x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\iint_R\sqrt{2(x^2+y^2)}\,dA$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds=2\iint_R\sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

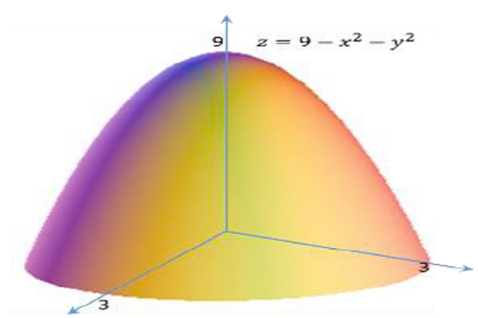
Utilizando coordenadas polares, se obtiene.

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds=2\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,dr\,d\theta=2\int_0^2\frac{1}{3}r^3\Big|_0^2 d\theta$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds=\frac{16}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{16}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{32\pi}{3}$$

5. Hallar el flujo de F a través de S, $\iint_S F\bullet N\,dS$ donde N es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba.

$$F(x,y,z)=x\,i+y\,j+z\,\mathrm{k},\qquad S:\ 9-x^2-y^2,\qquad z\ge 0$$



Solución

Puesto que S está determinada por $z = g(x, y) = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$, entonces las primeras derivadas parciales de $g(x, y)$ son

$$g_x(x, y) = -2x, \qquad g_y(x, y) = -2y$$

Además, como N es un vector unitario normal dirigido hacia arriba, se tiene

$$\iint_S F \cdot N ds = \iint_R F \cdot [-g_x(x,y)i - g_y(x,y)j + k] dA$$

$$\iint_S F \cdot N ds = \iint_R [xi + yj + (9 - x^2 - y^2)k] \cdot [2xi + 2yj + k] dA$$

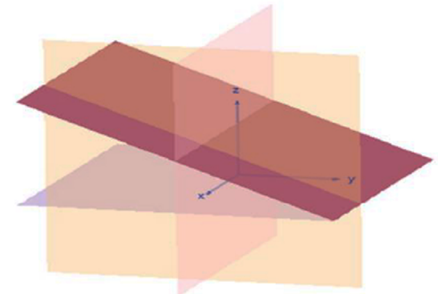
$$\iint_S F \cdot N ds = \iint_R [2x^2 + 2y^2 + (9 - x^2 - y^2)] dA = \iint_R (x^2 + y^2 + 9) dA$$

$$\iint_S F \cdot N ds = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^2 + 9) r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^3 + 9r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}r^4 + \frac{9}{2}r^2 \Big|_0^3\right) d\theta$$

$$\iint_S F \cdot N ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right) d\theta = \frac{243}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{243}{4}\theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{243\pi}{2}$$

6. Utilizar el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S F \bullet N ds$, donde

$$F(x,y,z) = x^3\ i + x^2 y\ j + x^2 e^y\ k, \quad S: z = 4 - y, \quad z = 0, \quad x = 0, \quad x = 6, \quad y = 0$$



Solución

La divergencia del campo vectorial F está dado por

$div\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, donde $P(x,y,z) = x^3,\ Q(x,y,z) = x^2 y,\ R(x,y,z) = x^2 e^y$. Entonces, $div\ F = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2$. Por tanto,

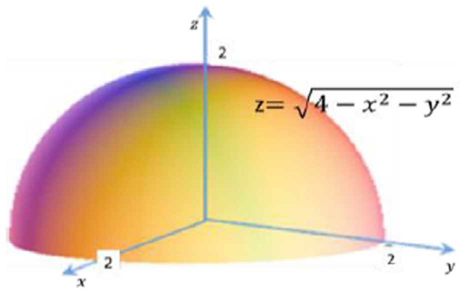
$$\iint_S F \cdot N ds = \iiint_E div F\ dv = \iiint_E 4x^2 dv = \int_0^6\int_0^4\int_0^{4-y} 4x^2 dz dy dx = \int_0^6\int_0^4 4x^2 z \Big|_0^{4-y} dy dx$$

$$\iint_S F \cdot N ds = 4\int_0^6\int_0^4 (4x^2 - x^2 y) dy dx = 4\int_0^6 \left(4x^2 y - \frac{1}{2}x^2 y^2 \Big|_0^4\right) dx$$

$$\iint_S F \cdot N ds = 4\int_0^6 (16x^2 - 8x^2) dx = 4\int_0^6 8x^2 dx = 32\frac{x^3}{3}\Big|_0^6 = 32\left(\frac{216}{3}\right) = 2304$$

7. Utilizar el teorema de Stokes para evaluar $\int_C F \bullet dr$, donde C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a N

$$F(x,y,z) = z^2\ i + y\ j + xz\ k, \quad S:\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



Solución

En principio se encuentra el rotacional de F

$$rot\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & y & xz \end{vmatrix} = (0-0)\,i - (z-2z)\,j + (0-0)\,k = z\,j = \sqrt{4-x^2-y^2}\,j$$

Considerando $z = g(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ y N un vector unitario normal apuntando hacia arriba, se obtiene

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S (rot\ F)\cdot N ds = \iint_R \left[\sqrt{4-x^2-y^2}\,j\right]\cdot\left[-g_x(x,y)\,i - g_y(x,y)\,j + k\right] dA$$

$$\int_C F\cdot dr = \iint_R \left[\sqrt{4-x^2-y^2}\,j\right]\cdot\left[\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,i + \frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,j + k\right] dA = \iint_R y\,dA$$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (r\,sen\theta)\,r\,dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\,sen\theta\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}r^3\,sen\theta\,\Big|_0^2 d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} sen\theta\,d\theta$$

$$\int_C F\cdot dr = -\frac{8}{3}\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ejercicios propuestos

Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada.

1. $r(u,v) = (u+v)\ i + (3-v)\ j + (1+4u+5v)\ k$

2. $r(u,v) = 2\,sen\,u\ i + 3\cos u\ j + v\,k,\quad 0 \le v \le u$

3. $r(s,t) = <s, t, t^2 - s^2>$

4. $r(s,t) = <5\,sen\,2t, s^2, s\cos 2t>$

Encuentre una representación paramétrica de la superficie.

5. El plano que pasa por el punto (1,2,-3) y contiene los vectores $i+j-k$, $i-j+k$

6. La parte del hiperboloide $x^2+y^2-z^2=1$ que se encuentra a la derecha del plano xz.

7. La parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se sitúa arriba del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

8. La parte del cilindro $y^2+z^2=16$ que está entre los planos $x=0$ y $x=5$.

Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado.

9. $x=u+v,\ \ y=3u^2,\ \ z=u-v;\ \ (2,3,0)$

10. $x=u^2,\ \ y=v^2,\ \ z=uv;\ \ u=1, v=1$

11. $r(u,v) = u^2\ i + 2u\,sen\,v\,j + u\cos v\,k;\ \ u=1, v=0$

12. $r(u,v) = uv\,i + u\,sen\,v\,j + v\cos u\,k;\ \ u=0,\ \ v=\pi$

Determine el área de la superficie.

13. La parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está en el primer octante.

14. La parte del plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

15. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

16. La parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - z^2$ que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

17. La parte de la superficie $y = 4x + z^2$ que se encuentra entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

18. La parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

19. El helicoide (o rampa en especial) cuya ecuación vectorial es $r(u, v) = u\cos v\, i + u\,\text{sen}\, v\, j + v\, k$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$

20. La superficie cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = u^2,\ \ y = uv,\ \ z = \frac{1}{2}v^2,\ \ 0 \leq u \leq 1,\ \ 0 \leq v \leq 2$$

Evalúe la integral de superficie.

21. $\iint_S y\,ds$, S es la superficie $z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

22. $\iint_S x^2z^2\,ds$, S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre $z = 1$ y $z = 3$.

23. $\iint_S y^2\,ds$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba del plano xy.

24. $\iint_S z\,ds$, S es la superficie $x = y + 2z^2$, $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

25. $\iint_S y\,ds$, S es la parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$.

26. $\iint_S (x^2z + y^2z)$, S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

27. $\iint_S (z + x^2y)\,ds$, S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está entre $x = 0$ y $x = 3$ en el primer octante.

28. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)ds$, S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre los planos $z = 0$, $z = 2$, junto con sus discos de arriba y abajo.

29. $\iint_S yz\,ds$, S es la superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = u\,\text{sen}\, v$, $z = u\cos v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

30. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,ds$,, S es el helicoide con ecuación vectorial $r(u, v) = u\cos v\, i + u\,\text{sen}\, v\, j + v\, k$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq \pi$

Hallar el flujo de F atraves de S, $\iint_S F \cdot N ds$. En el caso de superficies cerradas, use la orientación positiva (hacia afuera).

31. $F(x, y, z) = xy\, i + yz\, j + xz\, k$, S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está situado arriba del cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, y que tiene orientación hacia arriba.

32. $F(x, y, z) = xze^y\, i - xze^y\, j + z\, k$, S es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante y tiene orientación hacia abajo.

33. $F(x, y, z) = x\, i - z\, j + y\, k$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen.

34. $F(x, y, z) = xy\, i + 4x^2\, j + yz\, k$, S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, con orientación hacia arriba.

35. $F(x,y,z) = xz\, i + x\, j + y\, k$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geq 0$ orientado en la dirección del eje y positivo.

Mediante el teorema de la divergencia, calcule la integral de superficie $\iint_S F \cdot ds$.

36. $F(x, y, z) = e^x$ $sen\, y$ $i + e^x$ $cos\, y$ $j + yz^2$ k, S es la superficie de la caja delimitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

37. $F(x, y, z) = 3xy^2$ $i + xe^z$ $j + z^3$ k, S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.

38. $F(x, y, z) = x^3\, y\, i - x^2\, y^2$ $j - x^2\, yz\, k$, S es la superficie del sólido delimitada por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y los planos $z = -2$ y $z = 2$.

39. $F(x,y,z) = (cos\, z + xy^2)$ $i + xe^{-z}$ $j + (sen\, y + x^2\, z)$ k, S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

40. $F(x, y, z) = x^4$ $i - x^3\, z^2$ $j + 4xy^2\, z\, k$, S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = x + 2$ y $z = 0$.

41. $F(x, y, z) = x^2\, y\, i + xy^2 2$ $j + 2xyz\, k$, S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + 2y + z = 2$.

42. $F(x, y, z) = 4x^3\, z\, i + 4y^3\, z\, j + 3z^4$ k, S es la esfera con radio R y centro en el origen.

Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_C F \cdot dr$.. En cada caso C está orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a N.

43. $F(x, y, z) = (x + y^2)i + (y + z^2)j + (z + x^2)k$, C es el triángulo con vértices en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

44. $F(x, y, z) = e^{-x}$ $i + e^x$ $j + e^z$ k, C es la frontera de la parte del plano $2x + y + 2z = 2$ en el primer octante.

45. $F(x, y, z) = yz\, i + 2xz\, j + e^{xy}$ k, C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$, $y\, z = 5$.

46. $F(x, y, z) = xy\, i + 2z\, j + 3y\, k$, C es la curva de intersección del plano $x + z = 5$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

47. $F(x,y,z) = \tan^{-1}\frac{x}{y}\, i + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\, j + k$, C es el triángulo cuyos vértices son $(0,0,0),(1,1,1),(0,0,2)$.

48. $F(x, y, z) = x^2$ $i + z^2$ $j - xyz\, k$, C es la traza de la superficie S dada por la ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ en el plano xy.

49. $F(x, y, z) = xyz\, i + y\, j + z\, k$, C es la traza de la superficie S dada por la ecuación $z = x^2$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ sobre el plano xy. N es el vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia abajo.

50. $F(x,y,z) = 4xz\, i + y\, j + 4xy\, k$, C es la traza de la superficie S dada por la ecuación $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ sobre el plano xy.

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

Apéndice

Sucesiones y series

Definición

Una sucesión infinita es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y cuyo rango es el conjunto de los números reales.

Observación

En ocasiones es necesario extender el dominio a todos los enteros iguales o mayores que un número entero dado. Una sucesión se puede especificar dando una lista de suficientes términos iniciales para establecer un patrón. Por ejemplo, consideremos las sucesiones

1. $1,2,4,8,16,32,\ldots$
2. $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots$
3. $5,8,11,14,17,20,\ldots$

Otra forma de expresar una sucesión es mediante una fórmula explícita del término ***n*-ésimo**. Por ejemplo, las sucesiones anteriores se expresan como

1. $a_n = 2^n,\ n \geq 0$
2. $a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2$
3. $a_n = 3n + 2,\ n \geq 1$

A continuación, se define el concepto de convergencia de una sucesión.

Definición

Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ converge a L y se simboliza

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si para cada número positivo ε, hay un número positivo N correspondiente, tal que

$$n \geq N \;\rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$$

Una sucesión que no converja a algún número finito L se dice que diverge o que es divergente.

EJEMPLO

Determine si las sucesiones dadas convergen o divergen.

1. $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}, \qquad n \geq 1$

Solución

Expresando la sucesión $\{a_n\}$ como una lista de términos

$$\{a_n\} = 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \frac{17}{6}, \frac{20}{7}, \ldots$$

Se puede observar, fácilmente, que la sucesión converge a 3. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$$

2. $b_n = (-1)^n,\; n \geq 1$

Solución

Siguiendo un procedimiento similar al ejemplo anterior

$$\{b_n\} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Se observa que la sucesión no converge a un único valor finito; por lo tanto, la sucesión es divergente.

Observación

Todas las propiedades sobre límites se cumplen para las sucesiones. A continuación, se enuncia el teorema sobre estas propiedades.

TEOREMA

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes y k una constante, entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \times b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \times \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \qquad si\; \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

EJEMPLOS

Se da una fórmula explícita para a_n. Escriba los primeros términos de la sucesión y determine si es convergente o divergente

1. $a_n = \dfrac{4n^2 + 1}{n^2 - 2n + 3}, \qquad n \geq 1$

Solución

$$\{a_n\} = \frac{5}{2}, \frac{17}{3}, \frac{37}{6}, \frac{65}{11}, \frac{101}{18}, \frac{145}{27}, \frac{197}{38}, \frac{257}{51}, \frac{325}{66}, \frac{401}{83}, \ldots$$

Ahora, para determinar qué le sucede al cociente de dos polinomios en n cuando $n \to \infty$, se divide el numerador y denominador entre la mayor potencia de n que aparezca en el denominador. Además, se aplican las propiedades mencionadas anteriormente.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{n^2-2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}=\frac{4}{1}=4$$

Por tanto, la sucesión $\left\{\frac{4n^2+1}{n^2-2n+3}\right\}$ converge a 4.

Observación

En el resultado anterior, y en muchos problemas sobre sucesiones, es conveniente usar el siguiente resultado

$$Si\ \lim_{x\to\infty} f(x)=L, \qquad entonces\ \lim_{n\to\infty} f(n)=L$$

2. $a_n=\frac{e^n}{2^n}, \qquad n\geq 0$

Solución

$$\{a_n\}=\left\{\frac{e^n}{2^n}\right\}=\left\{\left(\frac{e}{2}\right)^n\right\}=1,\frac{e}{2},\frac{e^2}{4},\frac{e^3}{8},\frac{e^4}{16},\frac{e^5}{32},\ldots$$

Además, como $\frac{e}{2}>1$ se tiene que a medida de que aumente n, el número $\frac{e^n}{2^n}=\left(\frac{e}{2}\right)^n$ crece infinitamente. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n=\infty$$

Por tanto, la sucesión $\left\{\frac{e^n}{2^n}\right\}$ es divergente.

3. $a^n=\frac{\ln n}{n}, \qquad n\geq 1$

Solución

$$\{a_n\}=0,\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{\ln 4}{4},\frac{\ln 5}{5},\frac{\ln 6}{6},\ldots$$

Para determinar si la sucesión es convergente o divergente es necesario aplicar la regla de L'Hopital. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Por tanto, la sucesión $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$ converge a 0.

A continuación, se enuncia el teorema del emparedado para sucesiones.

Teorema

Supóngase que $\{a_n\}$ como $\{c_n\}$ convergen a L y que se satisface $a_n\leq b_n\leq c_n$ para todo $n\geq k$ (siendo k un entero fijo). Entonces $\{b_n\}$ también converge a L.

EJEMPLO

Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\right\}$ converge a 0.

Solución

Partiendo del hecho de que $-1\leq sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\leq 1$,, se tiene que para todo $n\geq 1$, se cumple $-\frac{1}{n}\leq\frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\leq\frac{1}{n}$. Puesto que el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, entonces, utilizando el teorema del emparedado se obtiene $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}=0$. Es decir, la sucesión $\left\{\frac{sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\right\}$ converge a 0.

Para sucesiones con signo variable es útil el siguiente resultado.

Teorema

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Ejemplo

Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right\}$ converge a 0.

Solución

Para utilizar el resultado anterior, se debe mostrar que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right| = 0$. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n\pi^n}{4^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

Además, como $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ se tiene que a medida que aumente n, el número $\left(\frac{\pi}{4}\right)^n$ se aproxima a 0, cada vez más. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\pi)^n}{4^n} = 0$$

Es decir, la sucesión $\left\{\frac{(-\pi)^n}{4^n}\right\}$ converge en 0.

Series

Recordando la paradoja de Zenón de Elea, el cual dice que un corredor no puede terminar una carrera porque inicialmente debe correr la mitad de la distancia, luego la mitad de la que queda, y así sucesivamente. Puesto que el tiempo de la carrera es finito, no podrá

recorrer el infinito número de segmentos de la trayectoria. Aunque se conoce que los corredores siempre terminan sus carreras.

Supóngase que la carrera tiene una distancia d. Los segmentos del argumento de Zenón tendrán como longitudes $\frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d, \frac{1}{8}d,$,etc. En el lenguaje matemático, terminar la carrera significa evaluar la suma

$$\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{8}+\frac{d}{16}+\frac{d}{32}+\frac{d}{64}+\frac{d}{128}+\cdots$$

que podría parecer imposible. La suma anterior es un ejemplo de una "***suma infinita***", concepto que se quiere formalizar a continuación.

Consideremos las siguientes sumas parciales

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad S_4 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$

$$S_5 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = \frac{31}{32}, \quad \cdots, \quad S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n} = 1-\frac{1}{2^n}$$

Observe que a medida que n aumenta las sumas parciales se aproximan a 1. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Este resultado de 1 se define como del valor de la suma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$$

Generalizando lo anterior, considérese la suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots$$

La cual se puede simbolizar como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ o $\sum a_n$ y se denomina "***serie infinita***" o simplemente serie. Entonces, la n-ésima suma parcial S_n está dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Lo anterior se define formalmente a continuación.

Definición

La serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge y tiene como suma S, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S. Si $\{S_n\}$ es divergente, entonces la serie diverge. Una serie divergente no tiene suma.

Observación

Una de las series más conocidas es la "*serie geométrica*", la cual está dada por

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Se puede demostrar que la serie geométrica converge a la suma $S = \frac{a}{1-r}$ siempre que $-1 < r < 1$. En caso contrario, la serie geométrica es divergente.

EJEMPLO

Use la observación anterior para determinar si convergen o divergen las siguientes series geométricas.

1. $\frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \frac{5}{81} + \frac{5}{243} + \cdots$

Solución

Analizando la suma infinita, se observa que es una serie geométrica dada por:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

Puesto que $r = \frac{1}{3}$, entonces, la serie dada es convergente y converge al valor

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$$

2. $\frac{4}{3} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \frac{256}{81} + \cdots$

Solución

Al igual que el ejemplo anterior, la serie geométrica está dada por:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4^i}{3^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i$$

Como $r = \frac{4}{3} > 1$, entonces, la serie dada es divergente.

Observación

El siguiente resultado es una herramienta muy importante cuando se quiere demostrar que una serie es divergente.

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. En forma equivalente, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe), entonces la serie es divergente.

EJEMPLO

Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{n}$ es divergente.

Solución

Evaluando el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{1}=\frac{1-0}{1}=1$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}=1\neq 0$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{n}$ es divergente.

Observación

Otras dos series conocidas son: la serie armónica dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ y las series telescópicas, cuya característica es que se tiene la suma infinita de un término menos el anterior o un término menos el siguiente.

EJEMPLO

Demuestre que la serie armónica diverge.

Solución

Para demostrar la divergencia de la serie armónica se debe probar que las sumas parciales S_n crecen sin límite. Esto es,

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

Es evidente que si se considera a n lo suficientemente grande, se puede obtener en la última expresión tantas mitades como se quiera. Por tanto, $\{S_n\}$ diverge; en consecuencia la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ también diverge.

EJEMPLO

Pruebe que la siguiente serie armónica converge y encuentre su suma.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{3}{(k+1)^2}-\frac{3}{k^2}\right]$$

Solución

Encontrando las sumas parciales S_n se obtiene:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{(k+1)^2}-\frac{3}{k^2}\right]$$

$$S_n=\left(\frac{3}{4}-3\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{25}-\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{25}\right)+\left(\frac{3}{49}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{3}{n^2}\right)$$

Simplificando la suma, se obtiene:

$$S_n=-3+\frac{3}{(n+1)^2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[-3+\frac{3}{(n+1)^2}\right]=-3$$

Luego la serie converge y tiene suma -3.

Propiedades de las series convergentes

Teorema

Sí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y k es una constante, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ son convergentes, donde:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Criterios de convergencia

El siguiente estudio consiste en enunciar e ilustrar con ejemplos los diferentes criterios de convergencia de una serie.

Teorema

(Criterio de la integral)

Sea f una función continua, positiva y no creciente en el intervalo $[1,\infty)$ y supóngase que $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n. Entonces, la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Converge, si y solo si, la siguiente integral impropia converge.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Ejemplos

Use la prueba de la integral para decidir la convergencia o divergencia de la serie dada

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

Solución

La hipótesis de la prueba de la integral se satisface para $f(x) = xe^{-x^2}$ en el intervalo $[1,\infty)$. Ahora bien,

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-b^2}\right] = \frac{1}{2e}$$

Puesto que la integral impropia es convergente, entonces la serie dada converge.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+2}}$

Solución

La hipótesis de la prueba de la integral se satisface para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ en el intervalo $[1,\infty)$. Ahora bien,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x+2}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{b+2} - 2\sqrt{3}\right] = \infty$$

Como la integral impropia es divergente, luego la serie es divergente.

Teorema

(Criterio de la serie p)

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Donde p es constante, se denomina serie p. Entonces,

a) La serie p converge si $p > 1$.
b) La serie p diverge si $p \leq 1$.

EJEMPLO

Determine si la serie p dada es convergente o divergente.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Solución

La serie p es convergente porque $p = 2 > 1$.

TEOREMA

(Criterio de la comparación ordinaria)

Supóngase que $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq N$

a) Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ es divergente.

EJEMPLO

¿Converge o diverge la serie dada?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2 - 5}$

Solución

Observe que:

$$\frac{2n}{3n^2 - 5} > \frac{2n}{3n^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ahora bien, analizando la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Se tiene que diverge, puesto que es $\frac{2}{3}$ de la serie armónica la cuál es divergente. Por tanto, usando el teorema anterior inciso b) se tiene que la serie dada es divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(n+2)}$

Solución

Partiendo del hecho:

$$\frac{n+1}{3^n(n+2)} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Puesto que la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Converge *(es la serie geométrica con $r = \frac{1}{3}$)*, entonces la serie dada converge.

TEOREMA

(Criterio de comparación con límite)

Supóngase que $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Si $0 < L < \infty$, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen simultáneamente. Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ es convergente.

EJEMPLO

Determine la convergencia o divergencia de cada serie.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+7}{2n^4+3n^2-n}$

Solución

Para utilizar el criterio de comparación con límite se debe decidir inicialmente con qué término ***n-ésimo*** se va a comparar. En este caso comparando el máximo grado del numerador y denominador se concluye que el término n-ésimo debe ser $\frac{1}{n^2}$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^2+7}{2n^4+3n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+7n^2}{2n^4+3n^2-n} = \frac{5}{2} > 0$$

Ahora bien, como la serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente, por consiguiente, la serie dada también converge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{2n^2+3n}}$

Solución

Al igual que el ejemplo anterior se analiza el término ***n-ésimo*** de comparación. En este ejemplo se considera $\frac{1}{n}$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt{2n^2+3n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{2n^2+3n}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$$

Ahora bien, como la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente, entonces la serie dada igualmente es divergente.

TEOREMA

(Criterio de la razón)

Sea $\sum a_n$ una serie con términos positivos y supóngase que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

a) Si $L < 1$, la serie es convergente.
b) Si $L > 1$, la serie es divergente.
c) Si $L = 1$, no hay conclusión.

EJEMPLO

Compruebe la convergencia o divergencia de la serie dada

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\,n!}{3^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\,3^n n!}{3^n\,(n+1)\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

Puesto que $L = 0 < 1$, entonces la serie dada converge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^{10}}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\dfrac{8^n}{n^{10}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}\, n^{10}}{8^n\,(n+1)^{10}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\;8^n\, n^{10}}{8^n\,(n+1)^{10}} = \lim_{n\to\infty} 8\left(\frac{n}{n+1}\right)^{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{10} = 8$$

Como $L = 8 > 1$, luego la serie dada es divergente.

Observación

Hasta el momento se han trabajado series positivas y es importante que a la hora de analizar si las series son convergentes o divergentes tenga en cuenta los siguientes pasos:

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, concluya por la prueba del término ***n-ésimo*** que la serie diverge.
2. Si a_n contiene $n!$, r^n, n^n, ensaye el criterio de la razón.
3. Si a_n contiene solo potencias constantes de n, ensaye el criterio de comparación con límite. En particular, si a_n es una expresión racional en n, use esta prueba con b_n como cociente de los términos directores del numerador y denominador.
4. Como último recurso, intente el criterio de comparación ordinario o la prueba de la integral.
5. Algunas series requieren de una manipulación hábil para determinar la convergencia o divergencia.

Observación

De lo que hemos visto solo se ha trabajo con series de términos positivos. Ahora, se eliminará tal restricción, permitiendo que algunos sean negativos. En particular, se tratara las "***series alternantes***". Es decir, aquellas series cuya forma es:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Donde $a_n > 0$ para todo n

Teorema

(Criterio de series alternantes)

Consideremos la serie alternante

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Con $a_n > a_{n+1} > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ la serie converge. Además, el error cometido usando la suma S_n de los n primeros términos como valor aproximado de la suma S de la serie no es mayor que a_{n+1}

Ejemplo

Demuestre que la serie dada es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$$

Solución

Inicialmente se escriben unos cuantos términos para verificar que se cumplen las condiciones con el criterio de series alternantes. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{9}{8} - 1 + \frac{25}{32} - \frac{36}{64} + \frac{49}{128} - \frac{64}{256} + \cdots$$

Obsérvese que $a_n > a_{n+1} > 0$ para todo $n \geq 3$ y además,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n(\ln 2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n(\ln 2)^2} = 0$$

Por tanto, usando el teorema se obtiene que la serie dada es convergente.

Observación

En la evaluación del límite se utilizó la regla de L'Hopital dos veces.

Teorema

(Criterio de convergencia absoluta)

Si la serie $\sum |a_n|$ es convergente, entonces $\sum a_n$ también es convergente

Ejemplo

Demuestre que la serie dada es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

Solución

Puesto que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es una serie p con $p = 2 > 1$, se tiene que es convergente. Luego, usando el criterio de convergencia absoluta se demuestra que la serie dada es convergente.

Observación

Se dice que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ converge. El teorema anterior afirma que la convergencia absoluta implica la convergencia. Todos los criterios para la convergencia de series de términos positivos se convierten en forma automática en criterios de la convergencia absoluta de series en las que algunos términos son negativos. En particular, esto es verdad, en la prueba de la razón que se enuncia a continuación.

Teorema

(Criterio de la razón absoluta)

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no nulos y supóngase que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

a) Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente y, por tanto, es convergente.
b) Si $L < 1$, la serie divergente.
c) Si $L = 1$, no hay conclusión.

Ejemplo

Demuestre que la serie dada tiene convergencia absoluta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| (-1)^{n+2} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| (-1)^n \frac{5^n}{n!} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\, n!}{5^n\, (n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\,5^n\,n!}{5^n\,(n+1)\,n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$$

Puesto que $L=0<1$, entonces, la serie dada tiene convergencia absoluta.

Ejercicios propuestos

Se da una fórmula explícita para a_n. Escriba los primeros términos y determine si la sucesión converge o diverge.

1. $a_n=\dfrac{3n+1}{n+2}$

2. $a_n=\dfrac{3n^2+2}{n+4}$

3. $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

4. $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$

5. $a_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$

6. $a_n=e^{-n}\ \cos n$

7. $a_n=\dfrac{e^n}{3^n}$

8. $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2^n$

9. $a_n=\dfrac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

10. $a_n=n^{\frac{1}{n}}$

Encuentre una fórmula explicita a_n para cada sucesión, determine si la sucesión converge o diverge, y en el primer caso encuentre el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

11. $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\ldots$

12. $\dfrac{1}{2^2},\dfrac{2}{2^3},\dfrac{3}{2^4},\dfrac{4}{2^5},\ldots$

13. $-1,\dfrac{2}{3},-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{7},-\dfrac{5}{9},\ldots$

14. $1, \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}, \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}, \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}, \ldots$

15. $\operatorname{sen} 1, 2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}, 3\operatorname{sen}\dfrac{1}{3}, 4\operatorname{sen}\dfrac{1}{4}, \ldots$

Indique si la serie dada converge o diverge. Si converge, encuentre la suma.

16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}$

17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k}$

19. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}+3\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\right]$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{10k}$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+5}{3k}$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

23. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2}{(k-1)k}\right)$

24. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{4}{k^2}-\frac{4}{(k+1)^2}\right]$

Determine la convergencia o divergencia de cada serie. Indique el criterio que usó.

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+3}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3-4}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n!}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^k+k}{k!}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{1+k^2}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+k^2}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)^2}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{e^k}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4+3k)^{\frac{3}{2}}}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+\operatorname{sen}^2 n}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n+1}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\cos n}{n^3}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n}{n!}$

Demuestre que cada una de las series alternantes converge.

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{3n+1}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

Demuestre que cada una de las series tiene convergencia absoluta.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

51. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$

52. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{e^n}$

54. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$

Índice alfabético

A

C

D

E

V

Bibliografía

Becerril F. Rubén, y otros. Cálculo diferencial en varias variables. 1ª Edición. Universidad Autónoma Metropolitana. México 2002.

Besada M. y otros. Cálculo de varias variables. Cuestiones y ejercicios resueltos. Prentice Hall. 2001.

Larson, Ron y Edwards, Bruce H. Cálculo de varias variables. México, D.F.: Mc Graw Hill Educación. 2010.

Morantes, Graciela. Cálculo multivariable. Notas de clase. Editorial publicaciones UIS, 2010.

Purcell, Edwin, Varberg, J., Ringon, D., Steven E. Cálculo. Pearson Educación, México, 2007.

Stewart, J. Cálculo de una variable, trascendentes tempranas. 4ª Edición, México, Thomson Editores. 2001.

Stewart, J. Cálculo diferencial e integral. 2ª Edición, México, Thomson Editores. 2001.

Stewart, J. Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 7ª Edición. Thomson. 2010.

Stewart, J. Cálculo, trascendentes tempranas. México, D.F.: Editorial Thomson, Sexta edición. 2008.

Thomas, G., Finney, B., Ross L. Cálculo. Varias variables. Addison Wesley. 2000.

Zill, Dennis G y Wright, Warren. Cálculo de varias variables. M.

SU OPINIÓN

Para la Editorial UPB es muy importante ofrecerle un excelente producto. La información que nos suministre acerca de la calidad de nuestras publicaciones será muy valiosa en el proceso de mejoramiento que realizamos. Para darnos su opinión, comuníquese a través de la línea (57)(4) 354 4565 o vía e-mail a editorial@upb.edu.co
Por favor adjunte datos como el título y la fecha de publicación, su nombre, e-mail y número telefónico.

Esta obra se publicó en archivo digital
en el mes de septiembre de 2019.

Como docentes en matemáticas de estudiantes que se encuentran en el ciclo básico de ingenierías, se observa la dificultad que tienen estos al trabajar la asignatura de Cálculo en Varias Variables. Por esto, buscamos estrategias que ayuden a una mejor comprensión del estudiante, realizando un material con una gran cantidad de ejercicios y problemas resueltos de **cálculo en varias variables** con los temas contenidos dentro del programa de nuestra Universidad, para que ayude a los estudiantes a reforzar cada temática vista. El texto contiene para cada capítulo o sección una introducción teórica a cada concepto, luego una buena cantidad de ejercicios complementarios y, por último, se proponen ejercicios para que el estudiante pueda reforzar lo estudiado en clase.

La obra se divide en nueve capítulos y un apéndice, en donde, en los tres primeros capítulos se tratan los temas: coordenadas polares, coordenadas cilíndricas y esféricas, y superficies. En el capítulo 4 se trabaja el concepto de función de varias variables, en los capítulos del 5 al 8 se desarrollan los conceptos fundamentales del cálculo: límite, continuidad, derivación e integración, para funciones de varias variables. En el capítulo 9 se estudia los campos vectoriales y, finalmente, se hace un apéndice sobre los conceptos de sucesiones y series.