DISEÑO DE UN LABORATORIO DE MATEMÁTICAS PARA EL FORTALECIMIENTO DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

JULIANA ISABEL LEZCANO ESCUDERO

EDINSON DE JESÚS VELÁSQUEZ MONSALVE

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2017

DISEÑO DE UN LABORATORIO DE MATEMÁTICAS PARA EL FORTALECIMIENTO DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

JULIANA ISABEL LEZCANO ESCUDERO

EDINSON DE JESÚS VELÁSQUEZ MONSALVE

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ASESORA

LUZ DARY CASTELLANOS PRADA

MAGÍSTER EN CIENCIAS - MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA

ESCUELA DE INGENIERÍAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

MEDELLÍN

2017

15 de diciembre de 2017

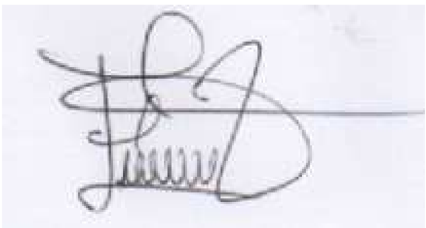
JULIANA ISABEL LEZCANO ESCUDERO

EDINSON DE JESÚS VELÁSQUEZ MONSALVE

"Declaro que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad" Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

Firma

Firma



DEDICATORIA

A mi familia, en especial a mi esposo Joaquín Emilio Morato Cortínez, quien me apoyó en esta nueva etapa de mi vida, además por tolerar tantos momentos en los que no pude estar a su lado. Gracias.

A mis padres, quienes me han apoyado de manera incondicional en mi formación académica, también por darme las bases necesarias para mi formación personal, gracias a esto y a muchas cosas más he aprendido a luchar por lo que anhelo sin desfallecer.

A mis hijos José Alejandro y Mariángel, quienes son y serán el motor de mi existencia, quienes me dan las fuerzas para ser cada día mejor y a quienes quiero demostrar que luchando con rectitud y compromiso siempre es posible alcanzar los sueños.

A mi amiga Ana del Socorro Rojas, quien me apoyó incondicionalmente en este camino, además por su entereza, lealtad y voluntad en cada momento que la he necesitado.

Juliana Isabel Lezcano Escudero

DEDICATORIA

A mi esposa Eliana Amparo Castrillón Rendón, a mi hija Nayive Alexandra Velásquez Castrillón y a mi hijo Mateo Velásquez Castrillón por el amor, apoyo y confianza depositada en mí, por tener paciencia y ayudarme en los momentos difíciles. Sin ustedes nada de esto sería posible.

Edinson de Jesús Velásquez

AGRADECIMIENTOS

A la Secretaría de Educación de Antioquia, por la consolidación del programa de Becas de Maestría con el cual permitieron e hicieron posible que yo y muchos docentes alcanzáramos una meta más en nuestra formación profesional.

A la Universidad Pontificia Bolivariana y a la Escuela de Ingenierías por admitirme en su comunidad académica. Gracias a esto, tuve la oportunidad de vivir experiencias maravillosas que me ofrecieron conocimientos como Magister en Ciencias Naturales y Matemática.

A la profesora Luz Dary Castellanos Prada, asesora del trabajo de grado, quien con su esmero, dedicación, experiencia y conocimiento ayudó a la realización de este trabajo. También por sus consejos y apoyo que hoy no solo me hace una mejor docente sino una mejor persona.

A todos mis compañeros de Maestría, con quienes compartí y aprendí cosas nuevas, en especial a Ramiro de Jesús Tobón por su esmero, dedicación y compromiso con todos los proyectos que emprendimos juntos.

Juliana Isabel Lezcano Escudero

AGRADECIMIENTOS

A las autoridades académicas y administrativas de la Universidad Pontificia Bolivariana y la Gobernación de Antioquia con su programa Becas de Maestría para los municipios no certificados de Antioquia, por su contribución a mi formación docente.

A mis padres Oscar Javier Velásquez y Amparo de Jesús Monsalve por sus buenos consejos y apoyo incondicional que me motivaron constantemente para alcanzar el sueño de esta maestría.

A la profesora Luz Dary Castellanos por su tiempo, apoyo y su versatilidad en sus orientaciones académicas brindadas para la realización de este trabajo de grado.

Edinson de Jesús Velásquez

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

ANEXOS

GLOSARIO

Proposición: Enunciado lógico al que se le asigna un valor de verdad, falso o verdadero.

Definición: Enunciado proposicional que determina y delimita lo que es esencial en un objeto.

Demostración: Argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática.

Axioma: Proposición verdadera que se acepta sin demostración.

Teorema: Proposición verdadera que requiere demostración para su aceptación.

Lema: Teorema necesario para demostrar otro teorema.

Corolario: Verdad que se deriva como consecuencia de un teorema y que para su demostración no es necesario un razonamiento nuevo.

Recíproco: Teorema que se deriva de otro teorema, tomando como hipótesis la tesis del teorema anterior y como tesis la hipótesis del mismo.

RESUMEN

El presente trabajo pretende aportar al mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes de grado quinto de la básica primaria, a partir del aprendizaje significativo de las matemáticas. El laboratorio de matemáticas genera espacios de aprendizaje diferentes en el aula de clase, desarrollando los pensamientos numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, a partir de la implementación y utilización de materiales concretos, juegos, herramientas tecnológicas y demás actividades, respondiendo así a objetivos concretos. Estos parten del análisis de los ejes temáticos, las directrices propuestas por el Ministerio de Educación Nacional y la fundamentación matemática de los contenidos del grado quinto. Con estas nuevas metodologías se favorece la autonomía, la organización y el autoaprendizaje en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos tanto de estudiantes como docentes; proporcionando características únicas en aspectos teóricos y prácticos.

Palabras clave: Matemáticas, laboratorio, enseñanza - aprendizaje, didáctica.

INTRODUCCIÓN

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, uno de los factores para la motivación de los estudiantes está compuesto por las diferentes estrategias que el docente establece y pone en práctica en el aula de clase, según los contenidos y el contexto en el que se desenvuelven los educandos. A partir de la implementación de diferentes estrategias, se facilita una mejor comprensión de las temáticas propuestas, se posibilita un aprendizaje significativo y se suprime el método de enseñanza memorístico.

El uso de materiales tangibles y las nuevas tecnologías son fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de esta área, en el proceso de construcción y desarrollo del pensamiento, al mismo tiempo genera en los estudiantes el interés por aprender y conllevan a una mejor adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos.

Por lo anterior y luego de hacer un análisis reflexivo de las pruebas externas del grado quinto de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Santa Teresita y el C.E.R la Cruz del año 2014, las cuales evidenciaban falencias considerables en los desempeños de los estudiantes, se consideró diseñar un laboratorio de matemáticas para el grado quinto de básica primaria, como estrategia pedagógica para fortalecer el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes, a la luz de los ejes temáticos, los estándares básicos de competencias en matemáticas, los lineamientos curriculares, los derechos básicos de aprendizaje y las matrices de referencia propuestas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Inicialmente se hizo un estudio de los ejes temáticos del grado quinto y cómo abordarlos desde diferentes metodologías y estrategias que pudieran motivar a los estudiantes por las matemáticas. Es así como se motiva la creación de un laboratorio de matemáticas compuesto por varios laboratorios, en los cuales se articulan los materiales concretos, las herramientas tecnológicas y algunos juegos que ya existían y fueron modificados con base en los contenidos matemáticos que se querían abordar.

Además, se diseñó una guía para los laboratorios, a partir de cuatro momentos, los cuales fueron organizados en diferentes fases: apertura o exploración, desarrollo o estructuración de la clase, trabajo independiente, trabajo cooperativo, cierre o transferencia y para aprender más, buscando orientar tanto a docentes como a estudiantes en la forma de cómo utilizar el laboratorio completo y sus materiales.

En este sentido, cada juego y actividad de los laboratorios se ha diseñado para que los estudiantes evidencien y experimenten la matemática de una forma más lúdica y divertida, y así puedan responder a los objetivos y temas de estudio que conforman el laboratorio que se propone en este trabajo; el cual a su vez se articula con los derechos básicos de aprendizaje, los estándares de competencias matemáticas y los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional, proporcionando a los estudiantes y maestros características únicas en aspectos teóricos y prácticos. Las actividades son estructuradas con el fin de despertar el espíritu creativo, la capacidad de innovación, la autonomía, la organización y planeación; fortaleciendo el saber hacer, el saber convivir, el saber ser y el saber conocer.

La implementación del laboratorio ha sido de gran impacto, ya que se evidenciaron mejoras en el desempeño académico de los estudiantes en el aula y en las pruebas externas como: Pruebas Saber, Aprendamos y Supérate de los años 2015 y 2016, como lo demuestran los anexos 1 al 7. Conjuntamente han generado mejores ambientes en el aula, en los cuales el docente se convierte en un líder pedagógico y los estudiantes en el centro del proceso de formación. El laboratorio cuenta con materiales impresos, que se han venido utilizando durante el desarrollo de este trabajo en las aulas de clase donde somos maestros. Los planos de estos materiales se evidencian en cada laboratorio contenido en este trabajo. Algunos laboratorios también tienen cuentos que se han hecho virtuales y aparecen en YouTube.

En síntesis, este trabajo está divido en 8 capítulos, en los cuales se cuenta con un soporte teórico desde la fundamentación matemática, unas orientaciones didácticas y sus anexos, enumerados de manera independiente y no secuencial dado que cada uno es autocontenido y responde a unos objetivos propios. De este modo cuando el docente o estudiante utilice alguno de los laboratorios lo puede hacer de manera independiente sin acudir a los otros, pues cada uno responde a unas necesidades y temáticas específicas.

En el primer capítulo se aborda y hace una síntesis de la propuesta del trabajo de grado, a partir de la justificación, los objetivos y la metodología.

En el segundo capítulo se hace una descripción sobre los laboratorios de matemática aplicados al proceso enseñanza – aprendizaje en el contexto, local, regional, nacional e internacional.

En el tercer capítulo, se hace un análisis histórico de como surgieron los conjuntos numéricos; en especial el conjunto de los números naturales y se presentan dos laboratorios sobre historia de las matemáticas con sus respectivas guías y anexos, los cuáles apoyan el pensamiento numérico y contribuye a que el estudiante desde sus primeros acercamientos empiece a reconocer y a apropiarse del lenguaje simbólico, fundamental en el estudio de la matemática.

En el cuarto capítulo, se describe la teoría de los números con base en los axiomas propuestos por el matemático italiano Giuseppe Peano, en las obras “Tópicos previos a la matemática superior” de Sigifredo De Jesús Herrón Osorio y “Teoría de números para principiantes” de Gustavo Rubiano. Además, se plantea un corto análisis del surgimiento de la construcción de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos propuesta por el matemático ruso Georg Cantor.

El quinto capítulo presenta la estructuración de las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números naturales y cada una de sus propiedades. Además, se dan a conocer dos laboratorios y sus respectivas guías de maestro, estudiante y anexos.

En el sexto capítulo se define el conjunto de los números enteros con sus operaciones de suma y producto y sus respectivas propiedades. Además, se estudia de manera superficial los números enteros como un conjunto ordenado.

El séptimo capítulo se hace una descripción de temas fundamentales de la teoría de números como los números pares e impares, primos y compuestos, el algoritmo de la división, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo con algunas de sus propiedades.

En el capítulo final se presentan las conclusiones que se deducen después del desarrollo de la propuesta del laboratorio de matemáticas, a partir de la experiencia que se adquirió al aplicar algunos de estos laboratorios en el aula con los resultados obtenidos.

Este trabajo es aparentemente extenso y no se pudieron evitar los anexos, ya que son parte fundamental de los laboratorios.

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se hace una síntesis de la propuesta del trabajo de grado, a partir de la justificación, los objetivos y la metodología.

1.1 JUSTIFICACIÓN

La matemática en todos los niveles educativos, es una de las áreas en las que más se ha evidenciado bajos rendimientos académicos tanto nacional, regional como local, debido a la poca relación entre los contenidos con las problemáticas y necesidades del contexto, a políticas equivocadas y mal enfocadas de entes gubernamentales y a fallas curriculares. Por estos motivos surgen dificultades que hacen que los estudiantes no sientan motivación por el área. Incluso antes de iniciar su proceso de formación, los estudiantes llegan predispuestos a las aulas de clase. Además, las condiciones económicas, la lejanía de algunas instituciones y la falta de compromiso de las familias con el proceso formativo; repercuten en bajos rendimientos académicos y resultados insatisfactorios en las pruebas internas y externas del grado quinto.

Las nuevas generaciones demandan de métodos de enseñanza que cumplan con pautas de calidad pertinentes, que ayuden al desarrollo de un pensamiento lógico frente a las situaciones que debe afrontar en su cotidianidad, por esto, se debe propender por la creación de estrategias donde estudiante y maestro sean protagonistas de nuevos saberes, a partir de la interacción constante y el estudio permanente de nuevos modelos pedagógicos.

Es indispensable romper con los modelos educativos tradicionales, a través de prácticas educativas innovadoras que vinculen las competencias actitudinales de los estudiantes y fortalezcan su capacidad crítica en la construcción de su conocimiento, donde se aprovechen sus aprendizajes. De esta forma, llegará a comprender, argumentar, representar y comunicar sus enseñanzas en la resolución de problemas, consiguiendo ser un sujeto matemáticamente competente.

Por esta razón, es de vital importancia desarrollar habilidades innovadoras que permitan la afinidad entre los procedimientos aritméticos y las necesidades de los estudiantes, donde la enseñanza de la matemática se convierta en un punto clave de la educación y deje de ser un paradigma. Así se logrará en los aprendices la motivación, la comprensión, el alcance de las competencias matemáticas y el desarrollo del pensamiento.

En gran medida la comprensión matemática se ha quedado en sistemas de algoritmos y fórmulas permeadas por clases magistrales, donde no se han tenido en cuenta los cambios y las evoluciones del contexto. En este sentido, el aula de clase debe convertirse en un lugar de experimentación, donde el estudiante sea un sujeto activo en el proceso educativo; por esto se propone la creación de un laboratorio de matemáticas que ayude y sea un soporte para que los estudiantes de las Institución Educativa Normal Superior Santa Teresita y el Centro Educativo Rural la Cruz, aprendan las temáticas con agrado y encuentren en ellas relaciones y las articulen con su entorno, generando un pensamiento matemático que vislumbre la capacidad intelectual de los estudiantes y les permita enfrentarse a los desafíos de la sociedad moderna y globalizada.

Es de vital importancia que el aprendizaje sea significativo. Por eso, los laboratorios de matemáticas son una estrategia para mejorar las prácticas pedagógicas en el aula, además ayudan a propiciar y dinamizar la construcción de nuevos conocimientos desde la investigación.

1.2 OBJETIVOS

Objetivo general:

Diseñar un laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el grado quinto de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Santa Teresita de Sopetrán y el Centro Educativo Rural la Cruz de Yolombó.

Objetivos específicos:

- Identificar los ejes temáticos que se deben abordar en el grado quinto.
- Desarrollar el marco teórico de los fundamentos matemáticos de cada uno de los ejes temáticos a desarrollar.
- Valorar de qué manera se puede utilizar el material didáctico en la enseñanza de las matemáticas del grado quinto.
- Implementar diferentes materiales didácticos que le permitan al estudiante la exploración y la vivencia de algunos contenidos temáticos del grado quinto.

- Elaborar un manual de instrucciones de los materiales didácticos que se encuentren en el laboratorio de matemáticas para contextualizar a los docentes en su correcta utilización y los temas que pueden enseñar con cada uno de ellos.

1.3 METODOLOGÍA

Este proyecto se realizó en tres etapas. En la primera, se estudió y profundizó en la fundamentación teórica de los ejes temáticos del grado quinto, los derechos básicos de aprendizaje, los lineamientos y estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional, los cuales ayudaron a determinar los contenidos apropiados para el diseño del laboratorio.

En la segunda etapa, se realizó la valoración de las diferentes actividades y materiales que podían ser utilizados en el laboratorio, permitiendo así la construcción y/o adaptación entre los materiales concretos para los temas seleccionados, buscando que los estudiantes tuvieran una verdadera apropiación de los conceptos matemáticos. Además, se diseñaron diferentes laboratorios con su respectiva fundamentación teórica, orientaciones didácticas, actividades y juegos, los cuales permitieron orientar el proceso educativo y la correcta utilización del material.

En la tercera etapa, se fueron implementando las actividades planteadas a medida que se fue desarrollando el laboratorio como parte de la metodología de trabajo de las aulas de clase, lo cual permitió validar la propuesta en todo momento.

CAPÍTULO 2

En este capítulo se hace una descripción de los trabajos realizados de laboratorios de matemáticas aplicados al proceso de enseñanza - aprendizaje en el contexto, local, regional, nacional e internacional.

LOS LABORATORIOS DE MATEMÁTICAS Y SU IMPORTANCIA EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

El diseño de laboratorios de matemáticas como estrategia pedagógica ha sido utilizado en diferentes instituciones como método en el aula para un mejor aprendizaje de las matemáticas. Estos brindan estrategias novedosas y agradables a los educandos. Esta táctica ha sido analizada nacional e internacionalmente. Cabe destacar que las investigaciones sobre este tema no son muy comunes, pues nos encontramos ante un área de poco interés para los estudiantes y en muchas ocasiones para los maestros.

Se ha tomado como referencia de estudio algunos laboratorios, los cuales muestran la importancia de la enseñanza de las matemáticas desde la creación de nuevas metodologías que permitan mejorar las prácticas académicas. Algunos de esos proyectos se describen a continuación:

• Laboratorio Virtual de Matemáticas II. Este trabajo familiariza a los estudiantes con el uso de nuevas tecnologías aplicadas y útiles para el aprendizaje de las matemáticas, además facilita el conocimiento más allá de la memorización de conceptos y algoritmos, utilizando un software específico de innovación Cabri-Geometry (Gavilán, Barroso, Ariza, & Sánchez, 2002).

Esta actividad favoreció un cambio de actitud en los estudiantes por el área de matemáticas. Su motivación aumentó gracias al uso del internet y a la posibilidad de poder conectarse desde cualquier lugar.

• Construyendo nuestro laboratorio de matemáticas. Institución educativa Gabriela Mistral sede central del municipio de Yotoco, departamento del Valle del Cauca.

Esta investigación se configuró mediante la construcción de objetos concretos, a través del desarrollo de competencias comunicativas desde la utilización de herramientas tecnológicas, con la finalidad de estimular el interés de los estudiantes de la básica secundaria por los elementos y procesos en los distintos pensamientos matemáticos (Escobar, Arias, & Osorio, 2002) .

Este trabajo evidenció un cambio de actitud en los estudiantes frente al concepto y la responsabilidad con el área de matemáticas en las diferentes sesiones, y el compromiso de los docentes ante el reto en la construcción del proyecto.

• Diseño y organización del laboratorio: Taller de matemáticas, un ejercicio de implementación de acciones tutoriales. Este proyecto se dirigió a matemáticos en formación, con la finalidad de generar las oportunidades de interactuar, participar y desarrollar sus capacidades como matemáticos acompañados de docentes experimentados. A partir, de esquemas de proyectos, dando lugar a la revista: "Matemáticas indiscretas". En la cual los participantes pueden escribir y exponer sus hallazgos en el laboratorio, con la finalidad de descubrir e identificar sus potencialidades. (Vera, Radillo, & Casillas, 2003)

Con este trabajo los estudiantes en formación lograron identificar sus potencialidades como matemáticos y se mejoró la actitud de los docentes en el desarrollo de las clases.

• Laboratorio de matemática recreativa para el desarrollo del pensamiento lógico matemático, iniciativa del Departamento de Matemáticas de la Institución Educativa Santa Sofía en el municipio de Dosquebradas departamento de Risaralda. Con esta investigación se implementaron juegos tradicionales como facilitadores del conocimiento, enmarcados en la pedagogía activa, significativa y participativa, como estrategia lúdica aplicada en el desarrollo del proceso lógico, crítico y autónomo del estudiante, con la finalidad de mejorar su aprendizaje en el área de matemáticas (Gómez & Villegas, 2007).

En este trabajo fueron notorios los avances y logros obtenidos, los cuales se reflejaron en mejores resultados en pruebas Saber, quedando por encima del promedio nacional, en olimpiadas municipales se obtuvieron mejores posiciones, y hubo participación activa en el simposio de "La enseñabilidad de la matemática" en la UCPR (Universidad Católica de Pereira)

• Laboratorio de prácticas para el uso de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas, como una estrategia pedagógica de utilización de materiales trabajados en el departamento de Córdoba. En este, se establece una relación dialéctica entre materiales manipulativos y actividad matemática, considerando un espacio para que los participantes desarrollaren sus propios procesos de aprendizaje buscando favorecer, facilitar y estimular el pensamiento matemático. Este proyecto fue realizado con la finalidad de fortalecer el conocimiento y aprendizaje de los niños, desde del manejo de recursos didácticos. Se aplicó y enseñó a futuros maestros, a partir de talleres semanales, con el propósito de que lo multiplique y aplique en otras instituciones (Machado, 2008 - 2009).

• La geometría del espacio: Un fascinante mundo por descubrir. Este trabajo abordó la geometría del espacio, desarrollando e integrando la ingeniería Multi-representaciones, Aproximaciones y Tecnologías (MAT). Abordando modelos en tercera dimensión (3D) con cartulina o cañitas, también utilizaron programas multimediales para realizar figuras semi-abstractas y figuras planas. Cada nueva representación aproximaba el objeto de aprendizaje de una forma diferente a la realidad del estudiante, definiendo un conjunto de características que posibilitan la correcta conceptualización de la temática. La integración mantiene un doble sentido: por un lado, se integra geometría con trigonometría y álgebra, y por otro, geometría plana con geometría del espacio (Camou, 2012).

En esta investigación se resalta la buena integración de estudiantes de Estados Unidos y Uruguay, quienes interactuaron con temas acordes para profundizar en las temáticas. Se encontraron similitudes en los diferentes procesos de aprendizaje, analizando factores como: nacionalidad, género, situación socio- económica y motivación externa. Para analizar los datos se utilizaron métodos mixtos con variables cuantitativas y cualitativas.

Se logró una alta participación de los alumnos en los talleres semanales y buena participación de los futuros maestros quienes pudieron explorar las posibilidades didácticas del área, se generó un banco de actividades y ampliación de materiales didácticos en las prácticas matemáticas de los maestros en formación.

• Una estrategia de divulgación y popularización del laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle. Este proyecto, contempló la aproximación al diseño y gestión de la virtualidad como medio para socializar a nivel institucional y regional el Laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, como experiencia significativa y eficaz en la enseñanza de la matemática (Salazar, 2012).

Se consideró y concluyó con esta estrategia, que nada en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede darse por terminado, este debe evolucionar en el trascurso del tiempo. El uso de las TIC, la creación de nuevos materiales de trabajo y el diseño de nuevas actividades para las clases son un factor importante y relevante en la enseñanza de las matemáticas; así mismo, el conocimiento y profesionalismo del docente en el área juega un papel importante.

• Laboratorio de Matemáticas sustentado en la ingeniería didáctica, para la enseñanza del pensamiento métrico y el sistema de medidas, con la metodología escuela nueva, en estudiantes de la institución educativa José María Córdoba del Municipio de Florida Valle del Cauca. El objetivo de este trabajo fue diseñar un laboratorio de matemática sustentado en la ingeniería didáctica, fortaleciendo el proceso de enseñanza del pensamiento métrico y el sistema de medida, mediante la experimentación y la manipulación de materiales didácticos (Barbosa & Rendón, 2012).

Esta exploración aportó a la formación de los docentes en ejercicio sobre la enseñanza del sistema de medidas y ayudó a los estudiantes a fortalecer la adquisición de la temática a partir de experimentación. Actividad que se realizó en sus hogares por ser una zona rural.

• Diseño de herramientas didácticas en ambientes virtuales de aprendizaje mediante unidades de aprendizaje integrado en matemáticas. Para esta investigación se tomaron muestras de grupos de niveles superiores de la básica y la media, con la finalidad de diseñar diferentes materiales didácticos; los cuales fueran utilizados en ambientes virtuales de aprendizaje, a partir de la utilización de las Unidades de Aprendizaje Integradas (U. A. I). Durante esta investigación los participantes seleccionaron un software educativo y los conocimientos que podrían trabajar con esta, seguidamente clasificaron las herramientas didácticas que podían ser diseñadas con dicho software, las cuales estuvieran acorde a las necesidades de la comunidad y el currículo de matemáticas, para posteriormente diseñar las unidades de aprendizaje integradas (Mora, 2012) .

Con este trabajo se pudo determinar que el nivel de estudio de los estudiantes es muy básico y no es acorde a su nivel escolar. Además, cabe destacar que este proyecto buscaba diseñar objetos didácticos que pudieran ser llevados a las aulas de clases dejando a un lado las clases magistrales.

• Propuesta didáctica basada en el uso del material educativo multimedia “GpM2.0” para el desarrollo de las capacidades del área de matemática en alumnos de cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Nicolás la Torre. Esta investigación prioriza los materiales educativos multimediales como nuevos recursos para profesores, quienes elaboran diferentes actividades de acuerdo a las distintas etapas educativas de los estudiantes y a los contenidos temáticos, con la finalidad de contar con bancos actualizados de talleres para trabajar en las tareas pedagógicas dentro de las aulas.

GpM2.0 es un programa de geometría plana para cuarto grado de educación media, el cual permite estudiar contenidos de área de regiones triangulares, cuadriculares y circulares de forma diferente, motivadora, dinámica e interactiva (Cervera, 2015).

Este trabajo fue poco exitoso. Se pudo detectar que, aunque la institución cuenta con recursos informáticos, están siendo mal usados o inutilizados, debido a la poca o nula preparación de los docentes en el manejo de las nuevas tecnologías. Situación que perjudica directamente los estudiantes.

• Laboratorio virtual de matemáticas como estrategia didáctica para fomentar el pensamiento lógico. Esta exploración procuró que los estudiantes afianzaran sus conocimientos matemáticos a través de los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) y de los Aprendizajes Basados en Problemas (ABP) a partir de la creación de guías conceptuales que pudieran ser trabajadas por los estudiantes como actividades de refuerzo de las temáticas trabajadas en el aula.

Esta investigación se realizó por fases, las cuales se determinaron: sensibilización, fundamentación y matematización. Culminó con un producido de 213 Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), los cuales pueden ser trabajados por cualquier estudiante, canales en YouTube y Facebook, además de una cuenta en Twitter y una plataforma LMS del diseño del laboratorio (Torres & Martínez, 2015).

• Laboratorio de Matemáticas Galileo: Software Educativo para el Aprendizaje Experimental de las matemáticas. Este proyecto hace énfasis en las nuevas tecnologías, a partir, del aprendizaje experimental y significativo; permitiendo enseñar los principales conceptos, objetivos y características de las matemáticas en los grados superiores con la utilización de un software. Este trabajo está dividido en herramientas, las cuales cumplen funciones específicas, algunas de estas son: El Laboratorio de Geometría Analítica, El Laboratorio de Funciones, la calculadora polinomial, entre otros (Hernández, 2016).

Esta tarea fue un complemento de las clases magistrales, fomentó el desarrollo de las ideas de los participantes y la resolución de problemas donde profesor y alumno se convierten en compañeros. Su aplicación ayudó a los estudiantes a realizar pruebas y ejercicios desde contextos originales, gracias a que puede ser aplicable desde cualquier lugar y computadora.

Los laboratorios de matemáticas son una apuesta de maestros y profesionales de la educación, quienes indagan permanentemente en el saber pedagógico para encontrar nuevas formas de enseñar. Por esto, en cada uno de los registros encontrados con relación al diseño de laboratorios matemáticos y de cómputo, como herramienta para la enseñanza de las matemáticas, se observa una clara intencionalidad de generar espacios que permitan la interacción lúdica de los estudiantes con los conceptos matemáticos, a través, de la implementación de estrategias metodológicas que favorezcan la capacidad de comprensión, el análisis de los conceptos y el aprendizaje; propiciando la adquisición de habilidades cognitivas y competencias básicas del estudiante.

Se detecta que el departamento del Valle del Cauca es donde más se ha tratado de implementar la estrategia de laboratorios matemáticos. Además, al hacer el rastreo se puede revelar que la actual investigación se relaciona con el trabajo realizado en 2015 "Laboratorio virtual de matemáticas como estrategia didáctica para fomentar el pensamiento lógico". Ambas investigaciones buscan la consolidación de conceptos matemáticos a partir de la utilización de los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) y plantean la utilización de un plataforma como mecanismo de trabajo en el aula y fuera de ella; con la diferencia que nuestro trabajo "Diseño de laboratorio de matemáticas para el fortalecimiento del proceso enseñanza – aprendizaje" busca implementar actividades manuales y concretas, las cuales sean un instrumento para los docentes que no cuenten con servicio de internet o no puedan acceder a la plataforma virtual.

CAPÍTULO 3

En este capítulo se hace un análisis histórico de cómo surgieron los conjuntos numéricos en especial el conjunto de los números naturales, y se presentan dos laboratorios sobre historia de las matemáticas con sus respectivas guías y anexos.

LA HISTORIA NOS AYUDA A ENTENDER EL PORQUÉ DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS

Haciendo un recorrido por la historia de las matemáticas, en el periodo comprendido entre $35000 - 20000$ a. C. el hombre de Cromañón[1] usaba los dedos de las manos y de los pies para organizar su contabilidad. Cuando estos no eran suficientes, tallaba los huesos de los animales elaborando diferentes cortes en serie, los cuales representaban lo que habían cazado.

Durante siglos el hombre fue evolucionando en los diferentes campos de la ciencia, especialmente en el área de las matemáticas. Se han hallado evidencias de que las primeras tribus, 5000 años a. C., usaban las matemáticas para satisfacer sus necesidades relacionadas con el concepto de cantidad. Vieron la necesidad de llevar control sobre sus pertenencias, los miembros de sus comunidades, saber el total de frutos y animales que poseían. De una forma inductiva y empírica operaron los números; por lo tanto, éstos son el resultado de las inferencias de los seres humanos, de sus interacciones, sus necesidades y el medio que los rodeaba.

A medida que la vida en comunidad se fue fortaleciendo, nuevas necesidades se hicieron evidentes para el desarrollo de las civilizaciones. La comunicación y el manejo de las cantidades cobraron mayor importancia y despertaron el interés de los individuos. Es así como cada cultura ideó o adoptó diferentes sistemas de numeración y símbolos para representar los números.

En la baja Mesopotamia, 4000 años a. C., se conoció la primera escritura sobre cantidades, hecha por los sumerios, quienes utilizaban el sistema sexagesimal, tomando como base el número 60 y el principio de la adición. Con el paso del tiempo fueron llegando a su territorio los semitas, quienes usaban el sistema decimal. El encuentro entre estas dos culturas originó un intercambio de conocimientos que permitió la combinación entre el sistema

1 Hombre de Cromañón: Es el nombre con el cual se suele designar al tipo humano correspondiente a ciertos fósiles de Homo sapiens, en especial los asociados a las cuevas de Europa en las que se encontraron pinturas rupestres.

sexagesimal y decimal. Finalmente, los Sumerios adoptaron el método decimal o numeración posicional. Adicionalmente dividieron el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos, las horas y los minutos, según su sistema de numeración. En esta época se observó por primera vez el cero como la ausencia de valor. Además, se dio origen a la aritmética con la invención del ábaco.

Los sumerios también mantenían comunicación con los egipcios. Estos crearon su propio sistema de numeración, utilizando la escritura de jeroglíficos, los cuales eran utilizados como una lengua propia. Un método que iba desde lo creativo hasta lo ingenioso, para comunicar entre los habitantes las diferentes experiencias que acontecían en aquellos tiempos; lo que convirtió este sistema de numeración en uno de los más antiguos, aproximadamente tres milenios a. C.

En este tiempo los egipcios contaban con un método numérico funcional, en base 10, que permitía expresar cantidades amplias. Además, implantaron símbolos diferentes para cantidades como $1, 10, 100, 1000, \ldots$, etc. Así, para expresar el número 23, por ejemplo, la correcta transcripción serían dibujar 2 veces el ideograma asignado a la cantidad 10, y 3 veces el signo establecido a la cantidad 1. Para el caso de los números ordinales lo que se hacía era agregar el sufijo "nu". Este sistema carecía de valor posicional, lo que importaba era la cantidad de símbolos y la estética con que estos se escribían.

Este método también poseía sus desventajas. La principal, estaba dada por la necesidad de usar muchos símbolos a medida que la cantidad a representar aumentaba. Por ejemplo, para expresar el número 876, se tendrían que usar: 8 símbolos de $100, 7$ de 10, y 6 de 1, lo que da un total de 21 cifras para enumerar correctamente la cantidad. Aspecto que fue solucionado con la adherencia de Egipto al Imperio Romano, ya que su sistema numérico fue sustituido por procedimientos como el demótico[2] y/o la escritura hierática[3]; estos eran más sencillos: contaban con símbolos propios para cantidades como el $30, 40, 50$ o el $7000, 8000, 9000, \ldots$ reduciendo la cantidad de ideogramas necesarios para representar cantidades significativas.

Hacia el año 600 a. C. La cultura griega dejo una influencia en cuanto al desarrollo de lenguas posteriores, esto significó un gran respeto y admiración por la forma como los

---

[2] Demótico: El término demótico (del griego δημοτικός, popular) puede hacer referencia a:

• Egipcio demótico: Sistema de escritura y variante del idioma egipcio que surgió en la última etapa del Antiguo Egipto.

• Griego demótico: Variante del idioma griego evolucionada directamente del griego bizantino, base principal del actual griego moderno.

[3] Hierática: La palabra hierática procede del latín hieratĭcus, la cual a su vez procede del griego ἱερατικός. Se denomina etimología al estudio del origen de las palabras y sus cambios estructurales y de significado.

griegos ampliaron sus mecanismos de comunicación. Usaron la numeración Ática, la cual tenía gran similitud con el sistema de numeración romano, debido a que existían símbolos para cantidades como el $1, 10, 50, 100, 500$. Una particularidad esencial de este sistema fue que sus símbolos, de 5 en adelante, eran letras del antiguo alfabeto griego, que a su vez representaban la inicial de la palabra de la cantidad a expresar, es decir, "pénte" para 5, "déka" para diez y así sucesivamente hasta conformar un sistema numérico funcional. Ésta última característica hace que el método también se denomine sistema acrofónico[4].

Alrededor de uno o dos siglos después del desarrollo del sistema Ático, fue tomando fuerza dentro de las comunidades griegas un nuevo procedimiento numérico llamado Jónico[5]. Este nuevo método guardaba similitudes con el acrofónico, a su vez era más completo, lo que reducía la complejidad y la cantidad de símbolos requeridos a la hora de escribir cantidades numéricas grandes, dado que el principio de numeración aditiva (tener que repetir muchos símbolos) se reducía bastante con el nuevo sistema, haciéndolo más eficiente y práctico a la hora de escribir.

La principal característica de similitud con el procedimiento anterior radicaba en que las nuevas representaciones eran también letras, en este caso se asignó una para los números del 1 al 9, otras para los números $10, 20, 30$, hasta el 90, igualmente para los números del 100 al 900; es decir, se determinó una letra para cada una de las unidades, una para cada una de las decenas, y otra más para cada una de las centenas, así, el sistema quedaba compuesto por veintisiete letras. Para diferenciar cuando en un escrito se quería hacer referencia a una cantidad numérica y no a una palabra, la clave fue agregar un acento (una pequeña comilla al lado superior derecho) al finalizar cada una de las expresiones que querían dar cuenta de una cantidad numérica. Conjuntamente, manipularon las fracciones unitarias y de cualquier otro tipo.

Las letras griegas también fueron utilizadas por los romanos en su sistema de numeración, el cual era de carácter aditivo, desarrollaron su utilidad por todo el imperio, sin embargo, no les fue posible realizar cálculos, ya que su método se complicó con el surgimiento de la regla que permitió restar los signos ubicados a la izquierda de una cifra de valor superior.

Los elementos de la numeración romana están constituidos por siete letras ($\mathrm{I} - \mathrm{V} - \mathrm{X} - \mathrm{L} - \mathrm{C} - \mathrm{D} - \mathrm{M}$) los primeros valores se incorporaron con rayas verticales, que

[4] Acrofónico: Es el dar a las letras de un sistema de escritura alfabético un nombre de forma tal que el nombre de la letra misma comienza con ella. Por ejemplo, "alfa," "amarillo," y "amor" son nombres acrofónico de la letra española A.

[5] Jónico: El jónico era un dialecto del griego clásico que se hablaba en la región de Jonia, las islas del centro del Egeo y la isla de Eubea. Junto con el dialecto ático forma parte del grupo dialectal jónico-ático.

guardaban cierta relación con los dedos, para el número cinco usaban la letra V; el número diez se simbolizaba con el elemento cinco, escribiéndolo dos veces de manera invertida, luego fue cambiado por la X; las letras X, L, C, M, constituían los números $10, 50, 100, 1000$ respectivamente. Algunas podían copiarse hasta tres veces consecutivamente. Esto ayudaba a la escritura de las cifras. Este sistema de numeración estuvo en uso aproximadamente 2000 años y fue más efectivo que los anteriores. El aporte que hizo a las matemáticas quedó restringido a nociones topográficas; esta numeración aún se conserva, en los capítulos de los libros, la continuidad de los reyes, la notación de los siglos y las inscripciones históricas.

En el siglo III a. C. se realizaron investigaciones astronómicas en China. Ahí se dio su proceso de formación en tres periodos distintos: periodo formativo, periodo de desarrollo y periodo esplendor. Se consideró que su forma de escritura ocular fue una de las más precoces, usada en los rituales y adivinaciones. También se han encontrado en alfarería símbolos del periodo yangshao[6]. En los diferentes hallazgos se lograron identificar huesos y caparazones de tortuga con epígrafes de caracteres chinos que contenían información numérica.

En la escritura oracular los dígitos soportaban un sistema aditivo y multiplicativo de base diez no posicional, el número de mayor valor escrito fue el 30.000, y el cero no tenía un ideograma definido. Los números del 1 al 10, el 100, el 1000 y el 10000 poseían representaciones particulares; las demás cifras se incorporaban armonizando los caracteres anteriores. Este sistema de numeración se fue desarrollando por influencia de la cultura occidental, utilizando valor posicional y el principio multiplicativo, el cual podía ser escrito de manera horizontal y vertical. Se consideró un método preciso que utilizó las unidades y las diferentes potencias de 10, los números negativos, las fracciones y el cero.

En este mismo siglo, los hindúes utilizaron un sistema en base diez de principio aditivo, implementaron los números negativos, introdujeron el símbolo del cero. Esto permitió escribir cualquier cifra. También inventaron el método de numeración arábigo que posteriormente fue manipulado por los árabes. La expansión que sufrió la religión musulmana, y la interacción con los ya mencionados hindúes, generaron que el sistema de numeración conocido como indo-arábigo se potenciara en Europa como la simbología numérica más usada para fines aritméticos. Esto se vio fomentado por las colonizaciones y el auge del comercio, a finales del primer milenio y comienzos del segundo, después de Cristo.

---

6 Yangshao: La cultura de Yangshao fue una cultura neolítica que se extendía a lo largo del curso central del río Amarillo en China.

Posteriormente la civilización maya, igual que otras culturas mesoamericanas, se ubicaron en el territorio del sureste de México, Guatemala y otras zonas, quienes utilizaron un sistema de numeración en base veinte (vigesimal) con el cinco como apoyo. Además, en el año 36 a. C. descubrieron el concepto de cero como ausencia de valor, hallazgo de gran importancia que permitió dar un valor posicional a los numerales. Después de Cristo, las tribus o comunidades que habitaban América previo a la colonización poseían un gran potencial intelectual y tuvieron grandes acercamientos científicos a la astronomía y las técnicas de construcción.

Hacia el sigo XII comenzó a fundarse el imperio Inca, poco a poco fue abarcando grandes territorios de lo que hoy se conoce como Suramérica. Desarrollaron un sistema completo de escritura; idearon su propio método de numeración, el cual permitió tener control sobre sus actividades económicas. A medida que dicho imperio se expandía, sus actividades financieras también lo hacían y fue necesario hallar un sistema aritmético que les permitiera administrar o controlar sus movimientos comerciales. De aquella necesidad se ingeniaron un sistema de numeración decimal posicional basado en cuerdas, o más bien, un conjunto de ellas denominados "quipus".

Un quipu era una cuerda ubicada horizontalmente, de la cual se desprendían un conjunto de hilos, en los que se hacían una serie de nudos con una disposición particular, con el fin de diferenciar los tipos de objetos que eran contabilizados, el mecanismo era usar diferentes cuerdas y colores. En el quipu se podían agrupar pequeños conjuntos de fibras según la necesidad. En los hilos se realizaban diferentes grupos de nudos, cada uno de ellos correspondía a una potencia de diez, ubicando las unidades en la parte inferior de la cuerda; ascendiendo se encontraban las decenas, las centenas, y las unidades de millar. Una característica importante fue la aproximación que hacían los incas al número cero, dejando un espacio libre, sin nudos, en la posición que se requería.

La historia también habla de hombres importantes, con un gran talento, que aportaron avances a la evolución matemática. Es así como surgieron personajes como: Thales de Mileto, Pitágoras y Euclides, quienes investigaron e hicieron grandes aportes a la geometría. Fueron los primeros en hablar de circunferencias, rectas y ángulos. Otro personaje importante fue el griego Ptolomeo, quien dejó una huella en el desarrollo de la astronomía, la cinética (física) y la óptica. Fomentó en Grecia la tradición por estudiar las obras de pensadores que habían vivido siglos atrás. Esto dio lugar a la masificación de algunos conceptos matemáticos y su notación que permitió entender y comprender dichas obras.

De ahí en adelante surgieron nuevos genios, y con ellos nuevos hallazgos como los logaritmos y la resolución de ecuaciones hasta de cuarto grado, las cuales estuvieron dadas por el descubrimiento del cálculo infinitesimal hecho por Newton y Leibniz. En ese punto, ya se tenía un lenguaje y una notación lo suficientemente estructurada que permitió el desarrollo de avances para la historia de las matemáticas. Partieron de lo más simple a lo más complejo.

La historia da información acerca de las comunidades y sus métodos aritméticos, quienes fueron cruzando la línea del tiempo, trascendieron y evolucionaron, haciendo que los métodos actuales sean más eficientes. Por esto, los números naturales han sido considerados cimientos fundamentales de la matemática, su estudio y formalización estableció las bases para la astronomía, la ciencia, la geometría y los diferentes campos del conocimiento. "Todas las ciencias dependen de las matemáticas. Sus teorías son tan abstractas y generales que tarde o temprano se les descubren sorprendentes aplicaciones a fenómenos de la realidad" (Perez, pág. 5) Es así que la significación de cualquier número, sin importar el contexto, hace parte de la verdad inducida por la ciencia de los números.

Los números naturales han sido significativos para la construcción de las matemáticas. Su origen está ligado a la cotidianidad de los seres humanos. Por esta razón, su estudio ha sido de gran importancia para muchos matemáticos. La característica principal que los define es el hecho de que sean ordenados, es decir, "cada símbolo, excepto el primero, es el siguiente de cada uno que le precede" (Gómez Simón, Evolución del concepto de número, pág. 11), así, cuando se enumeran o cuentan cosas, lo que se está usando son los números naturales.

Se puede decir que estos sirven para cuantificar un conjunto finito y señalar qué posición ocupa un elemento dentro de una secuencia ordenada, "el uso básico que hacemos de ellos es contar y ordenar" (Godino, 2004, pág. 24). Estos signos también representan longitudes, áreas, volúmenes y pesos. A medida que la humanidad se desarrollaba, las matemáticas cobraron mayor valor y relevancia, surgieron nuevas exigencias que requerían de estructuras más complejas que el conteo, como las diferentes operaciones: la suma, la resta, la multiplicación, la división, la radicación.

Desde la Matemática analizaremos dos teorías para definir los números naturales, una es la axiomática, presentada por el italiano Giuseppe Peano en el siglo XIX, compuesta por cinco axiomas, los cuales demuestran el origen y el orden de los números, además fundamentan la aritmética. La segunda, desde la noción de cardinal y de la relación de coordinabilidad llamada Conjuntista, propuesta por el matemático ruso Georg Cantor, también en el siglo XIX. Este último, considerado el precursor de la teoría de conjuntos, centró sus investigaciones en las colecciones infinitas de números y construyó la sucesión de estos a partir de la noción de conjunto.

Los números naturales dieron origen a los sistemas de numeración, estos reciben su nombre de acuerdo con la cantidad de dígitos que posee, o de la cultura que los utilizó; por ejemplo, el sistema decimal, que es el que en la actualidad se utiliza, tiene 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9); y el sistema binario, que se usa en las calculadoras y computadoras, tiene 2 dígitos (0 y 1). Es importante señalar la diferencia entre el conjunto de números naturales, el cual es infinito y el conjunto de símbolos para escribirlos que es finito.

En un inicio los números se utilizaban para hacer operaciones sencillas como la suma. Al hacerla no se presentaba ninguna restricción, siempre se obtenía un número natural; sin embargo, descubrieron que en la resta había momentos en los cuales se presentaban algunas limitaciones y no siempre obtenían un número natural. Surgió la pregunta ¿A qué es igual $a - b$, con $a < b$?, creando la necesidad de otro conjunto, el cual ayudara a satisfacer los nuevos requerimientos como las pérdidas, las bajas temperaturas, los faltantes, etc.

Con esto surgieron los números enteros, los cuales se representan con los mismos números naturales, pero se introdujo la notación del menos o negativo. Estos números simbolizan unidades no divisibles haciendo posible los enteros positivos, negativos y el cero; es decir, se puede incluir la propiedad de operación interna para la resta, sin importar que el sustraendo sea mayor que el minuendo, el resultado siempre dará un número entero (negativo). En este conjunto, lo positivo siempre es mayor que lo negativo, con esto se dio origen a la base de la matemática.

Con el paso de los días aparecieron otras dificultades para las cuales los números enteros ya no fueron suficientes, se encontró que en la división no hay entero que satisfaga a/b cuando a no es múltiplo de b. Para darle solución a esta limitación surgieron los números racionales para los cuales no existe esta restricción. Surgió un grupo más grande que ocupaba los números enteros y, a su vez, los números naturales llamados racionales. Este representó una porción de un entero. No era consecutivo como los conjuntos anteriores, por el contrario, se encontraron infinitos racionales entre uno y otro, argumento expuesto por (Barrantes, pág. 88): "entre dos números racionales siempre podemos encontrar otro número racional, de hecho, infinito número de ellos".

En este caso, la novedad radicó en que se llamó racional a cualquier número que se expresó como la razón entre dos números enteros, siempre y cuando el denominador no fuera cero; es el mismo concepto si se hablaba de fracciones. En los números racionales se observó la necesidad de representar partes incompletas de un entero, por ejemplo, repartir un pan entre más de una persona. Con el surgimiento de estos números se eliminó la restricción para la división, pero a su vez se encontró otra ya que no se puede generalizar la extracción de raíces para aquellos números cuyo cociente no se expresa como cantidades enteras, sino que representan cantidades numéricas no periódicas, es decir, infinitas cifras decimales, como por ejemplo $\sqrt{12}$.

Debido a esta limitación, se creó el conjunto de los irracionales y con estos se dio origen a los reales. Luego, en los reales no se le proporcionó respuesta a la extracción de raíces cuando la cantidad subradical era negativa $\left(\sqrt[n]{-a}\right)$; para satisfacer esto, se dio origen a una cantidad imaginaria (i). Con esto surgió la relación de los números complejos, y este incluye todos los conjuntos expuestos.

"Los números enteros se construyen agregando el cero y los negativos a los números naturales; y los números racionales, a veces llamados fraccionarios, son los cocientes de números enteros. Además, los números reales se construyen con los números racionales, y los números complejos se construyen con los números reales". (Cagliero, Penazzi, Rossetti, Sustar, & Tirao, 2010, pág. 11).

3.1 LABORATORIO 1. LOS NÚMEROS EN LA CIVILIZACIÓN MAYA

3.1.1 Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificar el sistema de numeración maya y su aporte a las matemáticas.

Adquirir conocimientos generales del sistema de numeración maya y su valor posicional.

Reconocer y aplicar la multiplicación en el sistema de numeración maya.</td><td>Numérico y sistema numérico.</td><td>Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.

Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identifica, describe y representa diferentes sistemas de numeración utilizados en la antigüedad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Establece relaciones entre el sistema de numeración maya y el sistema de numeración decimal.
• Representa números decimales en el sistema de numeración maya.
• Reconoce y aplica la suma y la multiplicación para convertir números vigesimales a decimales.</td></tr>
</table>

MOMENTOS	FASES	ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o exploración	Cuento “Recorriendo el mundo maya”.	Video, computador, internet, (Anexo 1): cuento “Recorriendo el mundo maya”.
Momento 2	Desarrollo o estructuración de la clase	Introducción al sistema de escritura maya: nociones básicas.	Cartón, plastilina, colbón, pintura, recursos del medio como palos, piedras, semillas. Ver orientaciones didácticas.
	Trabajo independiente	Rompecabezas “Descubrimientos mayas”	Rompecabezas impresos, colores, tijeras, colbón. Guía del estudiante: Actividad No.3. (Anexos 2, 3, 4, 5 y 6)
	Trabajo cooperativo	Taller grupal: “Volvamos a la cultura maya”	Hojas de papel, guía del estudiante: Actividad No.4.
Momento 3	Cierre o transferencia	Rompecabezas: “Descubriendo el calendario maya”	Hoja de papel, lápiz, tablero, rompecabezas con sus respectivas fichas. (Anexos 8 y 9).
Momento 4	Para aprender más	Sociodrama sobre el sistema de numeración maya y la forma como utilizaban los números.	Cartulina, colbón, vestuarios, semillas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La civilización Maya data del año 36 a. C. y representa una de las culturas más importantes de América a nivel religioso, cultural y matemático. Crearon su propio sistema de numeración, más que para realizar cálculos matemáticos para medir el tiempo; gracias a esto, organizaron los días, los meses y los años de su calendario con mucha precisión en la medición y duración de las épocas.

Manipularon tres símbolos para graficar los números del cero al diecinueve; el punto, el cual representa los dígitos del uno al cuatro; la raya, que simboliza el cinco; y el caracol que incorpora el cero. Este sistema de numeración fue llamado vigesimal por tener veinte símbolos y organizarse en veintenas, es decir; de la forma $\mathbf{20^n}$ donde $\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots}$, organizado por niveles, ubicando los puntos encima de las barras, los cuales tienen un valor según su posición, leyéndose de abajo hacia arriba como se muestra en la Figura 1.

Figura 1. Numeración básica del sistema maya

Este sistema, es de carácter multiplicativo lo que permitió escribir números más grandes que veinte y realizar grandes cálculos matemáticos, es decir, cada número adquiere una estimación según su ubicación, al multiplicarse por valores ya establecidos; en el primer nivel se multiplica por $\mathbf{20^0}$, es decir por uno, en el segundo nivel por $\mathbf{20^1}$, esto es por veinte y así sucesivamente se va multiplicando por cuatrocientos, ocho mil, ciento sesenta mil, etc. Luego se suman todos los resultados obtenidos en los niveles y se obtiene el número en el sistema decimal como se muestra en la tabla 1.

$\mathbf{20^3 = 8000}$	$\mathbf{20 \times 20 \times 20}$
$\mathbf{20^2 = 400}$	$\mathbf{20 \times 20}$
$\mathbf{20^1 = 20}$	$\mathbf{20}$
$\mathbf{20^0 = 1}$	$\mathbf{1}$

Tabla 1. Cuatro niveles del sistema posicional maya.

Lo anterior se puede ver con el siguiente ejemplo del número 23 escrito en el sistema de numeración maya. Figura 2.

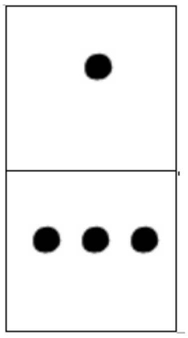


Figura 2. Representación del número 23 en el sistema de numeración maya.

En el primer nivel se encuentran tres puntos, esto simboliza que se multiplica tres por uno, dando como resultado tres; en el segundo nivel hay un punto, es decir se multiplica uno por veinte; para terminar, se suman los resultados y se obtiene el número deseado: $23 = (3 \times 1) + (1 \times 20)$.

Los mayas también realizaron observaciones astronómicas, las cuales fueron muy precisas en cuanto a los movimientos de la luna y los planetas. También fueron grandes arquitectos construyendo templos, pirámides, palacios, campos de juego y grandiosas plazas.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Con este laboratorio "Cómo contaban nuestros antepasados" los estudiantes tendrán la oportunidad de explorar la cultura Maya, su sistema numérico y como este influyó en la historia de las matemáticas. A partir de la implementación de actividades y juegos; los cuales buscan involucrar a los estudiantes con la temática, a través de cuatro momentos; exploración, estructuración, transferencia y para aprender más.

La exploración o apertura, se efectúa con la proyección o lectura de un cuento llamado "Recorriendo el mundo maya" el cual permite que los estudiantes observen el desarrollo y la caracterización de la cultura Maya, además de la forma como utilizaban los números.

El segundo momento se divide en tres fases, la primera (desarrollo o estructuración de la clase), para esta solicite a los estudiantes buscar diferentes materiales como: semillas, palos, caracoles y barro. Luego invítelos y oriéntelos a realizar diferentes representaciones de números en el sistema Maya. Esto les permitirá aplicar y manipular el sistema de numeración vigesimal de manera divertida. Mientras realizan la actividad, repase la temática haciendo comentarios sobre lo explicado hasta el momento; también debe estar pendiente de las dudas que surjan en la realización de la actividad.

Seguidamente efectué el trabajo independiente entregando a cada estudiante un rompecabezas, (Anexos 2, 3, 4, 5 y 6). Explique que para resolverlo deben utilizar el sistema vigesimal de los mayas, efectuando los cálculos necesarios para saber qué número representa cada cuadrícula del rompecabezas en el sistema de numeración decimal, de esa manera descubrirán que fichas corresponden a los lugares de la cuadrícula, ya que las fichas se encuentran numeradas con los valores correspondientes a las casillas de la base del juego (cuadrícula). Recuerde a los estudiantes la forma como los mayas representaban los números y la manera como utilizaban la multiplicación para escribir números mayores que diecinueve.

Para terminar el segundo momento, desarrolle el trabajo colaborativo realizando el taller "Volvamos a la cultura maya" (Actividad No.4.). Organice los estudiantes en parejas y entregue a cada uno una copia del trabajo a realizar, con el cual tendrán la oportunidad de efectuar diferentes actividades sobre la numeración vigesimal y la cultura Maya. Estas actividades han sido planeadas con la finalidad de que los estudiantes reafirmen sus aprendizajes sobre la temática. Para iniciar deben realizar un apareamiento, con el cual tienen la oportunidad de aplicar lo aprendido en los momentos anteriores (punto a). Una vez terminado este punto solicite que realicen la lectura "Cómo contaban en la tribu Maya" (punto b). Para finalizar el taller vuelva a organizar los estudiantes, en equipos de cuatro integrantes y entregue a cada equipo un juego de dominó Maya (punto c). Explique las condiciones del juego las cuales se encuentran expuestas en la guía del estudiante.

En el momento de cierre o transferencia designado "Descubramos el calendario maya" indique a los estudiantes tener a la mano lápiz, borrador y sacapuntas, además de estar muy atentos a las indicaciones. Esta actividad se realiza con base en el trabajo independiente, con la diferencia de que el rompecabezas se resuelve a nivel grupal y los números solicitados son más complejos. Solicite a los estudiantes realizar las operaciones necesarias para saber qué número decimal representa cada casilla del rompecabezas en numeración vigesimal, en el instante que alguien descubra el resultado puede salir a buscar entre las fichas la correspondiente al número encontrado y péguela en el tablero del rompecabezas. (Rompecabezas calendario Maya) (Anexos 8 y 9).

Para culminar el laboratorio efectue el momento "para aprender más". Para esto, organice los estudiantes en equipos de cinco o seis integrantes e indique que deben preparar un sociodrama en el cual personifiquen lo aprendido sobre la cultura Maya y su sistema de numeración. Recuerde que cada uno de los detalles debe ser apropiado y permitir una relación entre los conceptos.

3.1.2 Guía del estudiante.

Lo que comprenderás:

- Establecer relaciones entre el sistema de numeración maya y el sistema de numeración decimal.
- Representar números decimales en el sistema de numeración maya.
- Reconocer y aplicar la multiplicación para convertir números vigesimales a decimales.

Materiales:

Material del entorno (piedras, palos, semillas), colbón, lápiz, colores, marcadores, dominó, rompecabezas de números mayas y computador.

Práctica de exploración

Actividad No.1. Cuento "Recorriendo el mundo maya" (Anexo 1).

Actividad No.2. Introducción al sistema de escritura maya: Nociones básicas.

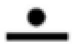
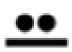
Para esta actividad es necesario que busques palos, piedras o barro de tu alrededor. Luego sigue las indicaciones del profesor.

Actividad No.3. Descubrimientos mayas. (Anexos 2, 3, 4, 5 y 6).

Solicita al profesor un rompecabezas de la cultura maya y ubica correctamente cada una de las fichas, teniendo en cuenta el número decimal y el escrito por la cultura maya, cuando encuentres aquellos números que representen el mismo valor, ubícalos en la cuadrícula. Al finalizar obtendrás un dibujo de gran importancia para esta civilización.

Actividad No.4. Taller: Volvamos a la cultura maya.

1. Realiza el apareamiento uniendo con una línea los símbolos de la columna A con los números decimales equivalentes de la columna B, teniendo en cuenta lo aprendido sobre la numeración maya y los números decimales.

COLUMNA A	COLUMNA B
	2
	6
	3
	7
	10
	5
	9
	8
	1
	4

2. ***Lectura. ¿Cómo contaban en la tribu Maya?***

Los mayas fueron una civilización de América que se destacó por su escritura jeroglífica, el arte, la matemática y la arquitectura. Diseñaron su propio sistema de numeración, el cual se apoyaba en tres símbolos: el caracol, el punto y la raya; con estos formaban los números del uno al diecinueve, además le agregaban el caracol como distintivo del cero, por esto se considera un sistema en base 20 o vigesimal. Algunas de sus características son.

Utiliza tres símbolos básicos

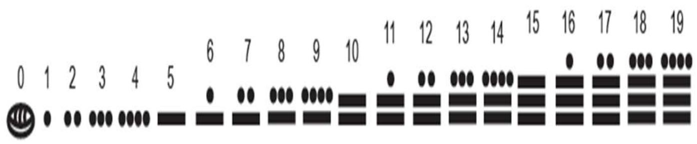


Figura 3. Representación del sistema numérico maya y sus símbolos.

El cero representaba la ausencia de valor, esto cimentó su efectividad posicional. Este sistema fue llamado vigesimal, por eso se hacen agrupaciones de a 20 elementos.

Para escribir números mayores que el diecinueve, utilizaban los mismos símbolos, la diferencia es que el valor cambia según la posición de cada dígito. Por esto se considera un sistema de valor posicional y de carácter multiplicativo, es decir cada número adquiere un valor según su lugar, de abajo hacia arriba.

Valor posicional según el nivel:

$20^3 = 8000$	$20 \times 20 \times 20$
$20^2 = 400$	20×20
$20^1 = 20$	20
$20^0 = 1$	1

Tabla **2**. Cuatro niveles del sistema posicional maya.

Ejemplo:

La siguiente tabla muestra en la primera columna el número (múltiplo de 20) por el cual se debe multiplicar según la posición de abajo hacia arriba empezando por la segunda fila, ya que la primera corresponde al resultado en la numeración decimal. Cada una de las siguientes cuatro columnas representa un número (de cuatro niveles) en la numeración maya que se lee de abajo hacia arriba. Para interpretar o saber qué número se representa en el sistema decimal, se multiplica cada número del sistema vigesimal por el valor correspondiente a la posición que ocupa. Luego se suman los resultados y se obtiene el equivalente en numeración decimal.

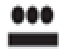
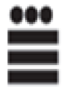
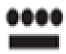
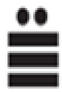
$\mathbf{20^3 = 8000}$				
$\mathbf{20^2 = 400}$				
$\mathbf{20^1 = 20}$				
$\mathbf{20^0 = 1}$				
Resultado en la numeración decimal	2	22	3269	15217

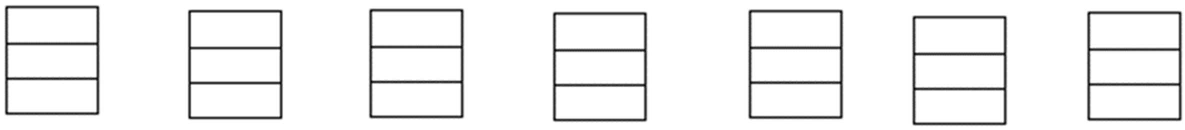
Tabla **3**. Ejemplos de la numeración maya.

3. ***Juego "Dominó Maya"***

Organiza equipos de cinco o seis estudiantes y solicita al profesor un dominó (Anexo 5). Para efectuar el juego debes repartir de forma equitativa las fichas e inicia quien tenga la ficha que represente el doble seis; seguidamente cada jugador de uno en uno, debe ir ubicando las fichas que unan un número del sistema de numeración maya con su correspondiente en el sistema de numeración decimal o viceversa. No se permite unir dos números del mismo sistema de numeración. Gana el juego quien termine primero sus fichas. Los demás pueden seguir jugando hasta ubicar todas las fichas del juego.

4. ***Representa en numeración maya los siguientes números decimales.***

245 **26** **148** **805** **94** **20** **9**



Actividad No.**5.** ***Descubriendo el calendario maya***

Para descubrir el calendario debes tener a la mano lápiz, papel, borrador y seguir las indicaciones del profesor.

El calendario maya es catalogado como el más perfecto del mundo, su significado se relaciona con la astronomía, la naturaleza y la espiritualidad. Los mayas utilizaban dos calendarios, uno de 260 días fragmentado en 13 meses, llamado calendario de las lunas y otro de 365 fechas, el cual incorporaba 18 meses llamado anuario largo.

3.1.3 Anexos laboratorio 1. Los números en la civilización maya.

Anexo No. **1.** ***Cuento***

"Recorriendo el mundo maya".

Cuenta la leyenda que 2000 años antes de Cristo, en una región llamada Mesoamérica al sur de México y Guatemala, existía una tribu indígena y sedentaria de nombre maya. Era gobernada por un rey llamado Zarahara quien era considerado el más justo de toda la tribu, dirigía su clan con rectitud y honestidad, amaba su cultura y conservaba sus costumbres. Un día Zarahara decidió compartir sus riquezas con sus súbditos; para hacerlo dispuso premiarlos por todo lo que sabían hacer. Con esto descubrió que su reino estaba lleno de grandes personalidades y genios, ya que había visto cosas que no imaginaba.

Al salir de su castillo el rey observó las majestuosas construcciones, casas y pirámides de su reino; las consideró espléndidas como a sus habitantes, algunos eran artistas, pintores y escultores, se enteró de que habían inventado, no solo uno, sino dos calendarios anuales, su comunicación era perfecta gracias a su lenguaje escrito. Pero lo más importante y significativo para el rey fue enterarse del gran descubrimiento que habían hecho creando su propio sistema de numeración, este alcanzaba tanta perfección que permitió organizar y calcular el tiempo en días, meses y años.

Un día cualquiera uno de sus consejeros también salió del reino para comprobar tales descubrimientos y con tal asombro observó que algunos sabios de la tribu usaban objetos para contar como: caracoles para representar el cero, semillas para simbolizar los números uno, dos, tres y cuatro; y vástagos en posición horizontal para el número cinco. Sorprendido les preguntó ¿qué hacen con eso?, ellos contestaron, hemos descubierto que con estos elementos podemos representar 20 cifras. De pronto el anciano más sabio dijo:

Hemos diseñado nuestro sistema de numeración, y le hemos dado el nombre de vigesimal, por tener 20 símbolos y hacer agrupaciones de 20 en 20.

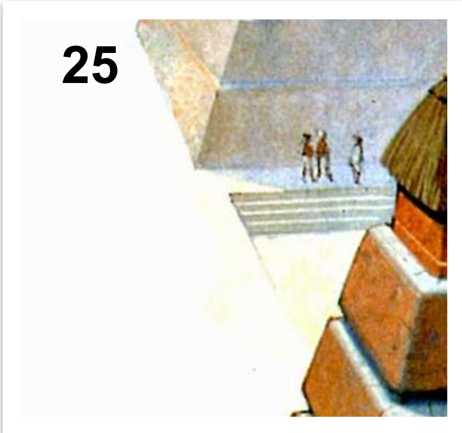
Jajaja, replicó el consejero ¿De qué les puede servir tal hallazgo?

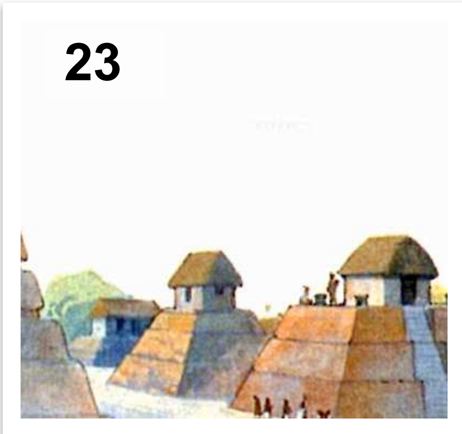
¿De qué nos sirve?, contestó el viejo. Gracias a este descubrimiento podemos definir cualquier número; los organizamos por niveles, en posición vertical, así los símbolos adquieren un valor según su ubicación. De esta forma escribimos cualquier número mayor que diecinueve. Y si queremos saber el número es en el sistema decimal multiplicamos cada valor por la posición que ocupa; luego sumamos los resultados y el resultado es la cifra representada.

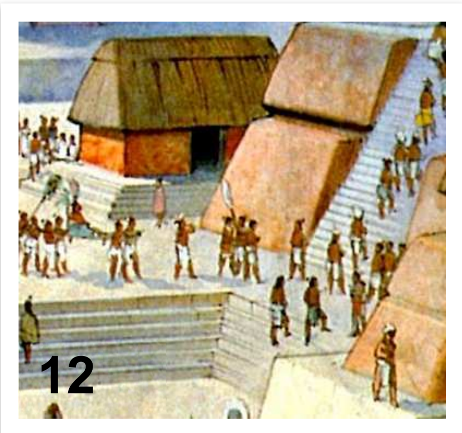
El consejero observó lo que hacían y entendió lo significativo y valioso de este sistema de numeración, felicitó a los sabios y les agradeció por tan importante aporte a su cultura. Volvió al reino y acudió donde Zarahara, le relató todo lo que había aprendido y lo significativo que era todo lo que había visto para el desarrollo de su civilización. Con el paso del tiempo el monarca decretó que los sabios enseñaran a toda la tribu este sistema de numeración, así todas las personas podrían contar sus pertenencias. Desde aquel día el rey trata a todos por igual, no tuvo distinciones entre nobles, artesanos, campesinos y comerciantes.

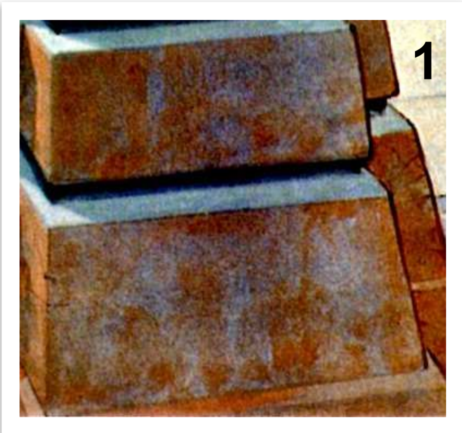
Y así acaba este relato que, aunque yo no lo viví me ha parecido grato.

Anexo No.2. Fichas rompecabezas ciudad maya.

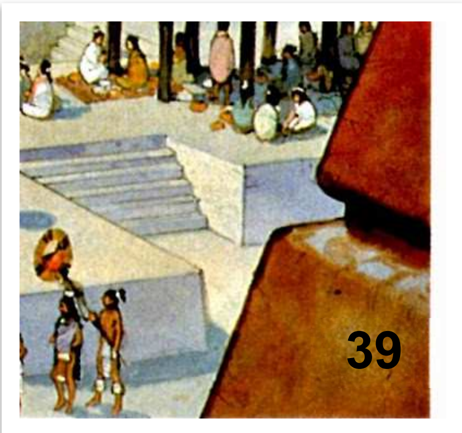


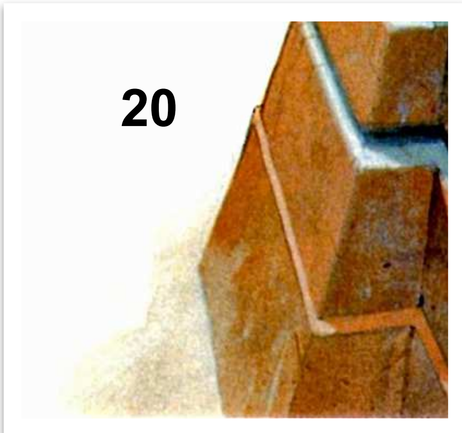


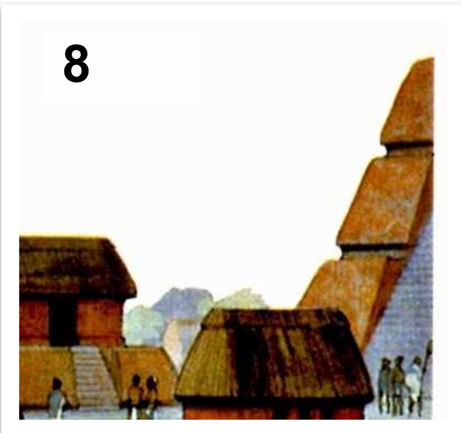


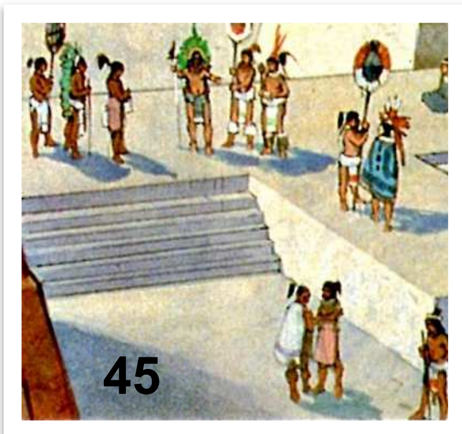

1


4

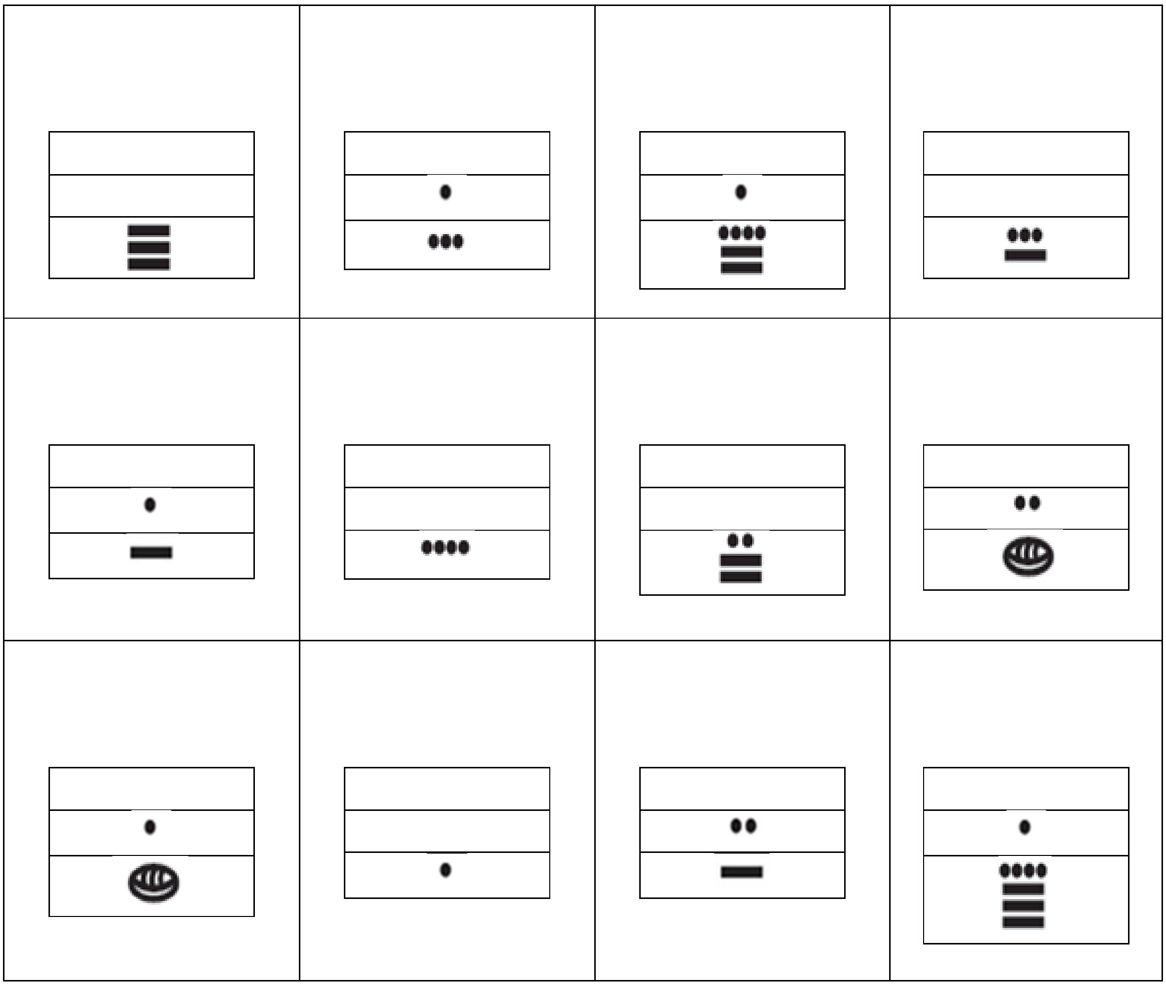

39


20

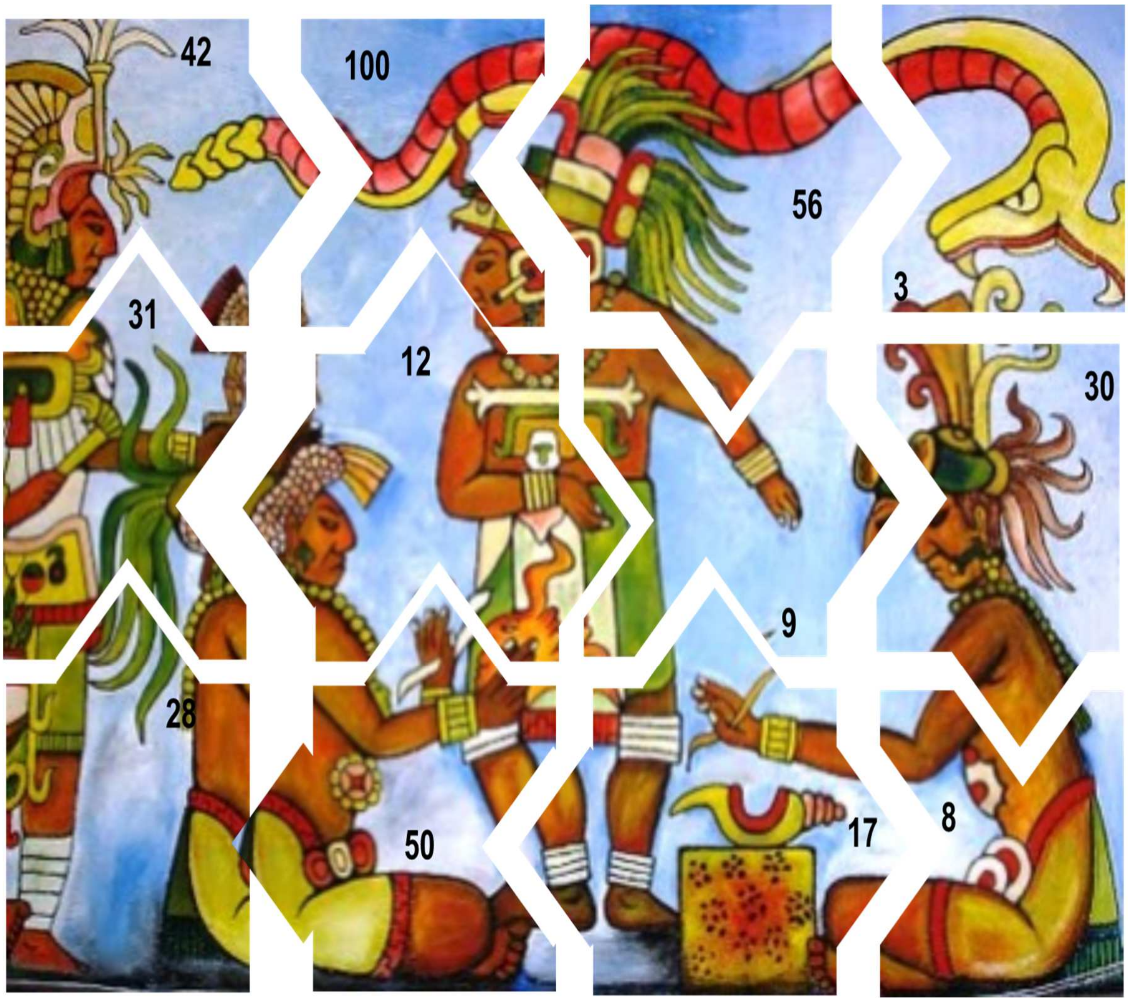

8


45

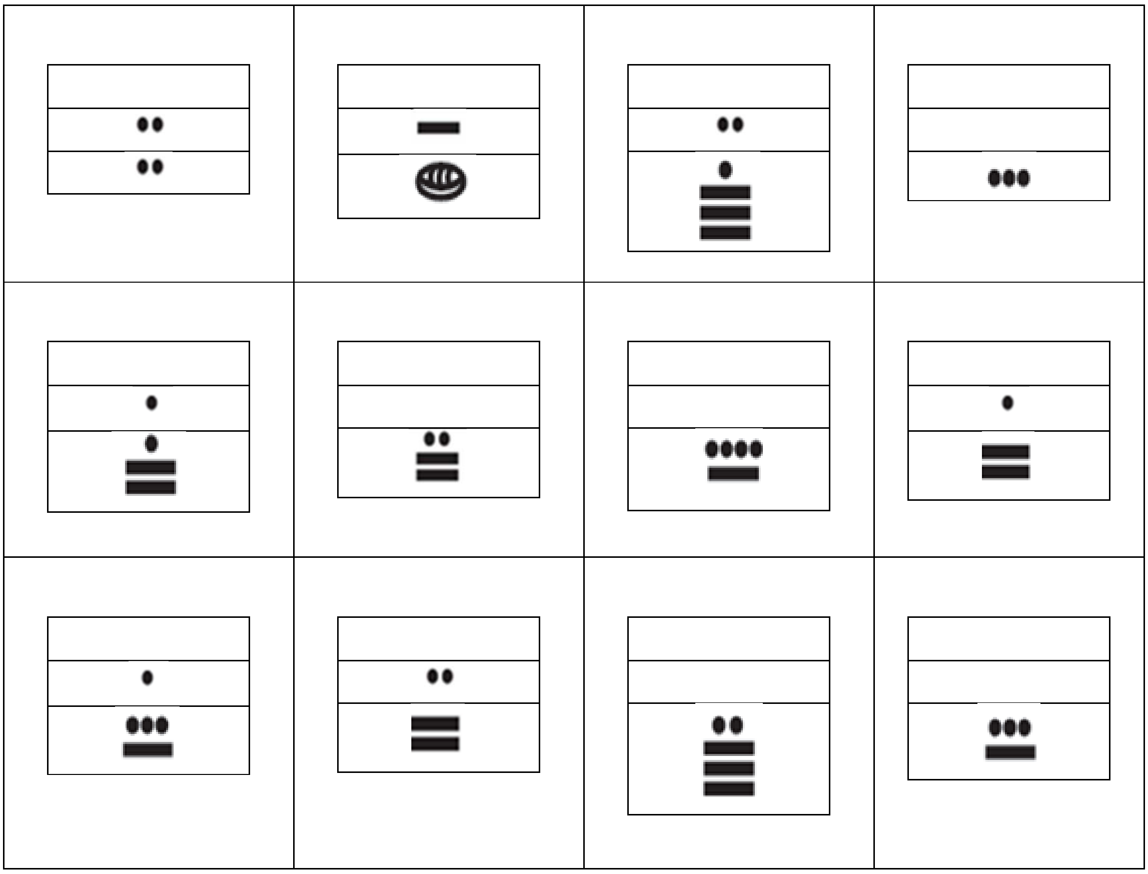
Base para rompecabezas ciudad maya.



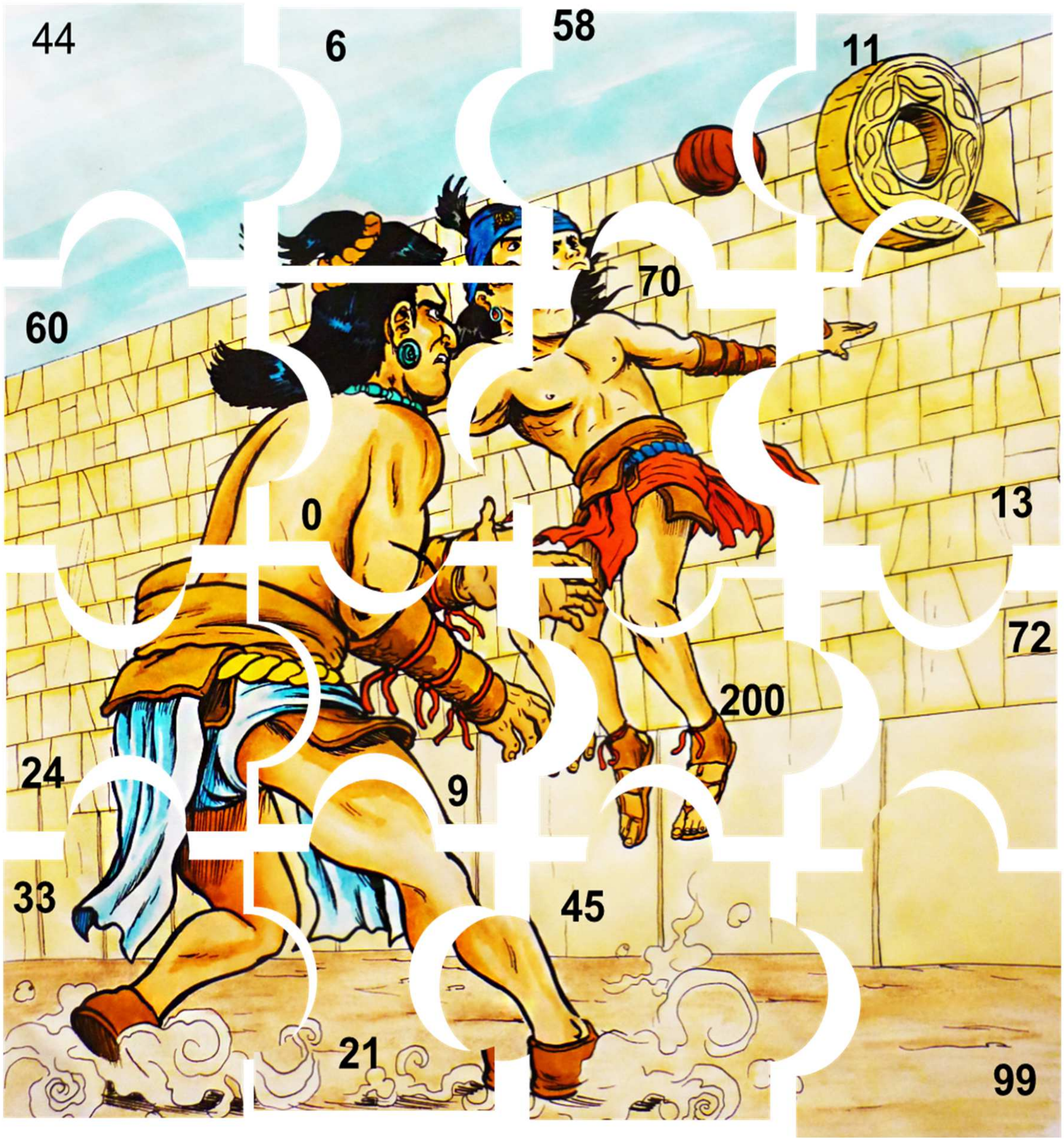
Anexo No.3. Fichas rompecabezas el ritual de los mayas.



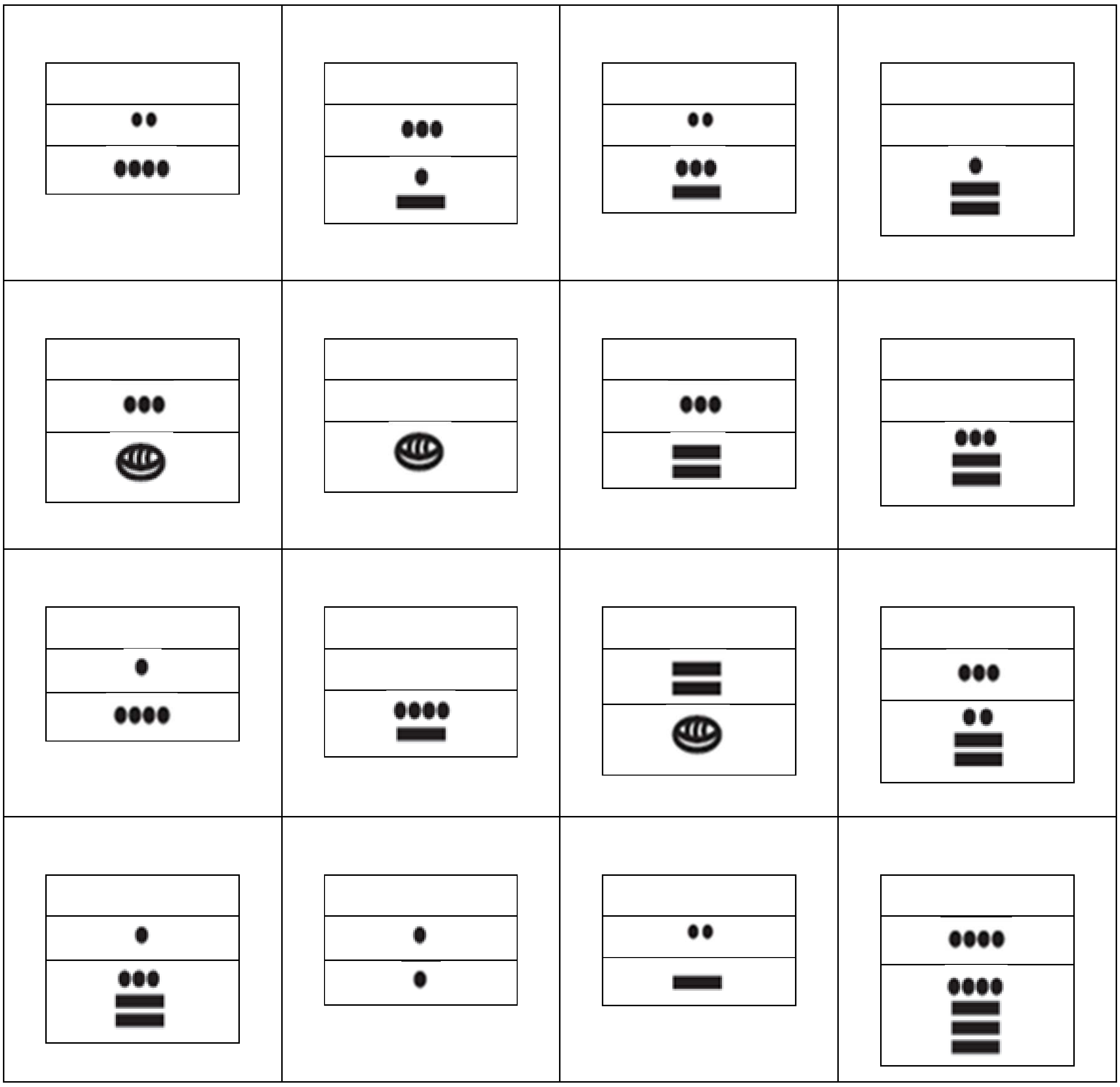
Base para rompecabezas el ritual de los mayas.



Anexo No.4. Fichas rompecabezas el juego de la pelota.

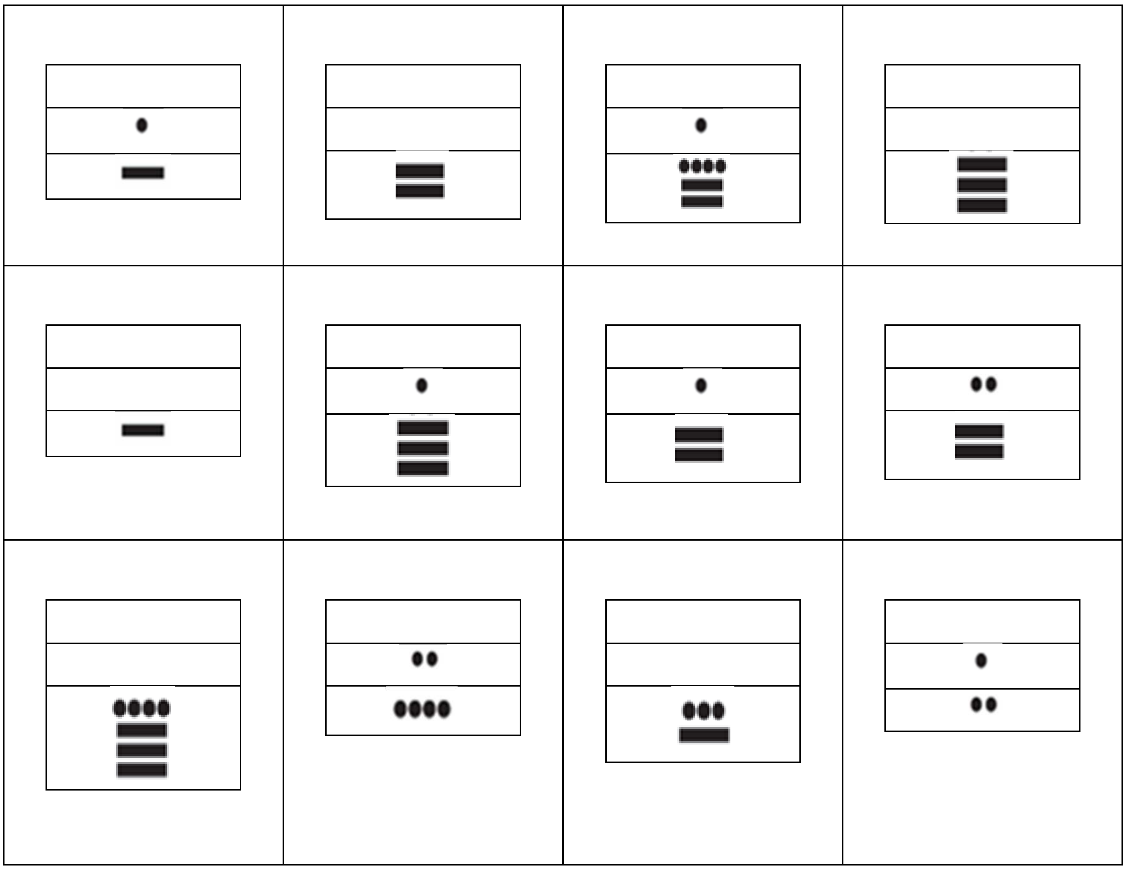


Base para rompecabezas el juego de la pelota.



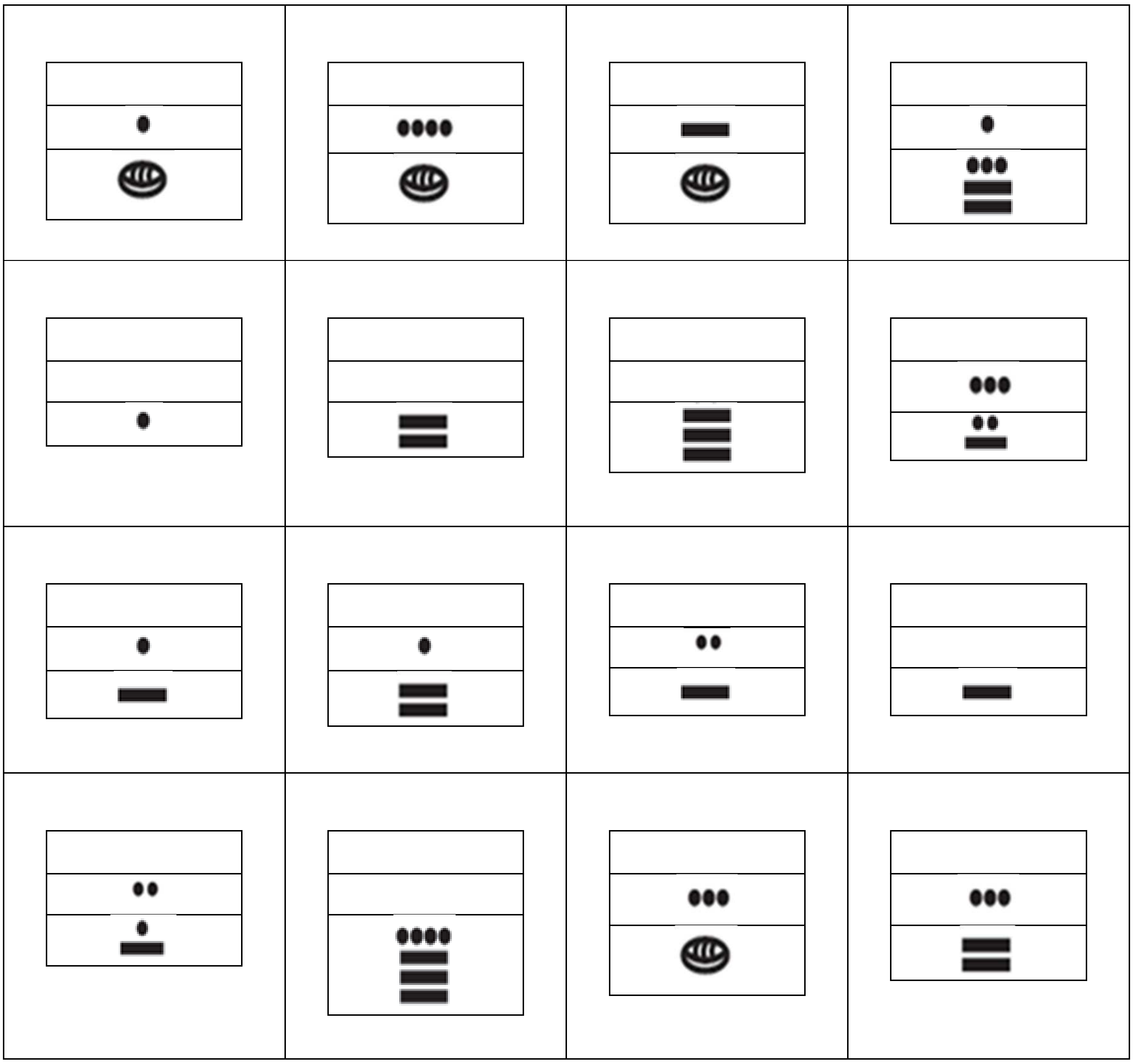
Anexo No.5. Fichas rompecabezas en el campo.

Base para rompecabezas en el campo.

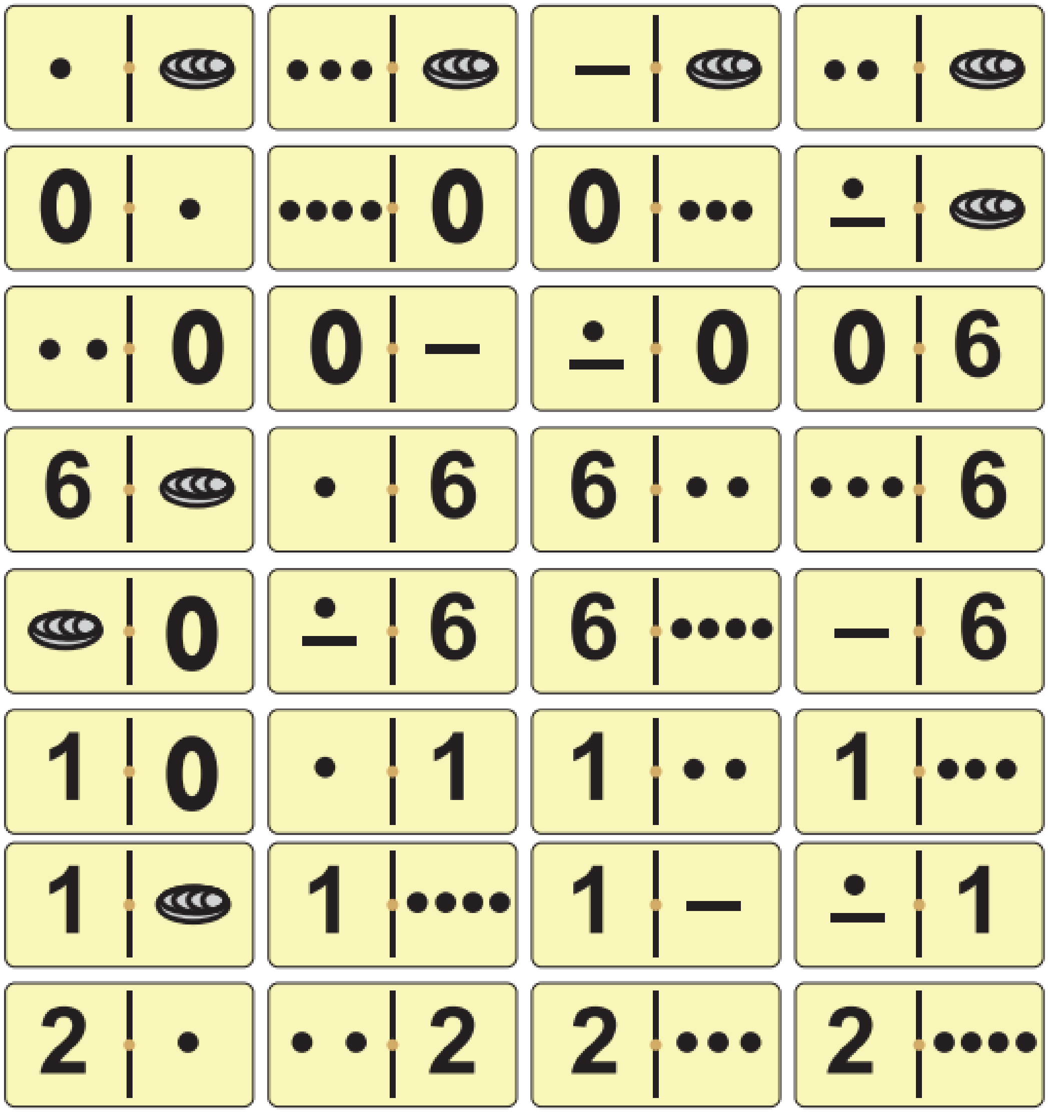


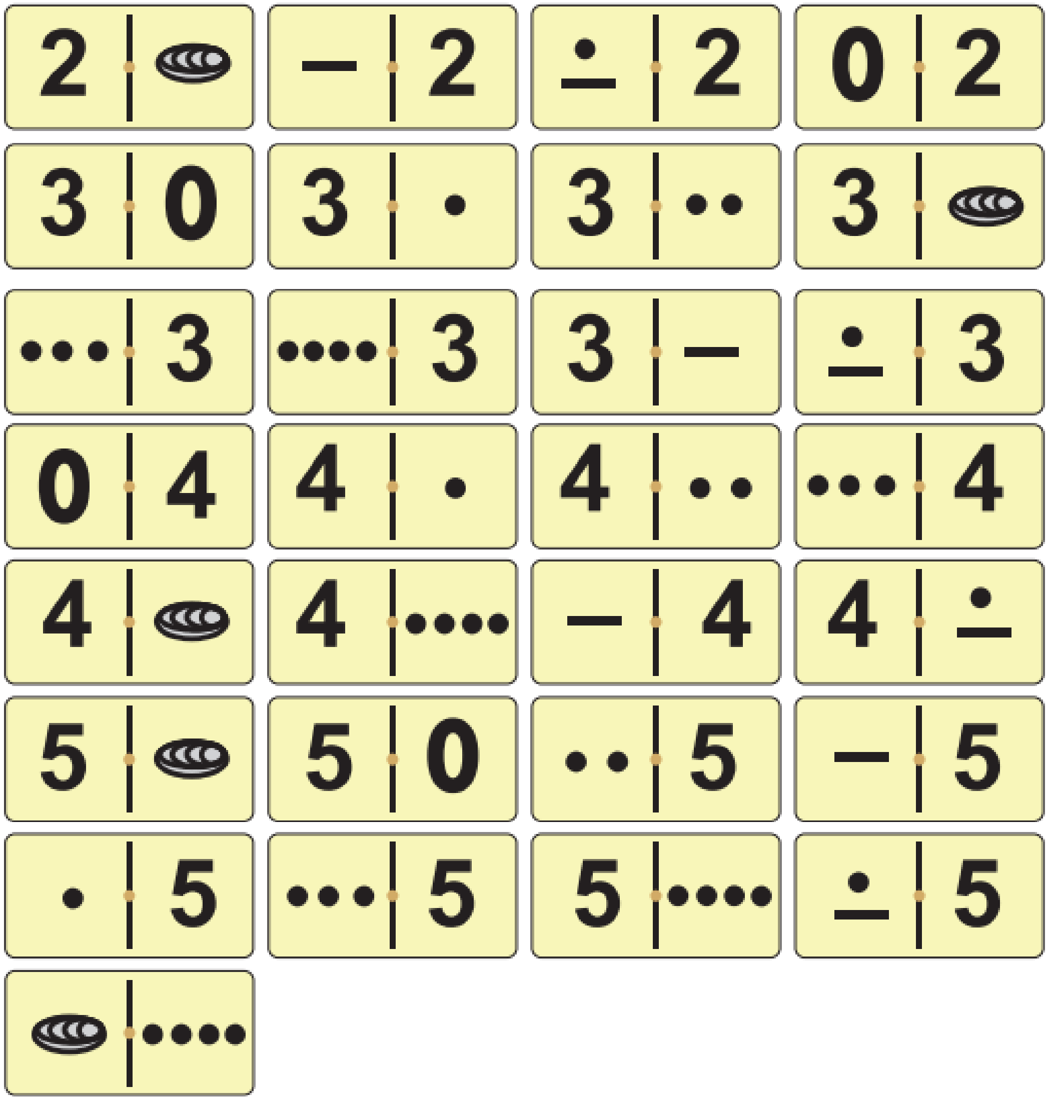
Anexo No.6. Fichas rompecabezas observatorio maya.

Base para rompecabezas el observatorio maya.

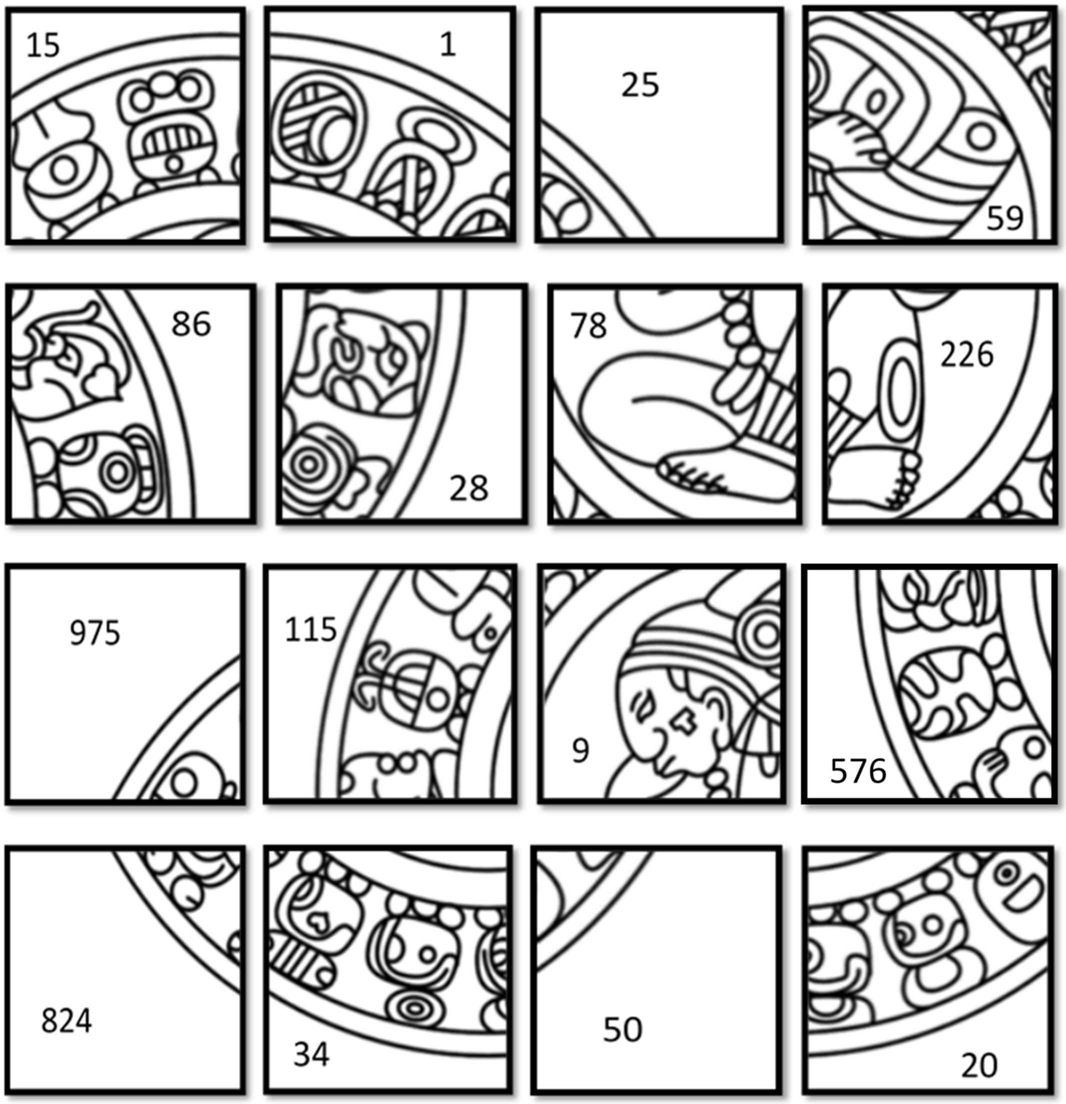


Anexo No.7. Dominó maya.

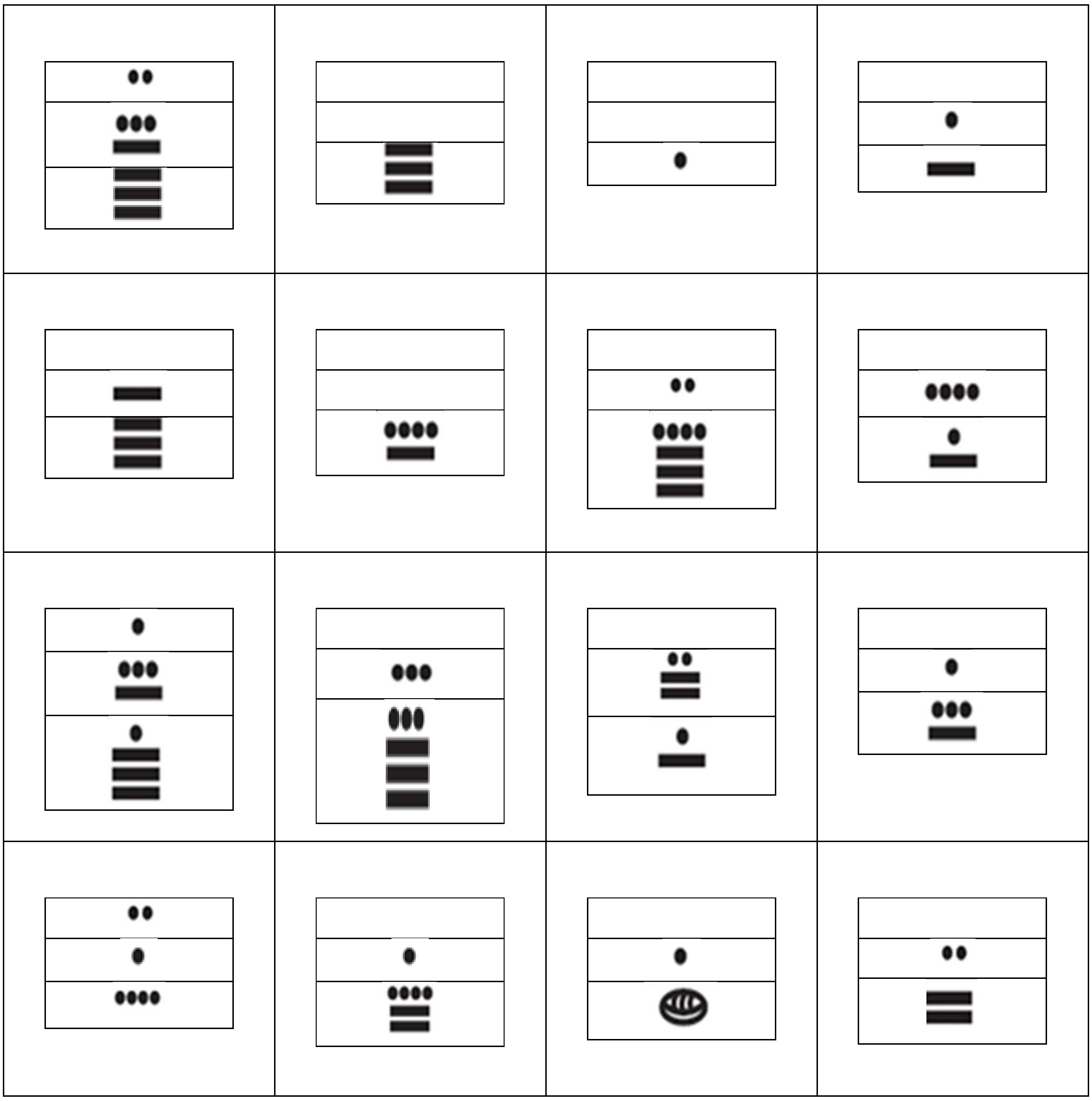




Anexo No.8. Fichas para armar el rompecabezas del calendario maya.



Anexo No.9. Base para rompecabezas del calendario maya.



3.2 LABORATORIO 2. CONTANDO COMO LOS SUMERIOS Y LOS BABILONIOS

3.2.1 Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Reconocer los sistemas de numeración utilizados por los sumerios y los babilonios y su relación con el sistema decimal.

Representar números en el sistema de numeración sumerio y babilonio.</td><td>Numérico y sistema numérico.</td><td>Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.

Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Identifica, describe y representa diferentes sistemas de numeración utilizados en la antigüedad.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Reconoce la importancia de los sistemas de numeración utilizados por los sumerios y los babilonios como aporte al conocimiento de los números naturales.
• Escribe números en el sistema sumerio y babilónico.
• Relaciona el concepto de numeración decimal con el sistema numérico sumerio y babilonio.
• Realiza la suma y el producto de números naturales.</td></tr>
</table>

MOMENTOS	FASES	ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o exploración	Cuento: "Volvamos al pasado con los sumerios y los babilonios".	Video, computador, internet, (Anexo 1): cuento "Volvamos al pasado con los sumerios y los babilonios". Ver orientaciones didácticas.
Momento 2	Desarrollo o estructuración de la clase.	Lluvia de ideas, mapa conceptual.	Fotocopias, internet, video beam y material concreto. Guía del estudiante: Actividad No.2.
	Trabajo independiente	Taller: "Sumerios y babilonios"	Guía del estudiante: Actividad No.3. Ver orientaciones didácticas.
	Trabajo cooperativo	Juego: Concéntrese "Identifica y encuentra números sumerios y babilonios"	Fotocopia, colores, marcadores, concéntrese (Anexo 2). Guía del estudiante: Actividad No.4.
Momento 3	Cierre o transferencia	Dinámica alcance la estrella.	Cartulina, estrellas con preguntas, (Anexo 3), guía del estudiante: Actividad No.5. Ver orientaciones didácticas.
Momento 4	Para aprender más	Elaborar tu sistema de numeración.	Cartón paja, cartulina, hojas de block, marcadores, plastilina y materiales de su entorno. Ver orientaciones didácticas.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Con este laboratorio se pretende enseñar a los estudiantes el desarrollo y la evolución de los números, desde el análisis de la cultura sumeria y babilonia. Estas dos civilizaciones originarias de la baja Mesopotamia despertaron su interés por comercializar, generando la necesidad en el manejo de las cantidades, adoptando así diferentes símbolos para representar sus pertenencias.

Los sumerios se conocen como el primer pueblo en inventar un sistema numérico posicional, que posteriormente heredaron los babilonios. Este método de numeración utilizaba cincuenta y nueve símbolos para formar los primeros números. A partir del número 60 usaban repeticiones con símbolos anteriores, siendo la posición de los números la que definía la cantidad exacta, como se muestra en la figura 4. Estos 59 símbolos se formaban usando una cuña vertical para representar la unidad y una cuña horizontal para expresar el número diez. Por lo anterior la escritura de los babilonios se conoce como la escritura cuneiforme.

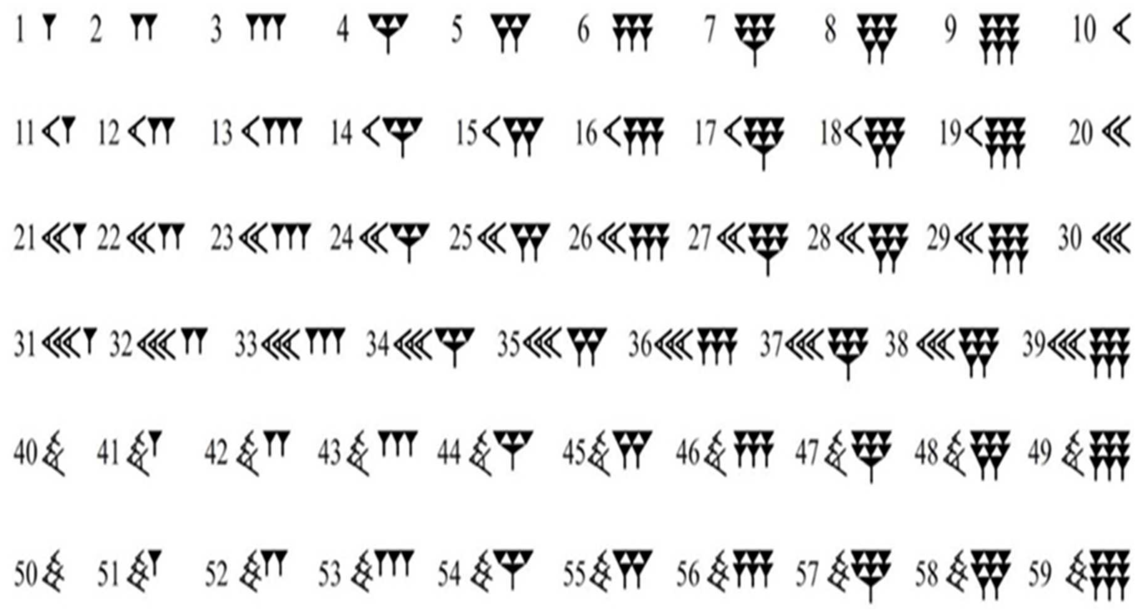


Figura 4. Sistema de numeración utilizado por los sumerios.

Ahora bien, ¿Cuál es la relación entre este sistema de numeración y el sistema actual de numeración en base diez? La respuesta a esta pregunta se debe a que estas dos civilizaciones utilizaron sus extremidades superiores para contar, al igual que en el sistema de numeración decimal. La historia relata, que los sumerios hacían uso del pulgar como una herramienta para contar y ubicar las diferentes falanges de los cuatro dedos restantes de la misma mano, así contaban doce falanges. Cuando habían enumerado hasta doce, levantaban un dedo de la otra mano y volvían a iniciar. Esta forma de agrupar fue el comienzo del sistema sexagesimal adoptado por estos dos pueblos, ya que doce falanges por cinco dedos levantados dan como resultado el número sesenta, como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Esquematización de la forma como contaban los sumerios, utilizando las falanges de una mano.

Este sistema de numeración tuvo una desventaja debido a la falta del cero. Los escribas sumerios se dieron cuenta de este problema y para solucionarlo, decidieron dejar un espacio vacío entre números y así diferenciarlos; algo parecido a lo que se hace en el sistema decimal cuando se utiliza el cero, por ejemplo, para señalar el número 808 y diferenciarlo del 88. Pero el problema aún no estaba solucionado y se prestaba para confusiones, fue entonces cuando los escribas decidieron adoptar un símbolo en forma de apóstrofe para representar la ausencia de valor, cada apóstrofe simbolizaba un espacio vacío. Esto facilitó la escritura de los números. El siguiente ejemplo ilustra la forma como se utilizaba dicho símbolo.

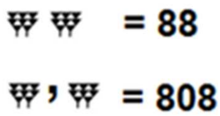


Figura 6. Ejemplo, cómo los sumerios utilizaban el apostrofe en lugar del cero.

Los sumerios contaban en base a la posición de cada símbolo, de derecha a izquierda. Por ser un sistema sexagesimal se multiplicaba por 60^{n-1}, siendo n la posición del número, luego se sumaban todos los resultados de las posiciones para obtener el valor total. Por ejemplo, si se quiere hallar el número  en el sistema decimal se hace:

 $\cong 4 \times 1 = 4,$

 $\cong 0 \times 60 = 0,$

 $\cong 1 \times 60 \times 60 = 3600.$

Luego se suma $4 + 0 + 3600 = 3604$ en el sistema decimal.

En la siguiente tabla se ilustran algunos ejemplos de cómo los sumerios utilizaban su sistema de numeración para escribir el número dado.

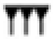
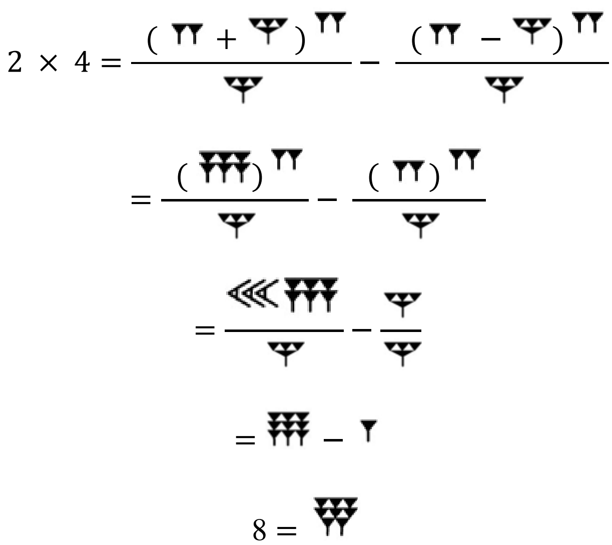
Número en escritura cuneiforme	**Primera posición** $\times \mathbf{60^0}$	**Segunda posición** $\times \mathbf{60^1}$	**Tercera posición** $\times \mathbf{60^2}$	**Número en el sistema decimal**
	 $4 \times 60^0 =$ $4 \times 1 = 4$	 $0 \times 60^1 =$ $0 \times 60 = 0$	 $1 \times 60^2 =$ $1 \times 60 \times 60$ $= 3600$	$4 + 0 + 3600 =$ 3604
	 $3 \times 60^0 =$ $3 \times 1 = 3$	 $0 \times 60^1 =$ $0 \times 60 = 0$	 $2 \times 60^2 =$ $2 \times 60 \times 60 =$ 7200	$3 + 0 + 7200 =$ 7203
	 $5 \times 1 = 5$	 $5 \times 60 = 300$	 $5 \times 60 \times 60$ $= 18000$	$5 + 300$ $+ 18000$ $= 18305$

Tabla 1. Ejemplos, escritura de números en el sistema sexagesimal.

Características del sistema de numeración sumerio y babilonio.

- Representación de los números en la escritura cuneiforme.
- Sistema sexagesimal o en base 60.
- Primer sistema de numeración posicional.
- Sistema numérico que en su inicio presentaba errores por la ausencia del cero.
- Utilizaron el número 60 en vez de 100 como su segunda unidad más pequeña.

- Carecían de una metodología para la realización de divisiones largas, en parte debido a no poder usar el cero como un número.
- En su incipiente matemática, los números enteros y los números fraccionarios eran representados de la misma forma: el punto separador de enteros y fracciones no era escrito, sino que quedaba aclarado por el contexto.
- El valor posicional de los números va de izquierda a derecha, contrario al sistema decimal que va de derecha a izquierda.
- Los babilonios fueron los pioneros en el sistema de medición del tiempo; introdujeron el sistema sexagesimal y lo hicieron dividiendo el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos que hoy en día se conserva.
- Desarrollaron una forma abstracta de escritura basada en símbolos cuneiformes.
- Los babilonios usaban la fórmula $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$ para hacer la multiplicación más fácil, debido a que no tenían tablas de multiplicar. Ejemplo:



ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Este laboratorio pretende enseñar a los estudiantes la forma como los sumerios y los babilonios utilizaban los números y su sistema de numeración. Para su desarrollo, divida la clase en cuatro momentos: exploración, estructuración, transferencia y para aprender más.

El primer momento de exploración o apertura se efectúa con la lectura o la proyección del video del cuento "*Volvamos al pasado con los sumerios y los babilonios*" (Anexo 1). Con esto los estudiantes conocerán la forma como los sumerios y los babilonios utilizaban los números y su sistema de numeración; luego haga la activación de los saberes mediante la formulación de preguntas como: ¿Qué sistemas de numeración se usaban en la antigüedad?,

¿Qué motivaría la aparición de estos sistemas en cada cultura?, ¿Cómo se imaginan, era la cultura sumeria y la cultura babilonia?, ¿Dónde vivían estas dos civilizaciones? Es importante que haga una distribución de los roles que cada estudiante desempeñará en el transcurso de la clase, alguno puede ser: Líder, relator, secretario, vigía del tiempo o facilitador.

El segundo momento se divide en tres fases. En la primera (desarrollo o estructuración) dé a conocer a los estudiantes conceptos claves sobre el sistema numérico sumerio y babilonio con el uso de herramientas tecnológicas, permita que los discentes hagan preguntas sobre las dudas que les surgieron del cuento "Volvamos al pasado con los sumerios y los babilonios" y la explicación. Seguidamente organice los estudiantes en grupos de tres y solicíteles que con base en lo socializado realicen una lluvia de ideas sobre la temática y con estas construyan una mapa conceptual o mental sobre el tema (Actividad No.2).

Posteriormente efectué el trabajo independiente entregando a cada estudiante el taller "*Sumerios y babilonios*" (Actividad No.3) que consta de tres puntos, el primero es una tabla que se debe llenar con base en la numeración decimal y sumeria, es decir, si se encuentra un número escrito en el sistema decimal, se debe escribir en el sistema sumerio y viceversa, también se incorpora una lectura sobre el valor posicional de la escritura cuneiforme de los sumerios, el segundo punto propone una serie que se debe completar en ambos sistemas numéricos, y el último numeral plantea la escritura de algunos números en el sistema cuneiforme.

Para terminar el segundo momento, desarrolle el trabajo colaborativo realizando el juego "*Concéntrese*" (Actividad No.4). Pida a los estudiantes que se organicen en parejas y entrégueles el Anexo 2. El juego consiste en buscar las parejas de números, en el sistema numérico decimal y cuneiforme y gana el que consiga más parejas.

Para el momento de cierre o transferencia designado "*Alcance la estrella*" (Actividad No.5), haga la dinámica grupal que consiste en responder correctamente la mayor cantidad de preguntas, las cuales están escritas en estrellas y se ubican en el tablero.

Un estudiante seleccionado o varios deben salir al frente y tomar una de las estrellas, seguidamente leer y responder las preguntas que se encuentran al respaldo de las mismas; si contesta correctamente guardará la estrella como un punto positivo, si por el contrario no sabe la respuesta adecuada o lo hace mal, otro compañero podrá conseguir el punto. Quien obtenga más estrellas será el ganador. Esta dinámica también se puede organizar por grupos y sale un representante de cada equipo a competir por las estrellas.

Organice las estrellas con las preguntas (Anexo 3), las cuales representan las características fundamentales que diferencian el sistema decimal del utilizado por los sumerios y los babilonios. Estos interrogantes pueden ser: ¿Es importante conocer otros sistemas de numeración, por qué?, ¿Cómo se pueden representar números en otros sistemas numéricos?, ¿Por qué en el sistema de numeración sumerio y babilonio no se tenía en cuenta el cero?, ¿Por qué surgieron estos sistemas de numeración?, ¿Qué se heredó de los sistemas de numeración sumerio y babilonio?, ¿Qué otros sistemas de numeración conocen y cuáles se conservan hasta hoy? La penúltima pregunta es de gran importancia ya que le permite profundizar sobre el sistema numérico sexagesimal empleado como herramienta para el manejo del tiempo y la construcción de los ángulos. El último interrogante prepara a los estudiantes para estar al tanto o reafirmar sus conocimientos acerca de otros sistemas de numeración, ya sea el sistema de numeración romano, binario o en otras bases.

En el cuarto y último momento denominado “para aprender más” el estudiante realiza dos actividades. La primera es representar los símbolos arcaicos del sistema sexagesimal con materiales del entorno como palos, piedras, barro, plastilina, entre otros. En la segunda debe inventar su propio sistema de numeración.

3.2.2 Guía del estudiante

Lo que comprenderás:

- Reconocer la importancia de los sistemas de numeración utilizados por los sumerios y los babilonios como aporte al conocimiento de los números naturales.
- Escribir números en el sistema de numeración sumerio y babilónico.
- Relacionar el concepto de numeración decimal con el sistema numérico sumerio y babilonio.
- Realizar sumas y productos de números naturales.

Materiales:

Papel, lápiz, tarjetas con la representación de números sumerios y números decimales, materiales del entorno, computador, colbón, plastilina o barro, colores, cartón paja, cartulina, hojas de block, marcadores.

Práctica de exploración.

Actividad No.1. Cuento “Volvamos al pasado con los sumerios y los babilonios”.

Actividad No.2. Lluvia de ideas.

Teniendo en cuenta el relato del cuento y la explicación del profesor, construye un mapa conceptual o mental sobre lo más importante y significativo de como los sumerios y los babilonios representaban los números.

Actividad No.3. Taller “Sumerios y babilonios”

Con base en lo que sabes del sistema decimal y lo aprendido sobre la numeración sumeria y babilonia, realiza las siguientes actividades de forma individual.

Completa la siguiente tabla con números decimales y sumerios según corresponda, es decir, si el número se encuentra en numeración decimal escribe su equivalente en numeración sumeria y viceversa.

	**1**	**20**		**28**
10			**44**	
	**33**		**38**	
25		**5**		**50**
	**15**		**22**	

Valor posicional en la escritura cuneiforme

Este método de numeración utilizaba cincuenta y nueve símbolos para formar los primeros números. A partir del número 60 se usaban repeticiones con símbolos anteriores, siendo la posición de los números la que definía la cantidad exacta.

Los sumerios contaban teniendo en cuenta la posición de cada símbolo, de derecha a izquierda. Por ser un sistema sexagesimal se multiplica por 60^{n-1}, donde n es la posición del número y luego se suman todos los resultados de las posiciones para obtener el valor total. En la siguiente tabla se muestra un ejemplo.

Número en escritura cuneiforme	**Primera posición** $\times \mathbf{60^0}$	**Segunda posición** $\times \mathbf{60^1}$	**Tercera posición** $\times \mathbf{60^2}$	**Número en el sistema decimal**
	 $4 \times 60^0 =$ $4 \times 1 = 4$	 $0 \times 60^1 =$ $0 \times 60 = 0$	 $1 \times 60^2 =$ $1 \times 60 \times 60 =$ 3600	$4 + 0 + 3600 =$ 3604
	 $3 \times 60^0 =$ $3 \times 1 = 3$	 $0 \times 60^1 =$ $0 \times 60 = 0$	 $2 \times 60^2 =$ $2 \times 60 \times 60 =$ 7200	$3 + 0 + 7200 =$ 7203

Como se ve en la gráfica anterior, se construyen los números en escritura cuneiforme y sus equivalencias en el sistema decimal.

a. Completa las siguientes secuencias en escritura cuneiforme y decimal.

									
1			**20**						**50**

b. Escribe los siguientes números en escritura cuneiforme.

Número decimal a representar	**Primera posición** $\times \mathbf{60^0}$	**Segunda posición** $\times \mathbf{60^1}$	**Tercera posición** $\times \mathbf{60^2}$	**Número en escritura cuneiforme.**
189				
3607				
7210				
10805				

*Actividad No.*4. ***Juego Concéntrese.***

Con esta actividad tendrás la oportunidad de demostrar tus conocimientos sobre el sistema numérico cuneiforme y tus habilidades de memoria.

El juego consiste en encontrar la mayor cantidad de parejas de números, los cuales se encuentran escritos en numeración cuneiforme y decimal. Para iniciar el juego busca dos o tres compañeros y toma el anexo 2. Seguidamente ubica las imágenes de manera que no se visualicen, por turnos cada jugador destapa dos cartas, si estas son una pareja de números, es decir ambas cartas equivalen al mismo valor en numeración cuneiforme y decimal el jugador se queda con ambas cartas y seguirá destapando otra pareja; si no lo son debe ponerlas en el lugar donde se encontraban y ceder el turno al siguiente jugador.

Actividad No. 5. ***Dinámica alcance la estrella.***

Esta actividad se realiza con el docente y todos los compañeros.

*Actividad No.*6. ***Elabora tu sistema de numeración.***

a. Con diferentes materiales, representa los símbolos arcaicos del sistema sexagesimal.

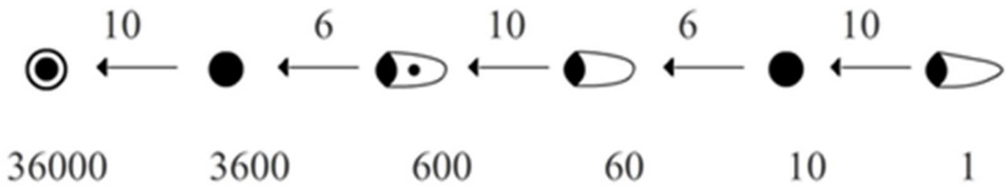


Figura 7. Símbolos arcaicos del sistema sexagesimal.

b. Inventa y representa tu propio sistema de numeración.

3.2.3 Anexos laboratorio 2. Contando como los sumerios y los babilonios.

Anexo* 1. *Cuento "Volvamos al pasado con los Sumerios y los Babilonios".

Érase una vez hace miles de años en la antigua Mesopotamia, ubicada entre los ríos Tigris y Éufrates en la zona del Oriente Medio, cuando llegaron los Sumerios, quienes buscaban un lugar confortable para vivir. Gracias a esta ubicación, empezaron a cultivar la tierra, practicar la pesca y comercializar los productos del campo con otras civilizaciones.

En un inicio se encontraron con grandes problemas: ¿Cómo podrían saber que tenían? ¿Cómo mantener un control sobre sus posesiones? Por esto, comenzaron a comparar sus pertenencias con las falanges de los dedos haciendo pequeñas cuentas con sus manos. Así dan origen a su sistema numérico; el cual se cimentó en 59 elementos, cada uno con un valor específico que dependía de su posición.

Con el paso de los años fueron cambiando la forma de contar lo que tenían, comenzaron haciendo vasijas de barro, en las cuales introducían pequeñas cuñas, que simbolizaban sus posesiones. Cuando requerían saber el total, rompían los recipientes y extraían todo lo que allí había.

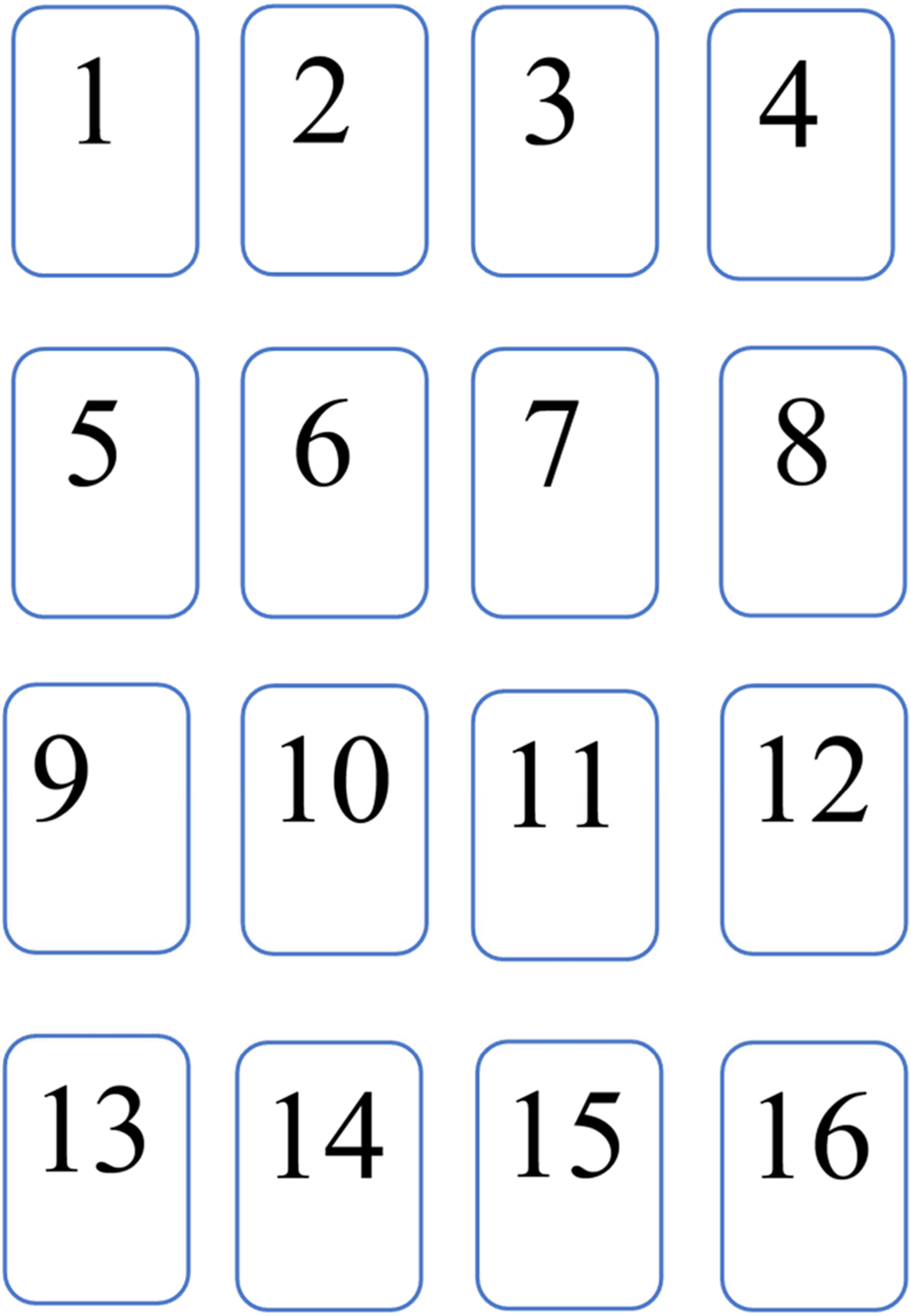
Con el transcurrir del tiempo recapacitaron ¿Por qué romper y romper los recipientes? ¿Qué hacer para no destrozar los jarros? Por esto, idearon escribir en las vasijas, y cada vez que introducían un elemento en ellas, dibujaban una raya en su superficie; luego descubrieron que al hacer estas marcas no era necesario introducir las cuñas en los jarros, pues las señas bastaban para significar sus pertenencias. Dejaron de utilizar las vasijas haciendo pequeñas tablillas de barro donde anotaban con diferentes huesos de animales los símbolos que querían representar, los cuales significaban los bienes y los cálculos que realizaban.

Un día el mayor de los sumerios llamado Acadio requirió hacer algunas marcas para saber cuántos animales tenía, ¡pero! ¿cómo hacerlo?, pues solo contaba con 59 marcas y tenía muchos más animales, con esto descubrió que hacía falta algo en dichas escrituras para poder hacer cálculos y representar mayores cantidades, citó a sus consejeros a quienes les comunicó lo que había pasado; estos se reunieron y decidieron dar un valor a cada símbolo según la posición que este ocupara, de derecha a izquierda, ¡Pero qué valor darle a cada posición! uno de los consejeros propuso establecer su sistema como sexagesimal, por tener 60 símbolos, así que en cada posición multiplicarían por 60^{n-1}, siendo n la posición del número, luego sumarían todos los resultados de las posiciones para obtener el valor. Este maravilloso hallazgo permitió que los escribas copiaran cualquier número.

Con el paso de los años descubrieron que el sistema utilizado manifestaba otro problema, no tenían como simbolizar la ausencia de algo, por esto algunas marcar iguales representaban cantidades diferentes, así que decidieron dejar un espacio vacío y establecer una diferencia entre los símbolos. Sin embargo, volvieron a tener dificultades, pues lo que para uno era un espacio para otros eran dos y hasta más; por esto, los consejeros nuevamente decidieron que hacer y decretaron utilizar un apostrofe por cada espacio que se necesitara representar.

Con esto se dio inicio a la escritura. Pasaron y pasaron los años y no tuvieron más dificultades, solo cuando ya había pasado mucho tiempo los sumerios iniciaron una disputa por territorio con otras civilizaciones, así llegaron hasta ellos los babilonios quienes adoptaron su cultura.

Anexo 2. Concéntrese.



17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32

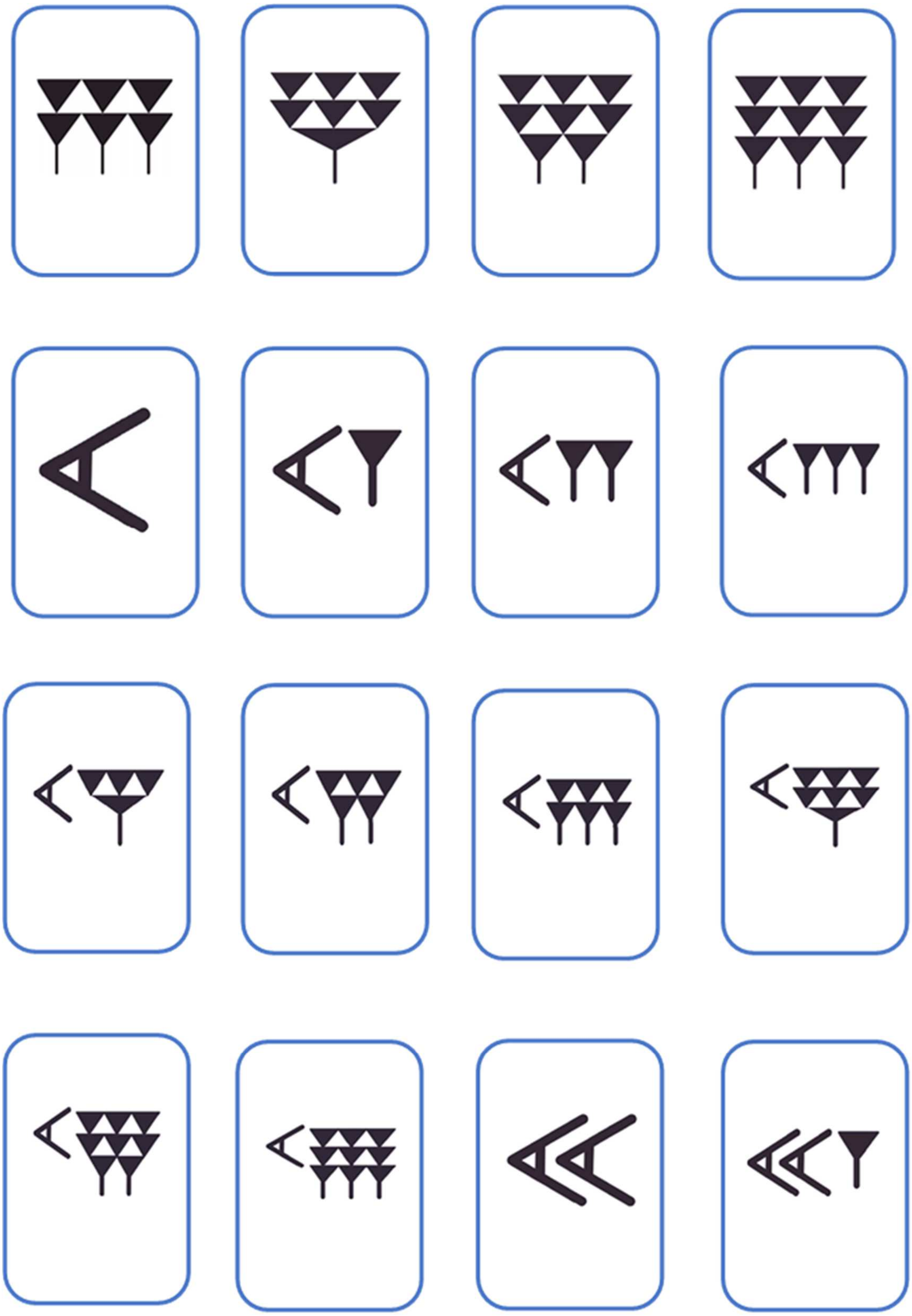
33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48

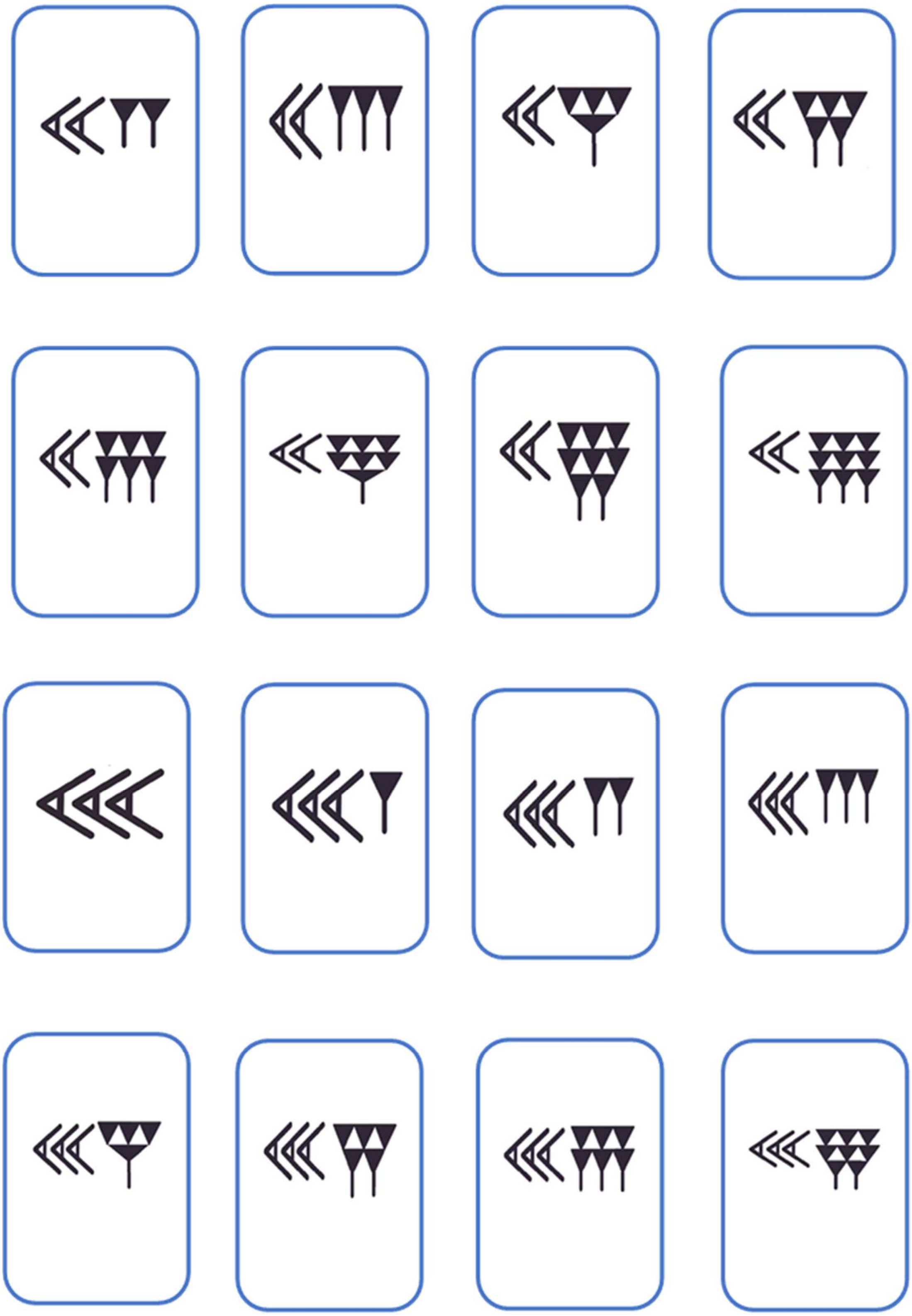
49 50 51 52

53 54 55 56

57 58 59 

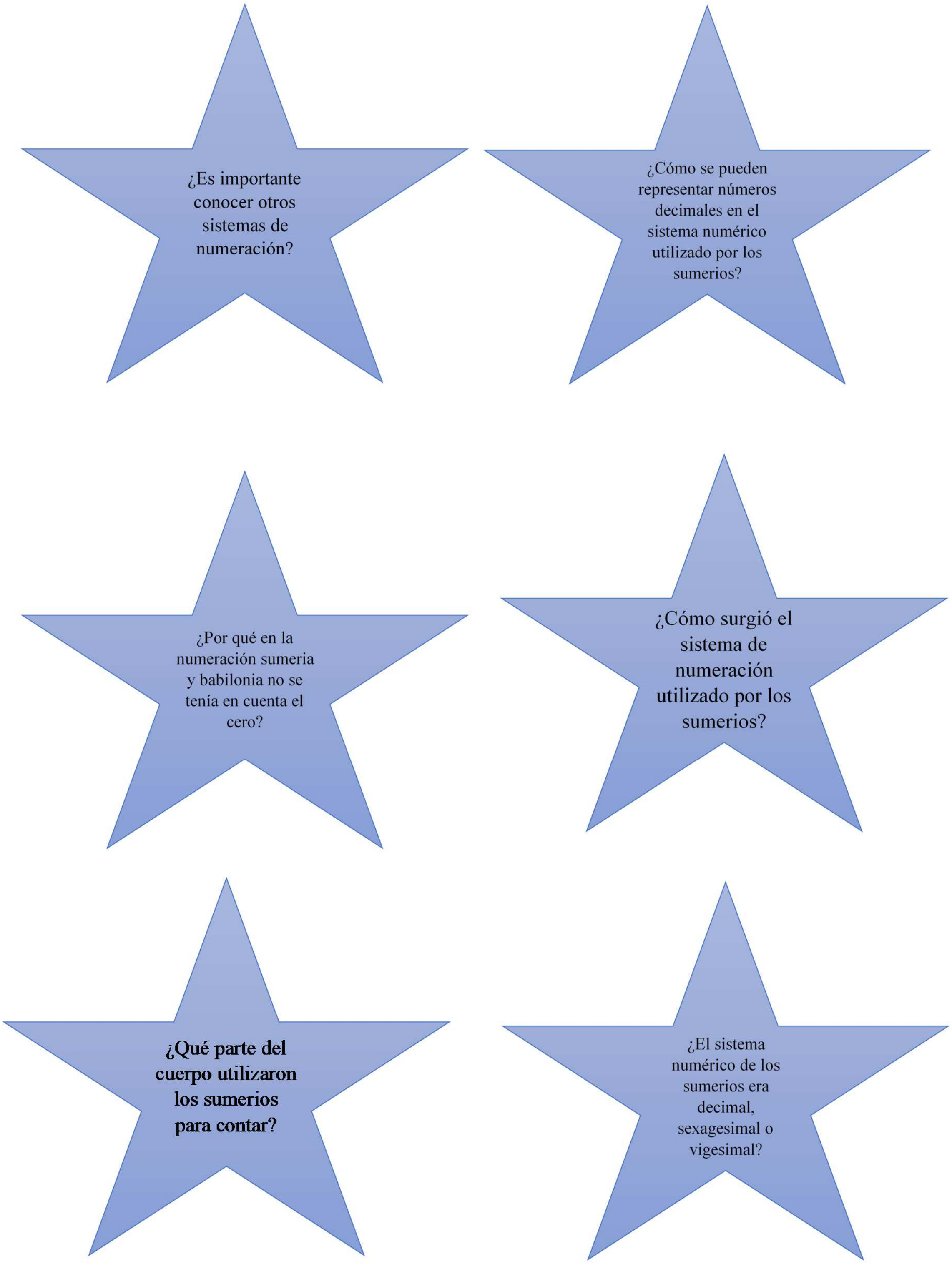








Anexo **3.** ***Estrellas para la dinámica alcance la estrella.***



¿Es importante conocer otros sistemas de numeración?

¿Cómo se pueden representar números decimales en el sistema numérico utilizado por los sumerios?

¿Por qué en la numeración sumeria y babilonia no se tenía en cuenta el cero?

¿Cómo surgió el sistema de numeración utilizado por los sumerios?

¿Qué parte del cuerpo utilizaron los sumerios para contar?

¿El sistema numérico de los sumerios era decimal, sexagesimal o vigesimal?

CAPÍTULO 4

LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS: UN MUNDO FASCINANTE POR EXPLORAR

Los números naturales se pueden presentar de diferentes maneras. En este capítulo se escribe con base en los axiomas propuestos por el matemático italiano Giuseppe Peano, en las obras "Tópicos previos a la matemática superior" de Sigifredo De Jesús Herrón Osorio y "Teoría de números para principiantes" de Gustavo Rubiano. Postulados que permiten definir las características de los *números* y lo diferencian como un sistema numérico único, además, se plantea un corto análisis del surgimiento de cómo se construyen los números naturales a partir de la teoría de conjuntos propuesta por el matemático ruso Georg Cantor.

4.1 GIUSEPPE PEANO Y LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales se han considerado como la base de la matemática, sus comienzos se establecen de una forma inductiva, gracias a la necesidad del hombre de contar. La matemática se fue empleando de una forma empírica y aunque siglo tras siglo avanzaba, algunas teorías carecían de una fundamentación lógica y coherente que las sustentarán, lo que causó que estas ciencias perdieran veracidad y legitimidad en el campo de la razón, dando a entender que se necesitaba de la fe para concebir algunos principios. Es entonces cuando en el siglo XIX, el matemático italiano Giuseppe Peano, publicó su libro *"Arithmetices Principia, nova Methodo exposita*[7]*"* en el año 1889, en el cual precisó y explicó cómo se caracterizan los elementos del conjunto de los números naturales a partir del concepto de *sucesor* y un grupo de axiomas, tomando como real la existencia de dicho conjunto. Cada uno de estos axiomas desde la concepción matemática explica el *principio de inducción*, definiendo que son los números naturales desde sus propiedades.

Los axiomas de Peano se componen de cinco postulados que de manera lógica permiten la construcción teórica del conjunto de los números naturales. Este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{N}$.

Axioma 1. Existe un elemento, $0 \in \mathbb{N}$, llamado cero o neutro.
Axioma 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $n^+ \in \mathbb{N}$, llamado el sucesor de n.
Axioma 3. Para cada $n \in \mathbb{N}, n^+ \neq 0$.

7 Arithmetices Principia, nova Methodo exposita: Nuevo método de exposición de los principios de la aritmética

Axioma 4. Si $m, n \in \mathbb{N}$, son tales que $m^+ = n^+$ entonces $m = n$.
Axioma 5. Principio de inducción: si $S \subseteq \mathbb{N}$ es tal que
(i) $0 \in S$
(ii) $n \in S \rightarrow n^+ \in S$
Entonces $S = \mathbb{N}$

La importancia de estos axiomas es la fundamentación rigurosa que le dan a la teoría de números, permitiéndole adquirir estabilidad, formalismo y rigurosidad; aspectos de gran impacto en la matemática contemporánea, no solo para sustentar algunos principios básicos de los números, sino también en el desarrollo de las propiedades, los teoremas y las demostraciones de los números naturales y su aplicación en operaciones de suma y multiplicación. Por tal razón los axiomas de Peano no solo definen los números naturales, sino que permiten un análisis más amplio y profundo del progreso de la aritmética desde el uso de la lógica matemática. Además, admiten realizar investigaciones en el campo de las matemáticas en cuanto a los números naturales, los números reales, el cálculo de clases y la lógica formal.

Estos axiomas especifican la existencia del conjunto de los números naturales; el primero demuestra la existencia del primer número natural, un elemento distinguido como cero o uno que varía según el autor. El segundo axioma especifica que cada número que hace parte del conjunto de los naturales tiene un elemento siguiente o sucesor. El tercer axioma explica que dos números desiguales tendrán diferente sucesor, en ningún caso tendrán el mismo; de tenerlo significa que se está hablando de un mismo número. Esto lo ratifica el cuarto axioma "Dados dos números naturales cualesquiera, si sus sucesores son iguales ellos también los son" (Gómez Simón, Evolución del concepto de número, 2012). El quinto y último axioma también llamado principio de inducción matemática explica aquellas propiedades que posee el primer número de la serie de los naturales y a su vez también, los elementos sucesores.

Los axiomas 2 y 4 afirman que cada número natural tiene un único sucesor y que dos números naturales distintos tienen sucesores distintos. Otra manera de escribir el axioma 4 es la siguiente: si se define la función $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $S(n) = n^+$, entonces, esta función es *inyectiva*. Finalmente, el axioma 5 es muy importante, pues constituye una herramienta poderosa para probar muchas propiedades en el conjunto $\mathbb{N}$.

En términos simples, el conjunto de los números naturales consiste de un elemento distinguido (el cero) y la función sucesora de n que satisface los postulados de Peano.

Una primera propiedad que se demuestra es que, exceptuando el cero, cada número natural es un sucesor. En la prueba siguiente se ilustra el poder del quinto axioma de Peano.

Proposición 1. Todo número natural, diferente del cero, es un sucesor de otro número natural.

Demostración. Usando el quinto axioma y definiendo un conjunto de naturales que reúna los elementos que tienen la propiedad deseada, se demuestra que tal conjunto es, en este caso, $\mathbb{N} - \{0\}$. Sea: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función sucesora dada por $S\,(k) = k^+$ define el conjunto de la siguiente manera.

$$S = \{n \in \mathbb{N}: (\exists\, m\, \mathbb{N})(S(m) = n)\} \cup \{0\}$$

La proposición se prueba si $S = \mathbb{N}$. Si a la definición del conjunto S se le agrega el conjunto $\{0\}$, para poder aplicar la condición (i) del axioma 5; sin probar ni afirmar que 0 satisface la propiedad enunciada en la proposición.

Por definición de S, el natural $0 \in S$. Luego, se cumple (i) del axioma 5.

Si se supone que $n \in S$ y se prueba que $n^+ \in S$. En efecto, como $n \in S$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = k^+$. Luego, $S(k^+) = S(n) = n^+$, lo cual implica que $n^+ \in S$. Quedando así probada la condición (ii) del quinto axioma de Peano. Por lo tanto $S = \mathbb{N}$.

Se desprende del cuarto axioma y la proposición previa que la función sucesora de $n, S: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es *biyectiva*[8].

Así mismo, gracias al principio de inducción matemática se pueden probar algunos resultados de los números naturales.

Teorema 4.1. (Principio de inducción matemática en $\mathbb{N}$ primera forma) Sean $S \subset \mathbb{N}, 0 \in S$ y $k \in S \Longrightarrow (k + 1) \in S$. Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Si se tuviera $S \neq \mathbb{N}$ entonces $S \subseteq \mathbb{N}$, luego abría algún elemento en $\mathbb{N}$ no perteneciente a S. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $n \notin S$. Como $[(k \in S \Longrightarrow (k + 1) \in S)] \iff [(k + 1) \notin S \Longrightarrow k \notin S]$, entonces $(n \notin S \Longrightarrow (n - 1) \notin S)$; pero si $(n - 1) \notin S$ se tendrá que $(n - 2) \notin S, (n - 3) \notin S$, etc., así que a S no pertenece ninguno de los antecesores sucesivos de n, en particular 0, lo cual contradice lo supuesto. Por consiguiente $S = \mathbb{N}$.

El principio de inducción matemática puede ser aplicado no sobre todo $\mathbb{N}$, sino a partir de un $k > 0$. Es decir, si $S \subset \mathbb{N}_k$, $k \in S$ y $n \in S \Longrightarrow (n + 1) \in S$, entonces $S = \mathbb{N}_k$.

Teorema 4.2. (Segunda forma principio de inducción matemática en $\mathbb{N}$) Sean $S \subset \mathbb{N}_{k_0}, k_0 \in S$ y $\forall k \in \mathbb{N}_{k_0}: [k_0: k - 1] \subset S \Longrightarrow k \in S$. Entonces $S = \mathbb{N}_{k_0}$.

8 Biyectiva: Es una función inyectiva y sobreyectiva.

Demostración. Por reducción al absurdo: Sea $S \neq \mathbb{N}_{k_0}$, esto es, $S \not\subseteq \mathbb{N}_{k_0}$. Sea $C \equiv S^c \equiv \mathbb{N}_{k_0} - S \neq \emptyset$. Puesto que $\mathbb{N}_{k_0}$ es un conjunto bien ordenado, y $C \subset \mathbb{N}_{k_0}$, C posee un mínimo, por ejemplo m (que será diferente de k_0 por hipótesis). Por consiguiente:

$[k_0 : m - 1] \subset S$.

Esto implica, según las condiciones del teorema, que $m \in S$, o sea $m \notin C$. Por lo tanto, es imposible que $S \neq \mathbb{N}_{k_0}$, y en consecuencia $S = \mathbb{N}_{k_0}$.

De una manera más coloquial la primera forma del principio de inducción matemática se interpreta diciendo: sí una cierta propiedad se cumple para el primer elemento de $\mathbb{N}_{k_0}$, y si también para todo elemento $k \in \mathbb{N}_{k_0}$ se tienen que, si la propiedad vale para él, vale también para $k + 1$, entonces la propiedad en cierta para todo $n \in \mathbb{N}_{k_0}$.

En la segunda forma se tiene que si una propiedad se cumple para k_0, y si se cumple para todos los elementos de $[k_0 : k - 1]$ se deduce que se cumple para k, entonces la propiedad es válida para todo $n \in \mathbb{N}_{k_0}$.

En otras palabras, se puede afirmar que el sucesor (o el siguiente) de 0 es 1, el sucesor (o siguiente) de 1 es 2, el sucesor de 2 es 3 y así sucesivamente. Es decir, si el sucesor de n lo denotamos n' tendremos $n' = n + 1$. Se dirá que si n' es el sucesor de n, entonces n es el antecesor de n', y si además se adopta para el antecesor de n la notación 'n, se tendrá entonces que $'n = n - 1$. Es decir, 'n es el antecesor de n, n' es sucesor de n, n'' es el segundo sucesor de n.

$$n \equiv ('n) + 1 = (n - 1) + 1 = n$$

$$n' \equiv (n) + 1 = n + 1$$

$$n'' \equiv (n') + 1 = (n + 1) + 1 = n + 2, \text{ etc.}$$

El conjunto que resulta gracias al principio de inducción matemática, se llamará conjunto de los números naturales, y se simbolizará con la letra $\mathbb{N}$.

4.1.1 Orden en el conjunto de los números naturales.

Según Gauss "la matemática es el estudio de relaciones generales entre elementos de conjuntos abstractos". Podemos definir una relación de orden " $\leq$ "entre dos subconjuntos no vacíos A y B de números naturales. En general, el conjunto de los números naturales es bien ordenado mediante la relación $\leq$.

Para probar esto empecemos por definir *relación de equivalencia* y *relación de orden.*

Definición 1. $m < n$ si $m \leq n$ y $m \neq n$. Cuando $m, n \in \mathbb{N}$. La relación $m > n$ significa $n < m$.

Definición 2. Si $m, n \in \mathbb{N}$, se dice que $m \leq n$ si existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$.

Definición 3. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Definimos una relación R entre A y B como:

$$R = \{(a, b) \in A \times B \ / \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

En este sentido R es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ y escribimos $R \subseteq A \times B$.

Si consideramos $A = B$ y una relación R, podemos definir las siguientes propiedades:

- Reflexiva. $\forall\, a \in A \ , \ a\,R\,a$
- Simétrica. $\forall\, a, b \ \in A \ , \ a \ R\,b \rightarrow b\,R\,a$
- Transitiva. $\forall\, a, b, c \in A \ , \ a \ R \ b \ \wedge \ b\,R\,c \rightarrow a\,R\,c.$
- Antisimétrica. $\forall\, a, b \ \in A \ , \ a \ R\,b \wedge \ b\,R\,a \rightarrow a = b.$

Si R es reflexiva, simétrica y transitiva entonces R es una relación de equivalencia.
Si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva entonces R es una relación de orden.
Probaremos a continuación que la relación $\leq$ es una relación de orden sobre los números naturales.

Proposición 2. La relación $\leq$ define un orden sobre $\mathbb{N}$

Demostración. Debemos probar las tres propiedades:

- La relación $\leq$ es reflexiva:

$\forall\, m \in \mathbb{N}, \ m \leq m$ dado que $m = m + 0$ con $0 \in \mathbb{N}$

- La relación $\leq$ es antisimétrica:

Sean m y n números naturales tales que $m \leq n \ \wedge \ n \leq m$, entonces existe $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $n = m + p$ y $m = n + q$. Entonces $m = (m + p) + q = m + (p + q)$ y por la propiedad cancelativa de la suma se tiene que $p + q = 0$. Así, $p = q = 0$, lo que implica $m = n$.

- La relación $\leq$ es transitiva:

Sean m, n y r números naturales tales que $m \leq n$ y $n \leq r$, entonces $n = m + p$ y $r = n + q$ donde $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces, $r = (m + p) + q = m + (p + q)$ donde $p + q \in \mathbb{N}$, luego $m \leq r$.

4.1.2 Principio del buen orden.

En algunos textos la construcción de los naturales se hace a partir del número uno, y no del cero. En este trabajo, se definirá el conjunto:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Números naturales que inician desde 0.
$\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Números naturales que inician desde 1.

En general para cada $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{N}_{\mathrm{k}} \equiv \{\mathrm{k}, \mathrm{k}+1, \mathrm{k}+2, \mathrm{k}+3, \ldots\}$$

Como se pudo demostrar, gracias a los axiomas de Peano se puede caracterizar el conjunto de los números naturales como un conjunto totalmente ordenando. Para que lo sea es necesario que todos sus subconjuntos posean un mínimo. Nótese que cualquier conjunto $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}$ posee un mínimo, exactamente denotado por:

$$\min \mathbb{N}_{\mathrm{k}} = \mathrm{k}$$

Teorema 4.3. $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}$ es un conjunto ordenado para todo $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$

Demostración. En primer lugar $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}$ es subconjunto de sí mismo, y tiene un mínimo que es k. Supóngase que existe un subconjunto propio S de $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}$, $\mathrm{S} \nsubseteq \mathbb{N}_{\mathrm{k}}$, que no posee mínimo, esto es, $\forall \mathrm{m} \in \mathrm{S}: \exists \mathrm{n} \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{n} < \mathrm{m}$. Según esto, si $\mathrm{m}_0 \in \mathrm{S}$, $\exists \mathrm{n}_1 \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{n}_1 < \mathrm{m}_0$; por la misma razón habrá un $\mathrm{n}_2 \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{n}_2 < \mathrm{n}_1 < \mathrm{m}_0$, y así sucesivamente, por tanto, $\mathrm{m}_0 > \mathrm{n}_1 > \mathrm{n}_2 > \mathrm{n}_3 > \cdots$, si el conjunto $\{\mathrm{m}_0, \mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3, \ldots\}$ se denomina S_0 entonces $card(S_0) = \aleph_0$. Por otra parte $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}_{\mathrm{k}}$, así que $\forall \mathrm{n} \in \mathrm{S}_0: \mathrm{k} \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{m}_0$, lo que implica que S_0 tienen que ser finito. Esta contradicción indica que no existen subconjuntos de $\mathbb{N}_{\mathrm{k}}$ que no posean mínimo.

Teorema 4.4. Principio del buen orden (PBO). Sea $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{N}$ no vacío. Entonces el conjunto A tienen un menor elemento, es decir $\exists \mathrm{m} \in \mathrm{A}$ tal que $\mathrm{m} \leq \mathrm{a}, \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ (m es el mínimo de A).

Demostración. Al aplicar el principio de inducción, se define un conjunto que tenga los elementos con la propiedad deseada así:

$$\mathrm{S} = \{\mathrm{n} \in \mathbb{N}: (\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A})(\mathrm{n} \leq \mathrm{a})\}$$

Como $\mathrm{A} \neq \emptyset$ existe $\mathrm{a}' \in \mathrm{A}$. Nótese que $\mathbb{N} \nsubseteq \mathrm{S}$, puesto que existe un natural que no está en S, a saber $\mathrm{a}' + 1 \notin \mathrm{S}$ (ya que $\mathrm{a}' + 1 > \mathrm{a}'$). Por lo tanto $\mathrm{S} \neq \mathbb{N}$ pero $0 \in \mathrm{S}$. Luego la condición (ii) del principio de inducción no se cumple, $\exists \mathrm{m} \in \mathrm{S}$ tal que $\mathrm{m} + 1 \notin \mathrm{S}$. El elemento m resulta ser el mínimo de A: como $\mathrm{m} \in \mathrm{S}$, entonces $\mathrm{m} \leq \mathrm{a}\ \forall\ \mathrm{a} \in \mathrm{A}$; y $\mathrm{m} \in \mathrm{A}$. En efecto, dado que $\mathrm{m} + 1 \notin \mathrm{S}$, entonces $\exists \mathrm{a}'' \in \mathrm{A}$ tal que $\mathrm{m} + 1 > \mathrm{a}''$. Teniendo en cuenta que la relación " $<$ " es compatible con la relación "$+$", es decir si $m < n$ y $p < q$ entonces $m + p < n + q$. Esto implica que $a'' \leq m$, por otra parte $m \leq a''$, lo que quiere decir que $m = a'' \in A$.

4.2 CANTOR Y LA MAGIA DE LOS NÚMEROS

Desde el inicio de la humanidad, el ser humano primitivo sintió la necesidad de agrupar sus pertenencias para cuantificarlas. El solo hecho de asentarse en un lugar específico, crea la necesidad de emplear un método de conteo con el único objetivo de proteger sus pertenencias. Rastros históricos que datan de aproximada mente 4000 años a. C. han dejado ver como el hombre de las cavernas empleaba de una forma intuitiva el concepto de conjunto utilizando solo unos cuantos números.

Esta escritura de los números en huesos, madera, piedra, y en paredes de las cavernas se limitaba a una marca por cada elemento y solo servía para representar cantidades muy pequeñas.

Este concepto intuitivo que tenían los primitivos de contar y comparar el número de elementos de ciertas colecciones de objetos cada vez más grandes, los condujo a buscar una mejor forma de representar o agrupar los números, lo cual un símbolo representaba un grupo, por ejemplo, de 10 en 10 como lo hicieron los egipcios. De esta manera se descubre el primer sistema de matemáticas aplicadas, que luego los matemáticos definirían como una correspondencia biunívoca entre dos órdenes.

Con el trascurrir del tiempo se fue desarrollando así una aritmética básica basada primordialmente en las operaciones de suma y resta y en casos especiales se utilizaba la multiplicación y la división. Con el desarrollando de la humanidad se hizo necesario establecer símbolos y reglas matemáticas y, fue así como a partir del siglo XIX que la Teoría de Conjuntos cobra gran importancia y se empieza a desarrollar en forma rigurosa y sistemática.

A mediados del siglo XIX, el ruso Georg Cantor $(1845 - 1918)$ rompe con algunos paradigmas matemáticos que se tenían para la época, e introduce nuevas ideas matemáticas relacionadas con una ingeniosa forma de ver y estudiar el concepto de conjunto. Cantor estructura la teoría de conjuntos, a partir de dos ideas, la correspondencia $1 - 1$ o apareo y la de conjunto contable o numerable.

Para iniciar la construcción de los números naturales a partir de la teoría de conjuntos propuesta por Georg Cantor, se debe partir de la siguiente hipótesis:

Hipótesis: Existen conjuntos y los conjuntos tienen elementos, los cuales se relacionan a partir del axioma de extensión.

Axioma de Extensión. Si cada elemento de A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A, entonces $A = B$. En otras palabras, se dice que dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos. Matemáticamente se expresa:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

Por ejemplo,

$A = \{\text{ Estudiantes de Antioquia}\}$
$\quad = \{x/x \; es \; estudiante \; de \; Antioquia\}$
$B = \{\text{ Estudiantes de la IER Ezequiel Sierra de Guarne}\}$
$\quad = \{x/x \; es \; estudiante \; de \; la \; IER \; Ezequiel \; Sierra\}$

Es claro que $B \subset A$ y que $B \neq A$. Se dice que B es una especificación de A y se escribe $B = \{x \in A; \text{x es estudiante de la IER Ezequiel Sierra de Guarne}\}$.

De lo anterior se deduce el siguiente axioma:

Axioma de especificación. A todo conjunto A y a toda condición $S(x)$, corresponde un conjunto B cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de A que cumplen $S(x)$.

Este nuevo axioma admite la construcción de subconjuntos de un conjunto dado y permite iniciar la construcción de los números naturales; para eso se debe aceptar que:

1. Existe un conjunto A con elementos.
2. Sea $B = \{x \in A; \; x \neq x\}$.

Como no hay elemento de A que no sea igual a sí mismo, se concluye que B es un conjunto sin elementos llamado conjunto vacío, y se denota con el símbolo $\emptyset$. Ahora, existe un único conjunto sin elementos, talque la cardinalidad de ese conjunto es 0. Este nuevo conjunto será el punto de referencia para la construcción de los números. Como $A = B = \emptyset$, se concluye que $\{\emptyset\}$ es un conjunto no vacío, ya que contiene un elemento; estableciéndose así el número 1. Ahora, como $A = \emptyset$ y $B = \{\emptyset\}$, se obtiene el conjunto C conformado por los elementos $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; este nuevo conjunto se denota con el número 2. Como dos existe, se puede construir un nuevo conjunto a partir de $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}, C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y obtener así el conjunto $D = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset \; \{\emptyset\} \; \} \; \}$ que representa al *cardinal* 3.

Hasta el momento, cada número se ha obtenido mediante la suma del número anterior, visto como conjunto. Pero esto no garantiza que existan todos los números naturales, apenas garantiza que existen todos aquellos números que, con paciencia, se puedan seguir construyendo. Teniendo como base la aplicación del axioma de extensión y el axioma de especificación se puede seguir la construcción de los números naturales a partir del teorema de unión.

4.3 CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES POR MEDIO DEL TEOREMA DE UNIÓN

Definiremos la unión y la intersección entre dos conjuntos, la cual permitirá enunciar el axioma de unión y el axioma del infinito.

Definición 4. Se define la unión entre dos conjuntos $A\ y\ B$ como:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo:
Si $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y
$\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\ impar\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ dígito\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Definición 5. Se define la intersección entre dos conjuntos $A\ y\ B$ como:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x/x \in A \wedge \in B\}$$

Ejemplo:
Si $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ primo\}$ y $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ número\ par\}$, entonces $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2\}$.

Axioma de unión. Para toda colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección dada. (Labarca, 2017).

Si C es una colección de conjuntos entonces hay un conjunto V tal que $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{C}$ y $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}$ donde $\mathrm{x} \in \mathrm{V}$. Por el axioma de especificación se logra definir el conjunto $\{\mathrm{x} \in \mathrm{V}; \mathrm{x} \in \mathrm{A}$ para algún $\mathrm{A} \in \mathrm{C}\}$.

Este conjunto se conoce como la unión de los elementos de C y se denota por $\cup_{\mathrm{A} \in \mathrm{C}} \mathrm{A}$. Ahora se puede formar la unión de conjuntos.

Si se tiene un conjunto A, se puede definir el sucesor de A y denotarlo con A^{+}, dónde $\mathrm{A}^{+} = \mathrm{A} \cup \{\mathrm{A}\}$; es decir, para obtener a A^{+} se debe considerar todos los elementos de A y adicionarle a A como elemento.

Aplicando la definición: Un conjunto S se dirá que es sucesor si $0 \in S$ y toda vez que $A \in S$ entonces $A^{+} \in S$.

Se establece ahora el siguiente axioma:

Axioma del Infinito. Existe un conjunto de sucesores.

Del anterior axioma se establece que el conjunto $D = \{S; S \text{ es un conjunto sucesor}\}$ es no vacío.

Sea ahora C una colección de conjuntos. Se define la intersección de los elementos de C como el conjunto $\{x \in \bigcup_{AC} A; x \in A, \forall A \in C\}$. Este conjunto se indica con $\bigcap_{A \in C} A$. La definición de la intersección, se pudo hacer por medio de los axiomas de la unión y de especificación. Es decir, no se necesitó de un nuevo axioma para construirla.

Lema 4.1. Si A y B son conjuntos de sucesores entonces $A \cap B$ es un conjunto de sucesores.

Demostración. Como $0 \in A$ y $0 \in B$ entonces $0 \in A \cap B$. Si ocurre que $n \in A \cap B$ entonces $n \in A$ y $n \in B$. Como A y B son conjuntos sucesores $n^{+} \in A$ y $n^{+} \in B$ y luego $n^{+} \in A \cap B$.

Corolario 4.1. $\bigcap_{A \in D} A$ es un conjunto de sucesores.

Definición 6. La intersección $\bigcap_{A \in D} A$, se llama el conjunto de los números naturales y se denotará $\mathbb{N}$.

CAPÍTULO 5

Este capítulo presenta la estructuración de las operaciones de adición y multiplicación en el conjunto de los números naturales y cada una de sus propiedades; Además, se dan a conocer dos laboratorios y sus respectivas guías de maestro, estudiante y anexos.

OPERACIONES Y PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son aquellos que sirven para contar, gracias a estos el ser humano pudo establecer diferentes relaciones y operaciones con sus propiedades que han permitido la evolución de la matemática y con ello de las ciencias.

Por el principio de inducción matemática, quinto axioma de Peano se pueden demostrar las propiedades de la adición (o la suma) y del producto en el conjunto de los números naturales.

5.1 ADICIÓN DE NÚMEROS NATURALES

Definición 1. En el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, se define la suma $" + "$ de la siguiente manera:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, m + 0 = m,$$
$$\forall\, m, n \in \mathbb{N}, m + n^{+} = (m + n)^{+}.$$

La adición resulta bien definida gracias a que todo número distinto de cero es sucesor de otro número.

Las siguientes ecuaciones precisan la adición en $\mathbb{N}$. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

$$m + 0 = m,$$
$$m + n^{+} = (m + n)^{+}.$$

El siguiente teorema establece la propiedad clausurativa o de cerradura de la suma en el conjunto de los números naturales.

Teorema 5.1. La suma de dos números naturales es otro número natural, es decir, $" + "$ es una *operación binaria* en $\mathbb{N}$. Esta propiedad se conoce con el nombre de clausurativa o de cerradura de la suma.

Demostración. Consideremos el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : (\forall\, m \in \mathbb{N})(m + n \in \mathbb{N})\}$.

Por la definición de la suma se tiene que $0 \in S$. Al observar que $n \in S$ entonces $n^+ \in S$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis de inducción, $m + n \in \mathbb{N}$ para todo natural m y así por el segundo axioma 2, el sucesor de $m + n$ es un número natural y por la definición de suma se tienen que $(m + n)^+ = m + n^+ \in \mathbb{N}$, esto es $n^+ \in S$.

Teorema 5.2. Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$, la suma es asociativa. Es decir que; $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Demostración. Sea $S \coloneqq \{k \in \mathbb{N} \mid \forall\, m, n \in \mathbb{N}, (n + m) + k = n + (m + k)\}$.
La estrategia es probar que $S = \mathbb{N}$. Por la definición de suma se asume que para todo par de naturales m y n se tiene que $(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0)$, lo que quiere decir que $0 \in S$.

Para demostrar que $k \in S \implies k^+ \in S$. Efectivamente, usando la hipótesis de inducción y la definición de suma para m y n naturales,

$$(m + n) + k^+ = [(m + n) + k]^+ = [m + (n + k)]^+ = m + (n + k)^+ = m + (n + k^+)$$

Esto demuestra que $k^+ \in S$.

Teorema 5.3. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, la suma es conmutativa. Es decir que; $n + m = m + n$.

Para entender y demostrar la propiedad conmutativa, es necesario comprender los siguientes lemas:

Lema 5.1. Para cada $m \in \mathbb{N}, 0 + m = m$.

Demostración. Sea $S = \{m \in \mathbb{N} : 0 + m = m\}$. Entonces $S = \mathbb{N}$. Por definición de suma, $0 + 0 = 0$. Por tanto, $0 \in S$. Ahora bien, si $m \in S$ entonces $m^+ \in S$ ya que, por definición de suma y la hipótesis de inducción, $0 + m^+ = (0 + m)^+ = m^+$. Luego

Lema 5.2. Para todo par de números naturales m, n se tiene que $(m + n)^+ = m^+ + n$.

Demostración. Sea $S \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \in \mathbb{N},\ (m + n)^+ = m^+ + n\}$
Es claro que $0 \in S$, pues dado $m \in \mathbb{N}$, $(m + 0)^+ = m^+ = m^+ + 0$. Al demostrar el paso inductivo, se supone que $n \in S$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} m^+ + n^+ &= (m^+ + n)^+ && \text{(Definición de suma)} \\ &= [(m + n)^+]^+ && \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &= (m + n)^+)^+. && \text{(Definición de suma)} \end{aligned}$$

En consecuencia, $n^+ \in S$.

Demostración del teorema 5.3. Sea $S = \{n \in \mathbb{N}: (\forall\, m \in \mathbb{N})(m + n = n + m)\}$.

Al verificar que $m + 0 = m = 0 + m, \forall\, m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $0 \in S$. Supóngase ahora que $n \in S$, esto es $\forall\, m \in \mathbb{N}, m + n = n + m$. Luego.

$m + n^+ = (m + n)^+$ (Definición de suma)

$= (n + m)^+$ (Hipótesis inductiva)

$= n^+ + m.$ (Por el lema 5.2)

Así se prueba que $n^+ \in S$.

La suma en los naturales goza de la propiedad cancelativa y la propiedad uniforme, más precisamente.

Teorema 5.4. Sean $m, n, k \in \mathbb{N}$. Entonces $m + k = n + k \Leftrightarrow m = n$

Demostración. Es inmediato que si $m = n$ entonces $m + k = n + k$ (esta es la propiedad uniforme). Supóngase que $m + k = n + k$ y veamos que $m = n$ (esta es la propiedad cancelativa). Para esto se usa otra vez el principio de inducción de la siguiente forma: sea

$$S = \{k \in \mathbb{N}: (\forall m, n \in \mathbb{N})(m + k = n + k \Rightarrow m = n)\}$$

Es inmediato que $0 \in S$. Si se supone que $k \in S$ y se demuestra $k^+ \in S$. Esto significa probar la siguiente afirmación:

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m + k^+ = n + k^+ \Rightarrow m = n)$$

Sean $m, n\ \mathbb{N}$, tales que $m + k^+ = n + k^+$. Por definición de suma esto equivale a la igualdad $(m + k)^+ = (n + k)^+$, lo cual, por el cuarto axioma 4 implica que $m + k = n + k$. Finalmente por hipótesis inductiva, se tiene que $m = n$. Así se prueba que $k^+ \in S$ y por el axioma 5, $S = \mathbb{N}$.

Proposición 1. Para todo natural n se tienen que $n^+ = n + 0^+$.

Demostración. Una prueba simple es

$$n + 0^+ = (n + 0)^+ = n^+.$$

Usando el quinto axioma. Para ello, sea

$$S = \{n \in \mathbb{N}: n^+ = n + 0^+\}.$$

Como $0^+ = 0 + 0^+$, entonces $0 \in S$. Supóngase ahora que $n \in S$ y que $n^+ \in S$. En realidad eso es consecuencia de la hipótesis de inducción y de qué $n^+ + 0^+ = (n + 0^+)^+ = (n^+)^+$.

5.2 PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES

Definición 2. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, se define la multiplicación (o el producto) " $\cdot$ " de la siguiente manera:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \cdot 0 = 0,$$
$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \cdot n^{+} = m \cdot n + m.$$

De la observación anterior y la definición del producto se deduce que para todo $m \in \mathbb{N}, m \cdot 1 = m$, puesto que

$$m \cdot 1 = m \cdot 0^{+} = m \cdot 0 + m = 0 + m = m$$

Las siguientes ecuaciones precisan la multiplicación en $\mathbb{N}$. Se puede suprimir el operador " $\cdot$ " sin que pierda significado el producto.

$$m0 = 0,$$
$$mn^{+} = mn + m$$

Usando el principio de inducción y el hecho de que la suma en $\mathbb{N}$ es una operación binaria, se demuestra el siguiente resultado.

A continuación, se enuncian las propiedades que satisface la multiplicación de números naturales.

Teorema 5.5. La multiplicación definida en $\mathbb{N}$ es una operación binaria, esto es, si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $m \cdot n = m\,n \in \mathbb{N}$. Esta propiedad se conoce con el nombre de clausurativa.

Teorema 5.6. Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}, m(n + k) = mn + mk$, es decir: la multiplicación es distributiva con respecto a la adición.

Demostración. Sea

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m(n + k) = mn + mk\}$$

En natural 0 está en S, pues dados m y n naturales se tiene que

$$\begin{aligned} m(n + 0) &= mn && \text{(Definición de suma)} \\ &= mn + 0. && \text{(Definición de suma)} \\ &= mn + m0. && \text{(Definición de producto)} \end{aligned}$$

Para demostrar el paso inductivo: supóngase que $k \in S$ y sean $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} m(n + k^{+}) &= m(n + k)^{+} && \text{(Definición de suma)} \\ &= m(n + k) + m && \text{(Definición de producto)} \\ &= (mn + mk) + m && \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &= mn + (mk + m) && \text{(Por asociatividad de suma)} \end{aligned}$$

$= mn + mk^+$ (Definición de producto)

Así, se prueba que $k^+ \in S$ y por el quinto axioma, $S \in \mathbb{N}$.

La propiedad distributiva ayuda a demostrar la asociatividad del producto:

Teorema 5.7. Para todo $m, n, k \in \mathbb{N}$, $(mn)k = m(nk)$, es decir: La multiplicación de números naturales es asociativa.

Demostración. Sea

$$S = \{k \in \mathbb{N}, (mn)k = m(nk) \; \forall \; n, m \in \mathbb{N}\}$$

$0 \in S$. En efecto, la definición de multiplicación permite afirmar que $(mn)0 = 0$ y que $m(n0) = m0 = 0$

Si se supone que $k \in S$. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
(mn)k^+ &= (mn)k + mn && \text{(Definición de producto)}\\
&= m(nk) + mn && \text{(Hipótesis de inducción)}\\
&= m(nk + n) && \text{(Teorema 5.6)}\\
&= m(nk^+) && \text{(Definición del producto)}
\end{aligned}$$

Luego $k^+ \in S$ y por el quinto axioma, $S \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.8. Para todo $m, n \in \mathbb{N}, mn = nm$, es decir: la multiplicación de números naturales es conmutativa.

Para demostrar el Teorema 5.8 es necesario probar el siguiente lema:

Lema 5.3. Para todo $m, n \in \mathbb{N}, m^+n = mn + n$.

Demostración. Se probará por inducción sobre n. Sea $S = \{n \in \mathbb{N}: (\forall m \in \mathbb{N})(m^+n = mn + n)\}$. Puesto que para cada natural m, $m^+0 = 0 = m0 + 0$, se concluye que $0 \in S$. Supongamos que $n \in S$ y veamos qué $n^+ \in S$. Sean $m \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
m^+n^+ &= m^+n + m^+ && \text{(Definición de producto)}\\
&= (mn + n) + m^+ = mn + (n + m^+) && \text{(Hipótesis de inducción)}\\
&= mn + (n + m)^+ && \text{(Definición de suma)}\\
&= mn + (n^+ + m) = (mn + m) + n^+ && \text{(Por el lema 5.2)}\\
&= mn^+ + n^+. && \text{(Definición del producto)}
\end{aligned}$$

De esta manera queda probado el lema 5.3.

Demostración del teorema 5.8. Sea $S = \{n \in \mathbb{N}: (\forall m \in \mathbb{N})(mn = nm)\}$. Para ver que $0 \in S$, se fija un $m \in \mathbb{N}$ cualquiera. Por definición del producto y $\forall m \in \mathbb{N}, 0 \cdot m = 0$, se tiene que $m0 = 0 = 0m$ y si suponemos que $n \in S$, entonces $mn = nm \ \forall\ m \in \mathbb{N}$. Luego, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$mn^+ = mn + m$ (Definición de producto)

$\quad = nm + m$ (Hipótesis de inducción)

$\quad = n^+m$, (Por el lema 5.8)

Lo cual demuestra de $n^+ \in S$.

5.3 LABORATORIO 3. JUGANDO, JUGANDO LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN VOY TRABAJANDO

5.3.1 Guía del maestro

<table>
<tr><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Interpretar y representar situaciones de adición y sustracción utilizando el material en base 10.

Plantear y resolver problemas que involucren adiciones y sustracciones.

Identificar y reconocer las propiedades de la adición.
Desarrollar procesos de cálculo escrito (suma y resta).</td><td>Numérico y sistema numérico.</td><td>Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resuelve problemas que involucran sumas, restas, multiplicaciones o divisiones con números naturales.

Describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas.

Resuelve distintos problemas que involucran sumas y restas con números naturales utilizando material concreto o haciendo dibujos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS
Interpreta y representa situaciones de adición y sustracción utilizando el material en base 10.
Plantea y resuelve problemas que involucren adiciones y sustracciones.
Identificar y reconoce las propiedades de la adición.
Desarrolla procesos de cálculo escrito (suma y resta).</td></tr>
</table>

MOMENTOS	FASES	ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o exploración	"Sumando y restando el número 10000 voy alcanzando"	Dados (Anexo 1), hoja de registro (Anexo 2), guía del estudiante (Actividad No.1.).
Momento 2	Desarrollo o estructuración de la clase.	"Adiciona con unidades, decenas, centenas y unidades de mil".	Material en base 10 (Anexo 3), Cartas de números (Anexo 4), máquina de sumar, guía del estudiante (Actividad No.2.).
	Trabajo independiente	¡Personifícame!	Material en base 10 (Anexo 3), Cartas de números (Anexo 5), Cartas de sustracciones (Anexo 6), Hojas blancas, guía del estudiante (Actividad No.3.)
	Trabajo cooperativo	"Calculando con el ábaco".	Ábaco,
Momento 3	Cierre o transferencia	"Jugando a los bolos con la adición y la sustracción"	Juego de bolos (Anexo 7), Dado de la adición y la sustracción (Anexo 8), tabla de registro (Anexo 9)
Momento 4	Para aprender más	Situación problema: ¡La carrera mundial!	(Actividad No.6.)

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El hombre prehistórico practicaba la matemática de manera inductiva, la cual fue indispensable para su subsistencia, se ingenió la manera de adicionar y sustraer; así pudo no solo mantener control sobre sus pertenencias, sino que consiguió comercializar sus recursos con otras culturas e intercambiarlos por aquellos que no poseía.

La adición, también llamada suma, fue desarrollada por los egipcios, quienes en un inicio utilizaron los números naturales y luego los fraccionarios. Otras civilizaciones como los babilonios, los chinos y los hindúes también realizaron grandes aportaciones a la matemática como la suma de cuadrados de números naturales, de números negativos, decimales y de logaritmos.

Se llama suma de dos números a y b al número m de elementos del conjunto formado por los elementos del primer conjunto a y los del segundo conjunto b. Cada uno de los números que se suma se llama sumando o término y el resultado se denota suma o total.

$$a + b = m$$

Ejemplo:

$$5 + 8 + 4 = 17$$

- **Ley clausurativa o de cerradura:**

Si se adicionan dos o más números naturales, el resultado es otro número natural. Es decir, un elemento del mismo conjunto al que pertenecen los sumandos. Se dice que la adición es una operación interna en el conjunto de los números naturales o que cumple la ley de la cerradura o clausurativa.

$$\text{Si } a,\ b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a + b \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$\text{Como } 8{,}10 \in \mathbb{N} \text{ entonces } 8 + 10 = 18 \in \mathbb{N}$$

Colorarios[9]

- Si en la suma de dos sumandos uno de ellos es cero, la suma es igual al otro sumando, el cero es el elemento neutro de la suma. Es decir: $\forall a \in \mathbb{N},\ a + 0 = a$.

9 Verdad que se deriva como consecuencia de un teorema y que para su demostración no es necesario un razonamiento nuevo.

Ejemplo: $12 + 0 = 12, \quad 0 + 8 = 8.$

Debido a esta propiedad del número 0, deja invariante el número al cual se suma, es así como el 0 se convierte en el elemento neutro de la adición.

- Todo número natural n es igual a la suma de n sumandos iguales a 1.

Ejemplo:

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

- Todo número natural se obtiene sumando 1 al número que le antecede en la sucesión fundamental.

Ejemplo:

$$9 = 8 + 1; \text{ del mismo modo: } 7 = 6 + 1.$$

- Todo número natural es igual a la suma de los valores relativos de sus cifras.

Así:

$$428 = 4 \text{ centenas} + 2 \text{ decenas} + 8 \text{ unidades} = 400 + 20 + 8.$$

- Toda suma es mayor o igual que cada uno de sus sumandos.

Ejemplo:

$$\text{Como } 12 + 8 + 7 = 27 \text{ entonces } \begin{cases} 27 > 12 \\ 27 > 8 \\ 27 > 7 \end{cases}$$

- **Propiedad uniforme.**

La adición de números naturales tiene un resultado único. Esto implica que sumando números iguales se obtiene el mismo resultado, o bien que: sumando miembros a miembro dos o más igualdades, se obtiene otra igualdad, propiedad que se conoce con el nombre de propiedad uniforme.

$$\text{Si } \quad a = b \text{ y } c = d \text{ entonces } a + c = b + d, \ \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo:

Como $5 = 2 + 2 + 1$ y $5 + 3 = 8$ entonces $5 + 5 + 3 = 2 + 2 + 1 + 8.$

- **Propiedad de la monotonía.**

Se refiere a la suma de desigualdades entre sí y de desigualdades con igualdades. Se llama monotonía porque el resultado mantiene el sentido de la desigualdad de los sumandos.

- Sumando miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, se obtiene otra desigualdad de ese mismo sentido. Teniendo en cuenta que dos o más desigualdades se dicen del mismo sentido, cuando todas ellas son “mayores que” o bien todas ellas “menores que”.

“Mayores que”: $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$.

Ejemplo:

Como $5 > 4$ y $15 > 12$ entonces $5 + 15 > 4 + 12$. En efecto, $20 > 16$.

“Menores que”: Si $m < p$ y $n < q$ entonces $m + n < p + q$, $\forall m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

Como $8 < 9$ y $10 < 12$ entonces $8 + 10 < 9 + 12$. En efecto, $18 < 21$.

Si se suman miembro a miembro una relación de mayor o menor con una desigualdad, resulta una desigualdad del mismo sentido que el de la dada.

Ejemplos:

Como $6 = 4 + 2$ y $8 > 5$ entonces $6 + 8 > 4 + 2 + 5$. En efecto, $14 > 11$.

Como $6 < 12$ y $7 = 4 + 3$ entonces $6 + 7 < 12 + 4 + 3$. En efecto, $13 < 19$.

Se concluye que sumando miembro a miembro desigualdades del mismo sentido, con igualdades, se obtiene una desigualdad de ese mismo sentido. En general,

$\forall\, a, b, e, f \in \mathbb{N}$, se tiene que:

Si $a > b$ y $e = f$ entonces $a + e > b + f$.

Si $a < b$ y $e = f$ entonces $a + e < b + f$.

- **Propiedad conmutativa**.

Si se cambia el orden de los sumandos, la suma no varía.

$\forall\ a, b, m \in \mathbb{N},$ si $a + b = m$ entonces $b + a = m$.

Ejemplo:

$2 + 8 = 8 + 2 = 10.$

- **Propiedad asociativa:**

Si se remplazan dos o más sumandos por su suma efectuada, la suma total no varía.

Si $a, b, c, m \in \mathbb{N},\ a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c = m.$

Ejemplo:

$8 + 5 + 3 = 8 + (5 + 3) = (8 + 5) + 3 = 16.$

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

A partir de este laboratorio "Jugando, jugando la adición y la sustracción voy trabajando" los estudiantes podrán resolver diferentes juegos, actividades y situaciones problema utilizando la adición y la sustracción; con la finalidad de propiciar un aprendizaje significativo. Este laboratorio se aborda desde cuatro momentos; exploración, estructuración, transferencia y para aprender más.

La exploración o apertura, se efectúa con la actividad "*Sumando y restando el número 10000 voy alcanzando",* a partir de la cual los estudiantes podrán utilizar la adición y la sustracción según la necesidad. Para efectuar este primer momento tome una hoja grande y péguela en el tablero, explicando lo que deben hacer los escolares. En la hoja escriba el número 1000, como base para iniciar el juego. Seguidamente distribuya la clase en grupos de cuatro estudiantes. Explique que en cada grupo jugarán la actividad descrita en la guía del estudiante (Actividad No.1), además entregue a cada equipo, los dados (Anexo 1) y las hojas de registro (Anexo 2).

Para continuar indique que cada uno de los jugadores debe tener a la mano el anexo 2, en el cuál escriben el número 1000 como número de salida. Recuérdeles que durante el juego este número puede ir cambiando mediante las sumas y las restas que efectúen. Además, explique que cada uno lanzará de uno a cuatro dados; según su elección. Luego debe decidir cuál de los dados está asociado a la unidad de mil, a la centena, a la decena y a la unidad (si lanza tres dados los asociará a centenas, decenas y unidades, etc.) Para continuar el estudiante identificará el número compuesto por estas cifras.

Cada uno de los números obtenidos en los lanzamientos debe ser sumado por cada estudiante al resultado que haya alcanzado en la ronda anterior, con el objetivo de que el nuevo resultado sea lo más cercano posible a 10000 el cual debe ser anotado en la hoja de registro (Anexo 2). Si el jugador sobrepasa la meta de 10000 tendrá que restar en su siguiente turno. Si nuevamente queda por debajo volverá adicionar. Si adiciona o sustrae depende del valor que haya alcanzado en el turno anterior.

Durante esta actividad es importante que brevemente retome y hable sobre el valor posicional de los números, también, puede variar el número de inicio y la meta al comenzar el juego, de manera que los escolares requieran hacer más sustracciones. Se recomienda ver ejemplo de la guía del estudiante.

El segundo momento se divide en tres fases, la primera, denominada desarrollo o estructuración de la clase *"Adiciona con unidades, decenas, centenas y unidades de mil"*, en esta, los estudiantes deben representar dos o más números con la ayuda del material en base 10, los cuales debe agrupar en la máquina de sumar (Figura 8) para hallar el resultado de la adición. Cada participante agrupa diferentes números para determinar su suma y así desarrollar el sentido de la adición; además con esta actividad también podrá repasar el valor posicional de los números y la forma de representarlos con el material en base 10.

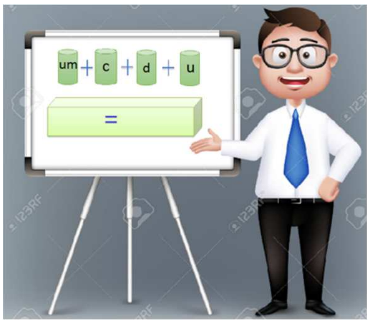


Figura 8. Representación de la máquina de sumar.

Para comenzar, organice los escolares en equipos de cuatro integrantes y muéstreles la máquina de sumar, la cual está compuesta por cuatro tubos, cada uno representa un valor en el sistema decimal, es decir, uno de los tubos representa las unidades, otros las decenas y los otros dos las centenas y las unidades de mil. Explíqueles que haciendo esta actividad podrán encontrar la suma de dos o más números. Haga un ejercicio demostrativo, pidiendo a los estudiantes que tomen dos cartas del Anexo 4, las cuales representan los números que se deben adicionar, solicite que representen los números de las cartas en el material en base 10, y que apenas los tengan listos, los ubiquen en la máquina de sumar teniendo en cuenta la ubicación de las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil, esto lo tienen que hacer con todos los números que quieran adicionar.

Una vez representados y ubicados los números en la máquina, solicite que tomen todas las representaciones y procedan a determinar cuántas unidades, decenas, centenas y unidades de mil quedaron en la máquina. Recuerde que si tienen más de 10 gráficas de algunas fichas del material en base 10, estas adquieren un valor posicional superior, es decir, si se obtienen 10 unidades, estas se reemplazan por una decena, si hay 10 decenas se remplazan por una centena y 10 centenas por una unidad de mil y así sucesivamente según los números que estén adicionado.

Manifieste que una vez obtenido todo el material de la máquina, es necesario reagrupar y calcular la suma representada con el material en base 10 que se ha ubicado en la máquina de sumar, establezcan cuántas unidades, decenas, centenas y unidades de mil se obtuvieron y que organicen esta información, identificando el número correspondiente al material concreto, esto define el total de la adición.

Este ejercicio se puede realizar con dos, tres cuatro, cinco y más cartas, depende de la adición que se pretenda realizar, también puede realizarse cambiando el orden de los números al introducirlos en la máquina, con esto se puede explicar la propiedad conmutativa de la suma, igualmente se recomienda agrupar algunos números antes de utilizar la máquina, de esta manera se puede demostrar la propiedad asociativa.

Para terminar, se recomienda que mientras los estudiantes realizan la actividad, el docente pase por todos los grupos de trabajo y les recuerde las propiedades de la adición (todo número sumado con cero da el mismo número, el orden de los sumandos no altera el total o la suma, se pueden asociar dos o más elementos de la suma y el total no varía y la suma de dos o más números naturales es otro número natural).

Continúe con la segunda fase del segundo momento, el trabajo independiente denominado ¡Personifícame!, a partir del cual los estudiantes podrán representar números y realizar diferentes sustracciones. Para el trabajo divida la clase en grupos de cuatro integrantes y distribuya el material a cada equipo para que recorten el material en base 10 (Anexo 3), las cartas de números (Anexo 5) y las cartas de restas (Anexo 6); solicite a los estudiantes que escojan un número y que lo representen con el material en base 10 (Anexo 3), seguidamente pídales que tomen una carta de restas (Anexo 6) y que resuelvan la resta que aparece en ella, tomando del número representado en el material en base 10 el valor que se indica quitar y que escriba en una hoja el valor numérico del material que le quedó. Además, invítelos a que anoten todos sus resultados. Los estudiantes pueden revisar sus respuestas utilizando la calculadora o haciendo la resta en una hoja.

Las cartas de los anexos 4 y 5, pueden ser cambiados por otros según la necesidad o para trabajar números mayores o menores.

Para terminar el segundo momento, desarrolle el trabajo colaborativo, a partir de la actividad No.4.*"Calculando con el ábaco"*. Entregue a cada estudiante un ábaco abierto, si no tiene para todos solicite con anterioridad diferentes materiales con los cuales puedan construir el ábaco en la clase o que lo traigan de la casa. Durante esta actividad los estudiantes podrán representar diferentes números y hacer distintas operaciones. Inicie explicando las reglas para el manejo del ábaco y les pide representar algunos números.

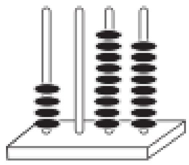


Figura 9. Ábaco abierto

Reglas para el manejo del ábaco:

Valor de un disco.

Al trasladar un disco a la posición de la izquierda, se está aumentando 10 veces su valor, es decir, ¡depende de la posición!

Paquetes de 10

Pueden ubicarse máximo nueve discos por varilla, porque si hay 10 discos se debe armar un paquete y reemplazarlo por un disco en la varilla de la izquierda.

Luego de explicar las reglas del uso del ábaco, dígale que usted va a escribir en el tablero dos números y debe ubicarlos en el ábaco y establecer el valor que se logra con su adicción, repita el ejercicio con tres o cuatro números buscando que utilice las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil.

Haga el mismo ejercicio con la sustracción y escriba dos números en el tablero, solicite que representen uno de ellos en el ábaco y luego que resten el nuevo valor a lo que tienen representado, quien termine primero puede salir al tablero y escribir el resultado que consiguió para verificarlo. Repita el ejercicio con la adición y la sustracción cuantas veces los considere necesario.

Si quiere variar la actividad lo puede hacer utilizando la Yupana, considerada la calculadora Inca, la cual cumple la misma función y tiene el mismo manejo que el ábaco abierto, también puede hacer diferentes representaciones de números en el Quipú.

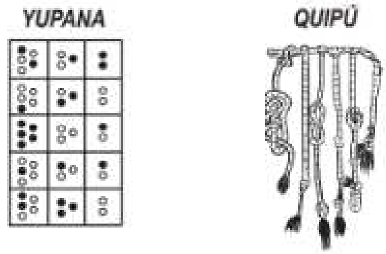


Figura 10. Yupana y quipú utilizado por los incas.

En el momento de cierre o transferencia nombrado "*Jugando a los bolos con la adición y la sustracción"* solicité a los estudiantes que se organicen en equipos de cuatro estudiantes y entregué los bolos (Anexo 7), el dado de la adición y la sustracción (Anexo 8) y la tabla de registro (Anexo 9). Indique que lean las instrucciones de la guía del estudiante (Actividad No.5.), la cual describen los pasos para realizar el juego.

Para culminar el laboratorio efectué el último momento para aprender más *¡La carrera mundial!*, explicando a los estudiantes que van a resolver una situación problema relacionada con las temáticas trabajadas durante todo el laboratorio, es recomendable que inicie explicando en qué consiste la situación, en la cual se propone a los estudiantes participar en una carrera automovilística, es aconsejable que lo haga de manera divertida, así motivará a los escolares a trabajar.

La actividad consiste en escoger el trayecto, respetando un límite de longitud y en sumar o restar los puntos indicados en los obstáculos con el fin de obtener un mínimo de 800 puntos al final. Los estudiantes también deben servirse de un presupuesto para comprar la indumentaria y el automóvil necesario para la carrera.

5.3.2 Guía del Estudiante

Lo que comprenderás:

- Interpretar y representar situaciones de adición y sustracción utilizando el material en base 10.
- Plantear y resolver problemas que involucren adiciones y sustracciones.
- Identificar y reconocer las propiedades de la adición.
- Desarrollar procesos de cálculo escrito (suma y resta).

Materiales:

Material en base 10, dados, máquina de sumar, 4 tubos, hojas blancas, bolos, dado de la adición y la sustracción, canasta de huevos vacía, cartas de números, pista de carreras.

Práctica de exploración.

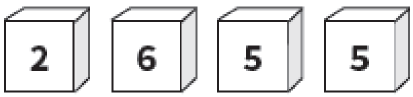
Actividad No.1. "Sumando y restando el número* 10000 *voy alcanzando"

Para realizar esta actividad, debes buscar tres compañeros y solicitar los dados (Anexo 1) y la hoja de registro (Anexo 2). Ensambla los dados y sigue las instrucciones.

En esta actividad cada jugador debe sumar o restar los números que obtenga al lanzar los dados, y tratar de llegar a 10000 puntos. La primera adición se realiza con el número base que proponga el profesor. Cada uno de los números obtenidos con los dados puede adquirir el valor: de unidad de mil, de centena, de decena o de unidad según criterio y necesidad de cada uno. Es decir, cada jugador según el valor que requiere para lograr el puntaje puede lanzar cuatro, tres, dos o un dado para lograr el número indicado (10000). Si los números alcanzados y sumados sobrepasan el valor de la meta, el jugador debe restar para conseguirlo. Gana quien primero llegue a 10000 exactos.

Ejemplo:

Juan lanza cuatro dados y obtiene los siguientes números:



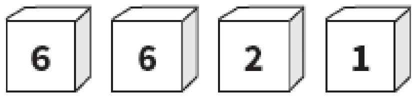
Una vez lanzados los dados, intenta armar el número más grande posible para acercarse a 10000. Por esto, decide asignarle a cada número lanzado los siguientes valores:

6: Unidades de mil
5: Centenas
5: Decenas
2: Unidades

6552

Al tener como base el número 1000 y efectuar la suma obtiene 7552.

Vuelve a lanzar los dados. Y obtiene.



Nuevamente decide la posición de los dados y establece un valor para cada uno, así:

2: Unidades de mil
(Establece que si escribe 6
sobrepasa el valor de la meta).
6: Centenas
6: Decenas
1: Unidades

2661

Al hacer nuevamente la suma Juan alcanza el número 10213, como este valor se pasa de 10000, establece que en el próximo turno solo utilizara tres dados porque no necesita más la unidad de mil y hacer una sustracción.

Actividad No.2. "Adiciona con unidades, decenas, centenas y unidades de mil".

Para iniciar la actividad, organice grupos de cuatro estudiantes y solicite los anexos 3 y 4, los cuales deben ser recortados; cada uno de los integrantes debe tomar dos cartas del (Anexo 4) y por turnos representar los números indicados con el material en base 10 (Anexo 3). Las dos representaciones obtenidas deben ser ubicadas en la máquina de sumar, teniendo en cuenta las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil.

Seguidamente, reagrupe las dos representaciones y proceda a encontrar la suma obtenida. Para esto, puede hacer paquetes de 10 con las unidades, las decenas, las centenas y las unidades de mil, si es que se deben reagrupar las unidades en decenas, las decenas en centenas y las centenas en unidades de mil. A continuación, identifica el número correspondiente al material manipulativo obtenido en la máquina de sumar e indica con números el total o suma.

Actividad No.3. ¡Personifícame!

Para realizar la actividad organice grupos de cuatro estudiantes, y solicite y recorte los anexos 5 y 6. Seguidamente cada integrante debe tomar una carta de número (Anexo 5) y representarlo con el material en base 10 (Anexo 3). Una vez simbolizado el número tome una carta de restar (Anexo 6) y reste la cantidad indicada al número anterior con la ayuda del material en base 10. Explique a los demás compañeros la estrategia utilizada para realizar la sustracción.

Ejemplo: Juan debe hacer la siguiente sustracción: $1883 - 55$.

Para efectuar esta resta, Juan primero tomó una decena y la transformó en unidades, lo que le dio 10 unidades. Esto equivalió a remover una de las figuras de la representación de las decenas, acto seguido añadió 10 unidades al material que representaba las unidades. Luego procedió a quitar el número indicado, así que tomó 5 unidades y le quedaron 8, posteriormente retiró 5 decenas y como inicialmente había retirado una que convirtió en unidades le quedaron 2.

Terminó, contando el material que le quedo representado con el material y escribió el número 1828, como resultado.

Actividad No.4." Calculando con el ábaco"

Esta actividad, se realiza de manera grupal y dirigida por el docente.

Actividad No.5. "Jugando a los bolos con la adición y la sustracción"

Para realizar esta actividad organiza equipos de cuatro compañeros y establezcan un nombre para el grupo. Soliciten el juego de bolos (Anexo 7), el dado de la adición y la sustracción (Anexo 8) y una la tabla de registro por cada jugador (Anexo 9). Antes de iniciar deben armar los bolos y ubicarlos como en el juego tradicional.

Por turnos, cada jugador tira el dado de la adición y la sustracción, de esta manera definiera la operación que debe realizar. Seguidamente lanza una pelota a los bolos previamente armados y ubicados. Una vez derribados los bolos, el jugador procede a tomar nota del valor numérico de cada bolo derribado, luego debe determinar cómo utilizar cada uno de esas cuantías para realizar la operación indicada, es decir puede utilizar los números según su criterio y necesidad en el orden que prefiere, siempre y cuando cumpla con la adición o la sustracción revelada en el lanzamiento del dado al iniciar.

Cada integrante del equipo registra en su tabla de control los resultados obtenidos en cada turno al realizar la operación. Gana el juego quien más puntos tenga al finalizar y estos se establecen según los resultados de las adiciones o las sustracciones realizadas.

Actividad No.6. ¡La carrera mundial!

Se acerca el día de la gran carrera mundial por el premio al mejor piloto de carros del mundo, y tú has sido seleccionado para representar a Colombia. Para prepararte debes seleccionar la indumentaria que llevarás y el camino que tomarás para llegar a la meta. Sin embargo, para poder ganar debes cumplir con los requerimientos enviados por los organizadores de la carrera.

- La línea de salida es la misma de llegada.

- La ruta no puede medir más de 6000 metros ni menos de 5000 metros de largo.
- Cuando comience la carrera todos los competidores contarán con cero puntos. Sin embargo, cuando llegues a la meta debes tener 800 puntos los cuales debes conseguir y acumular en todo el trayecto hacia la meta.
- Para la carrera, una empresa ha decidido patrocinarte y te ha enviado un monto de 14000 monedas de oro para pagar toda la indumentaria (traje, casco y guantes) y tu automóvil.

Precios de los automóviles para la carrera:

		
Automóvil 1: 12090 monedas de oro	**Automóvil 2:** 10000 + 3000 + 500 monedas de oro	**Automóvil 3**: 12300 monedas de oro

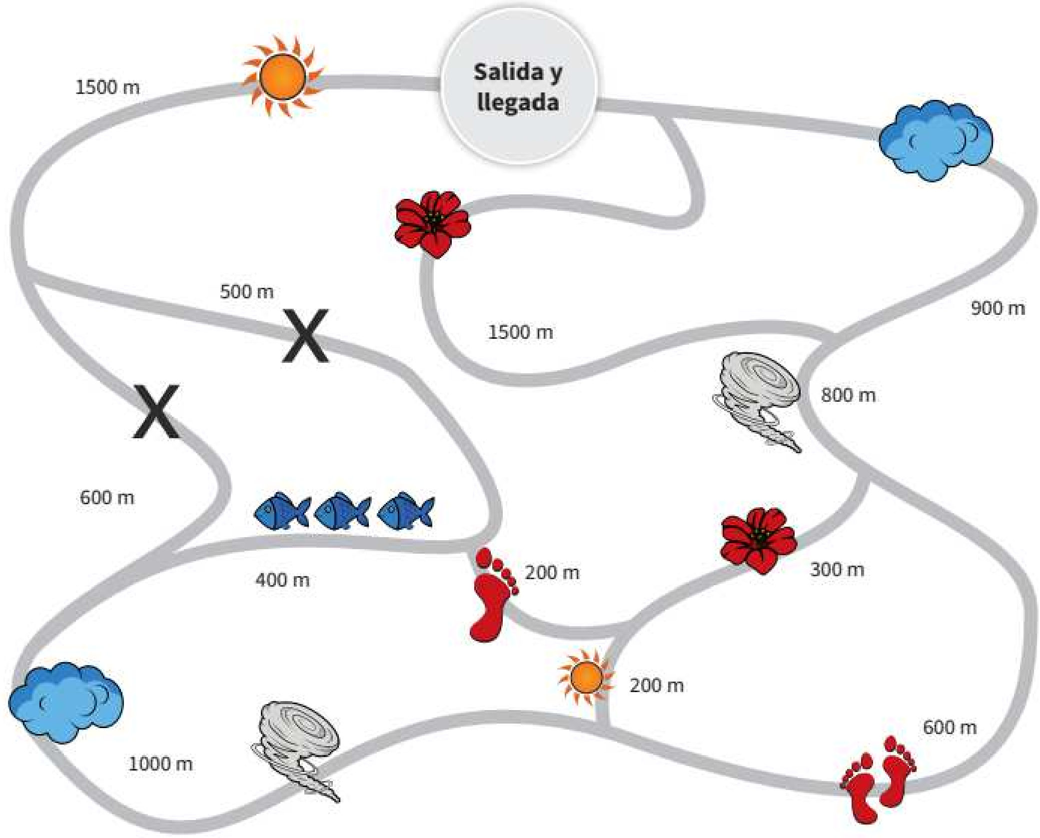
Catálogo de la indumentaria:

Traje 1: 8 centenas de monedas de oro. 	**Traje 2:** 950 monedas de oro. 
Casco 1: 56 decenas de monedas de oro. 	**Casco 2:** 60 decenas de monedas de oro. 
Guantes 1: 2 centenas y 13 decenas de monedas de oro. 	**Guantes 2:** 4 centenas y 87 decenas de monedas de oro. 

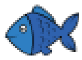
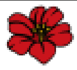
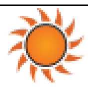
¡Recuerda! que para poder comprar todos los implementos que necesitas y el automóvil, es necesario que hagas un presupuesto y lo tengas a la mano. Por esto, te preparamos esta factura, en la cual debes anotar los valores de la indumentaria y el automóvil que quieres negociar.

	Número de monedas de oro.
Casco 1 o 2	
Traje 1 o 2	
Guantes 1 o 2	
Automóvil 1, 2 o 3	
Total, del valor de la compra en monedas de oro.	

Pista para la carrera:

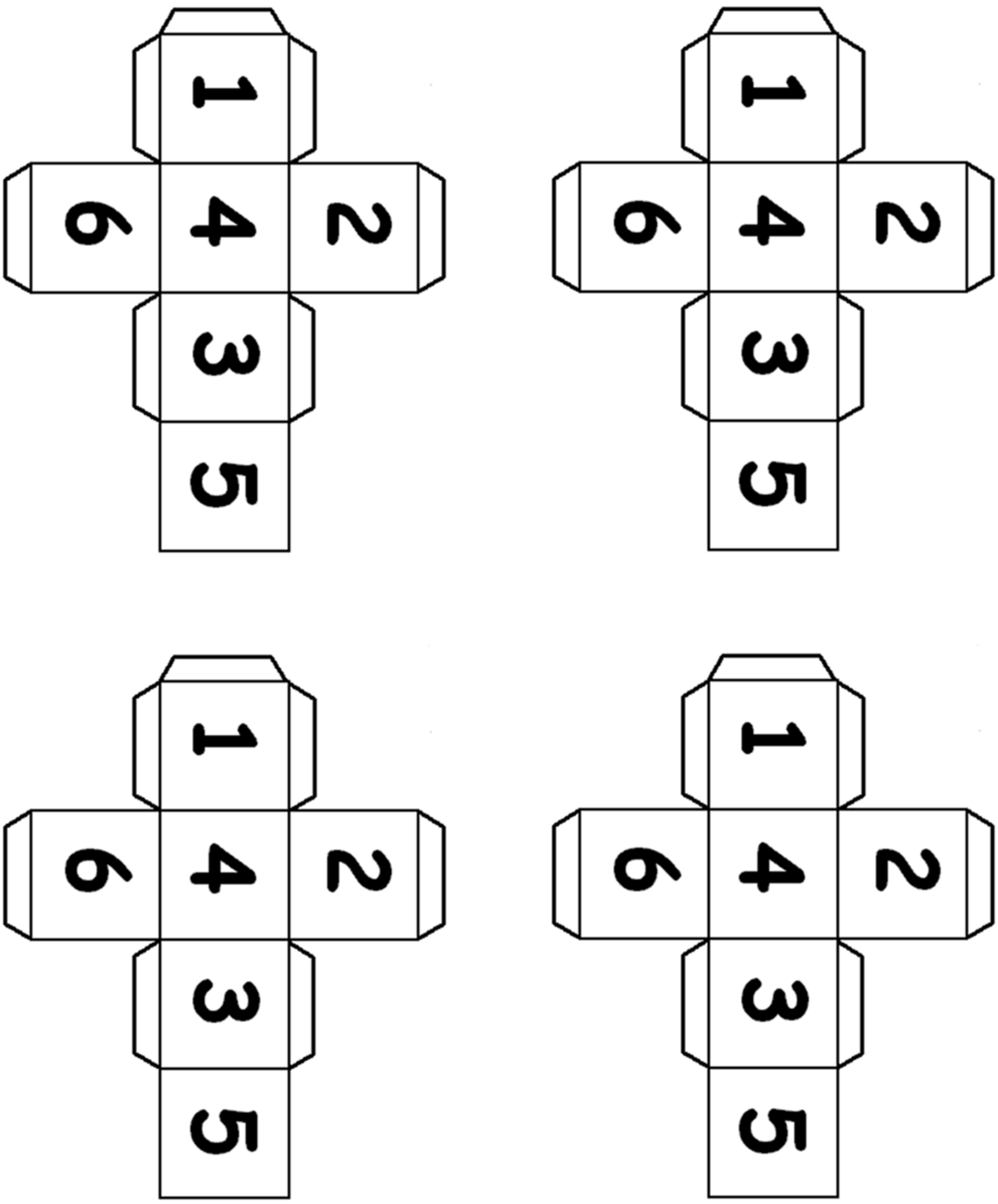


Convenciones para obtener los puntos durante la carrera.

	Suma 1 centenas + 12 decenas + 6 unidades a tu puntaje		Suma 12 decenas a tu puntaje.
X	Resta don centenas a tu puntaje		Suma 300 + 90 + 8 a tu puntaje.
	Suma 1000 – 690 a tu puntaje.		Resta 22 decenas a tu puntaje.
	Suma 4 centenas a tu puntaje.		

5.3.3 Anexos Laboratorio 3. Jugando, jugando la adición y la sustracción voy trabajando.

*Anexo No.***1.** *Dados.*



*Anexo No.***2**. ***Tabla de registro***

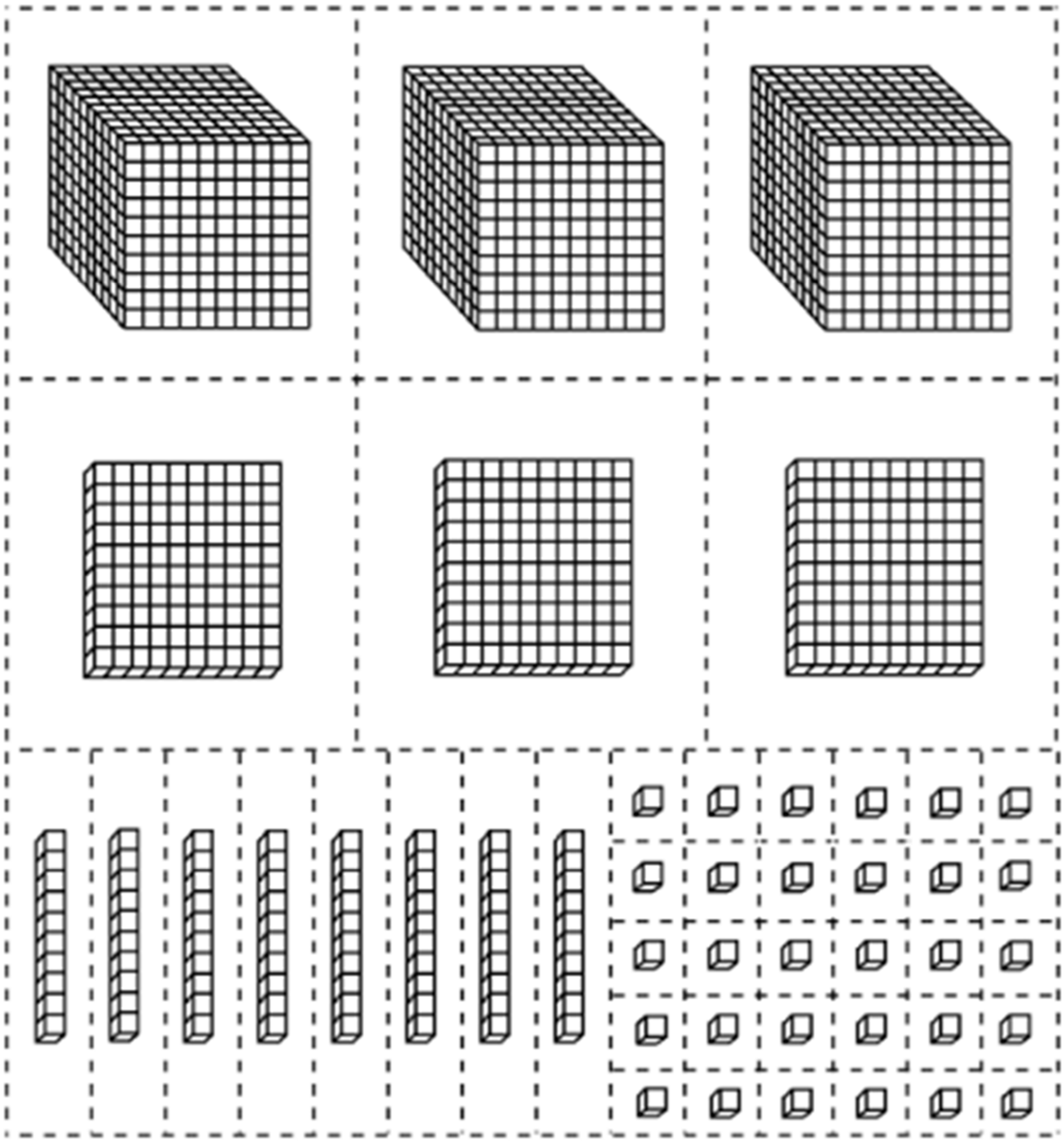
Jugador 1					
Número base	**Resultado de la adición o la sustracción después del primer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del segundo lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del tercer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del cuarto lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del quinto lanzamiento.**
1000					

Jugador 2					
Número base	**Resultado de la adición o la sustracción después del primer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del segundo lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del tercer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del cuarto lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del quinto lanzamiento.**
1000					

Jugador 3					
Número base	**Resultado de la adición o la sustracción después del primer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del segundo lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del tercer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del cuarto lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del quinto lanzamiento.**
1000					

Jugador 4					
Número base	**Resultado de la adición o la sustracción después del primer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del segundo lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del tercer lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del cuarto lanzamiento.**	**Resultado de la adición o la sustracción después del quinto lanzamiento.**
1000					

Anexo No.3. Material en base 10.



Anexo No.4. Cartas de números.

1485	3248
8796	128
248	3489
987	5798
3489	1569
26	489
345	1578
5978	399
4256	1248

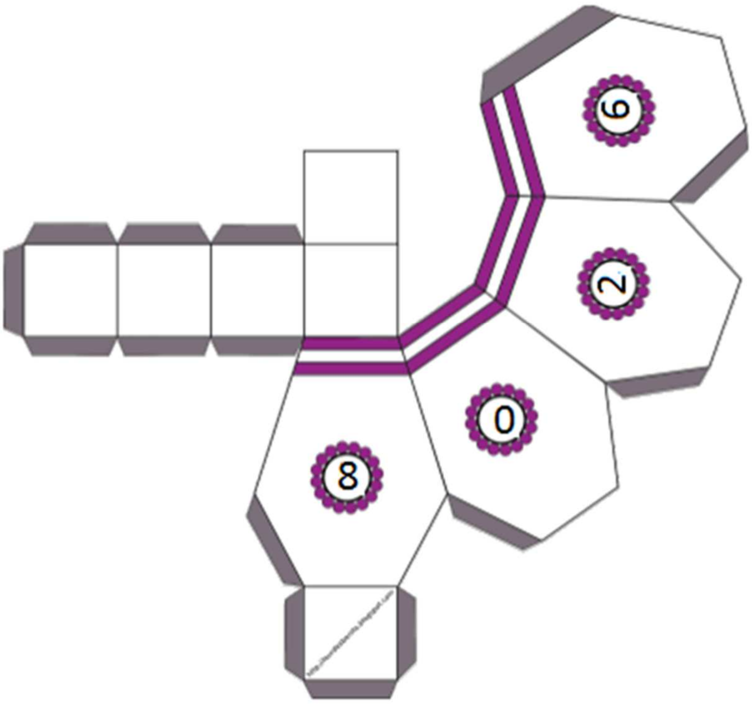
Anexo No.5. Cartas de números.

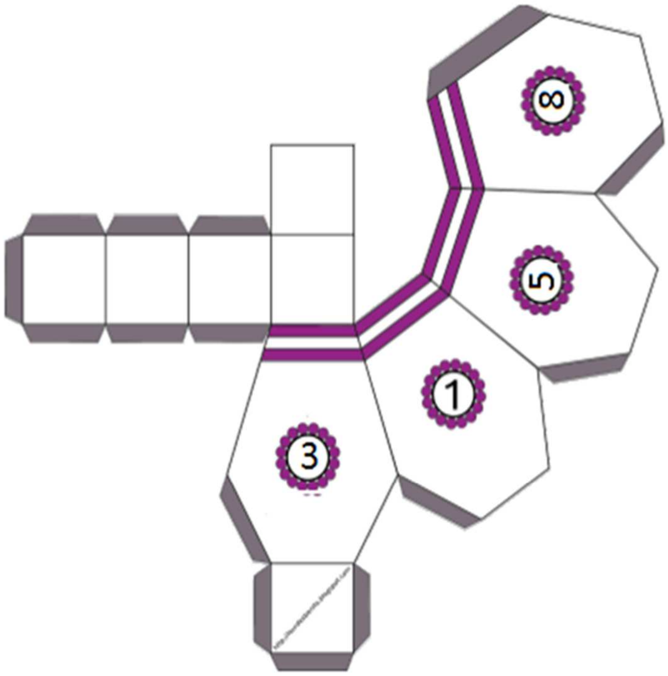
12345	11589
21985	898
59876	7945
1945	9875
16698	759
1433	42568
598	498
32548	26987
956	3456

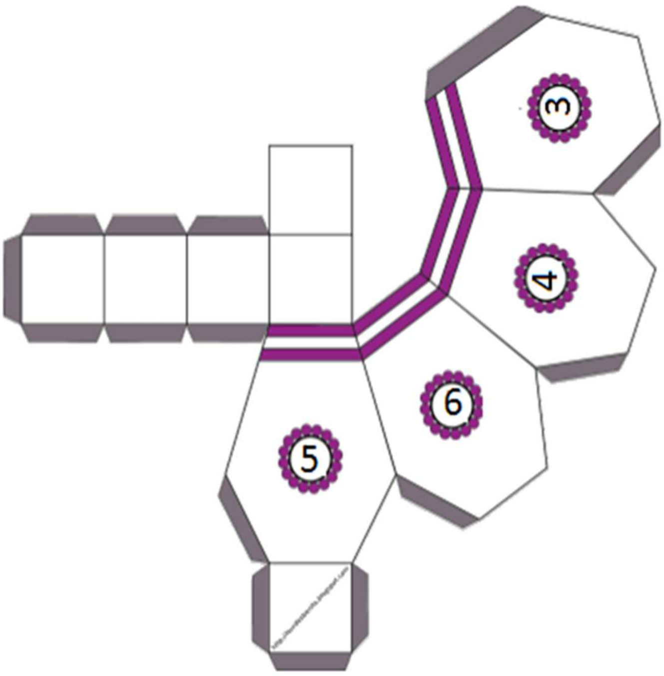
Anexo No.6. Cartas de sustracciones.

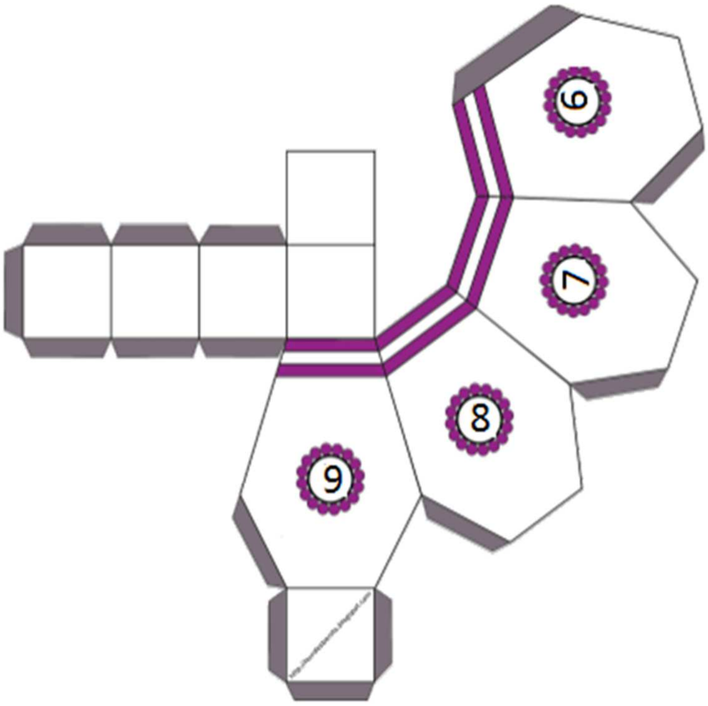
Quitar 20	Quitar 200
Quitar 968	Quitar 9
Quitar 59	Quitar 145
Quitar 96	Quitar 1456
Quitar 256	Quitar 400
Quitar 81	Quitar 1000
Quitar 100	Quitar 10
Quitar 1	Quitar 77
Quitar 25	Quitar 500

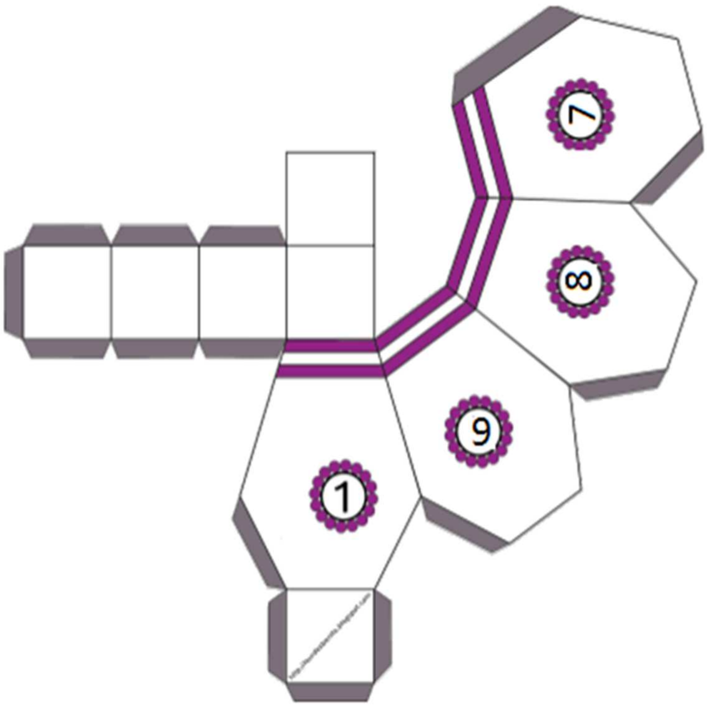
Anexo No.7. Bolos.

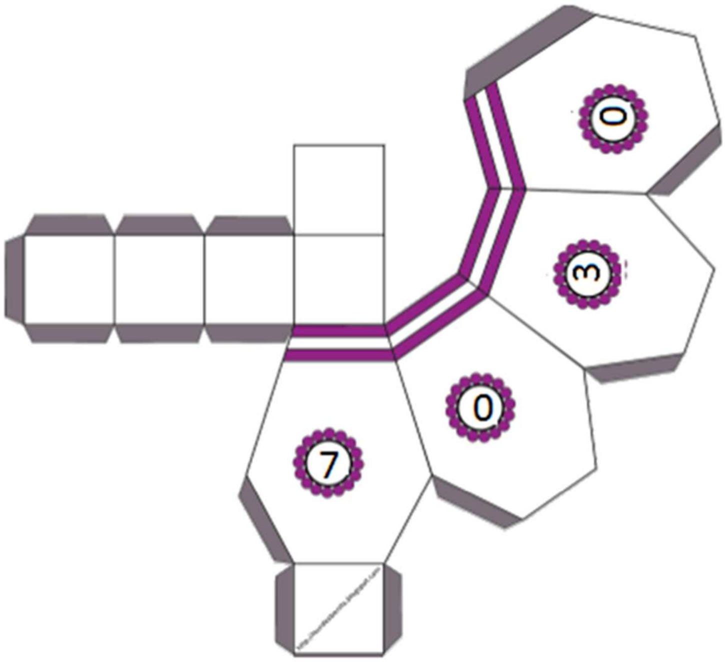




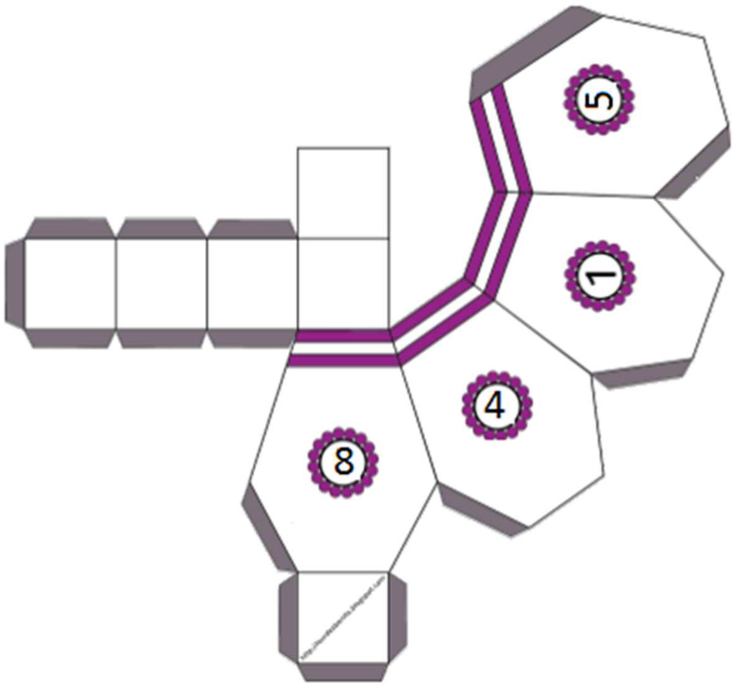



6
7
8
9


7
8
9
1



0
3
0
7

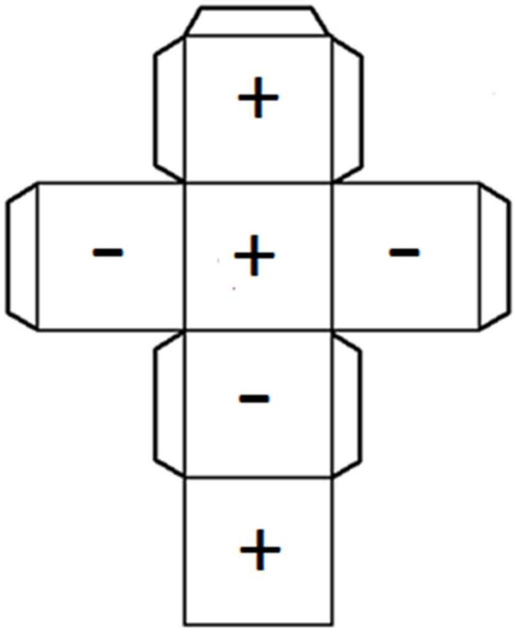


5
1
4
8


0
6
3
5


3
7
9
1

Anexo No.8. Dado de adición y sustracción.



Anexo No.9. Tabla de registro

Tabla de registro Nombre del jugador: ______________________ Nombre del equipo. ______________________			
Bolos derribados	**Ronda 1**	**Ronda 2**	**Ronda 3**

5.4 LABORATORIO 4. MULTIPLICAR ES SUMAR

5.4.1 Guía del maestro.

<table>
<tr><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</th><th>PENSAMIENTO MATEMÁTICO</th><th>ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Reconocer la multiplicación como una adición de sumandos iguales.

Plantear y resolver problemas que involucren la multiplicación.

Determinar equivalencias numéricas con ayuda de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Reconocer las formas de multiplicar en otras culturas.</td><td>Numérico y sistema numérico.</td><td>Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DESEMPEÑOS ESPECÍFICOS</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Reconoce la multiplicación como una adición de sumandos iguales.
• Plantea y resuelve problemas que involucran la multiplicación.
• Determina equivalencias numéricas con ayuda de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.
• Reconoce las formas de multiplicar en otras culturas.</td></tr>
</table>

MOMENTOS	FASES	ACTIVIDADES	RECURSOS
Momento 1	Apertura o exploración	Dados multiplicativos	Dados de cifras y multiplicaciones (Anexo 1) fichas, botones, hojas de puntaje (Anexo 2). Guía del estudiante: Actividad No.1.
Momento 2	Desarrollo o estructuración de la clase.	Conversatorio	Marcadores, tablero, tizas, guía del estudiante: Actividad No.2. Leer orientaciones didácticas.
	Trabajo independiente	Las estructuras multiplicativas.	Lápiz, borrador, guía del estudiante: Actividad No.3.
	Trabajo cooperativo	Problemas multiplicativos cada uno a su manera.	Banco de problemas (Anexo 3). Guía del estudiante: Actividad No.4.
Momento 3	Cierre o transferencia	Construcción de las tablas de multiplicar. Juego *“Completa las tablas”*	Lápiz, guía del estudiante con las pistas: Actividad No.5. (Anexo 4). Juego (Anexo 5 y 6).
Momento 4	Para aprender más	La multiplicación en otras culturas.	Guía del estudiante: Actividad No.6.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA CLASE

El sistema numérico más antiguo del que se tiene registro data de 20000 a. C. (período paleolítico), fue descubierto gracias al hueso de Ishango en el que se evidenció un sistema conocido como el método de agrupamiento, en el cual, el uno se representaba por un trazo, y se empleaban repeticiones de este para simbolizar cualquier otro dígito.

Desde hace siglos, por la necesidad del hombre de mantener control sobre sus pertenencias y comercializar, las primeras civilizaciones desarrollaron sus propios sistemas de representación numérica y utilizaron cálculos aritméticos como la adición, la multiplicación y la división. Evidencia de esto se encontró en los restos arqueológicos de piezas de hueso y arcilla, en los cuales se grababan diferentes textos con lenguaje matemático.

Algunas civilizaciones como la babilónica, la egipcia, la griega, y la china evolucionaron en sus métodos aritméticos y en las formas como resolvían operaciones, las cuales fueron de apoyo a la matemática actual. Los babilonios, por ejemplo, no conocieron las tablas de multiplicar, sino que utilizaron una tabla de cuadrados y fórmulas como base para efectuar multiplicaciones de las siguientes dos maneras:

$$m \times n = \frac{(m+n)^2 - m^2 - n^2}{2}$$

$$m \times n = \frac{(m+n)^2 - (m-n)^2}{4}$$

El siguiente ejemplo nuestra como se usa la primera fórmula:

$$8 \times 4 = \frac{(8+4)^2 - 8^2 - 4^2}{2}$$

$$8 \times 4 = \frac{(12)^2 - 8^2 - 4^2}{2}$$

$$8 \times 4 = \frac{144 - 64 - 16}{2}$$

$$8 \times 4 = \frac{144 - 80}{2}$$

$$8 \times 4 = \frac{64}{2}$$

$$8 \times 4 = 32$$

Se puede usar la segunda fórmula y el resultado será el mismo.

Por otro lado, la matemática que se conoció de los egipcios procedió de datos obtenidos de dos papiros que contenían problemas matemáticos con sus soluciones; el papiro de Ahmes (o papiro matemático de Rhind) y el de Moscú, ambos datan aproximadamente de 1650 a.C.

Aproximadamente hace 5000 años, los egipcios desarrollaron un sistema numérico decimal, aditivo sin valor posicional. Representado a partir de jeroglíficos y pictogramas, en el cual, las potencias de diez eran representadas por diferentes símbolos. Estos jeroglíficos fueron complejos para escribir, por eso, solo se utilizaron para trazar y hacer grabados en templos o columnas.

Los escribas requirieron de un método de escritura más abreviado, que pudiera ser manipulado con más facilidad; fue entonces cuando idearon la escritura Hierática, la cual se basó en diferentes símbolos para los dígitos del uno al nueve; también para los múltiplos de diez hasta el 100, de 100 hasta el 1000, y así sucesivamente con todas las potencias de diez. Gracias a esto, hacer sumas y otras operaciones fue más fácil; en la adición solo agrupaban y sustituían los pictogramas por los valores correspondientes; mientras que en la multiplicación utilizaron el método de duplicación, de la siguiente manera.

- Estableciendo dos columnas paralelas, en la primera escribían el número uno y en la segunda el primer factor que se iba a multiplicar.
- Se iniciaban haciendo duplicación en la columna del digito uno, utilizando las potencias de dos $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$, hasta obtener una cifra que no rebasara el valor del segundo factor que se quería multiplicar.
- Seguidamente hacían duplicaciones de la segunda columna, (primer factor a multiplicar) hasta conseguir la misma cantidad de duplicaciones que se obtuvieron en la primera columna, es decir la del número uno.
- Para terminar, seleccionaban los números de la primera columna que sumados lograran el valor del segundo factor a multiplicar. A continuación, sumaban las cifras de la segunda columna, ubicados frente a los números seleccionados en la primera columna. El total de esta adición era el producto de los factores.

Lo anterior se puede analizar con el siguiente ejemplo.

$$48 \times 24$$

1	48
2	96
4	192
8	384
16	768

En el ejercicio anterior, en la primera columna se escriben las potencias de dos, hasta obtener 16, si se escribe la siguiente potencia, excedería el valor del segundo factor, que en este caso es 24; en la segunda columna se ubica el 48, como el primer factor a multiplicar y se realizan las duplicaciones necesarias hasta obtener la misma cantidad de repeticiones que en la primera columna.

Para continuar se buscan los números de la primera columna que al sumar proporcionaran como resultado el valor del segundo factor a multiplicar (24).

	1	48
	2	96
	4	192
$\Rightarrow$	8	384
$\Rightarrow$	16	768

Al terminar, se adicionan los números ubicados frente a los dígitos que en la primera columna sumaron el valor del segundo factor (24), en este caso 384 y 768.

8 $\Rightarrow$	384
16 $\Rightarrow$	768

Total 1152

En la multiplicación por duplicación, se puede analizar dos conceptos importantes para los egipcios, el primero, “Todo número se puede expresar como una suma de potencias de dos” (Luque, Mora, & Torres) y la segunda, es la propiedad distributiva de la suma y la multiplicación. También fue un método estandarizado para el cálculo de áreas usado en África y en el sur de Egipto.

El método multiplicativo por duplicación manipulado por los egipcios, fue adoptado por los griegos, quienes le hicieron algunas variaciones. Estas diversificaciones se conocieron como el método de duplicación de los campesinos rusos, también llamado método de duplicación de los campesinos rusos, o mediación o multiplicación etíope.

Los griegos, efectuaban esta forma de multiplicar, representando dos columnas, cada una con los números que querían multiplicar, en este caso no utilizaban el uno ni las potencias de dos. En la columna de la izquierda iban dividiendo por dos hasta llegar a uno, empezando por el primer factor que quería multiplicar, y en la columna de la derecha duplicaban el segundo factor hasta obtener la misma cantidad de números que se consiguieron en la primera columna. Para terminar, escribían el valor de la columna de la derecha que se ubicaba frente al número uno logrado al descomponer el primer factor, este era el resultado de la multiplicación.

Ejemplo:

$$32 \times 248$$

32	248
16	496
8	992
4	1984
2	3968
1	7936

El resultado de $248 \times 32 = 7936$.

Cuando el número que se iba a dividir (por dos) era impar, no representó ninguna dificultad, para esto redondeaban a la baja y seguían el proceso igual, la única diferencia era que el resultado de la multiplicación era el total que se obtenía de sumar los números que se encontraban frente a los dígitos impares de la columna izquierda. Ejemplo:

$$38 \times 45$$

38	45
19	90
9	180
4	360
2	720
1	1440

Descartando los números pares y sumando los impares se obtiene.

19 ⇨	90
9 ⇨	180
1 ⇨	1440

$$90 + 180 + 1440 = 1710$$

Los chinos en el texto matemático Zhoubi Suanjing "Nueve capítulos sobre el arte de la matemática”, escrito entre los siglos XII y II a. C, registraron multiplicaciones efectuadas en palabras. Su forma de multiplicar era similar a la de los mayas, en la cual disponían varillas de diferentes materiales o dibujaban líneas de modo horizontal y vertical tantas veces como lo indicaban los dígitos del multiplicando y el multiplicador. Luego marcaban puntos en los lugares donde se cruzaban las líneas y sumaban lo que estaba en la misma diagonal. Sí la suma obtenida tenía más de dos dígitos, llevaban las decenas a la siguiente diagonal e indicaban únicamente la cifra de las unidades. Figura 8. Ejemplo:

$$23 \times 24 = 552$$

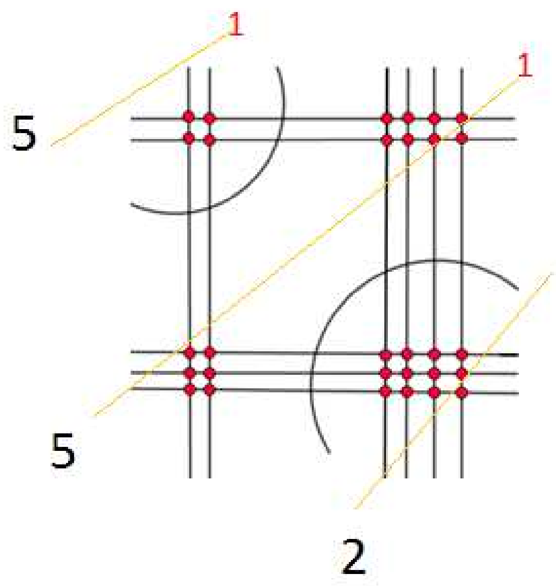


Figura 11. Ejemplo de la multiplicación china.

También, se encuentran una gran variedad de algoritmos que fueron empleados por culturas posteriores. Por ejemplo, el método de la red, o celda; se cree que fue inventado por matemáticos de la india y fue conocido aproximadamente desde 1010 cuando el académico persa Karaji lo demostró en su libro "*Libro de las satisfacciones*".

El método de red o celda fue un arreglo rectangular o cuadrado, dependiendo de la cantidad de dígitos de los números que querían multiplicar, uno de los factores lo escribían arriba de las celdas (se leía de izquierda a derecha) y el otro lo colocaba a la derecha (se leía de arriba abajo). Figura 12.

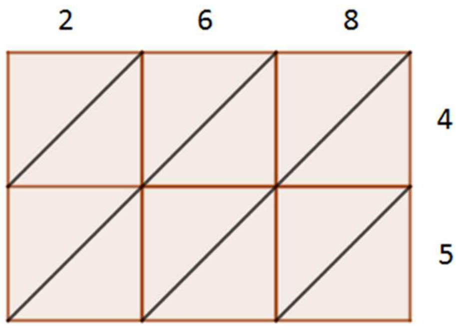


Figura 12. Ubicación del multiplicando y el multiplicador en las casillas de la multiplicación de red o celda.

Seguidamente rellenaban la tabla con los productos de los números correspondientes a cada una de las filas y las columnas, los resultados los ubicaban en las subdivisiones de la tabla; las decenas, en la subdivisión de arriba y las unidades en la de abajo; si el producto era un solo dígito, escribían cero en la subdivisión de arriba. Figura 13.

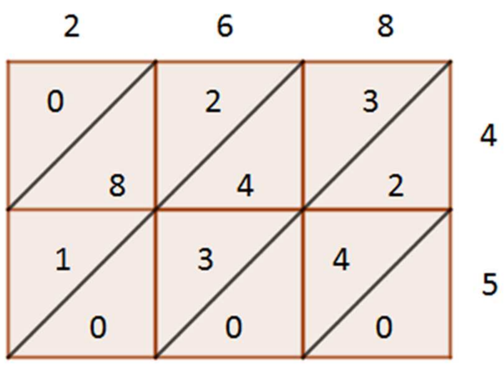


Figura 13.Ubicación de factores en la multiplicación de red o celda.

Cuando completaban la tabla, procedían a sumar los números ubicados en la misma diagonal de derecha a izquierda, comenzando por la esquina inferior derecha y terminando con la esquina superior izquierda. Sí la suma obtenida era de más de dos dígitos, llevaban las decenas a la siguiente diagonal e indicaban únicamente la cifra de las unidades. Figura 14.

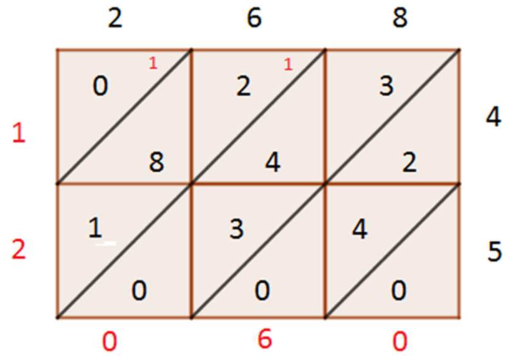


Figura 14. Representación de diagonales en la multiplicación de red o celda.

Por último, leían el resultado final de arriba abajo y de izquierda a derecha del borde de la tabla. Figura 15.

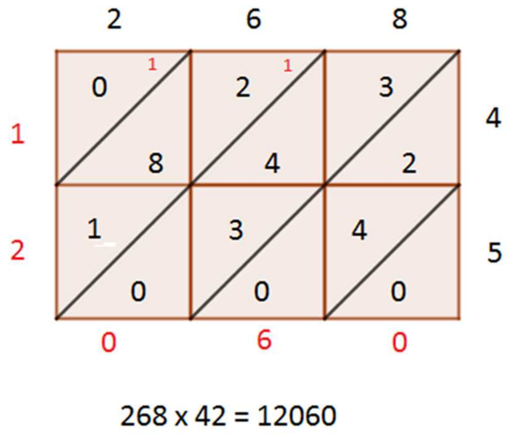


Figura 15. Representación de la forma de leer el producto en la multiplicación de red o celda.

El método moderno de multiplicación está basado en el sistema de numeración Indo-Arábico, y fue descrito por primera vez por el matemático indio Brahmagupta ($598 - 665$ a. C), quien proporcionó las reglas para la suma, la sustracción, la multiplicación y la división.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Este laboratorio "Estructuras multiplicativas" plantea diferentes situaciones, a partir de las cuales los estudiantes tendrán la oportunidad de fundar sus conocimientos sobre la multiplicación, utilizando diferentes materiales y estrategias de trabajo. A través de cuatro momentos; exploración, estructuración, transferencia y para aprender más.

La exploración o apertura, se efectúa con la actividad "*Dados multiplicativos*", la cual permite que los estudiantes hagan un repaso sobre las tablas de multiplicar. Solicite a los estudiantes que se organicen en parejas y ensamblen los dados multiplicativos (Anexo 1). Seguidamente haga un ejemplo, que ilustre a todos sobre lo que deben hacer durante este primer momento e indique que la guía del estudiante también lo explica. Ver guía del estudiante: Actividad No.1.

El segundo momento, se divide en tres fases; el primero llamado "*Conversatorio*" Actividad No. 2, con el cual se inicia la estructuración de la clase. Para esto, explique la siguiente situación problema: Se han dividido los estudiantes del grado quinto en seis grupos y quieren entregar 15 dulces a cada uno de los seis grupos como estímulo por su buen comportamiento. Si necesitan calcular el número exacto de dulces ¿De qué manera lo pueden averiguar? Permita que los estudiantes contesten libremente y luego recuérdeles lo que saben de la multiplicación. Además, ejemplifique lo que realizaron en el momento anterior. Las siguientes son algunas preguntas que puede hacer:

- ¿La multiplicación 5×8 da como resultado el mismo número que la multiplicación 8×5? ¿Por qué?
- ¿Cómo podrían ilustrar o visualizar una multiplicación de tres números? Por ejemplo $2 \times 5 \times 3$.
- ¿La multiplicación es una suma repetida? ¿Por qué?

Para terminar soluciones la situación problema haciendo alusión a las multiplicaciones $6 \times 15 = 90$ o $15 \times 6 = 90$ con las cuales se soluciona el problema. Explique qué sumando seis veces 15 o 15 veces seis también se puede solucionar. Durante esta explicación haga alusión a que la multiplicación es una suma de los mismos factores, también a la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Exponga que, a través de las representaciones, se logra ilustrar el significado de una multiplicación y que las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva (de la suma con la multiplicación) pueden ser ilustradas en situaciones cotidianas, y que además estas ayudan a determinar varias equivalencias numéricas.

Seguidamente indique a los estudiantes que deben realizar el trabajo independiente (Actividad No.3.) "*Estructuras multiplicativas*". Este consiste en que cada uno complete los espacios indicados en los recuadros. Los cuales hacen alusión a la representación de la multiplicación y sus propiedades.

Para terminar el segundo momento, desarrolle el trabajo colaborativo "*Problemas multiplicativos cada uno a su manera*" (Actividad No.4.). Organice los estudiantes en grupos de cuatro integrantes y entregue a cada equipo el anexo 3, para ser recortado.

Solicite a cada integrante del grupo que elija al azar una de las tarjetas con problemas (Anexo 3) y lo lea en voz alta a los demás miembros del grupo. Una vez leído el problema, todos deben solucionarlo de forma individual y de la manera que más les convenga. Cuando todos los miembros del grupo hayan terminado, pida que socialicen sus repuestas y estrategias de solución.

Repita el ejercicio con una nueva tarjeta. Así cada estudiante resolverá varios problemas. Es recomendable que circule por todos los grupos, asegurándose que todos los integrantes hayan entendido bien la tarea, conjuntamente vaya recordando los pasos para resolver bien un problema matemático (entender bien el problema, saber qué se quiere conseguir, lo que pide resolver; identificar los datos que brinda el enunciado y qué operación matemática se debe realizar; por último, efectuar la operación que dará la solución al problema).

En el momento tres, cierre o transferencia, indique a los estudiantes que van a construir las tablas multiplicar, para esto deben seguir las pistas que se encuentran en la guía del estudiante (Actividad No. 5) y utilizar el anexo 4. Esta tabla es útil para explorar no solo la multiplicación sino estrategias de adición y sustracción, además sirve para contar agrupando y para trabajar el orden ascendente y descendente. Una vez terminada la tabla verifique que esté correcta.

Para terminar el tercer momento, realice el juego "*Completa las tablas*". Para esto, pida a los estudiantes que se organicen en grupos de cinco o seis integrantes, distribuya a cada grupo un tablero de juego (Anexo 5) y las fichas (Anexo 6). Solicite que manera equitativa repartan las tarjetas de juego (según la cantidad de integrantes es la cuantía de fichas o tarjetas que les corresponde).

Explique las condiciones de juego, las cuales consisten en ubicar las tarjetas o fichas en el tablero de manera consecutiva, es decir, uno de los jugadores inicia situando cualquier número en el lugar que le corresponde en el tablero, seguidamente cada jugador ubica una de sus tarjetas en el tablero, pero esta no puede ubicarse en cualquier lugar, siempre deben estar consecutivas a las fichas que ya están en el tablero. Si alguno no tiene una tarjeta que corresponda a esos lugares sigue el otro compañero. Gana quien primero termine todas las fichas.

Como actividad complementaria "para aprender más", organice los estudiantes en equipos de tres estudiantes y pídales que consulten la manera como multiplicaban en las culturas china, rusa, egipcia y árabe, para socializarlas en la próxima sección. De ser necesario usted debe ir aclarando las dudad en el momento de la socialización.

En este laboratorio se puede utilizar el marqués del laboratorio de los múltiplos.

5.4.2 Guía del estudiante.

Lo que comprenderás:

- Reconocer la multiplicación como una adición de sumandos iguales.
- Plantear y resolver problemas que involucren la multiplicación.
- Determinar equivalencias numéricas con ayuda de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.
- Utilizar la multiplicación en la solución de problemas.
- Reconocer las formas de multiplicar en otras culturas.

Materiales:

Dados multiplicativos, fichas, botones, hojas de puntaje, guía del estudiante, juego "*Completa las tablas", parqués-múltiplo, banco de problemas.

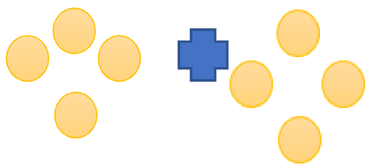
Práctica de exploración

Actividad No.1. Dados multiplicativos. (Anexos 1 y 2)

Para realizar esta actividad, debes buscar un compañero y armar los dados (Anexo 1), uno de los dados representa las cifras del uno al seis y el otro la multiplicación (veces que se debe repetir la cifra lanzada). Luego de lanzar los dados simboliza con fichas la multiplicación indicada y enuncia la respuesta en voz alta.

Ejemplo:

2 veces el número 4



Los dados indican: 2 veces el número cuatro. Es decir 2

$2 \times 4 = 8$ (dos por cuatro es igual a ocho)

$4 + 4 = 8$ (cuatro más cuatro es igual a ocho)

Lo anterior es equivalente, por la propiedad conmutativa del producto, a sumar 4 veces 2. Así: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$

Seguidamente escriba la respuesta en la hoja de puntaje. (Anexo 2)

Repetir el procedimiento seis veces y al finalizar se suman los resultados de cada jugador y quien obtenga el total más alto será el ganador.

Actividad No.2. Conversatorio.

Con mucha atención y cuidado escucha la explicación del profesor y responde cuando sea necesario. ¿Cómo se podría modificar el juego para que se use la propiedad conmutativa del producto? Construye tus propios dados.

Actividad No.3. Estructuras multiplicativas.

Multiplicación

Completa el cuadro en cada caso:

Símbolo de la multiplicación: $\boxed{\quad}$

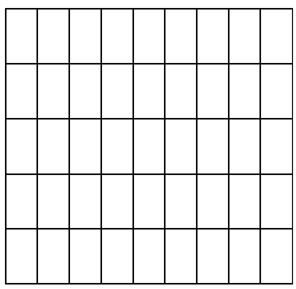
El $\boxed{\quad}$ es el símbolo para representar el resultado de la multiplicación.

La **multiplicación** consiste en encontrar el producto de dos o más factores.

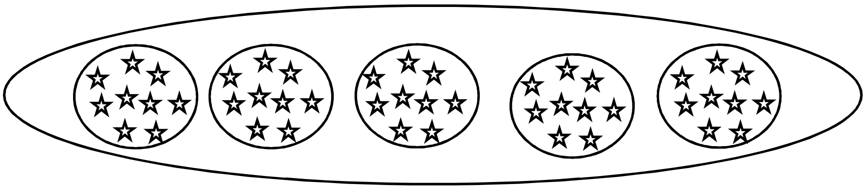
Ejemplo.	$\mathbf{15}$	$\times$	$\mathbf{4}$	$=$	$\mathbf{60}$
	Multiplicando o factor		Multiplicador o factor		Producto

Ejercicio.

Abajo encuentras dos representaciones. Completa las casillas vacías utilizando las expresiones matemáticas apropiadas.



____ filas de ____ casillas dan ____ casillas.



____ paquetes de ____ estrellas da ____ estrellas.

Propiedad Conmutativa

La operación de multiplicación es conmutativa, porque podemos cambiar el orden de los factores sin que esto modifique el resultado. Por ejemplo:

$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$ y también $\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$

Propiedad Asociativa

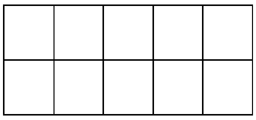
La multiplicación es **asociativa,** lo que significa que cuando se multiplican tres factores**,** se pueden agrupar de maneras diferentes sin alterar el resultado de la operación. No importa cómo se agrupen los factores, el resultado va hacer siempre el mismo.

Dos representaciones de la expresión $2 \times 5 \times 3$:

1° $(2 \times 5) \times 3$

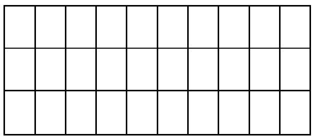
2×5

5

2  $= 10$

10×3

10

3  $= 30$

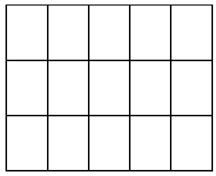
$$\underbrace{(2 \times 5)}_{10} \times 3$$

$$10 \times 3 = 30$$

2° $2 \times (5 \times 3)$

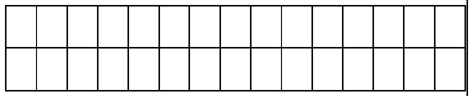
5×3

5

3  $= 15$

2×15

15

2 

$= 30$

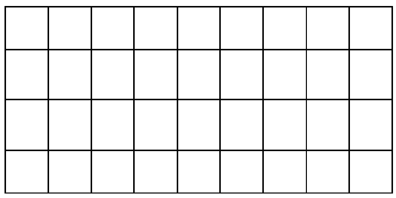
$$2 \times \underbrace{(5 \times 3)}_{15}$$

$$2 \times 15 = 30$$

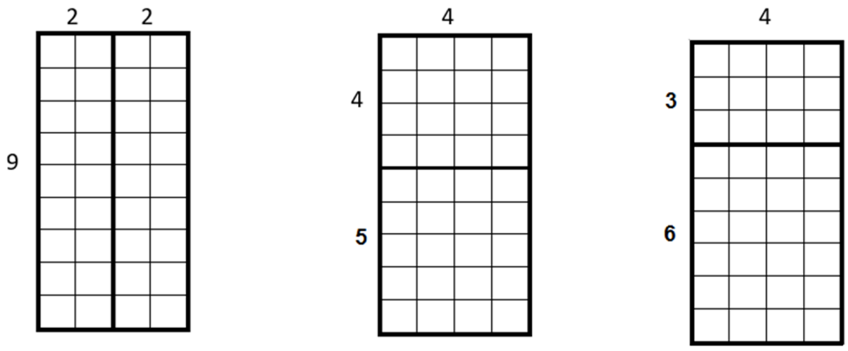
En general la propiedad asociativa se puede ver así:

$(\square \times \square) \times \square = \square$ y también $\square \times (\square \times \square) = \square$

La siguiente es una representación de la expresión numérica 9×4:



A continuación, se muestran tres formas diferentes de descomponer el rectángulo que representa 9×4:



Cuando escribes estas equivalencias numéricas utilizas la ley distributiva de varias formas.

A. 9×4

B. 9×4

C. 9×4

Propiedad Distributiva

La multiplicación es distributiva (con la suma y la resta). Se pueden multiplicar números por partes.

Por ejemplo, para multiplicar 9×4, podemos descomponer el 4 en 2 más 2, y multiplicar 9 por cada número de la siguiente manera:

$$9 \times 4 = 9 \times (2 + 2) = (9 \times 2) + (9 \times 2) = 36$$

La propiedad distributiva también es útil para desarrollar cálculos mentales. Ejemplo: Para multiplicar 9×4 podemos escribir:

$$9 \times 4 = (10 - 1) \times 4 = (10 \times 4) - (1 \times 4) = 40 - 4 = 36$$

Realiza la multiplicación 12×5 utilizando la propiedad distributiva:

Actividad No.4. Problemas multiplicativos cada uno a su manera. (Anexo 3)

Organiza grupos de cuatro estudiantes y recorta el anexo 3, "*Banco de problemas*" seguidamente cada uno toma una tarjeta y la leer en voz alta e individualmente dar solución a los problemas. Cuando todos hayan terminado, socializar las respuestas y las estrategias utilizadas. Repetir el mismo ejercicio con otras tarjetas de problemas.

Actividad No.5. Construcción de las tablas de multiplicar.

Sigue las pistas y completa la tabla de doble entrada (Anexo 4). Así, construirás las tablas de multiplicar. Para terminar, presenta el trabajo a tu profesor.

Pistas:

- Multiplicar es hacer sumas repetidas respetando las singularidades. Ejemplo: 4×5 es hacer 4 grupos de 5 $(5, 10, 15, 20, ...)$, puedes contar por saltos de 2, de 3, de 4,…, etc.
- 0 es elemento nulo o absorbente $(0 \times 7 = 0,\ 7 \times 0 = 0)$, es decir, todo número multiplicado por cero da cero.
- 1 es elemento neutro $(1 \times 7 = 7)$. Todo número multiplicado por 1, da el mismo número.
- La mitad de las tablas es similar a la otra mitad, por eso contienen resultados similares, así que puede utilizar su correspondencia. Ejemplo: $8 \times 2 = 2 \times 8$
- En la diagonal se encuentran los cuadrados perfectos $(0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100)$
- En la tabla del diez agregar cero es suficiente $8 \times 10 = 80$

Actividad complementaria juego "Completa las tablas":

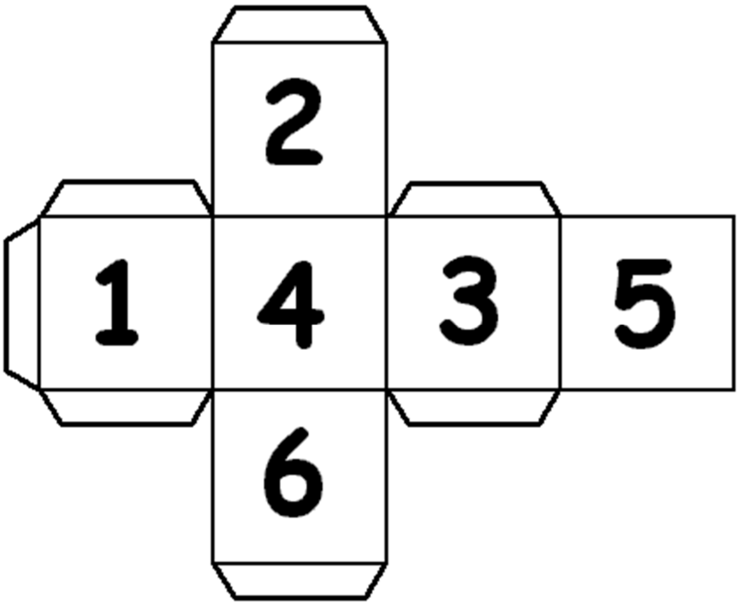
Para realizar esta actividad, debes organizar grupos de cinco o seis compañeros, además solicitar el tablero de juego (Anexo 5) y las fichas (Anexo 6). Seguidamente distribuir las fichas de manera que tos tengan la misma cantidad, cualquiera puede iniciar ubicando en alguna de las casillas la tarjeta que corresponde a dicho lugar, luego cada integrante debe ir ubicando sus tarjetas de manera consecutiva a las que ya están puestas en el tablero, quien no tenga una que sea próxima pasa la ronda y continua el otro jugador. Gana quien primero termine las fichas.

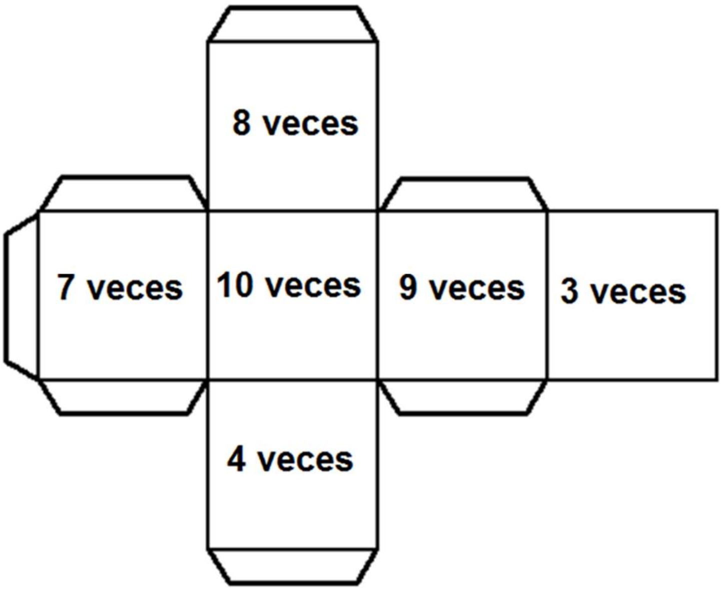
Actividad No.6. La multiplicación en otras culturas.

En grupos de tres estudiantes consultar alguno de los siguientes métodos de multiplicar (chino, ruso, egipcio, árabe). Y socializarlo en la próxima sección.

5.4.3 Anexos laboratorio 4. Multiplicar es sumar

*Anexo No.***1**. ***Dados multiplicativos.***





Anexo No.2. Dados multiplicativos.

	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4	Turno 5	Turno 6	
	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos	Puntos	Total punto
Jugador 2							
Jugador 1							

*Anexo No.*3. ***Banco de problemas.***

Juan es un patinador de la liga Antioqueña que practica todos los días y logra recorrer 189 kilómetros al mes. Si Juan sigue el mismo ritmo, ¿Cuántos Kilómetros habrá recorrido en 6 meses?	Andrea cultiva flores. En enero tenía 15 especies diferentes. A finales de febrero, tenía cuatro veces el número de especies de flores que tenía en enero. ¿Cuál es el número total de especies de flores que cultiva Andrea?
A Natalia le encanta leer. Todos los días lee 50 páginas de cualquier libro. Si Natalia continua así, ¿Cuántas páginas habrá leído después de dos semanas? Recuerda que la semana tiene 7 días.	Ana es una especialista en fabricar colchones y en promedio fabrica 3 colchones por día. ¿Cuántos colchones habrá fabricado Ana en un año? (un año tiene 365 días).
En una tienda venden un televisor por sólo 1000 pesos diarios para pagar sin intereses en un año. Si un año tiene 365 días y un mes 30 días. ¿Cuánto hay que pagar al mes para comprar el televisor? ¿Cuál es el precio del televisor? ¿Cuánto habría que pagar al trimestre si de esa manera se quisiera hacer el pago?	José cultiva mangos. Su producción se mide en bolsas, canastillas y barriles. Una bolsa contiene 12 mangos, una canastilla 3 bolsas y un barril 3 canastillas. Si José vende 5 barriles, ¿Cuántos mangos vendió en total? ¿Si José empaco 15 bolsas cuántos mangos recogió?
En el colegio San Bartolomé hay 10 grupos de 30 estudiantes cada uno. ¿Cuántos estudiantes hay en todo el colegio?	En una granja de cerdos, nacen 250 cerdos por día. Después de pasados 15 días ¿Cuántos cerdos habrá en la granja?
Un avión lleva 895 personas en cada viaje. ¿Cuántas personas llevará en 5 viajes?	En un colegio compraron 8 libros a 25000 pesos cada uno. ¿Cuánto pagó el colegio por el total de los libros?
En una finca hay 223 árboles frutales, si cada uno tiene 24 frutas. ¿Cuántas frutas hay en total en toda la finca?	Ana empaca en cajas los abanicos que vende, en cada una empaca una docena, si Ana envió al almacén 5 cajas. ¿Cuántos abanicos empacó?

Anexo No. **4**. ***Tabla de doble entrada.***

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Anexo No.5. Juego completa las tablas.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Anexo No. 6. Fichas para el juego completa las tablas. (Recortable)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
3	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**
4	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**	**40**
5	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**
6	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**	**42**	**48**	**54**	**60**
7	**14**	**21**	**28**	**35**	**42**	**49**	**56**	**63**	**70**
8	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**56**	**64**	**72**	**80**
9	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**90**
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**

CAPÍTULO 6

LOS NÚMEROS ENTEROS

En este capítulo se define el conjunto de los números enteros con sus operaciones de suma y producto y sus respectivas propiedades. Además, se estudian los números enteros como un conjunto ordenado.

6.1 CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS, A PARTIR DE LOS NÚMEROS NATURALES

"Los números enteros son la creación más libre de la mente humana" Richard Dedekind.

Durante miles de años los hombres utilizaron el concepto de número de una manera inductiva, con estos podían enumerar, representar y mantener el orden de sus pertenencias. Así surgieron los números naturales, como aquellos que servían para contar cosas, sin embargo, estos no fueron suficientes pues existían problemas para los cuales este conjunto de números no poseía la solución, ya que los números naturales se podían sumar y multiplicar, pero no siempre se lograban efectuar algunas restas y divisiones. Este hecho condujo a la extensión de los números naturales, la cual se realizó con la creación del conjunto de los números enteros, los cuales representaban las pérdidas y las deudas. Estos números también fueron llamados números deudos o absurdos. Fueron sistematizados por Diofanto de Alejandría en el siglo III a. C. Este matemático introdujo algunas definiciones y el símbolo utilizado para el menos.

Posteriormente, en el año 620 a. C. Brahmagupta[10] formuló un conjunto de reglas para realizar operaciones con números negativos. Ideas que fueron adoptadas en el siglo IX por Al-Juarismi[11] en Bagdad.

---

10 Brahmagupta: Astrónomo y matemático indio que nació en la ciudad de Bhinmal en la India del noroeste aproximadamente entre 597 - 668 D C (Wikipedia, 2017).

11 Al-Juarismí: Matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán que vivió aproximadamente entre 780 y 850 D C. Escribió sobre las ventajas del uso de los decimales y también divulgó un método para resolver problemas matemáticos (Wikipedia, 2017).

Los números negativos fueron adoptados en Europa solo hasta el siglo XV, producto del estudio de algunos textos árabes. Los chinos, también utilizaron los números negativos en su sistema de varas.

En la actualidad estos números son muy importantes y forman parte de la ingeniería, la física, la economía, la finanza y la ciencia en general.

Definición 1. La unión de $\mathbb{N}_0$ con $\mathbb{N}_1$ se llamará conjunto de los enteros y se denotará mediante la letra $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1 = \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1,2,3, \dots\}$$

También se usa $\mathbb{Z}^+ \equiv \{1,2,3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^- \equiv \{-1, -2, -3, \dots\}$ y ${\mathbb{Z}_0}^+$ como alternativa para $\mathbb{N}_0$. Es decir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \mathbb{N}^+ \cup \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1,2,3, \dots\}$$

Aplicando $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ (inverso aditivo de un número positivo es negativo, el inverso aditivo de un número negativo es positivo) los números del conjunto $\mathbb{Z}^-$ son negativos. Más aun, $-2 < -1$, ya que esta desigualdad es el resultado de aplicar $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$ (cada uno de los miembros de una desigualdad se multiplica por un mismo número negativo, la desigualdad cambia su sentido). En general:

$$\dots < -3 < -2 < -1 < 0.$$

Nota. El inverso aditivo de 0 es el mismo 0.

En concordancia con esto se dice que $\mathbb{Z}^+$ es el conjunto de los enteros positivos, $\mathbb{Z}^-$ el de los enteros negativos y ${\mathbb{Z}_0}^+$ el de los enteros no negativos.

A continuación, se presenta una de las formas de construir el conjunto de los números enteros a partir del conjunto de los números naturales.

Para todo número natural $\mathrm{n} \neq 0$ seleccionamos un nuevo símbolo que representamos por $(-\mathrm{n})$ y definimos el conjunto de los números enteros así:

$$\mathbb{Z} = \{-\mathrm{n} | \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \neq 0\} \cup \mathbb{N}$$

6.2 OPERACIONES

6.2.1 Adición de números enteros.

A continuación, se define la adición en $\mathbb{Z}$ mediante las siguientes reglas:

1. Si $x, y \in \mathbb{N}$ se define que $x + y$ usando la definición en $\mathbb{N}$.
2. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ se define: $x + 0 = 0 + x = x$.
3. Si m y n son números naturales diferentes de cero y $m = n + k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se define que:

a) $m + (-n) = (-n) + m = k$.
b) $(-m) + n = n + (-m) = \begin{Bmatrix} -k & \text{si} & k \neq 0 \\ 0 & \text{si}\, k & = 0 \end{Bmatrix}$
c) $(-m) + (-n) = -(m + n)$.

Al observar que dados x, y donde al menos uno de ellos no es un número natural, alguna de las alternativas $(a), (b)$, o (c) define $x + y$.

La adición antes definida goza de las siguientes propiedades:

Propiedad 1. Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Propiedad 2. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ entonces $x + y = y + x$.

Propiedad 3. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x + 0 = 0 + x = x$.

Propiedad 4. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x + y = 0$.

El elemento y de la propiedad 4 se denomina el opuesto de x y se denota $(-x)$. Usualmente se escribe como: $x - y$ en vez de $x + (-y)$.

6.2.2 Multiplicación de números enteros.

A continuación, se define la multiplicación en $\mathbb{Z}$ mediante las siguientes reglas:

1. Si $x, y \in \mathbb{N}$ usamos la multiplicación definida en $\mathbb{N}$.
2. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, definimos $x0 = 0x = 0$.
3. Si m, n son naturales diferentes de cero, se define que:

a) $(-m)n = n(-m) = -(mn)$.
b) $(-m)(-n) = mn$.

Nuevamente se observa que dados x, y distintos de cero donde al menos uno de ellos no es natural, alguna de las alternativas a ó b define su producto.

A continuación, se enuncian las propiedades fundamentales de la multiplicación de enteros.

Propiedad 1. Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ entonces $(xy)z = x(yz)$.

Propiedad 2. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $xy = yx$.

Propiedad 3. Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x1 = x$.

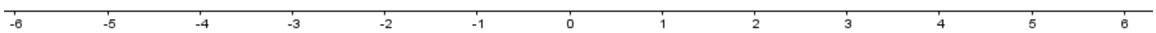
Propiedad 4. Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x(y + z) = xy + xz$.

Propiedad 5. si $x, y \in \mathbb{Z}$, con $x , y \neq 0$ entonces $xy \neq 0$.

Propiedad 6. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ son tales que $xz = yz$ entonces $x = y$.

6.2.3 Orden en los números enteros.

Se dice que dos números representados gráficamente, es mayor aquel que está situado más hacia la derecha, y menor el que se sitúa más a la izquierda en la recta numérica.



La relación definida por $x \leq y$ sí y solo si $y - x \in \mathbb{N}$ es una relación de *orden total* sobre $\mathbb{Z}$.
• Si $x \leq y$ $x \neq y$, matemáticamente se escribe $x < y$.
• Si $0 < x$ se dice que x es un entero positivo. Se denota por $\mathbb{Z}^+$ en el conjunto de los enteros positivos.
• Matemáticamente se usa $x > 0$ para decir que x es positivo.
• Los enteros x que satisfacen $(-x) > 0$ se denominan negativos.
• Matemáticamente se escribe $x < 0$ para decir que x es negativo.

El orden definido sobre $\mathbb{Z}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Si $x, y \in \mathbb{Z}^+$entonces $x + y \in \mathbb{Z}^+$ y $xy \in \mathbb{Z}^+$.
2. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera $x < y, x = y, y < x$.
3. Si $x, y \in Z$ son tales que $x \leq y$ entonces para todo $z, x + z \leq y + z$.
4. Si $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$ son tales que $x \leq y$ y z _ w entonces $x + z \leq y + w$.
5. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ son tales que $x \leq y$ y $z > 0$ entonces $xz \leq yz$.
6. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ son tales que $x \leq y$ y $z < 0$ entonces $yz \leq xz$.

CAPÍTULO 7

OTROS RESULTADOS DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS

En este capítulo se estudian temas fundamentales de la teoría de números como los números pares e impares, números primos o compuestos, el algoritmo de la división, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo con algunas de sus propiedades.

Los números naturales aparte de ser ordenados, se pueden clasificar en: pares e impares.

Si $n \in \mathbb{N}$ y $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $2m = n$, se dice entonces que n es un número ***par.*** Si n no es par se denomina ***impar.*** En consecuencia, si se denota con la letra P el conjunto de los números pares y con el símbolo $P^c \equiv \mathbb{N} - P$ el de los impares, tendremos.

$$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$P^c = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

Estos subconjuntos se forman de la siguiente manera:

Construcción de los números pares: Si se aplica $2(n), n \in \mathbb{N}$, de esta forma n toma los valores del conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ haciendo posible las siguientes operaciones:

$$2(0) = 0$$

$$2(1) = 2$$

$$2(2) = 4$$

$$2(3) = 6$$

$$2(n) = \text{Los números pares}$$

Construcción de los números impares: Si se aplica $2(n) + 1, n \in \mathbb{N}$, de esta forma n toma los valores del conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, luego se suma el número uno, haciendo posible las siguientes operaciones:

$$2(0) + 1 = 1$$

$$2(1) + 1 = 3$$

$$2(2) + 1 = 5$$

$$2(3) + 1 = 7$$

$$2(\mathrm{n}) + 1 = \text{Los números impares}$$

Estos números poseen algunas propiedades:

- Si se suman dos números pares, el resultado será otro número par, es decir los números pares son cerrados bajo la suma. Ejemplo:
  $28 + 34 = 62.$
- Si se multiplican dos números pares, el resultado será otro número par, es decir los números pares son cerrados bajo la multiplicación. Ejemplo:
  $$14 \times 8 = 112.$$
- Si se suman dos números impares, el resultado será un número par, es decir los números impares no son cerrados bajo la suma. Ejemplo:
  $15 + 7 = 22.$
- Si se multiplican don números impares, el resultado será otro número impar, es decir los números impares son cerrados bajo la multiplicación. Ejemplo:
  $7 \times 9 = 63.$

Estas propiedades se pueden catalogar como la cerradura de los números pares e impares.

Demostración. En esta igualdad, n puede tomar el valor de cualquier número desde $1, 2, 3$, ... hasta el infinito, es decir todos los $\mathbb{N}$:

Todos los números pares tienen la forma $\mathrm{p} = 2(\mathrm{n})$, donde $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Al suponer que se tiene dos números pares distintos: $\mathrm{p}_1 = 2\mathrm{m}$ y $\mathrm{p}_2 = 2\mathrm{k}$, donde $\mathrm{m}, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$. Si se suman estos dos números y utilizando la ley distributiva de los números se obtienen el siguiente resultado: $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = 2\mathrm{m} + 2\mathrm{k} = 2(\mathrm{m} + \mathrm{k})$ que también resulta ser par.

Este resultado se puede generalizar de la manera siguiente: Considerando los múltiplos de x, estos tendrán la siguiente forma: $\mathrm{p} = \mathrm{xn}$. Al tomar dos de esos números: $\mathrm{p}_1 = (\mathrm{x})(\mathrm{n}_1)$ y $\mathrm{p}_2 = (\mathrm{x})(\mathrm{n}_2)$. La suma de estos dos números es $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = (\mathrm{x})(\mathrm{n}_1) + (\mathrm{x})(\mathrm{n}_2) = (\mathrm{x})(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2)$. Con esto se puede corroborar que la suma de dos números que sean múltiplos de x, es otro número que también es múltiplo del número x.

En el caso de los impares, un número impar tienen la forma: $2(\mathrm{n}) + 1$. Si se suman dos números impares $\mathrm{x}_1 = 2\mathrm{m} + 1$ y $\mathrm{x}_2 = 2\mathrm{k} + 1$ se tiene:

$x_1 + x_2 = (2m+1) + (2k+1) = 2m + 2k + 2 = 2(m+k+1)$ Resultando ser un número par, puesto $n = m + k + 1,$ que es un entero, porque es la suma de tres números enteros. $p = 2n.$

Sin embargo, si se considera el producto de dos números impares se analiza que en este caso se ha utilizado la ley distributiva dos veces:

$$(x_1)(x_2) = (2m+1) + (2k+1) = (2k)(2m+1) + 1(2m+1)$$

$$= 4mk + 2m + 2k + 1 = [4|mk + 2m + 2k] + 1$$

$$= 2(2mk + m + k) + 1$$

Lo que indica que el resultado de multiplicar dos números impares es otro número impar, puesto que al número par $2(2mk + m + k)$ se le suma el número uno y resulta un impar.

7.1 TEORÍA BÁSICA DE NÚMEROS

Un importante resultado logrado por Andrew John Wiles[12] ayudado por Richard Taylor[13] fue el algoritmo de la división, el cual se obtuvo al resolver el problema llamado el "Último teorema de Fermat".

Teorema 7. 1. Algoritmo de la división
Sean a, b enteros con $b > 0.$ Entonces existen enteros únicos q, r tales que

$$a = bq + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < b.$$

Demostración.

Existencia. Sean $S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z} \text{ y } a - bx \geq 0\}.$ Entonces, $S \neq \emptyset.$ Si $a \geq 0, a - b0 = a \in S.$ Si $a < 0,$ como $b \geq 1$ se tiene que $a - ab = a(1-b) \geq 0$ y así $a - ab \in S.$ Luego $S \neq \emptyset.$

Por el principio del buen orden, S tienen un mínimo r y en consecuencia existe un natural q tal que:

12 Andrew John Wiles: Matemático de origen británico que expuso en 1993 el último teorema de Fermat, que, aunque resultó fallida en primera instancia, fue exitosamente corregida por el propio Wiles en 1995 (Wikipedia, 2017).

13 Richard Lawrence Taylor: Matemático británico que trabaja en el campo de la teoría de los números. (Wikipedia, 2017).

$a - bq = r$ con $0 \leq r$.

De otra manera, puesto que $r = \min S$, entonces $r - b = (a - bg) - b = a - (q + 1)b < 0$, por otro lado $r < b$.

Unicidad. Supóngase que $a = bq + r = bq' + r'$ con $0 \leq r < b$ y $0 \leq r' < b$. Si suponemos $q' < q$ entonces $q' + 1 \leq q$ y, por lo tanto $r = a - bq \leq a - b(q' + 1) = (a - bq') - b = r' - b < 0$

Que evidentemente es una contradicción.

Similarmente si se supone que $q < q'$ se obtiene una contradicción, luego necesariamente $q = q'$ y también $r = r'$.

Utilizando el principio del buen orden, se prueba una forma del principio de inducción denotado con PIM2 (Teorema 7.2). Que permite iniciar la inducción desde cualquier número natural y utilizar una hipótesis de inducción más general.

Teorema 7.2. Sea a un número natural y S un subconjunto de $\{k \in \mathbb{N} | k \geq a\}$ que satisface:

(1). $a \in S$.
(2). Para cada $n > a, n \in S$ siempre que $k \in S$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que, $a \leq k \leq n$.
Entonces,

$$S = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$$

Demostración. Por contradicción, se supone que $S \neq \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\}$ y sea $T = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq a\} - S$. Luego $T \neq \emptyset$ y por el principio del buen orden tienen un mínimo m. Además, puesto que $a \in S$ entonces $m > a$ y para todo k tal que $a \leq k < m$, la minimalidad de m nos garantiza que $k \in S$, por la condición (2) concluimos que $m \in S$ lo cual es una contradicción.

Para aplicar el Teorema 7.2 (PIM2), se deben analizar algunas definiciones.

Definición 1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con a diferente de cero. Se dice entonces que a es divisor de b o que a es un múltiplo de b, y se escribe $a|b$ (que se lee "a divide b" o "b es divisor de a"). Nótese que, según esta definición, 0 solamente puede ser divisor de 0.

Para indicar que a no divide a b escribimos a † b. Es fácil verificar para todo entero $k, 1 \mid k$ y si $k \neq 0$, $k \mid k$.

Definición 2. Un número $n \in \mathbb{N}$ se denomina **primo** si sus únicos divisores son 1 y n. En el conjunto de números naturales, todo entero mayor que 1 tienen al menos dos divisores, el mismo número y el 1.