

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN CON GEOGEBRA: UNA EXPERIENCIA EN  
EL ESTUDIO DE SITUACIONES CON MEDIDAS DE ÁREA Y VOLUMEN

CARLOS ANDRES FLÓREZ ATEHORTUA  
CARLOS ARTURO YEMAIL MERCADO

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
MEDELLÍN  
2017

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN CON GEOGEBRA: UNA EXPERIENCIA EN  
EL ESTUDIO DE SITUACIONES CON MEDIDAS DE ÁREA Y VOLUMEN

CARLOS ANDRES FLÓREZ ATEHORTUA  
CARLOS ARTURO YEMAIL MERCADO

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Ciencias Naturales y  
Matemáticas

Asesor

SANDRA MARÍA QUINTERO CORREA

Magíster en Educación, Línea Ciencias Experimentales y Matemáticas

UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
MEDELLÍN  
2017

14 de julio de 2017

**CARLOS ANDRES FLÓREZ ATEHORTUA**

**CARLOS ARTURO YEMAIL MERCADO**

“Declaramos que esta tesis (o trabajo de grado) no ha sido presentada para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o cualquier otra universidad” Art 82 Régimen Discente de Formación Avanzada.

Firma

Carlos Andrés Flórez Atehortúa

---

Firma

Carlos Yemail

---

## **DEDICATORIA**

Este trabajo de grado, fruto de nuestro esfuerzo va dedicado a todas aquellas personas que con sus valiosos consejos y aportes permitieron este gran logro, pero en especial a nuestras familias que por su comprensión también hicieron posible esta meta.

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo agradecer a todas las autoridades de la universidad y de la gobernación de Antioquia quienes con su gestión y dedicación hicieron realidad la oportunidad de ejecutar un programa de maestría virtual que favoreciera a unas personas que por múltiples razones no tenían ni los recursos económicos, ni la disponibilidad de desplazamiento para realizar su maestría.

De igual forma quiero hacer referencia a mi asesora de trabajo de grado Sandra Quintero por su gran dedicación en la orientación, buscando que nuestras ideas fluyeran de manera clara y eficaz para cumplir a cabalidad con los requisitos académicos.

Con agradecimiento hago referencia a mi familia, esposa e hijo, quienes soportaron con ilusión las prolongadas jornadas dedicadas al proceso académico, tiempo durante el cual sintieron la ausencia y apoyo en diversas situaciones de dificultad y celebración, pero que de igual forma comprendieron y soportaron. No puedo dejar pasar en este punto a mis padres, quizás ellos fueron los primeros que me impulsaron para lograr estar en el lugar que hoy me encuentro

Finalmente agradezco a Dios por fortalecer mi espíritu frente a las dificultades y retos que durante la maestría se presentaron, en su presencia todas las cargas se alivianan y son más llevaderas.

Carlos Andrés Flórez Atehortúa

## **AGRADECIMIENTOS**

Ante todo quiero darle gracias a Dios, al programa de Becas de Maestría propuesto por la Gobernación de Antioquia que por su noble gesto hicieron cumplir este anhelado sueño.

Infinitas gracias a la asesora Sandra Quintero Correa que con su experiencia y conocimiento hizo grandes aportes al proyecto y fue un gran apoyo para su formulación.

Gracias a mis compañeros de maestría, con quienes compartí conocimientos y emociones, haciendo de esto una experiencia inolvidable. Al equipo de docentes de la UPB gracias por su orientación y formación académica recibida.

También doy gracias a mi familia por soportar momentos de mi ausencia en momentos especiales y a mis amigos por darme ánimos para continuar y no desfallecer.

Carlos Arturo Yemail Mercado

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	12
1.PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	16
2. OBJETIVOS.....	19
2.1 OBJETIVO GENERAL.....	19
2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	19
3. MARCO REFERENCIAL .....	20
3.1 ESTADO DEL ARTE .....	20
3.2 MARCO TEÓRICO .....	26
4. DISEÑO METODOLÓGICO.....	35
5. LÍNEA DE TIEMPO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN .....	37
5.1 Historia de la modelación matemática .....	37
5.2 Historia de la Simulación.....	42
6. VENTAJAS DE UTILIZAR LOS PROCESOS DE MODELACIÓN Y SIMULACIÓN CON EL SOFTWARE GEOGEBRA .....	46
7. SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN MEDIDAS DE ÁREA Y VOLUMEN CON MODELOS DE FUNCIONES, A TRAVÉS DE LA UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA.....	48
8. CONCLUSIONES .....	68
9. RECOMENDACIONES.....	69
BIBLIOGRAFIA.....	70
ANEXO 1 .....	73
ANEXO 2 .....	81

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1. El proceso de modelado.....	29
Figura 2. Representación gráfica línea de tiempo en Modelación .....	42

Figura 3. Representación gráfica línea de tiempo en Simulación .....	46
Figura 4. Imagen de lata proyectada en el software Geogebra.....	52
Figura 5. Imagen de la lata de cerveza ubica en la forma horizontal .....	53
Figura 6. Puntos agregados a la lata de cerveza.....	54
Figura 7. Entrada de la expresión polinomio con los puntos que se graficaron.....	54
Figura 8. Gráfica de la función que pasa por los puntos ubicados sobre la lata de cerveza .....	54
Figura 9. Imagen que representa la expresión para la función de la recta obtenida ....	55
Figura 10. Segmento de línea buscado en la representación gráfica con su respectiva función.....	55
Figura 11. Gráficas de las funciones que delimitan los intervalos que se ubican en la lata de cerveza .....	56
Figura 12. Imagen de la lata de cerveza con su deliemo .....	56
Figura 13. Contorno de la lata de cerveza luego de desactivar la opción objeto visible para los puntos y la lata de cerveza.....	57
Figura 14. Vista 3D de la ventana del programa Geogebra .....	57
Figura 15. Vista algebraica, vista grafica 2D y vista grafica 3D de la ventana del programa Geogebra.....	57
Figura 16. Eliminación del plano que aparece en la vista 3D .....	58
Figura 17. Habilitación de la vista sobre el eje vertical .....	58
Figura 18. Deslizador para el ángulo .....	59
Figura 19. Eje de giro para la ecuación $y=0$ .....	59
Figura 20. Animación en vista 3D de la lata de cerveza.....	60
Figura 21. Ubicación de los puntos en la ventana de Geogebra para construir la curva solicitada.....	61
Figura 22. Selección de la función polinomio en el campo de entrada del programa Geogebra.....	62
Figura 23. Gráfica de la curva que contiene a los puntos que se ingresaron .....	62
Figura 24. Función que corresponde al intervalo A_E .....	63
Figura 25. Nueva función $h(x)$ en la vista algebraica .....	63
Figura 26. Ajuste del grado del polinomio en el campo de Entrada.....	64
Figura 27. Gráfica de las rectas que contienen a los segmentos FA y EG .....	64
Figura 28. Generación del eje de rotación $y=0$ .....	65
Figura 29. Creación del deslizador para que gire sobre el eje $y=0$ .....	65
Figura 30. Selección de objetos que se van a ocultar.....	66
Figura 31. Activación del rastro para el modelo construido.....	66
Figura 32. Animación del deslizador para trazar el modelo .....	67
Figura 33. Simulación del envase de perfume .....	67
Figura 34. Vista inicial Geogebra .....	78
Figura 35. Opciones de menú Geogebra .....	80
Figura 36. Representación ejercicio 1 práctica 2.....	118
Figura 37. Opciones de grafica de función en Geogebra .....	120
Figura 38. Gráfica de función en Geogebra.....	126
Figura 39. Representación gráfica de cajas .....	135
Figura 40. Representación gráfica de cajas .....	138



## **RESUMEN**

Este trabajo de profundización busca mostrar los procesos de modelación y simulación como técnicas para analizar y comprender situaciones de la vida

real, por lo que se plantean una serie de estrategias para llevar a cabo el estudio de problemas sobre medidas de área y volumen que requieren de la construcción de un modelo matemático expresado en forma de función apoyado en la simulación interactiva con el software Geogebra. En este sentido, los procesos de modelación y simulación permiten la aplicación de conocimientos matemáticos en dichas situaciones con el propósito de fortalecer el aprendizaje significativo de las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas y su aplicación en contextos reales y de interés para los estudiantes.

A través de una línea de tiempo se realizó una recopilación de información sobre los procesos de modelación y simulación en el que se puede observar mediante un devenir histórico la idea sobre “modelo” que tenían las primeras civilizaciones hasta llegar a un concepto moderno aplicado a numerosas disciplinas y la forma como la modelación guarda una relación directa con la realidad, al constituirse en un soporte para el estudio de fenómenos físicos y comprensión de situaciones de la vida real. Por su parte en el proceso de simulación se presenta un rastreo bibliográfico en el que se informa acerca del uso transversal que distintos campos de la ciencia le fueron brindando.

Se realizó una descripción detallada de la modelación en lo que tiene que ver con su definición y aplicabilidad en matemáticas; así mismo se informará sobre las ventajas que tiene reunir los procesos de modelación y simulación interactiva a través del software Geogebra como herramienta tecnológica que permite la facilidad de construir modelos matemáticos al momento de interpretar el comportamiento de fenómenos físicos presentes en una situación del mundo real y por consiguiente, sirve de apoyo al desarrollo de las actividades de modelación y simulación que conducen al estudio de la representación de funciones.

Como parte integrante de este trabajo se desarrollan dos situaciones de aplicación, las cuales están relacionadas con las medidas de área y volumen y con el estudio de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas como conceptos

matemáticos inmersos en el proceso de modelación, a la vez que se utiliza el software Geogebra para la representación de los objetos, la introducción de valores numéricos y operaciones, graficar funciones y realizar animaciones, lo que permite el desarrollo de la experiencia en simulación con este software.

Se presenta en el Anexo 1, una guía de aprendizaje sobre el uso del software Geogebra. Este documento cuenta con la descripción del programa, los elementos que la componen y las funciones que desempeñan los comandos y a su vez permite capacitar a los estudiantes en el manejo del software, explorar algunas de sus herramientas y realizar construcciones geométricas sencillas.

Finalmente, como insumo del presente trabajo, en el Anexo 2 se incluye el diseño de una unidad didáctica sobre modelación y simulación con Geogebra en situaciones de área y volumen con modelos de funciones, dirigida a estudiantes de grado noveno. La unidad didáctica contempla una serie de actividades encaminadas a la representación de funciones en el software Geogebra, análisis de situaciones que involucran el estudio de las medidas de área y volumen y cuya solución requieren de la construcción de modelos de funciones, los cuales son simulados en el programa Geogebra.

**PALABRAS CLAVE:** Modelación, Simulación, Situaciones problema, Área, Volumen, Geogebra, Unidad didáctica.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad se ha venido incrementado el interés en muchos investigadores hacia la implementación de técnicas de modelado y simulación como herramientas para comprender fenómenos que trascienden en el mundo real y en abordar soluciones a problemas complejos que se proponen desde una dinámica tecnológica. Dada su interdisciplinariedad, estos dos procesos son de uso frecuente en distintas disciplinas relacionadas con las ciencias del saber; las cuales tienen presente la aplicación de la modelación matemática y herramientas computacionales porque permiten avanzar en la comprensión y solución de manera precisa de diversos problemas propuestos, además de establecer predicciones e interpretaciones en la evolución o el comportamiento de algún fenómeno.

En distintos campos de las ciencias, el desarrollo en investigación ha determinado que las formas en que el hombre obtiene el conocimiento para comprender y explicar los fenómenos que ocurren en su entorno, se dan en gran medida al papel preponderante que cumple la modelación. Así, la modelación como método del conocimiento científico, es el mecanismo o estrategia para la obtención de un modelo que exige un proceso eficaz por medio del cual se logra dar explicaciones e interpretaciones de los fenómenos de la naturaleza y de la sociedad.

De esta forma, la modelación como actividad científica pretende la obtención de un modelo matemático a partir del análisis de un problema o un fenómeno de la vida real, el cual es observado para luego ser sometido a un proceso de experimentación. “Construido el modelo, se generan todos los análisis posibles y se utilizan las herramientas matemáticas para construir una solución matemática y sacar de ellas, conclusiones del modelo, las cuales deben ser interpretadas a la luz del fenómeno” (Villa, 2007, p. 68). Visto de este modo, mediante la construcción de modelos se logra la comprensión de fenómenos

de la realidad en forma matemática y así poder utilizar los conocimientos y herramientas necesarias para obtener la solución a problemas propuestos en un contexto determinado.

Ante la importancia de la modelación en matemáticas como estrategia para la construcción de nuevo conocimiento o proceso para comprender situaciones de la cotidianidad o fenómenos físicos propuestos en un contexto del mundo real, habría que considerar que para muchos estudiantes e incluso docentes les puede resultar complejo llevar a cabo dicho proceso, tal como lo señala Pantoja, Ulloa y Nesterova (2013):

Los procesos de modelación a través del planteamiento de relaciones funcionales, son considerados tanto por estudiantes y profesores, como tareas difíciles, ya que las actividades requieren de una destreza eficiente y creativa para articular y manejar diferentes representaciones de una situación de la vida cotidiana y relacionarlas con la modelación matemática. (p.8)

Sin embargo, para contrarrestar la rigurosidad en que se ha venido presentando el proceso de modelación matemática y continuar evitando dificultades en su asimilación, se propone incursionar el uso de herramientas tecnológicas en su implementación; desarrollar propuestas en un ambiente interactivo que contemplen la utilización de algún software específico, donde los estudiantes a partir de las relaciones matemáticas que logren observar durante la manipulación de los objetos matemáticos y su posterior exploración en el artefacto tecnológico utilizado, lograr comunicar dichas ideas con significado matemático.

En este sentido, hacer uso de la tecnología en el aula de clase se convierte en un escenario en el cual según Borba y Villarreal (2005), el uso de artefactos y herramientas computacionales establecen una relación con el hombre de forma tal que el uso de ordenadores, calculadoras, software, entre otros; influyen de

manera directa en la exploración y producción del nuevo conocimiento, mediante la interacción con ellas. Esto haría posible la vinculación del proceso de simulación con la modelación matemática, pues se convierte en la herramienta esencial para resolver problemas derivados de la ciencia, al punto que la precisión y la velocidad que ofrecen los programas por computador utilizados en la elaboración de modelos matemáticos, permiten una mayor comprensión y verificación de resultados en los problemas solucionados, así como predecir el comportamiento de un fenómeno en particular.

En consecuencia, la herramienta tecnológica para desarrollar la experiencia en simulación en este trabajo, es el software Geogebra, un programa gratuito con la ventaja de ser utilizado en todos los niveles educativos y con gran funcionalidad de comandos que permite hacer representaciones geométricas con sus respectivas expresiones algebraicas. Por este motivo, se seleccionó este software con la posibilidad de explorar distintos conceptos matemáticos implicados en las situaciones a modelar lo que conlleva a una nueva forma de construir modelos.

Este trabajo de profundización une a los procesos de modelación y simulación a través del software Geogebra para modelar problemas reales en un contexto matemático, en este caso, situaciones cercanas a la realidad del estudiante relacionadas con medidas de área y volumen cuya solución requieren de la construcción de modelos de funciones. De esta manera, Geogebra se convierte en la herramienta novedosa que posibilita en el alumno comprender de una mejor manera las situaciones que se le plantean para así lograr manipular las construcciones geométricas que realiza a la luz del entendimiento que tiene de la situación propuesta y finalmente proponer las funciones que modelan a dicho problema, comprobando el resultado geométrica y algebraicamente.

Finalmente, el impacto que se quiere lograr con este trabajo una vez se implemente la Unidad Didáctica propuesta para los estudiantes de grado

noveno, es permitir que los alumnos puedan desarrollar habilidades para plantear y solucionar problemas que involucren medidas de área y volumen y que requieran de la construcción de modelos de funciones de tipo lineal, cuadrática y cúbica para que se familiaricen con una experiencia en modelación y simulación interactiva con el software Geogebra.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Hoy en día la gran mayoría de las propuestas en educación matemática apuntan al desarrollo de estrategias que posibiliten una mejor comprensión de los contenidos matemáticos en los estudiantes; y para lograrlo, se recomienda a todos los docentes dirigir su atención en los procesos propios de las matemáticas (la resolución de problemas y la modelación). De esta manera, cuando se presenta el aprendizaje en matemáticas desde situaciones concretas vinculadas con la realidad del estudiante, se crea un espacio significativo donde él encuentra sentido a lo que aprende.

Visto de este modo, la modelación matemática es esencial en el desarrollo de competencias matemáticas en el estudiante porque lo lleva a desplegar su actividad creadora al construir sus propios modelos matemáticos, pues a través de ellos puede hacer predicciones y conjeturas para luego analizar y tomar decisiones respecto a una situación o un fenómeno determinado. Ante esto, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas afirman, “la modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa” (MEN, 1998, p. 80).

Sin embargo, ante la imposibilidad para muchos estudiantes de enfrentarse a situaciones problema que requieren de la aplicación del proceso de modelación, teniendo presente que es una experiencia con mucho rigor pues requiere de la aplicación de estrategias, conceptos matemáticos y procedimientos, habría que pensar en el desarrollo de propuestas académicas e investigativas que permitan que ellos logren motivarse hacia la solución de problemas reales con la intención de construir conocimientos dotados de significado; y actualmente con la aparición de la tecnología se dan cambios vertiginosos en la forma como el ser humano construye nuevo conocimiento, a la vez de generar espacios para la aplicación del mismo.



Desde esta mirada, la necesidad de vincular herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas se convierte en la posibilidad de generar un ambiente dinámico e interactivo; y al integrar la modelación y el uso de la tecnología a través de la simulación, el estudiante estaría en la capacidad de abordar situaciones reales que desde su experiencia pueden resultar difíciles de comprender pero que gracias al uso de algún software matemático le facilitaría una visualización, exploración y ejecución de los elementos que intervienen en dicha situación. “Además, los simuladores ayudan a enlazar mentalmente las representaciones abstractas del fenómeno representado – incluyendo a los objetos matemáticos implícitos en éste– con procesos de aprendizaje y resultados de la observación directa de los estudiantes”. (National Research Council, 2011).

De esta manera, para contrarrestar las dificultades que puedan presentarse al introducir la modelación en el aula de clase, por lo complejo que puede resultar la construcción de un modelo matemático, surge el interés en diseñar y aplicar algunas situaciones que favorezcan la matematización en los estudiantes, en especial, aquellas que estén relacionadas con la aplicación de modelos de funciones haciendo uso de las tics como herramienta didáctica. Por lo que se propone la utilización del software Geogebra para el desarrollo de esta experiencia en modelación y simulación, al ser un software libre y de distribución gratuita que posee un gran número de herramientas que combinan en forma dinámica el álgebra, la geometría y los cálculos numéricos al igual de ofrecer distintas representaciones de los objetos que se grafican.

El propósito del presente trabajo es profundizar en el estudio de los procesos de modelación y simulación a través de una fundamentación teórica y el análisis de algunas situaciones de aplicación sobre medidas de área y volumen para garantizar un aprendizaje significativo sobre modelos de funciones en un ambiente interactivo con el software Geogebra. Se realizará la construcción de modelos matemáticos que toman forma de función en contextos reales

relacionados con problemas de área y volumen tal como lo expresa (Hitt, 1996) citado por (Guevara, 2011)

A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. (p.10)

Por lo anterior, el proceso de modelación se puede desarrollar desde contextos físicos o del entorno, una actividad en la cual los estudiantes pueden utilizar los conocimientos que poseen sobre funciones en la explicación de fenómenos que trascienden en su vida diaria, pueden llegar a tener la capacidad de construir un modelo con el cual es posible representar la solución de un problema o bien interpretar y predecir el comportamiento de un fenómeno físico. Tener presente la importancia que tiene la modelación matemática como estrategia para construir conceptos matemáticos vinculados en contextos propios de las matemáticas y otras ciencias.

Así, con base en los elementos descritos, el presente trabajo busca diseñar una Unidad Didáctica dirigida a los estudiantes de grado noveno, en la cual se plantean nuevas estrategias hacia el desarrollo de habilidades en el planteamiento y solución de situaciones reales relacionadas con las medidas de área y volumen que involucre la aplicación de funciones de tipo lineal, cuadrática y cúbica para así conocer la manera en que analizan dichas situaciones, la forma como se familiarizan con las variables de estudio que intervienen en los problemas y llevar a cabo registros de representación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos; experiencia que finalmente conlleva a la construcción de un modelo matemático para luego ser simulado en el software Geogebra.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 OBJETIVO GENERAL**

Realizar procesos de modelación y simulación para la solución de situaciones problema relacionadas con medidas de área y volumen a través de funciones, utilizando como herramienta interactiva el software Geogebra.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- 1) Caracterizar el desarrollo histórico que han tenido los procesos de modelación y simulación en la solución de situaciones problema en el área de matemáticas.
- 2) Identificar la ventajas que ofrece el proceso de modelación y simulación con el software Geogebra.
- 3) Resolver situaciones problema en contextos reales que involucre áreas y volúmenes con modelos de funciones a través de la utilización del software Geogebra.
- 4) Diseñar una Unidad Didáctica dirigida a estudiantes de grado noveno, que involucre procesos de modelación y simulación con el software Geogebra, para la comprensión de situaciones o problemas relacionados con las medidas de área y volumen a partir de la aplicación de modelos de funciones.

### **3. MARCO REFERENCIAL**

#### **3.1 ESTADO DEL ARTE**

Cuando se estudian fenómenos de la realidad se piensa en representaciones que mediante modelos y simuladores permitan profundizar en el análisis de su comportamiento. Lo que se busca con la creación de modelos, es acercar el formalismo científico al estudio de situaciones fenomenológicas del mundo real, que a través del uso de herramientas matemáticas y computacionales se logre la representación de algún objeto o idea y la comprensión de los procesos que intervienen en dicha creación.

La modelación como actividad de experimentación se basa en la comprensión de situaciones cercanas a la realidad del ser humano con el fin de construir conceptos matemáticos. Así mismo, permite analizar y describir los fenómenos presentes en la naturaleza a través de las representaciones que se elaboran de dichos fenómenos proporcionando un sentido matemático a éstas situaciones de la vida diaria. Por su parte la simulación vendría a ser esa representación que se experimenta con la creación de un modelo en un nuevo contexto donde intervienen herramientas computacionales.

La importancia que ha cobrado en las últimas décadas los procesos de modelación y simulación, se debe a que permiten resolver problemas de carácter científico, tecnológico e investigativo en diversas disciplinas. Para varios investigadores (Biembengut y Hein, 2004); (Burkhardt, 2006); (Betancur, Montoya, Mesa, y Villa, 2013) la modelación es entendida como un método para la obtención del conocimiento, el cual además de considerarse como estrategia de enseñanza ha logrado vincularse a actividades de enfoque investigativo en ciencias naturales, ciencia aplicada, en educación matemática, en nuevas tecnologías y de manera muy reciente en humanidades, porque su aplicabilidad y transversalidad conduce a la comprensión de problemas reales, que mediante el uso de técnicas de computación favorece la construcción y realización de ensayos de modelos científicos.

Son muchas las investigaciones que se han realizado en modelación matemática y procesos de simulación. Al momento de realizar la búsqueda bibliográfica se encontraron trabajos de investigación y un gran número de artículos tanto científicos, como de ciencia aplicada e incluso en investigación social, teniéndose como horizonte común a la modelación y simulación como herramienta para abordar el estudio, aplicación y la descripción en los fenómenos presentes en un contexto determinado.

Así, del rastreo realizado, se mencionan aquellas investigaciones que de manera general ofrecen un panorama y fundamentación teórica a la forma de concebir el proceso de modelación como un referente apropiado para la aplicación de teorías en relación a los fenómenos que circundan en nuestro mundo y la simulación como el proceso que ofrece la noción de artificialidad del modelo. Se citan a continuación aquellas investigaciones que tienen algún tipo de vinculación con el presente trabajo, por lo que brindan un soporte teórico desde argumentaciones sólidas.

Inicialmente (Cruz y Medina, 2013) en su artículo “Funciones en contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva” presentan los resultados de la aplicación de una estrategia pedagógica en un proyecto dirigido para estudiantes de pregrado que tuvo como propósito fortalecer el aprendizaje significativo de los conceptos relacionados de las funciones lineales, afines, cuadráticas y sus aplicaciones partiendo de una situación real, la cual se apoya en el uso del software Geogebra para la construcción de modelos funcionales interactivos.

En una primera fase del proyecto, la fundamentación de dicha estrategia se basa en la creación de módulos interactivos apoyados en medios computacionales. En una primera versión se utilizó el software cabri Géometre II plus, pero a raíz de una serie de dificultades que se presentaron en su aplicación, se decide construir una segunda versión mejorando aspectos en cuanto al diseño y aplicabilidad del recurso interactivo y optan por seleccionar

el programa Geogebra, al ser un software libre que funciona en todos los navegadores.

Una vez presentada la nueva versión del recurso interactivo el cual lleva por nombre *“Modelación y simulación interactiva de funciones”* se pasa al diseño de talleres y módulos del programa en el que se favorece el aprendizaje de funciones y sus aplicaciones en diversos contextos de manera tal que se alcance a comprender las relaciones existentes entre el mundo real y las matemáticas. La importancia de que los estudiantes logren acceder a éste recurso virtual radica en que ellos pueden conocer los diferentes conceptos teóricos sobre el tema, observar los ejemplos y los problemas de aplicación, pretendiéndose como fin último potenciar el desarrollo de competencias matemáticas y el interés por el estudio de esta ciencia.

El recurso virtual *“Modelación y simulación interactiva de funciones”* consta de cuatro módulos: Elementos teóricos; Modelación de familias de funciones; Modelación y simulación de una caja; y el Taller Elaborando cajas y construyendo funciones. Cada módulo se basa en presentar los conceptos fundamentales relacionados con funciones en el que se proporciona a su vez ejemplos de aplicación y simulación a través software Geogebra.

El primer módulo, “Elementos teóricos” presenta los conceptos clave relacionados con: función, función afín, lineal, cuadrática y cúbica, proporcionando ejemplos de aplicación en cada uno de los temas, mapas conceptuales que representan la relación entre los conceptos y algunas actividades para que los estudiantes las desarrollen y puedan aplicar los conceptos estudiados.

El segundo módulo, “Modelación de familia de funciones” ofrece un ambiente interactivo con el programa Geogebra, donde los estudiantes mediante los deslizadores, puedan variar los parámetros en las funciones y visualizar los cambios que se presentan en la gráfica.

El tercer módulo, “Modelación y simulación de una caja”, los estudiantes a partir de la modelación de una caja sin tapa que se representa en dicho recurso y la simulación de las funciones que surgen a partir del modelo, ellos podrán interactuar, visualizar y observar lo que ocurre cuando varían las dimensiones del rectángulo que forma la caja.

El cuarto módulo “Taller cajas y funciones” se presenta un taller en formato pdf, el cual los estudiantes deberán imprimir y resolverlo de manera individual y presentarlo como trabajo final, para la evaluación del tema. A través de este trabajo se espera que los estudiantes logren establecer modelos con funciones y, mediante la simulación con el software Geogebra poder visualizar y tener una comprensión más amplia del problema planteado.

La experiencia en este proyecto arrojó resultados positivos debido a que el estudio de funciones apoyado en ambientes interactivos genera mayor motivación e interés en los estudiantes, al permitirles comparar, explorar y visualizar por sí mismos, las relaciones y objetos de tipo matemático que se desarrollan en dichos medios computacionales.

Por otra parte, Las situaciones que surgen en un contexto cotidiano logran ser de gran significado y sentido para el estudiante cuando ha de construir conocimiento en matemáticas. En el artículo realizado por (Villa, Sánchez, Obando, y Muñoz, 2013) el cual lleva por nombre “La modelación matemática: Un ejemplo en el contexto cafetero”, se relata la experiencia en la que participaron cinco estudiantes de grado décimo pertenecientes a una institución educativa ubicada en un municipio destacado por su producción cafetera. En dicha investigación, los autores se dieron a la tarea de citar a los estudiantes e invitarlos a elegir, acorde con sus intereses, un fenómeno o situación enmarcada en dicho contexto para luego ser modelado matemáticamente. El Ministerio de Educación Nacional ha hecho el llamado de proponer el uso de contextos matemáticos, cotidianos y de otras ciencias, para el desarrollo de las

matemáticas en la escuela, por lo que en este documento, se presenta el hecho de desarrollar el proceso de modelación matemática en un contexto extra matemático, como lo es el cultivo de café, donde los conocimientos que son producidos por los estudiantes se dan tanto en el campo algebraico como en el propio contexto en el que interactúan.

La información recolectada en la investigación se produjo a través de observaciones, diarios de campo y entrevistas con los estudiantes. El estudio realizado se enfoca en el interés de los estudiantes por el cultivo de café, razón por la cual se les invita a elegir una situación o fenómeno que desean indagar a través de la modelación matemática. Por lo que en el artículo elaborado se presenta como ejemplo el fenómeno de las plagas, en especial la broca, elegido por los mismos estudiantes para llevar a cabo el desarrollo de la experiencia y ver de qué manera se pueden analizar las variables que intervinieron en dicho proceso de observación y como las matemáticas pueden ser aplicadas en diferentes contextos para explicar fenómenos y situaciones. Y como lo plantea (Villa, Sánchez, Obando y Muñoz, 2013)

Sea cual sea el caso, este trabajo sugiere que para lograr ver la modelación más allá de una aplicación matemática, es necesario mayores discusiones en el aula de clase en la cual los estudiantes puedan observar otros roles de las matemáticas en la sociedad y sobre todo, revaloren su propio rol como “agentes productores” de matemática escolar.  
(p. 536)

En la investigación “Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática”, (Rivera, 2014) elige como contexto de estudio, las inundaciones que se presentan en una institución educativa del municipio de Caucasia por causa del desbordamiento del río Cauca. Debido a este fenómeno que ocurre, se aprovecha la situación como posibilidad para construir relaciones matemáticas referidas a la medida del área y el volumen mediante procesos de modelación



matemática. Este proyecto fue implementado con 32 estudiantes de grado décimo de la Institución afectada por las inundaciones y se toma para el análisis del objeto de investigación a cuatro estudiantes con quienes se realiza observaciones directas, entrevistas, elaboraciones escritas y grupos de discusión. El estudio estuvo enmarcado en las relaciones entre el estudiante, el trabajo desde la actividad matemática y el contexto en un ambiente participativo, teniendo presente el entorno cotidiano.

Según el autor, este trabajo de investigación se caracterizó por establecer representaciones e interpretaciones en forma reflexiva de acuerdo a la forma como los estudiantes relacionan las medidas de área y volumen a través de la modelación matemática de acuerdo a una situación dada, y les permitió evidenciar la importancia que tiene utilizar contextos auténticos en la construcción del conocimiento matemático. A partir de la investigación se concluye afirmando que las inundaciones que afectan a una institución educativa y a una comunidad, se convierten en un espacio propicio para tener presente la modelación matemática en la implementación de distintas metodologías dentro del aula de clase, además del papel que cumple en la interrelación entre el mundo real y las matemáticas.

Los trabajos de investigación citados anteriormente, son de gran importancia, en la medida en que ofrecen un horizonte para guiar el trabajo de profundización que se propone construir, debido a que cada uno de ellos aporta elementos teóricos y desarrollo de prácticas educativas relacionadas con modelación matemática aplicada en un contexto en particular, así como proponer ambientes interactivos de aprendizaje a través del software Geogebra. Todo ello permitió un acercamiento conceptual para consolidar una propuesta con base en modelación y simulación utilizando el software Geogebra para el análisis de situaciones problema que involucran medidas de área y volumen.

### 3.2 MARCO TEÓRICO

Para la elaboración del marco teórico se tuvo en cuenta elementos conceptuales que permiten brindar un soporte fundamental en torno a las temáticas que orientan el objeto de estudio del presente trabajo de profundización, tales como: modelo matemático, modelación, simulación y solución de situaciones del mundo real.

Antes de presentar las referencias teóricas que orienta y define el objeto de estudio, es conveniente precisar o tener claro lo que significa el término modelo. Según la Real Academia Española un modelo es un “esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, como la evolución económica de un país, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento”. Una definición más apropiada se refiere a que “un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica” (Ríos, 1995, p. 23).

En el orden de ideas, un modelo “es una representación conceptual o física a escala de un proceso o sistema (fenómeno), con el fin de analizar su naturaleza, desarrollar o comprobar hipótesis o supuestos y permitir una mejor comprensión del fenómeno real al cual el modelo representa” (Pascuas, 2008, p. 1). Así mismo, “Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (MEN, 2006, p. 52). Por lo tanto, un modelo hace referencia a ese prototipo que se utiliza para entender, interpretar o bien, para tener acceso al fenómeno presente en la realidad, es aquella construcción teórica o artificial de una situación con la que es posible analizar y predecir el comportamiento de un sistema o fenómeno que sucede en el mundo real.

Por su parte, los modelos matemáticos se encargan de expresar situaciones de la vida real en forma matemática, pues se constituyen en una representación

abstracta, gráfica o virtual, de fenómenos físicos o bien de problemas científicos o matemáticos con el propósito de analizar, describir, explorar o predecir algún tipo de comportamiento que suceden en dichos fenómenos o situaciones. Así como se tienen distintos significados acerca del concepto de modelo, también existen varias interpretaciones que se le han dado al concepto de modelo matemático. De esta manera, (Villa, 2007) plantea:

El concepto de Modelo Matemático ha estado presente en muchos de los campos de las ciencias en las cuales la matemática tiene amplia aplicación en la resolución de problemas. Al respecto se han planteado algunas definiciones como:

- Modelo Matemático es un sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y cualificación de ideas del mundo real. (Maki e Thompsom, 1973, p. 14).
- Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo-real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano F, Weir M, Fox ., 1997, p. 34)
- Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (Biembengut y Hein, 2004, p. 106)
- Se define como Modelo Matemático de un sistema prototipo S (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas  $\Sigma$ , que es formulado para expresar las leyes de S y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento. (Rutherford, 1978, pág. 5)

Las definiciones anteriores relacionan al modelo matemático como aquella expresión que utiliza un lenguaje matemático para describir una situación o fenómeno de la realidad, es decir, cuando se estudian determinados problemas, el uso de herramientas, conceptos y relaciones propuestos desde el saber matemático, permiten ahondar en la solución a dichos problemas cuando se crean modelos matemáticos para ello. Para Stewart, 2008:

Un modelo matemático es una descripción matemática (con frecuencia mediante una función o una ecuación), de un fenómeno del mundo real como por ejemplo el tamaño de una población, la demanda por un producto, la rapidez de caída de un objeto, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de una persona cuando nace o el costo de la reducción de emisiones. El propósito del modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones con respecto al comportamiento futuro. (p. 24)

Según este mismo autor, el proceso de modelado consta de cuatro etapas, el cual se ilustra en la figura 1. Cuando ya se ha identificado un problema del mundo real, la primera etapa que realiza una persona que va a modelar la situación es formular el modelo matemático e identificar las variables que intervienen en él, hacer uso de sus conocimientos y habilidades para obtener la ecuación o expresión que relacionen las variables. La segunda etapa consiste en aplicar el saber matemático que posee al modelo matemático construido, con el propósito de extraer conclusiones matemáticas. Luego, en la tercera etapa se han de tomar esas conclusiones e interpretarlas para ofrecer explicaciones o interpretaciones del fenómeno del mundo real. Por último, se deben probar las predicciones que se formularon verificándolas con nueva información relacionada con el mundo real.

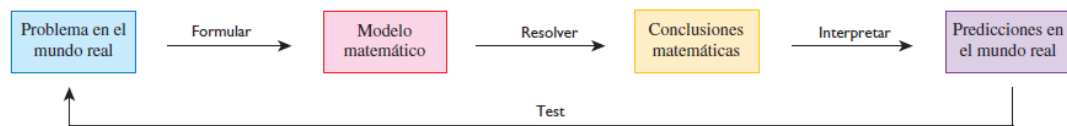


Figura 1. El proceso de modelado

En lo referente al proceso de modelación matemática, ésta se asocia de manera directa con la obtención de modelos matemáticos. “la modelización matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático” (Biembengut y Hein, 2006, p. 1). De acuerdo a esto, las matemáticas y su relación con situaciones problema vinculadas a la vida real, supone la integración de la modelación como el proceso que posibilita en toda persona, la creación de conceptos matemáticos, además de permitirle adquirir la habilidad para el desarrollo de competencias desde la interpretación, formulación y desarrollo de esquemas de solución cuando se enfrenta a situaciones problema de un contexto real.

El autor (Voskoglou, 2011) citado por (Dorado y Díaz, 2014) presenta cinco estados que abarca el proceso de modelización, los cuales se enuncian a continuación:

1. Análisis del problema, comprender los requerimientos del sistema real y sus restricciones.
2. La matematización, que involucra la formulación de la situación real y la construcción del modelo.
3. Solución del modelo, a través de manipulación matemática.
4. Validación del modelo, cuando da una predicción confiable del comportamiento del sistema
5. La implementación del resultado matemático final en el sistema real.

Estos cinco estados referenciados, dan cuenta del proceso que ha de seguir cualquier persona cuando realiza procesos de modelación de situaciones o fenómenos de la vida real, con la posibilidad de realizar un análisis detallado y la descripción del objeto matemático presente en la modelación. Por lo que el proceso de modelación se ha de entender “como una actividad involucrada en la solución de problemas reales que implica procesos de simplificación, idealización y estructuración de las situaciones reales, que luego de ser matematizadas arrojan como resultado la construcción de un modelo matemático” (Villa, 2009, p. 11). Es ahí donde el científico, investigador o cualquier otro sujeto pone a disposición su ingenio, creatividad y habilidades matemáticas para expresar a través de un modelo todos aquellos conceptos, variables, símbolos, axiomas, relaciones, gráficas y construcciones geométricas, por medio del cual le fue posible interpretar y predecir comportamientos de fenómenos físicos o llegar a soluciones de problemas reales.

Ante la relación que existe entre modelo matemático y realidad, éstos más que basarse en axiomas, relaciones o expresiones simbólicas, su conceptualización trasciende más allá, puesto que para comprender el sentido de un fenómeno o situación que trasciende en la cotidianidad, se debe conducir a la elaboración de un modelo como una construcción matemática pensada en estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real.

El estudio de fenómenos presentes en la realidad y la solución de problemas relacionados con el mundo real, son dos campos relevantes en el proceso de modelación. Por lo que al momento en que una persona trate de comprender conceptos matemáticos inmersos en un problema o situación, encontrará en la modelación la posibilidad para llevar a cabo el desarrollo de habilidades matemáticas que le permiten finalmente construir conocimiento. Según Londoño y Muñoz (2011) citado por Rivera (2014) la modelación describe la relación que existe entre el mundo real y las matemáticas, relación que se fundamenta de manera teórica para ser aplicada en contextos reales, donde

son las mismas situaciones las encargadas de condicionar el camino hacia la construcción de conceptos matemáticos en dichos contextos.

Por lo anterior, la modelación en tanto proceso se concibe como estrategia didáctica para la construcción de conocimientos en el área de matemáticas o bien, como actividad dinamizadora del conocimiento científico donde se construye un modelo matemático para la solución de problemas que permiten comprender el comportamiento de fenómenos del mundo real. Por su parte, Villa (2007) afirma:

La modelación matemática, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real. (p.70)

En este sentido, a la modelación se le atribuye una relación importante entre matemáticas y realidad, es decir, la construcción de modelos matemáticos parten de fenómenos o situaciones presentes en un contexto real o cotidiano, todo el proceso llevado a cabo para construir el modelo a la luz de la solución del problema ha de verificarse con el sistema real en que se propone. Esto implica necesariamente interpretar o comparar resultados que arroja el modelo cuando se describe no sólo el proceso matemático llevado a cabo en su elaboración sino la relevancia que tiene éste proceso cuando sus resultados y relaciones matemáticas sean puestos a prueba en la verificación del problema. De manera que, “la modelación, requiere de un proceso de construcción de conocimientos matemáticos representados en un modelo particular, el cual se valida cuando describe la situación real a la que pertenece.” (Londoño y Muñoz, 2011, p.51)

Teniendo en cuenta que la modelación es una actividad que más de enfocarse en la construcción de modelos, tiene en cuenta la realidad que envuelve al sujeto y el mecanismo para la interpretación de la misma, es el proceso por medio del cual se logra describir el contexto real en que se desarrolla el problema; tal como lo indican los Lineamientos Curriculares en Matemáticas “la resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación.” (MEN, 1998, p. 97). De este modo, la realidad está inmersa en la modelación y su importancia radica en que ofrece la posibilidad de generar conocimiento, como lo plantean Blum, Galbraith, Henn, y Niss, (2007) la modelación tiene un papel indispensable en el desarrollo de competencias de los estudiantes, los objetos matemáticos son construidos a través del proceso que se establece entre el mundo real con el mundo matemático, por lo que la producción de modelos matemáticos se logra estableciendo relaciones entre la situación real y las matemáticas.

En ésta línea de ideas las principales ventajas que trae consigo el proceso de modelación es el de permitir que los estudiantes tengan un mayor grado de comprensión de los contenidos desarrollados en el área de matemáticas, además de incrementar su interés en ella cuando encuentran relación con la realidad al momento de aplicar los modelos matemáticos construidos para la solución de problemas, así como abarcar un proceso significativo que se vea representado por la construcción de conceptos matemáticos. Para Rivera (2014) citando a Biembengut & Hein, (2007) la modelación “se convierte en el incentivo para la creatividad en la formulación y resolución de problemas, la orientación a la investigación y la capacidad de uso de las máquinas electrónicas, el actuar en un grupo y presentar informes de investigación” (p.45).

Según el planteamiento anterior, la modelación resulta de gran utilidad tanto en la matemáticas misma como en otras ciencias, pues se constituye en un



proceso que permite establecer relaciones entre el conocimiento matemático y fenómenos de la vida real. Ésta relación trae consigo numerosas ventajas ya sea al implementarse la modelación como estrategia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o bien como método investigativo para las ciencias y disciplinas académicas, debido a que se considera como un proceso transversal dirigido a la obtención de logros por parte de los estudiantes y profesores donde se potencializa el desarrollo del pensamiento matemático o en quiénes llevan a cabo experiencias científicas o prácticas sociales para transformar la realidad en lenguaje matemático.

Por lo tanto, el proceso de modelación ofrece la gran posibilidad de representar la realidad en términos matemáticos, en el que para llegar a la construcción de un modelo matemático se despliega toda una serie de habilidades y estrategias, así como el desarrollo de competencias matemáticas. De ahí que la importancia de la modelación radica en “ayudar a los estudiantes para comprender mejor el mundo, apoyar el aprendizaje de las matemáticas (motivación, la formación de conceptos, comprensión, retención), promover el desarrollo de competencias matemáticas y actitudes adecuadas hacia las matemáticas” (Blum & Borromeo, 2009, p. 47).

La modelación ya sea como método de enseñanza o de investigación fija sus objetivos y ventajas sobre los procesos que llevan a cabo estudiantes, profesores e investigadores para estudiar fenómenos del mundo real o dar soluciones a problemas en el que se involucra el uso y construcción de modelos y de otras herramientas matemáticas que hacen posible la comprensión del fenómeno y la solución del problema. De este modo, Biembengut y Hein (2007a) consideran que con la aplicación de la modelación, se espera en el estudiante:

- Integración de la matemática con otras áreas del conocimiento;
- Interés por la matemática frente a su aplicabilidad;
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos;

- Estímulo a la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- Habilidad en el uso de máquinas (calculadora gráfica y computadoras);
- Capacidad para actuar en grupo;
- Orientación para la realización de la investigación;
- Capacidad para la redacción de esa investigación. (p.4)

En consecuencia, la modelación matemática presenta la gran ventaja de ser una herramienta que permite comprender una situación de la vida real o un fenómeno físico, además de contribuir a la construcción del conocimiento matemático y la implementación del mismo en diversos contextos tanto matemáticos como científicos. Convirtiéndose finalmente en el método por medio del cual un estudiante logra potencializar sus competencias matemáticas a la vez de sentirse motivado por el estudio de las matemáticas y la práctica científica.

## 4. DISEÑO METODOLÓGICO

Para el presente trabajo de profundización se consideró a la modelación como la herramienta que da sentido a los procesos matemáticos utilizados en el análisis y soluciones de problemas de la vida real relacionados con alguna situación matemática y a la simulación, como el medio para permitir una mejor comprensión de su aplicabilidad en el contexto en que se presentan; de este modo, se propone la elaboración de un plan de acción a la luz de las teorías del autor (Pérez, 2013), planteado de la siguiente manera:

### **FASE I**

Esta primera fase tiene que ver con la caracterización histórica de los procesos de modelación y simulación y elaboración de una línea de tiempo, con el objetivo de evidenciar el impacto que han tenido en el desarrollo de las matemáticas y las ciencias. Esto se hizo a través de una revisión documental de los aportes más representativos que marcaron el origen y trascendental avance de la modelación desde tiempos remotos hasta la época actual en la comprensión de fenómenos de la naturaleza y situaciones de la realidad, así como en la evolución de las prácticas tecnológicas para modelizar sistemas reales.

### **FASE II**

Se realizó una revisión del referente teórico que existe sobre modelación desde el concepto, las etapas como proceso en la construcción de conocimiento, su clasificación y su aplicabilidad en la solución de diferentes problemas, específicamente aquellos relacionados con áreas y volúmenes que requieran la implementación de modelos de funciones. Por su parte, en el proceso de simulación se presentó la importancia que tiene vincular el uso de herramientas tecnológicas en el desarrollo de la modelación.

### **FASE III**

Se hará un análisis de las ventajas que ofrece el software Geogebra en los procesos de modelación y simulación para la comprensión de contenidos matemáticos. Además se tomarán como ejemplos dos situaciones relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes con modelos de funciones, con el fin de representar, visualizar y analizar las variables de estudio que intervienen en dicho proceso cuando se crean modelos matemáticos y se realizan las simulaciones correspondientes con el software Geogebra.

### **FASE IV**

Finalmente y como insumo del presente trabajo, se realizó el diseño de una unidad didáctica que involucre el desarrollo de los procesos de modelación y simulación interactiva apoyados en el software Geogebra para que los estudiantes de noveno grado, a partir de una situación real que involucre medidas de área y volumen logren construir modelos de funciones. La unidad didáctica será implementada con los estudiantes de noveno grado de las instituciones educativas Piamonte del municipio de Cáceres y Ezequiel Sierra del municipio de Guarne, una vez el presente trabajo de profundización haya sido sustentado y aprobado por parte de los evaluadores.

## **5. LÍNEA DE TIEMPO EN MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SIMULACIÓN**

A continuación se presenta el acontecer histórico de los procesos de modelación matemática y simulación, en el que se indican la serie de eventos y acontecimientos que marcaron su origen, desarrollo y aplicación en múltiples escenarios propios de la ciencia, la matemática y la sociedad misma.

### **5.1 Historia de la modelación matemática**

Por varios años, la modelación ha tenido un fuerte vínculo con el entorno, al permitir la comprensión de fenómenos o situaciones presentes en el mundo real; además de constituirse en un proceso para solucionar problemas propuestos desde el contexto de la realidad o bien desde la práctica científica. El desarrollo histórico que ha venido experimentando la modelación en distintos campos de la ciencia, en las matemáticas aplicadas, en ingeniería y en educación matemática se caracteriza por la obtención de modelos que sirven de soporte para el estudio y análisis de un fenómeno en cuestión o bien para abordar la aplicación de un conocimiento matemático en la resolución de un problema.

Se inicia este recorrido histórico con la idea sobre el término “modelo” que tenían las primeras civilizaciones. Tras el origen de la humanidad se han utilizado representaciones gráficas acerca de la percepción del mundo a través de la pintura y la escultura. En civilizaciones anteriores, como las del antiguo Egipto por ejemplo, los jeroglíficos plasmados en paredes o cavernas encarnan la representación visual de la gnoseología del hombre, ésta representación es lo que en su momento podría definirse como modelo.

Inicialmente la idea de modelación tuvo una explicación filosófica, la cual según (Araujo, 2007) citado por (Mesa, 2013) es entendida como una manera de resolver problemas de la realidad usando matemática, indicando que tras distintas aproximaciones al análisis de la relación entre realidad y modelación

es vista desde dos concepciones hegemónicas, a saber: la platónica y la formalista. Por lo que Mesa (2013) en ideas de Araujo (2007) expresa:

La realidad inspirada en el platonismo involucra una concepción de modelación como una manera de describir una realidad pre-existente a través de las matemáticas; por su parte, una relación inspirada en el formalismo implica ver la modelación como el uso de una teoría matemática formal existente para la construcción de alguna nueva teoría para actuar en un problema de la realidad. (p.11)

Por lo anterior, la modelación al presentar una relación directa con la realidad se constituye en la creación de modelos que surgen de acuerdo a una época determinada, donde el pensamiento del hombre se manifiesta en representaciones ideológicas o materiales, las cuales surgen para dar soluciones a problemas reales de la sociedad; siendo los modelos un referente que se expresa matemáticamente o por medio de otro tipo de representaciones. De acuerdo con (Lesh & Doerr, 2003) los modelos “son sistemas conceptuales consistentes de elementos, relaciones, operaciones e interacciones gobernadas por reglas que se expresan a través de un sistema de representación externo” (p. 14).

En este sentido se puede decir que la capacidad del hombre para generar los conocimientos y transmitirlos se basan en la implementación de modelos que se desarrollan a través de diferentes medios según la civilización y el desarrollo que en un momento dado se tengan. Según (Jonassen, 2006) citado por Sanabria en (Maldonado, 2013) “existen dos tipos de modelos: mentales, en la mente de las personas, y conceptuales, que representan a los primeros y se manifiestan mediante expresiones algebraicas, diagramas, programas de computador, etc.” (p.20). Por tanto, se pretende mostrar como a través de la evolución histórica del ser humano, la forma en que el proceso de modelación ha sido una construcción de acuerdo a la época y al desarrollo de la misma,

donde las representaciones sientan sus bases en la variación según el tiempo sujetas al medio y a la cultura.

Continuando con el proceso histórico de la modelación, (Israel, 1996) citado por (Rivera, 2014) presenta cuatro periodos importantes para la modelación. En un primer período se habla sobre la participación de la antigua Grecia en la fundamentación de ideas matemáticas, donde los pitagóricos afirman que la naturaleza se describe empleando relaciones con números; según ellos, los números eran la base para representar el universo, tiempo en el cual las matemáticas eran influenciadas por la religión y la mitología. El segundo periodo se caracteriza por la revolución científica de Galileo en la cual se tiene una concepción diferente de las matemáticas y su relación con la representación de fenómenos de la naturaleza. En este periodo se sostiene la idea de que son las leyes las que presiden al mundo y su lenguaje con las matemáticas, planteamiento que se complementa con el aporte de Newton sobre la teoría mecanicista. Un tercer periodo considera que todos los fenómenos de la naturaleza trascienden debido a los movimientos de los cuerpos, además en dicho período se manifiesta que cada teoría científica debe ser análoga y coherente entre sí; tiempo en el cual, la matemática pasa de ser un lenguaje separado de la naturaleza, a formar parte de ésta. Y un cuarto y último período comprende los primeros años del siglo XX en el que se comienza a hablar de modelos matemáticos, se inicia en la descripción de la naturaleza a partir de la relación con las estructuras matemáticas.

Un análisis en el proceso de modelación matemática y el uso de modelos para representar la realidad permite hacer una exploración hacia la segunda mitad del siglo XX, en el que se disputan dos ramas de la modelación: la técnica y la teórica. En lo que a la rama técnica se refiere, Newton sostiene que ésta se da en la semejanza y las dimensiones; por lo que es pensada como un proceso técnico – experimental. Por su parte, la teórica, según Maxwell, en ese tiempo,

estaba orientada a fenómenos mecánicos perceptibles y electromagnéticos no visibles.

Históricamente el proceso de modelación se ha incursionado en las prácticas científicas, en las matemáticas aplicadas y particularmente en áreas de la ingeniería y la economía, con el propósito de dar soluciones o bien de explicar un fenómeno desde un punto de vista matemático, representado en un modelo. Así mismo, esta aplicación se ha extendido de manera reciente al campo educativo, donde se le ha otorgado diversos papeles tales como estrategia de enseñanza, como metodología didáctica o como método en investigación escolar. Además es de considerar a la modelación como proceso que es implementado en la educación matemática, inspirado, en las prácticas derivadas de la ciencia, de ahí su interés en resolver problemas que expliquen o describan fenómenos propios de la realidad de la cual emergen mediante la construcción de modelos matemáticos. Por lo que (Biembengut, 2009) afirma:

El debate sobre modelación y las aplicaciones en la Educación Matemática en el escenario internacional ocurre, en especial, en la década de 1960, con un movimiento llamado “utilitarista”, definido como aplicación práctica de los conocimientos matemáticos para la ciencia y la sociedad. (p.8)

Por el planteamiento anterior, la segunda década del siglo XX significó un cambio en el replanteamiento de las prácticas educativas, pues varios investigadores optaron por nuevas concepciones acerca de la didáctica de las ciencias dejando atrás las concepciones habituales en la enseñanza y se deciden por la implementación de un nuevo enfoque adecuado al contexto del estudiante, dando prioridad a la construcción de modelos científicos o matemáticos en el aula. De esta manera, al promoverse el trabajo de investigación en ésta línea y por sus aportes al aprendizaje de las matemáticas, se crea lo que actualmente se conoce como modelación matemática y su aplicación en la Educación Matemática.



En Colombia, con la publicación de los Lineamientos Curriculares en matemáticas se propone a la Modelación matemática como uno de los procesos generales para el desarrollo del pensamiento matemático y su incursión en el aula de clase. Es visto como el proceso que permite en el estudiante desarrollar habilidades como observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir para construir conceptos matemáticos. Y también al considerarse como actividad, la modelación se involucra en la solución de problemas reales en tanto que implica la aplicación de estructuras cognitivas que tendrían como resultado final la construcción de un modelo matemático.

Por otra parte, el desarrollo que ha venido presentando la investigación y la ciencia se ve reflejado en la obtención de nuevos conocimientos para la comprensión y explicación de fenómenos. La ciencia es una práctica que posibilita la producción del saber sobre distintos fenómenos o problemas del mundo real, su historia ha demostrado que las distintas actividades científicas desarrollan sus producciones y creaciones en modelos matemáticos que representan los fenómenos a estudiar o problemas a resolver. “Así la modelación, como método del conocimiento científico, ha ido evolucionando desde formas muy simples hasta métodos actuales teóricos del conocimiento científico” (Boullosa, 2009, p.9)

Según lo planteado por este mismo autor, la generalización de la modelación como método, en la historia de la ciencia, se ha establecido por distintos sucesos, los cuales se caracterizan a partir de los avances generados de la investigación experimental en el micromundo, el gran desarrollo de la matemática y su uso por otras ciencias, también en los requerimientos para la construcción de sistemas cibernéticos complejos y en el desarrollo actual de las diferentes ciencias en las últimas décadas.

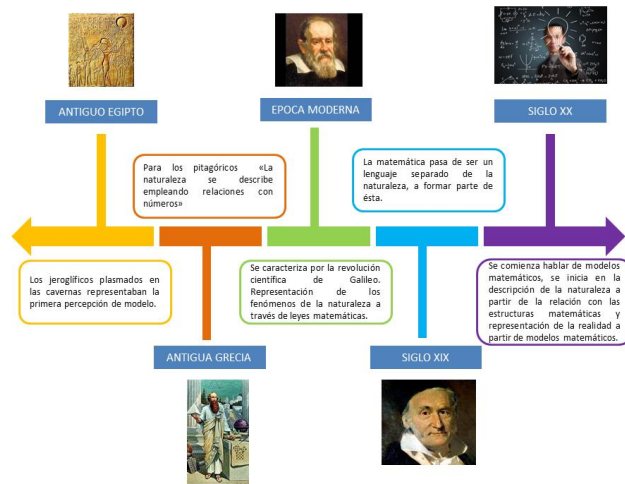


Figura 2. Representación gráfica línea de tiempo en Modelación

## 5.2 Historia de la Simulación

Durante las dos últimas décadas el proceso de simulación ha influenciado en diversas disciplinas como matemáticas, física, química, biología, ingeniería e incluso en las ciencias sociales por el uso transversal en la solución de diversos problemas y por ser una herramienta eficaz que posibilita la toma de decisiones cuando se aborda el estudio de fenómenos de la realidad a través del uso de un software para la representación y análisis de un modelo y su ejecución.

Tras un rastreo bibliográfico sobre el término “simulación” son muchas las referencias que se encuentran en cuanto al uso de un software para la utilización en varios tipos de sistemas que buscan generar resultados óptimos y gran cantidad de soluciones a diferentes problemas. De este modo, los registros que se tienen sobre la formación del proceso de simulación radican a mediados del siglo XX donde algunas empresas bajo fines productivos tenían a su disposición programas con los cuales a través de métodos por ensayo y error lograban introducir una serie de órdenes con base a un modelo para luego obtener un producto que fuese un reflejo claro en lo que se buscaba

representar u obtener; permitiendo posteriormente tomar decisiones con base en los resultados arrojados.

Sin embargo, el origen o los primeros cimientos de la simulación datan del año 1777 con el planteamiento del problema “la aguja de Buffon”, propuesto por el matemático francés Georges Louis Leclerc, conde de Buffon. Un clásico experimento que consistió en lanzar determinado número de veces una aguja sobre una hoja de papel en la cual se han trazado rectas paralelas separadas a una distancia uniforme y poder encontrar la cantidad de veces en que dicha aguja logra cruzar algunas de las líneas indicadas en el plano. Esta experiencia permitió encontrar una relación particular con el número  $\pi$ , pues el señor Buffon logró demostrar que al dejar caer la aguja varias veces sobre el papel, si se multiplica esta cantidad por dos y se divide este resultado por el número de veces en que la aguja corta alguna de las líneas se obtiene un valor aproximado para el número  $\pi$ .

Luego de la experiencia con el problema de la aguja de Buffon, vendría la aplicación de conocimientos estadísticos en una serie de experimentos para la explotación agrícola a principios del siglo XIX. Los estudios realizados en la época a cargo de Sealy Gosset en el cultivo de la cebada se basan en técnicas dirigidas a mejorar la producción y a desarrollar variedades de cebada que no fuesen afectadas por las condiciones del suelo y el clima.

Este hito histórico abrió las puertas a la aplicación de la simulación en el campo del proceso de control industrial así como a las sinergias que generaba esta simulación basada en la experimentación y técnicas de análisis para descubrir soluciones exactas a problemas clásicos de la industria y la ingeniería.<sup>1</sup>

Continuando con el recorrido histórico del proceso de simulación, en el siglo XX se sientan las bases de su evolución a partir de la construcción de la

---

<sup>1</sup> Consultado en <http://www.landertsimulation.com/formacion-con-simulacion/el-mundo-en-movimiento/historia-de-la-simulacion/>

primera computadora como el ENIAC y la introducción del método de Montecarlo. Este método fue aplicado para resolver problemas en matemáticas que técnicamente no podían ser manejados, por lo que su solución requería de la realización de procedimientos experimentales con muestreos estadísticos en un computador. Por su parte (Peláez y Mejía, 2000) plantean:

El uso moderno del término simulación se remonta a 1940 cuando Jhon Von Neumann y Stanislaw Ulam introdujeron el término “Análisis de Montecarlo” para aplicarlo a una técnica matemática que se usaba para resolver las ecuaciones de ciertos problemas de protección nuclear, que eran demasiado complejos para ser tratados analíticamente y demasiado costosos para ser resueltos en forma experimental. (p.52)

Por lo citado anteriormente, el método de Montecarlo fue un primer paso para la evolución en el campo de la simulación, porque incluyó el cálculo de probabilidades y además permitió el desarrollo de estocásticos como modelos predictivos basados en supuestos. De igual manera, produjo el progreso del ordenador, de ahí que durante la Segunda Guerra Mundial, para recrear una detonación nuclear se haya empleado el método Montecarlo. Así mismo, dicho método también fue utilizado para resolver problemas matemáticos con integrales que no podían ser resueltos por métodos analíticos, recurriéndose entonces a la utilización de esquemas con números aleatorios y distribuciones de probabilidad.

Por su parte, el proyecto ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) se crea en año de 1943 con el propósito de resolver los problemas de balística del ejército de Estados Unidos, por lo que durante la Guerra Fría ésta máquina o computador tuvo gran importancia al ser utilizada para procedimientos en el campo de la simulación con el objetivo de resolver problemas de interés militar. Era un ordenador que tras recibir instrucciones digitales era capaz de ejecutar las tareas y operaciones enmendadas, entre ellas la de calcular la trayectoria de proyectiles. En este sentido Ríos (2016)

afirma “Muchos de estos problemas exigen la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y para abordarlos se utilizaron ordenadores analógicos que usaban elementos electrónicos para resolver las operaciones matemáticas: integración, suma, multiplicación, generación de funciones, etc.”

En 1960 empiezan aparecer programas de simulación de sistemas enfocados a la solución de problemas en el ámbito civil, siendo los más destacados el desarrollado por IBM, el Sistema de Simulación de propósito general o General Purpose Simulation System (GPSS) y el SIMSCRIPT.

El GPSS se diseñó para realizar simulaciones de teleprocesos involucrando por ejemplo: control de tráfico urbano, gestión de llamadas telefónicas, reservas de billetes de avión, etc. La sencillez de uso de este sistema lo popularizó como el lenguaje de simulación más usado de la época. Por otro lado, en 1963 se desarrolló SIMSCRIPT, otra tecnología alternativa al GPSS, más enfocada a usuarios que no tenían por qué ser obligatoriamente expertos informáticos en RAND CORPORATION.<sup>2</sup>

Seguidamente a los sistemas desarrollados por RAND e IBM, hacia el año de 1961 se crea el programa “Simula”, el cual es un lenguaje de programación orientado a objetos, siendo el primero de la época y quizás el programa de simulación más importante de toda la historia; pues para este tiempo los objetos con que comúnmente simulaban los problemas del mundo real eran demasiados complejos para ser traducidos a los lenguajes primitivos de computadoras en aquel entonces; por lo que sus creadores Kristen Nygaard y Ole-Johan Dahl del Centro Noruego de Computación en Oslo, ante esta necesidad crean el lenguaje de programación SIMULA, con el objetivo de definir un lenguaje de propósito específico para aplicaciones de simulación.

---

<sup>2</sup> Consultado en <http://www.landertsimulation.com/formacion-con-simulacion/el-mundo-en-movimiento/historia-de-la-simulacion/>

Hacia la década de los 80 tras el avance en la informática y su fuerte impacto en la simulación por ordenador que unido al desarrollo de herramientas de modelado y análisis de resultados, el uso de simuladores llega a una fase de expansión donde comienza aplicarse en múltiples campos. Desde entonces, la simulación es vista como un proceso del que se valen empresas, científicos, ingenieros, entre otros, para el tratamiento y planificación de problemas convirtiéndose en una alternativa que ayuda a su solución.

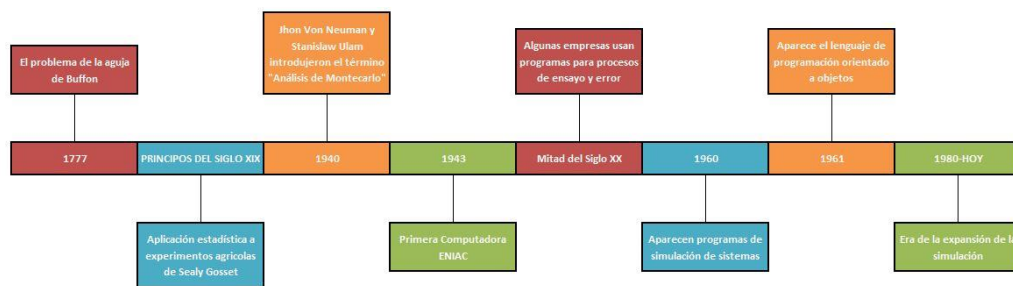


Figura 3. Representación gráfica línea de tiempo en Simulación

## 6. VENTAJAS DE UTILIZAR LOS PROCESOS DE MODELACIÓN Y SIMULACIÓN CON EL SOFTWARE GEOGEBRA

Actualmente son muchos los proyectos de investigación que contemplan el proceso de modelación para estudiar fenómenos físicos presentes en la vida real, los cuales acompañados de una herramienta valiosa como lo es la simulación permiten su análisis y descripción a través de la construcción de un modelo matemático y su ejecución mediante la utilización de algún software específico. Por tal motivo las herramientas computacionales han servido de apoyo para comprender de manera concreta el comportamiento de fenómenos físicos o situaciones representados por un modelo, en el que además de estudiar el funcionamiento y análisis del modelo creado por computador, pretende en el ser humano el desarrollo de habilidades y competencias con las que puede enfrentarse a problemas de la vida real de una manera exitosa.

Al unirse la modelación con el uso de la tecnología computacional mediante la simulación se obtienen espacios o entornos interactivos en el que se promueve el desarrollo de conocimientos y habilidades del pensamiento científico en el

sujeto; por lo que se propone la utilización de un software matemático, en este caso GEOGEBRA, siendo una herramienta eficiente para la visualización de representaciones, construcción de algoritmos, elaboración de simulaciones, permitiendo tratar diversos contenidos en matemáticas a través del uso de simuladores en un ambiente dinámico e interactivo.

Si bien es cierto, existe una gran diversidad de software matemáticos con los cuales es posible desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes; la experiencia en simulación propuesta en este trabajo, se apoya en Geogebra, al ser un software libre, gratuito y de código abierto. Un programa para todos los niveles educativos que reúne la geometría, el álgebra, hoja de cálculo, gráficos y estadística en un solo lugar. Además de ser un software dinámico que permite innovar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El software Geogebra por su versatilidad no sólo permite al usuario realizar construcciones geométricas, sino que también brinda la posibilidad de modificarlas dinámicamente. Sus ventajas sobre otros programas radican en que puede aceptar el ingreso de ecuaciones y coordenadas directamente, además de tener la propiedad de manejar variables de cualquier tipo, ofreciendo un amplio repertorio de comandos propios del análisis matemático, para facilitar el aprendizaje de graficación de funciones de una manera más fácil.

Además de tener la ventaja de ser un software gratuito y facilitar el aprendizaje, lo más destacable en Geogebra es la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la vista gráfica y otra en la vista algebraica. De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas.

Todos los estudiantes que usan Geogebra se sienten motivados y demuestran mejores resultados en lo que aprenden. De esta forma, usar este programa en el aula de clase permite que los alumnos adquieran la capacidad de

representar modelos matemáticos en los que pueden visualizar, analizar y comunicar de manera crítica los resultados obtenidos y así lograr una verdadera comprensión de los contenidos matemáticos.

De esta manera, desarrollar una propuesta que tenga como estrategia didáctica enlazar situaciones de la vida real con actividades de modelación y simulación a través de la incorporación del software Geogebra tiene la enorme ventaja de pretender obtener una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Así, abordar este tipo de situaciones empleando la modelación favorece la aplicación del conocimiento matemático y para que éstas no sean reducidas a soluciones de tipo analítico, procedimental y estático, se hace necesario integrar la tecnología y el uso de herramientas digitales mediante el software Geogebra para que dicha experiencia resulte significativa y logren vincularse las ideas asociadas a las situaciones que se le plantean al estudiante, con la construcción de un modelo simulado por este software.

## **7. SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN MEDIDAS DE ÁREA Y VOLUMEN CON MODELOS DE FUNCIONES, A TRAVÉS DE LA UTILIZACIÓN DEL SOFTWARE GEOGEBRA**

Resolver situaciones propuestas en un contexto real implica un conjunto de procesos y actividades que van desde la reflexión en torno a cuáles situaciones problema han de ser propuestas, estudiadas y resueltas, con base en las características requeridas para efectos de este trabajo, hasta la consecución de un dominio suficiente de los elementos teóricos, pedagógicos y tecnológicos requeridos por el docente, con el fin de aplicar exitosamente sus conocimientos sobre los procesos de modelación.

Las situaciones que se presentan a continuación están relacionadas con las medidas de área y volumen y se componen en una serie de actividades que tienen como finalidad aplicar estos conceptos matemáticos en la modelación de objetos dentro de un contexto real. Por ello, una vez seleccionadas las



situaciones que se van a resolver, se debe identificar los elementos teóricos y conceptuales que permitan hallar una solución.

El software seleccionado para llevar a cabo los procesos de modelación y simulación de fenómenos físicos a partir de conceptos matemáticos es el programa Geogebra, el cual se constituye en una alternativa totalmente viable para lograr el presente objetivo. Se trata de un programa completamente gratuito y que a la vez es una potente herramienta que establece una conexión directa entre la tecnología y las capacidades creativas de quien lo utiliza. Podría decirse que Geogebra permite llegar hasta donde llegue la creatividad del usuario pues hace posible graficar funciones en dos y tres dimensiones; además de realizar operaciones entre funciones y relaciones. Esto conlleva interactuar con controles personalizados para visualizar independientemente los efectos que gráficamente tienen dichas operaciones en cada función o conjunto de funciones articuladas mediante una operación.

Las situaciones seleccionadas reúnen los procesos de modelación y simulación interactiva con el software Geogebra en el que se aplican conceptos matemáticos relativos a funciones, medidas de área y volumen aplicados en un contexto determinado con el fin de visualizar y comprender las relaciones que existen entre realidad y matemáticas, lo que conduce a interactuar con experiencias de la vida diaria. A continuación se hace referencia a los aspectos más relevantes de dicha interacción:

**a. Respecto a la representación de una situación real:** Los problemas expuestos aquí, están relacionados con problemas de la vida diaria, ya que la elaboración de recipientes es una actividad productiva frecuente en diferentes ámbitos sociales, tales como la producción y distribución de todo tipo de líquidos como gaseosas, aceites y perfumes, entre otros. De igual forma, existen en el mercado gran cantidad de productos alimenticios que se empaican en latas de aluminio. Sin embargo, ambas situaciones se diferencian puesto que, en la primera se requiere el manejo de las funciones lineal y

cuadrática para la modelación de una lata de cerveza, mientras que la segunda permite incorporar funciones polinómicas de grado superior dadas las características de las gráficas que se pretenden utilizar en la modelación del envase y se pide la simulación de unas dimensiones específicas.

**b. Respecto a los conocimientos matemáticos requeridos:**, dado que, por una necesidad práctica dentro de la industria y comercialización de productos se requiere establecer relaciones entre el volumen y el área como conceptos matemáticos que se relacionan en la modelación de los envases, se hace necesario relacionar conceptos previos como diámetro, radio, volumen, área, función lineal, círculo y circunferencia. Con la articulación de estos conceptos, el estudiante puede desarrollar una experiencia de modelado que le facilita la comprensión del concepto de “sólidos de revolución”. Cabe anotar que la primera situación problema propuesta implica la aplicación de la función lineal, mientras que la segunda, como se verá en la práctica, requiere el tratamiento de diferentes funciones polinómicas de distinto grado, como la cuadrática y/o la cúbica.

**c. En cuanto a herramientas tecnológicas:** De esta manera se introduce a los estudiantes en el manejo de operaciones entre áreas y líneas para obtener volúmenes. Sin embargo, la modelación de estas situaciones problema, exige otras destrezas que tienen que ver con el manejo del ordenador como herramienta para generar descripciones gráficas y animadas de los fenómenos que se modelan y de su relación con operaciones matemáticas. Otro aspecto importante es la posibilidad de articular el trabajo algorítmico escrito, comparando los resultados obtenidos mediante las operaciones realizadas en el ordenador, para lo cual es preciso conocer el lenguaje básico del software Geogebra ya que es necesario introducir correctamente los datos que se van a procesar si lo que se pretende es obtener una visualización completa de las formas y cuerpos que previamente se tiene una idea; así como la información de los valores obtenidos por medio de las operaciones.

La modelación en este caso exige la graficación de funciones; la selección de tramos de esas funciones y la eliminación de lo que sobra, con el fin de no saturar la interfaz con elementos gráficos innecesarios; la creación y programación sencilla de controles o deslizadores que se encargan de realizar las animaciones y de trazar los rastros de las funciones animadas para plasmar en la pantalla los contornos que delimitan los volúmenes y áreas encontradas. Es de gran importancia el manejo de las vistas en 2D y en 3D, así como la vista algebraica de la aplicación Geogebra.

**d. Respecto a los recursos necesarios:** además de los materiales fundamentales para realizar cálculos como lo son el papel y los elementos de escritura a mano, la modelación de estas situaciones problema requiere como mínimo un computador con una capacidad mínima en espacio y en memoria RAM que permita el funcionamiento del programa Geogebra. Se requiere una conexión a internet con capacidad para el funcionamiento simultáneo de varios computadores, si se va trabajar con la aplicación Online que ofrece Geogebra. De lo contrario, una vez descargado el programa e instalado en el ordenador, no es necesaria la conexión a Internet y se puede trabajar con uno o dos estudiantes en cada computador.

**e. Respecto a las actividades:** ambas situaciones exigen para su solución una capacidad recursiva y combinan acciones manuales como la medición y el contacto con material concreto (envase de gaseosa), con la realización de esquemas gráficos y cálculos escritos de las posibles soluciones, a la vez que conducen a la confrontación de dichos resultados con los ofrecidos por la tecnología. Los procedimientos van desde tomar un envase, medirlo y realizar sus cálculos hasta buscar en Internet, editar la imagen del envase, insertarla en el software, modificar las dimensiones, hallar las funciones de cada línea en la forma de la figura, eliminar las gráficas innecesarias solucionar problemas al graficar mediante la modificación de valores en editar colores, espesor de líneas; utilizar las animaciones y controles, además de mover la vista en 3D para visualizar diferentes ángulos del diseño obtenido.

## Situaciones planteadas

### Situación 1:

Se requiere modelar una lata de cerveza de forma cilíndrica, con una altura de 12cm, y cuyo diámetro sea de 5.4 cm, teniendo como ejemplo una lata de cerveza del mercado.

1. Luego de medir la altura de una lata de cerveza y de conseguir su imagen, la Insertamos en Geogebra con la ruta (**Edita/ Inserta imagen desde/ Archivo**). Seleccionamos la imagen que queremos insertar. Obteniendo la siguiente impresión en pantalla:



Figura 4. Imagen de lata proyectada en el software Geogebra

2. Ubicamos la imagen de forma horizontal y con el eje x dividiéndola en dos zonas iguales. Para ello tomamos uno de los puntos que aparecen por defecto con la imagen y lo movemos para lograr que ambos puntos definan una línea paralela al eje y. También podemos redimensionar la imagen con la unidad de medida del plano para que coincida con la medida real de la lata. Luego le restamos **opacidad** (se atenúa o suavizan los colores de la imagen para que sobresalga la cuadrícula y sea más fácil ubicar la imagen, preferiblemente desde el origen. Finalmente bloqueamos la imagen para que no se mueva al hacer clic sobre ella; esto se hace dando clic en el candado que aparece en la esquina superior izquierda del plano:

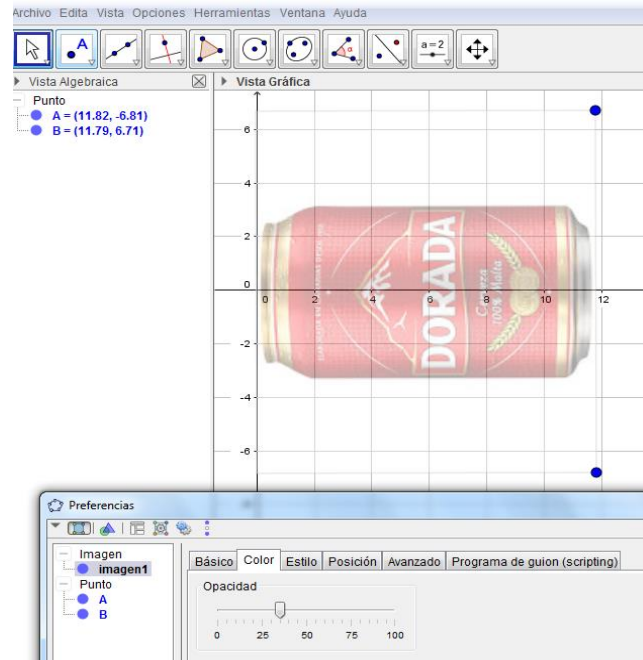


Figura 5. Imagen de la lata de cerveza ubica en la forma horizontal

3. Se agregan puntos delineando la mitad superior de la imagen cuidando que cada línea que pueda estar contenida en la gráfica de una función tenga la menor cantidad de puntos que se pueda. Por ejemplo entre distancias rectas, se crean dos puntos. En las curvas, tres o más puntos, según el caso:

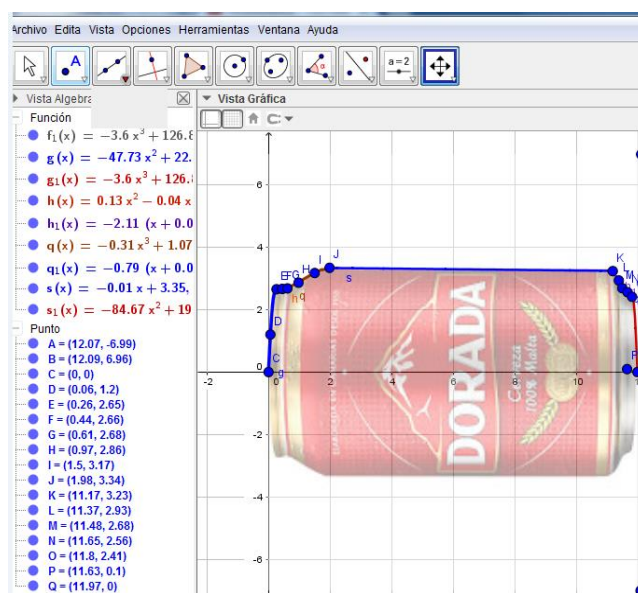


Figura 6. Puntos agregados a la lata de cerveza

4. En la **Entrada** de funciones (parte inferior izquierda de la pantalla) se ingresa la palabra **polinomio**. Aparecerá una lista de opciones y se debe elegir la opción “Polinomio (Lista de puntos)” y digitar en mayúscula las nombres de los puntos que se graficaron, separados por coma.



Figura 7. Entrada de la expresión polinomio con los puntos que se graficaron

Inmediatamente aparece la gráfica de una función que contenga los puntos, en este caso, una recta definida entre ellos y la función de dicha recta en la **Vista algebraica**:

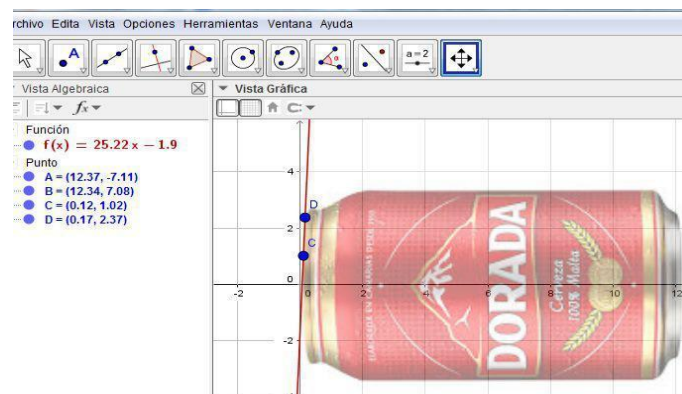


Figura 8. Gráfica de la función que pasa por los puntos ubicados sobre la lata de cerveza

5. De la recta obtenida se conserva solo la sección comprendida entre los dos puntos que definen la línea. Para ello, se escribe en Entrada la palabra función y se selecciona la opción “**Función (valor inicial, valor final)**”. Se copia y se pega la función de la recta anterior y se elimina la expresión **f(x)=**.

Posteriormente se digita los valores de la abscisa de cada punto, separados por coma.

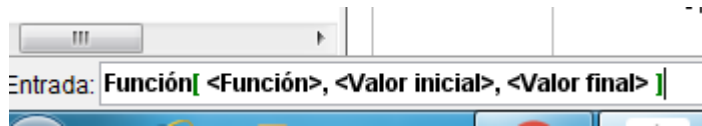


Figura 9. Imagen que representa la expresión para la función de la recta obtenida

Aparecerá el segmento buscado y su respectiva función en la Vista algebraica. Luego, para mejorar el aspecto de lo que se va graficando, se elimina la función completa, desde la vista algebraica, seleccionándola con **clic/Suprimir**. Así solo quedará visible el segmento de la línea que se desea:

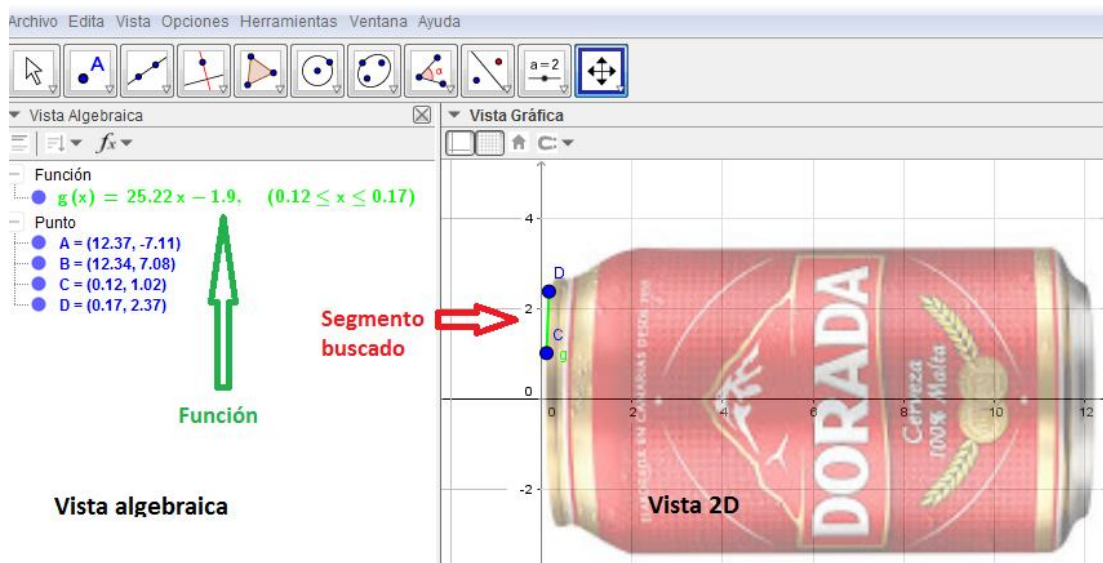


Figura 10. Segmento de línea buscado en la representación gráfica con su respectiva función

6. Se repite el procedimiento del punto 4, agregando nuevos puntos según necesitemos para delinear curvas o rectas. A continuación se muestran las gráficas de las funciones que delinear los intervalos la mitad superior de la imagen:

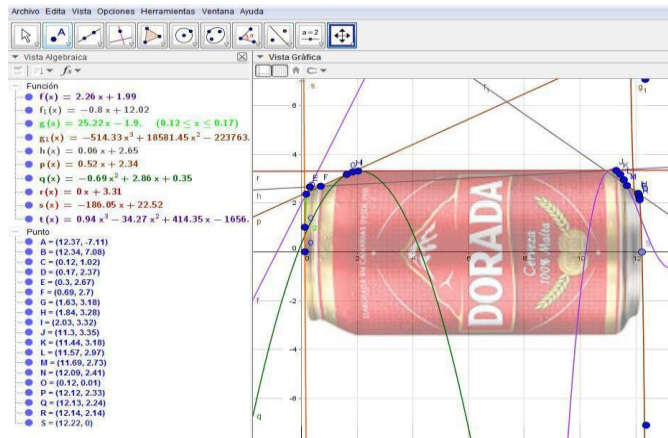


Figura 11. Gráficas de las funciones que delinear los intervalos que se ubican en la lata de cerveza

7. Ahora se eliminan todas las funciones haciendo clic en cada gráfica, o en el polinomio correspondiente a ellas y suprimiéndolas **clic/suprimir**, obteniendo el delineado de la parte superior de la imagen:

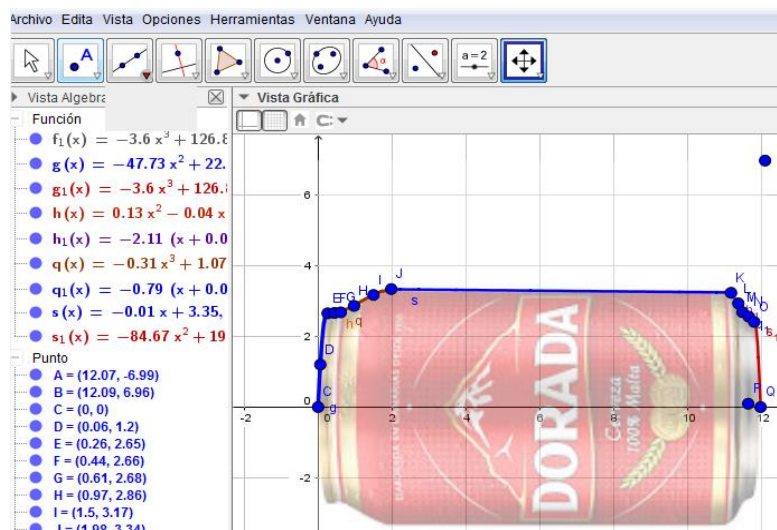


Figura 12. Imagen de la lata de cerveza con su delieo

8. Desde las propiedades de los puntos **clic derecho/Propiedades**, se desactiva la opción **Objeto visible** para que no se visualicen estos objetos (puntos) en la Vista 2D. Se procede igual con la imagen de la lata de cerveza y se obtiene solo el contorno de la parte superior de la misma.



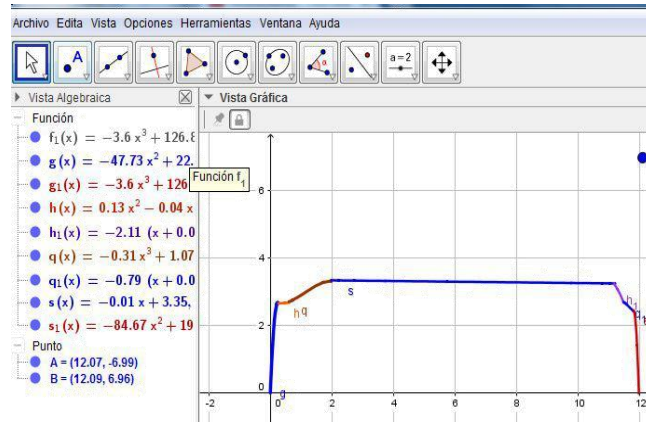


Figura 13. Contorno de la lata de cerveza luego de desactivar la opción objeto visible para los puntos y la lata de cerveza

9. Se abre la **Vista 3D** del programa Geogebra en **Vista/Vista gráfica 3D**:

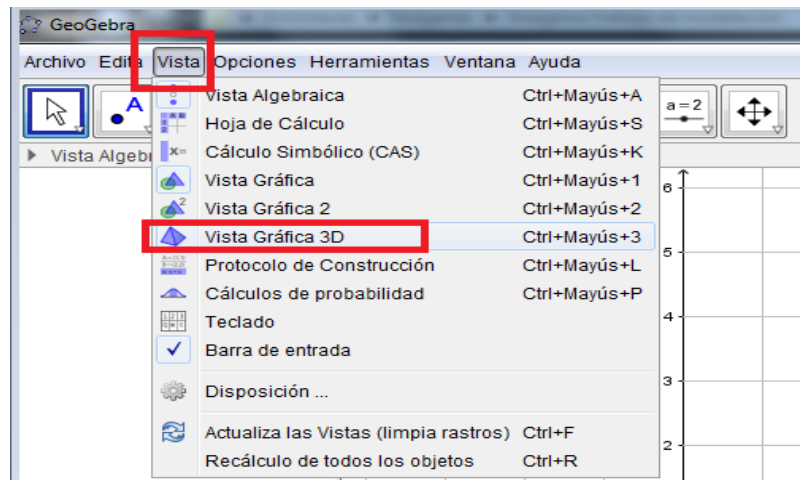


Figura 14. Vista 3D de la ventana del programa Geogebra

Se divide la pantalla en tres secciones:

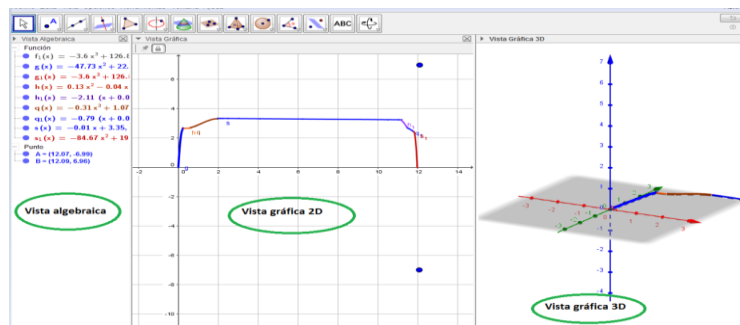


Figura 15. Vista algebraica, vista grafica 2D y vista grafica 3D de la ventana del programa Geogebra

10. Se elimina el plano de color gris que aparece por defecto en la vista 3D, haciendo clic derecho sobre él y seleccionando la opción “**plano**” en el cuadro de diálogo que se despliega. Este desaparece y queda como se ve a continuación:

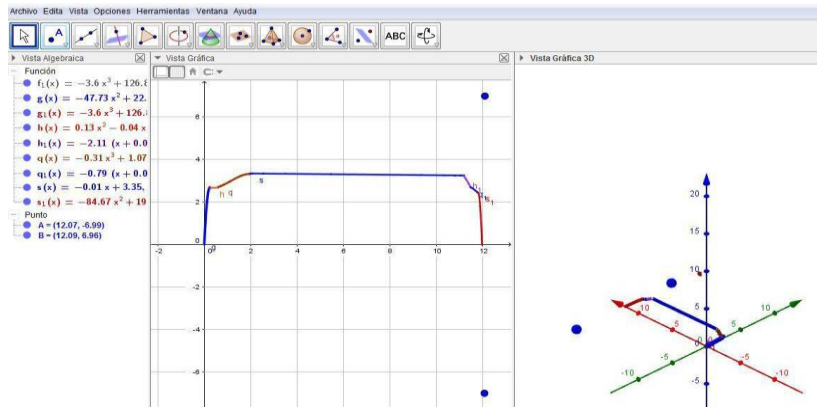


Figura 16. Eliminación del plano que aparece en la vista 3D

11. Se habilita la **Vista gráfica sobre el eje vertical** dando clic derecho sobre ella y seleccionando vista gráfica en el cuadro de diálogo, hacer clic en “**sobre el eje y**”. Aparecerá dispuesta la Vista gráfica 3D sobre el eje y:

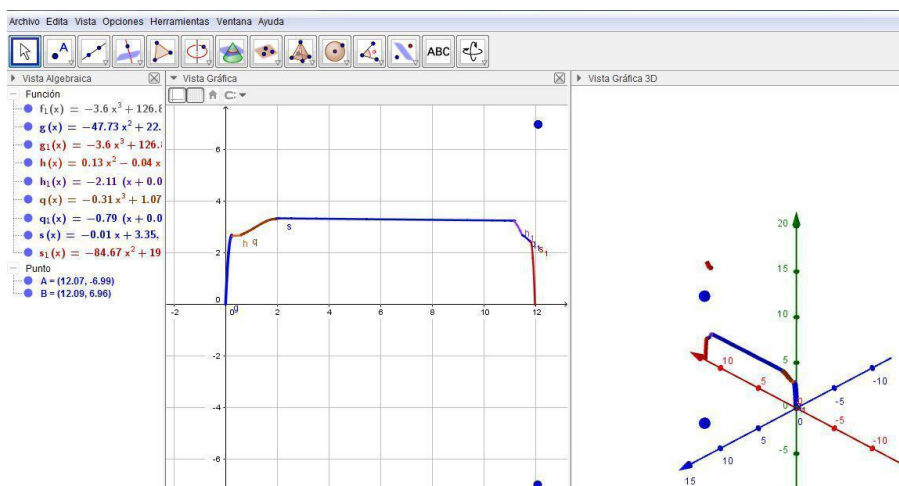


Figura 17. Habilitación de la vista sobre el eje vertical

12. Se crea un deslizador en la vista 2D y se configura para que realice una animación por ángulo:

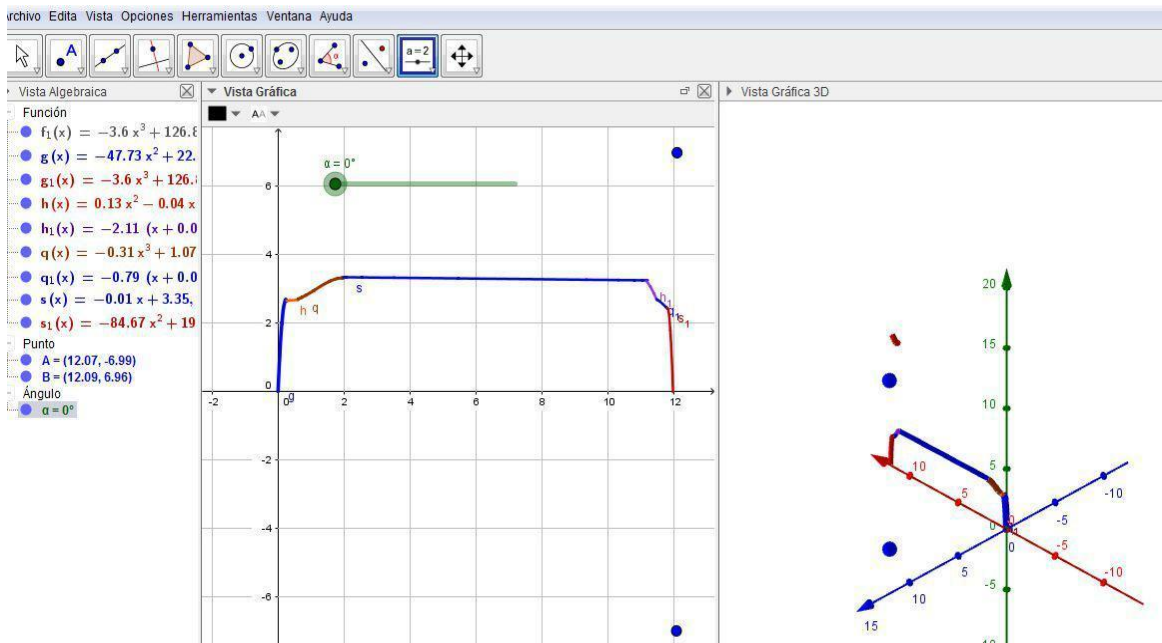


Figura 18. Deslizador para el ángulo

13. Se genera un eje de giro sobre el eje x, ingresando la ecuación  $y = 0$  en la Entrada. Luego se le modifica el color para resaltarlo. En este caso es de color amarillo:

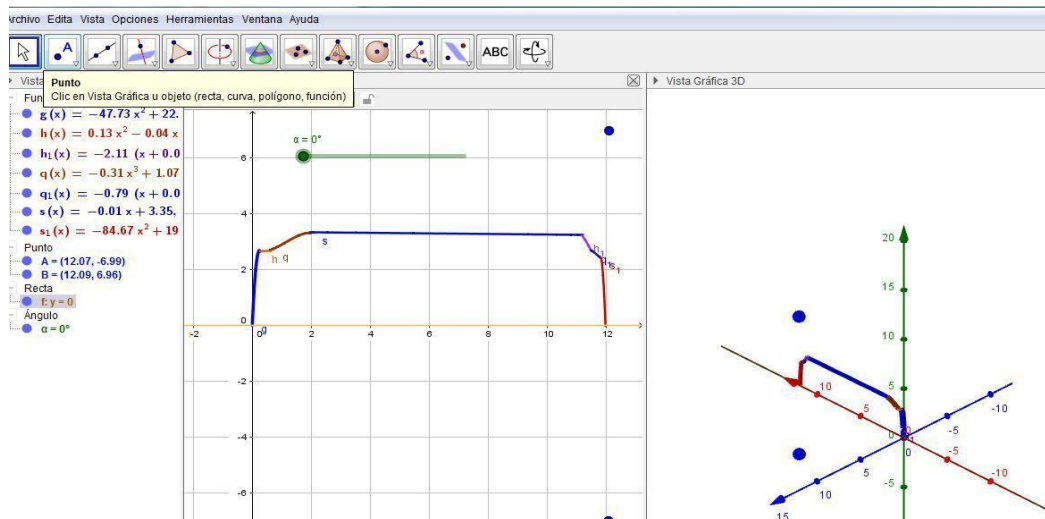


Figura 19. Eje de giro para la ecuación  $y=0$

14. Se programa el giro de cada función que se ve en la vista algebraica y que corresponde a un segmento de línea en el plano y en el espacio. Se observa que cada intervalo de las distintas funciones tiene un color diferente. El proceso consiste en:

- Seleccionar en la vista 3D, la ficha “Simetría especular” y hacer clic en la opción “Rotación axial”.
- Con ella seleccionada, se debe hacer clic en cada función de la vista algebraica y luego en el eje de rotación de la vista 3D; para seleccionar el ángulo asignado al deslizador con una letra griega; en este caso, el ángulo es alfa.
- En cada función de tres dimensiones en la vista algebraica, hacer clic derecho y habilitar la opción “Rastro”. Con ello se dibuja el trazo del área que genera cada función al girar.
- Finalmente, se da clic derecho sobre el deslizador y se escoge la opción “Animación”. Se obtiene entonces el modelo de la lata de cerveza como aparece en la vista 3D.

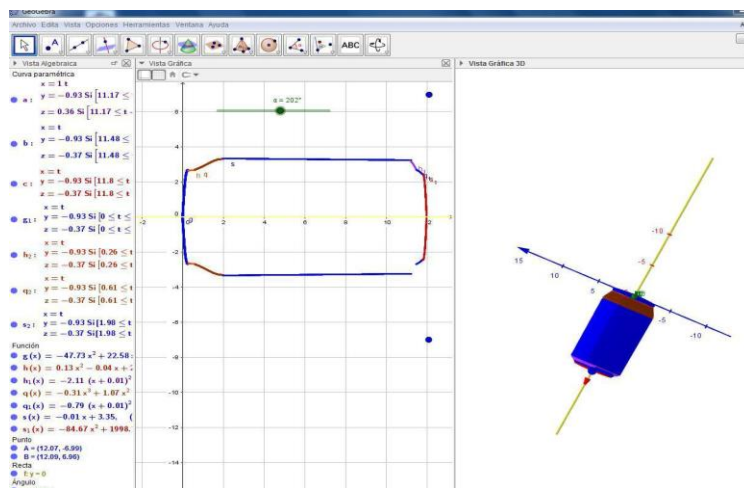


Figura 20. Animación en vista 3D de la lata de cerveza

Puede afirmarse que el programa Geogebra nos ha permitido realizar un proceso en el que, a partir de conceptos matemáticos relacionados con el área y el volumen, se llega a diseñar elementos virtuales que representan objetos

físicos de gran utilidad en la vida cotidiana, resaltando las propiedades de los mismos y aprovechando las ventajas que la tecnología ofrece para ilustrar en forma gráfica e interactiva cómo se relacionan las funciones, el área y el volumen en la descripción de fenómenos físicos.

## Situación 2

Un fabricante de fragancias desea diseñar un recipiente con forma de jarrón circular para empacar un determinado volumen de perfume. La altura del envase deberá medir 8.33cm y su mayor radio debe ser de 2cm. Se requiere modelar el envase teniendo en cuenta que el radio varía desde la base del recipiente hasta arriba, según la curva del mismo. También se debe agregar una base plana de 3mm de grosor que soporte el recipiente en forma vertical. Para dar solución a esta situación problema se puede realizar un procedimiento similar al anterior. Sin embargo, es posible simplificarlo, teniendo en cuenta que el software Geogebra ofrece recursos que permiten optimizar el trabajo gracias a que se tiene libertad para diseñar y modelar el recipiente.

1. En el programa Geogebra se ubican estratégicamente los puntos que puedan delimitar una curva como la solicitada en la situación problema, es decir, que describa la mitad del contorno de un pequeño jarrón acostado sobre el eje x:

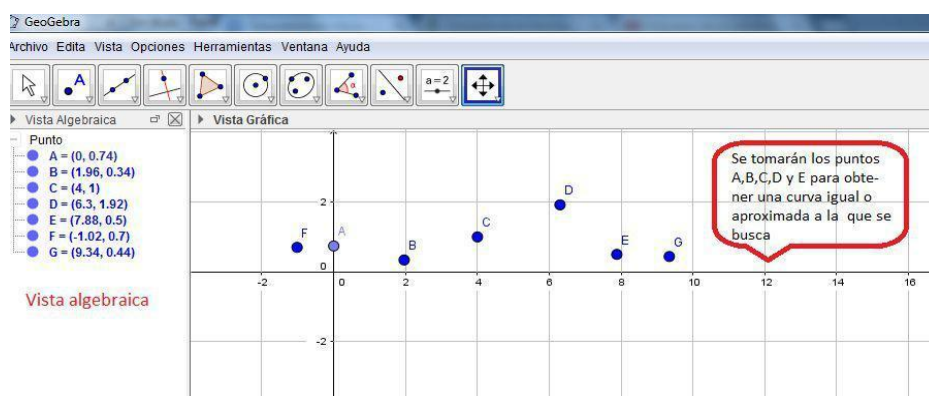


Figura 21. Ubicación de los puntos en la ventana de Geogebra para construir la curva solicitada

2. En la **Entrada**, ubicada en la parte inferior izquierda de la pantalla digitamos la palabra polinomio y seleccionamos la segunda opción de la lista que se despliega:

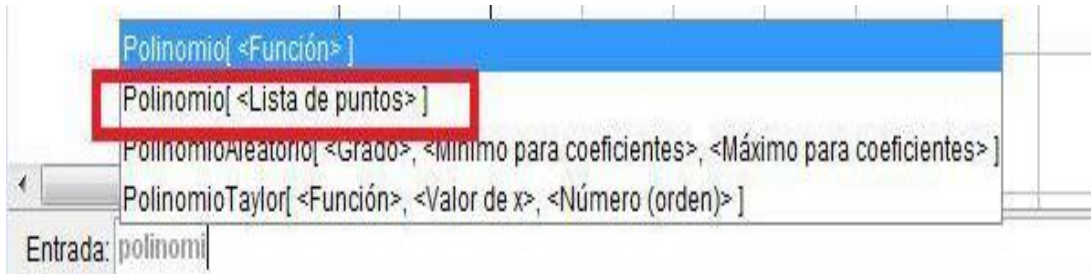


Figura 22. Selección de la función polinomio en el campo de entrada del programa Geograda

Se digitan los puntos en mayúscula, separados por coma y se observa que aparece una curva que los contiene. En la **Vista algebraica** aparece el polinomio que corresponde a la curva que el programa generó para la lista de puntos que se digitó.

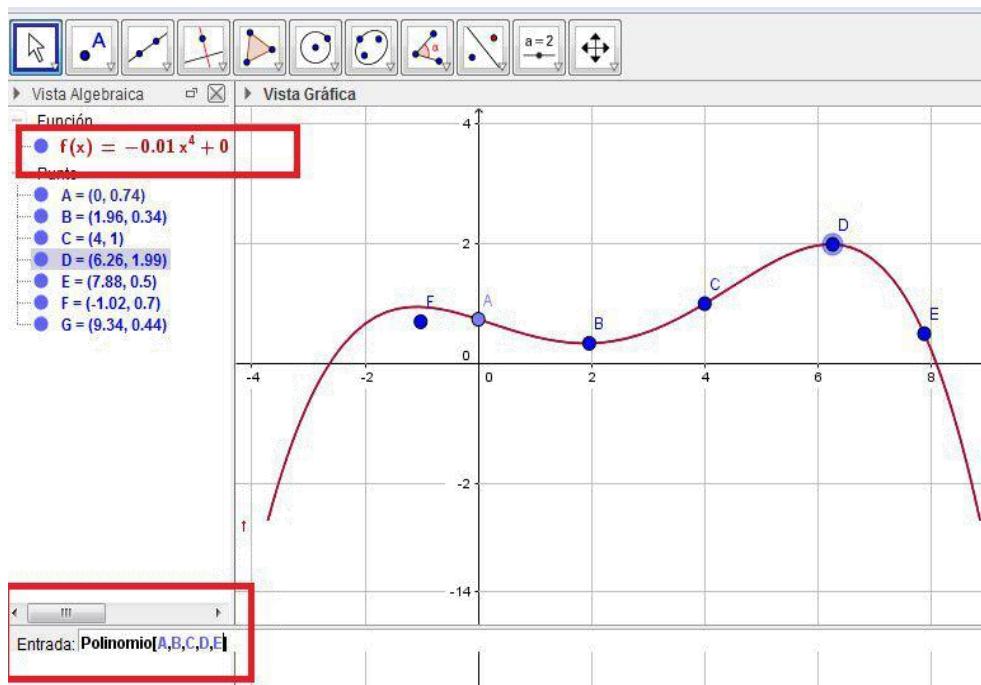


Figura 23. Gráfica de la curva que contiene a los puntos que se ingresaron

3. Generamos la función que corresponda al intervalo comprendido entre el primer y el último punto de la lista. En este caso, **A\_E**. Para hacerlo digitamos

la palabra **función** en la **Entrada** y seleccionamos la opción que nos permite ingresar la letra de la **función** y los **extremos** del intervalo, los cuales son **f** y la coordenadas x de los puntos extremos, separados por coma (se digita la letra f y los valores de la coordenada x de cada punto extremo:

Figura 24. Función que corresponde al intervalo A\_E

Al presionar la tecla Enter, nos debe aparecer sobre escrita una línea de otro color que va desde el punto **A** hasta el punto **E**, a la vez que aparece una nueva función **h(x)** en la vista algebraica. Podemos configurar las propiedades de la nueva función, cambiando su color y el espesor de la línea:

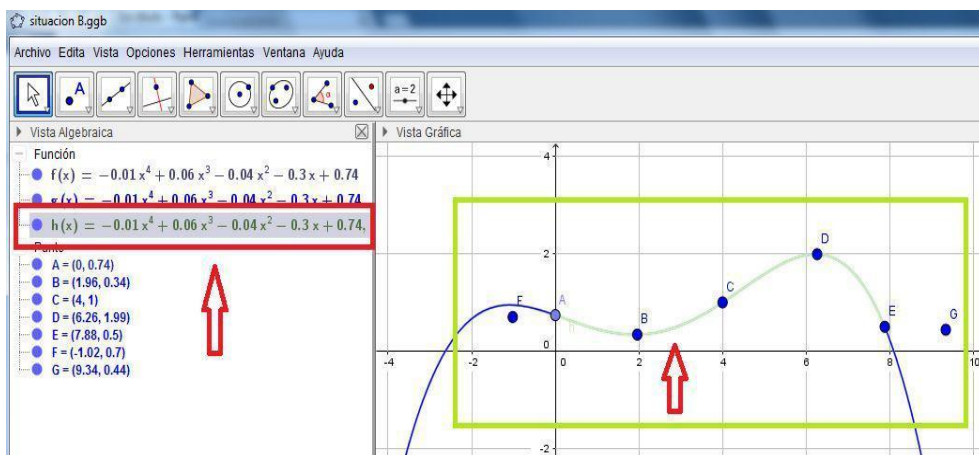


Figura 25. Nueva función h(x) en la vista algebraica

En caso de que la línea no pase por todos los puntos digitados, se debe hacer un **ajuste polinómico**, que nos genere un nuevo polinomio donde se incluyan todos los puntos deseados. Para ello se escriben en la Entrada **ajuste polinómico** y se modifica el grado del polinomio y la lista de puntos:





Figura 26. Ajuste del grado del polinomio en el campo de Entrada

4. Se repite el procedimiento de los pasos 2 y 3 para la tapa del frasco y para la base. La primera entre los puntos **F** y **A**, y la segunda entre los puntos **E** y **G**. Se obtienen las rectas que contienen los segmentos **FA** y **EG**, los cuales se observan en la **Vista Algebraica** y en la **Vista 2D**:

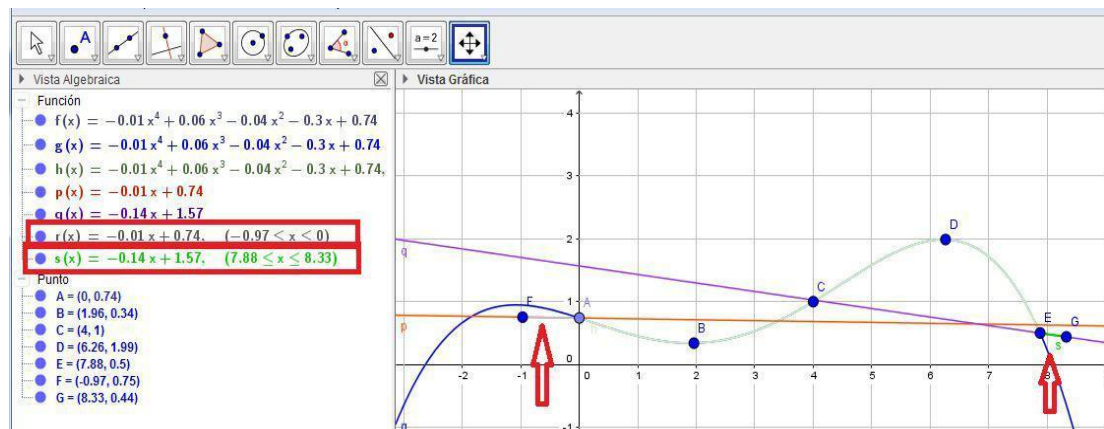


Figura 27. Gráfica de las rectas que contienen a los segmentos FA y EG

5. Activamos la **Vista 3D**, generamos el eje de rotación **y=0** que coincide con el eje x, eliminamos el plano de color gris que aparece en esta vista y configuramos la **vista gráfica** sobre el eje y como se indicó en la situación A:



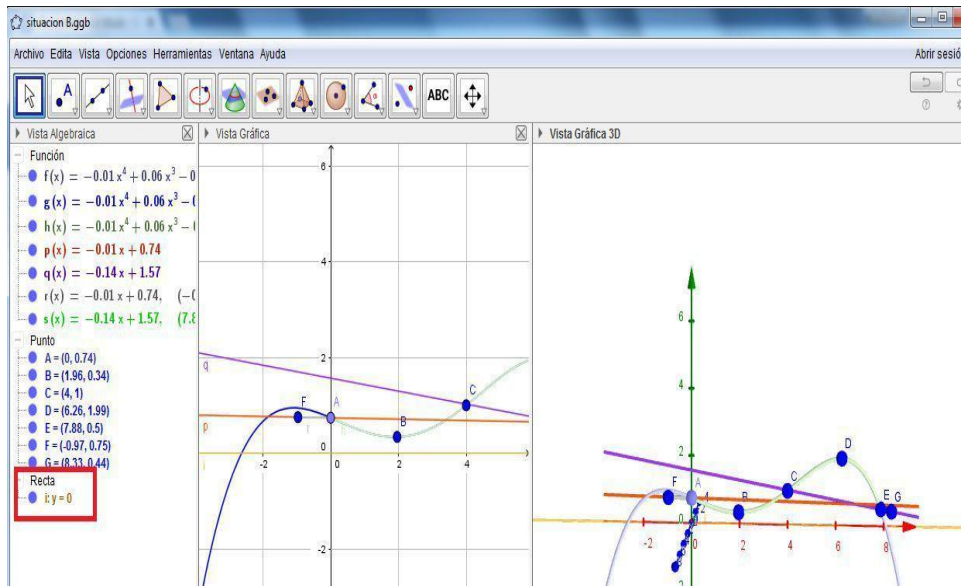


Figura 28. Generación del eje de rotación  $y=0$

6. Creamos el deslizador y lo configuramos para que gire sobre el eje  $y=0$ . Igual que se hizo en la modelación de la situación A:

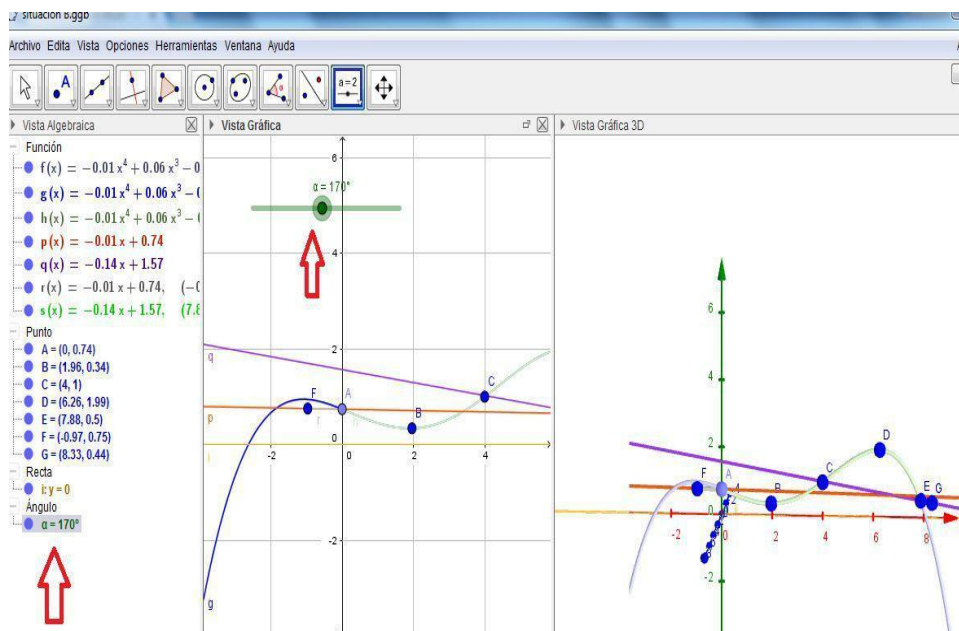


Figura 29. Creación del deslizador para que gire sobre el eje  $y=0$

7. Para mejorar la visualización del modelo, se ocultan los elementos que no necesitamos, desde las propiedades de cada uno:

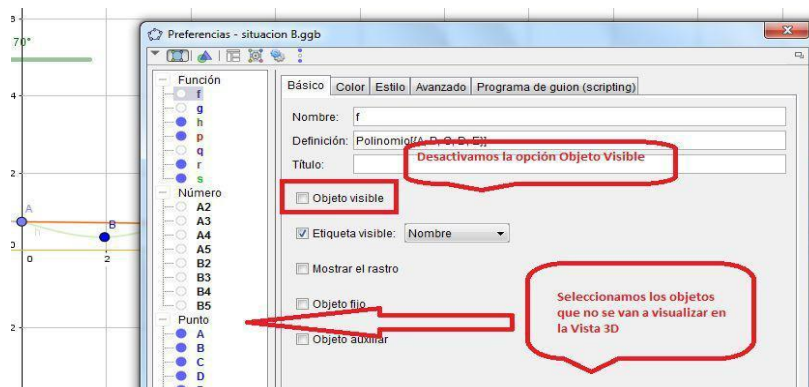


Figura 30. Selección de objetos que se van a ocultar

8. Ahora se hace la modelación, programando cada función visible para que gire alrededor del eje  $y=0$ . Podemos hacer invisibles los puntos **A** y **E**.

Aparecerá en la **Vista algebraica** la función sobre los ejes  $x, y, z$ , a las cuales se les activa el rastro para que tracen el modelo:

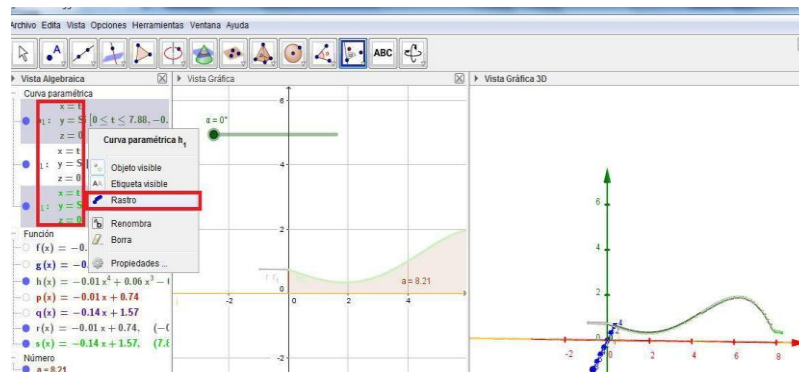


Figura 31. Activación del rastro para el modelo construido

9. Finalmente se activa la **Animación** del deslizador para que las funciones visibles roten sobre el eje  $x$  y tracen el modelo pedido:

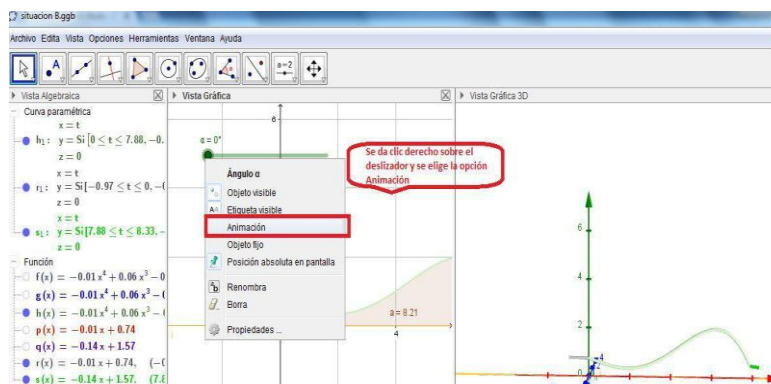


Figura 32. Animación del deslizador para trazar el modelo

Finalmente se ha modelado un envase de perfume, simulando para el mismo unas dimensiones específicas.

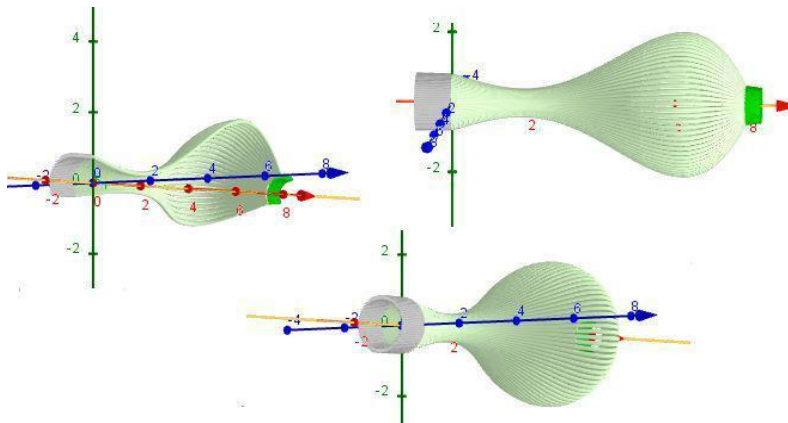


Figura 33. Simulación del envase de perfume

Todos los pasos antes descritos constituyen sólo una pequeña muestra de las ventajas que tiene el diseño y la implementación de actividades académicas dirigidas a modelar y simular fenómenos de la vida real por medio de herramientas tecnológicas que facilitan la visualización detallada de la relación entre las operaciones matemáticas y sus diferentes aplicaciones en situaciones de la vida real.

## 8. CONCLUSIONES

- 1) En el trabajo de profundización se logró evidenciar la importancia del desarrollo histórico de los procesos de modelación y simulación, secuencia en el tiempo que mostró las ideas e investigaciones de expertos para mostrar la evolución significativa que estos procesos tuvieron durante el desarrollo científico de la humanidad. Esto hace posible conocer y comprender el contexto en que surgieron para aportar al logro de sus descubrimientos y aplicación.
- 2) Este trabajo permitió conocer las ventajas que trae consigo el desarrollo del proceso de modelación apoyado en el software Geogebra para la construcción de modelos de funciones con el propósito de fortalecer el aprendizaje significativo de conceptos relacionados con las medidas de área y volumen. Además puso en conocimiento dos situaciones problema que a través de su solución se da a conocer la aplicación del programa Geogebra para la construcción y posterior simulación interactiva de los modelos funcionales.
- 3) Este trabajo a través del diseño de una unidad didáctica sobre el estudio y análisis de situaciones que involucran medidas de área y volumen hizo posible el desarrollo de un aprendizaje significativo, en cuanto a la construcción de modelos matemáticos de funciones y la utilización del software Geogebra para llevar a cabo una experiencia en simulación.

## 9. RECOMENDACIONES

1. Bajo la intención de propiciar un ambiente interactivo de aprendizaje en matemáticas se sugiere proponer unidades didácticas que contemplen la utilización de recursos tecnológicos para el tratamiento de la información, así por ejemplo, usar el software Geogebra permite a tanto docentes como a estudiantes explorar diversos conceptos matemáticos, conduciéndolos a nuevas posibilidades de construir conocimiento. De modo que, la actividad de resolver y proponer problemas no solo se limite a una interpretación estática, sino más bien en una experiencia en la que se pueda interactuar con el objeto de conocimiento.
2. Con este trabajo de profundización se contribuye al estudio de la modelación y la simulación, como procesos clave para comprender la relación entre matemáticas y realidad; razón por la cual se recomienda, abordar el estudio de la modelación matemática como alternativa para construir conceptos de manera significativa y aplicarlos en la interpretación de fenómenos físicos y en la solución de problemas reales. De esta manera, cuando se proponen este tipo de trabajos partiendo de entornos reales y de interés para el estudiante, y además, cuando estos contextos se amplían con el uso herramientas computacionales, propicia un mejor aprendizaje en el estudiante, porque le permite trabajar de forma simultánea procesos cognitivos y analíticos, donde finalmente, logra transferir conceptos aprendidos a otros contextos.

## BIBLIOGRAFIA

- Araujo, J. (2007). Relajo entre matemática e realidade em algumas perspectivas de Modelagem Matemática na Educado Matemática. En J. Barbosa, A. Caldeira, J. Modelagem Matemática na Educagao Matemática Brasileira . *pesquisas e práticas educacionais*, 17 - 32.
- Berrío, M. (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos: el caso del cultivo de café (tesis de maestría)*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Betancur, J., Montoya, J., Mesa, L., & Villa, J. (2013). La modelación matemática: un ejemplo en el contexto cafetero. *Revista Científica*, 474 - 478.
- Biembengut, M. (2009). 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras as propostas atuais. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, V.2, N.2, 7 - 32.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, vol.16(002)*, 105 - 125.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *V festival internacional de matemática. De Costa a Costa* (págs. 1 - 25). Costa Rica: Educación Matemática.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no Ensino*. Sao Paulo: Contexto.
- Biembengut, M., & Nelson, H. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, vol. 16*, 105 - 126.
- Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? . *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45 - 58.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (2007). *Modelling and aplications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer.
- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinkin*. New York: Springer.
- Boullosa, A. (julio de 2009). *La modelación y los modelos teóricos en la ciencia. Una concreción en la auditoría interna con enfoque de riesgo*. Recuperado el 26 de septiembre de 2016, de <http://www.eumed.net/ce/2009b/tjm.htm>
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, 38(2), 178 - 195.
- Cruz, J., & Medina, Y. (2013). Funciones en contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. *Revista S&T*, 11(26), 59 - 80.

- Dorado, I., & Díaz, J. (2014). *La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema*. México: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.
- Guevara, C. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación. Tesis de maestría*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. Investigaciones en educación matemática. Vol. I*. México: Grupo editorial iberoamérica.
- Israel, G. (1996). *Ediciones Universidad Central*. París: Ediciones Universidad Centra.
- Jonassen, D. (2006). *Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving. En D. Jonassen, Modeling with Technology: Mindtools for Conceptual Change*. . Columbus, Ohio: Pearson Prentice Hall.
- Londoño, S., & Muñoz, L. (2011). *La modelación matemática: Un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables. Tesis de maestría no publicada*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Maldonado, L. (2013). *El modelamiento matemático en la formación del ingeniero*. Bogotá: Ediciones Universidad Central .
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Escribe y edita.
- Mesa, Y. (2013). *El modelo matemático como noción, concepto y categoría: reflexión desde la filosofía al campo de la modelación en educación matemática. Tesis de maestría no publicada*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Pantoja, R., Ulloa, R., & Nesterova, E. (2013). La modelación matemática en situaciones cotidianas con los software Avimeca y Mathcad. *Góndola*, 8 - 22.
- Pascuas, Y. (Diciembre de 2008). *MODELAMIENTO MATEMÁTICO APLICADO AL MODELAMIENTO ESPACIAL* . Recuperado el 22 de Septiembre de 2016, de <http://www.sociedadelainformacion.com/14/modelamiento.pdf>
- Pérez, A. (2013). ¿Qué metodología utilizar para la elaboración de monografías del nivel de maestría? *Docencia y Derecho, revista para la docencia jurídica universitaria*, 1 - 19.
- Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza Editorial.

- Rivera, S. (2014). *Medida de área y volumen en contextos auténticos: Una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. Tesis de maestría.* Cauca: Universidad de Antioquia.
- Rivera, S. (2014). *Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. Tesis de maestría.* . Cauca: Universidad de Antioquia.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable.* México: Cengage Learning Editores, S.A.
- Tuay, R. (2012). El papel de los modelos en la práctica científica. *Revista Científica, ISSN 0124 2253, N° 16, 109 - 117.*
- Villa, J. (2007). La modelación como un proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno lógicas, 63 - 85.*
- Villa, J. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte., 1 - 21.*
- Villa, J., Sánchez, J., Obando, J., & Muñoz, L. (2013). La modelación matemática: un ejemplo en el contexto cafetero. . *Educación científica y tecnológica, 532 - 536.*
- Voskoglou, M. (2011). Mathematical modelling in classroom: the importance of validation of the constructed model. *Proceedings of the 11th International Conference, 352 - 357.*



**ANEXO 1**

**GUÍA DE APRENDIZAJE: CONOCIMIENTO EL SOFTWARE GEOGEBRA**

**POR**

**CARLOS ANDRÉS FLÓREZ ATEHORTÚA**

**CARLOS ARTURO YEMAIL MERCADO**

**ASESOR**

**SANDRA MARIA QUINTERO CORREA**

**Magister en educación línea Ciencias Experimentales y Matemáticas**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA**

**ESCUELA DE INGENIERIA**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

**MEDELLIN**

**2017**

**MANUAL BÁSICO DE**  
**GeoGebra**

**GUÍA RÁPIDA DE APRENDIZAJE PARA  
CONOCER EL MANEJO DEL  
PROGRAMA**

## GUÍA DE APRENDIZAJE: CONOCIENDO EL SOFTWARE GEOGEBRA

Apreciado estudiante la presente guía está orientada al aprendizaje de las reglas básicas para manejar el software Geogebra. Por lo que se indican una serie de pasos que describen elementos básicos del programa para realizar construcciones sencillas y estudiar algunas relaciones.

**Objetivo:** Capacitar a los estudiantes en el manejo del software Geogebra explorando algunas de sus herramientas y construcciones geométricas.

### **Descripción:**

Cada uno de los estudiantes contará con un computador portátil para desarrollar la guía propuesta sobre el manejo básico del software Geogebra. El propósito es que ellos conozcan las herramientas del programa para que aprendan a utilizarlo y realicen algunas construcciones geométricas sencillas. La guía que se propone consta de una serie de pasos que describe la ventana principal del software, los elementos que contiene y cada uno de los comandos para ejecutar las instrucciones; por lo que el estudiante irá explorando dichos iconos para que conozca el nombre y la función que realiza cada uno de ellos. Luego de esto, el alumno seguirá las instrucciones propuestas en la guía para realizar las construcciones geométricas que se piden. Durante el desarrollo de la guía sobre el manejo del software, el docente mediante la proyección de la misma irá guiando a los estudiantes para que exploren el programa y dará explicaciones concisas para realizar las construcciones que se indican.

## **¿Qué es Geogebra y por qué es importante utilizarlo?**

Geogebra es un software libre e interactivo que reúne en forma dinámica la geometría, el álgebra y el cálculo. Es una herramienta útil que ofrece una doble percepción de los objetos, ya que cada objeto o construcción geométrica tiene dos representaciones, una gráfica y otra algebraica. Usar Geogebra permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva puesto que ayuda a visualizar contenidos matemáticos que son complicados de afrontar desde un dibujo estático, revelando relaciones existentes entre la figura construida y permitiendo la transformación dinámica de los objetos que la componen.

### **Fase de introducción**

Antes de comenzar con el manejo del programa, se les propone a los estudiantes observar el siguiente video que explica el uso y la importancia del programa. Con este video se pretende conocer en qué consiste el software Geogebra, cuáles son sus características y la importancia que tiene para el desarrollo del pensamiento matemático. Luego de ver el video se plantean una serie de preguntas relacionadas con la importancia que tiene el software Geogebra en el estudio de las matemáticas. Para ello los estudiantes observarán el video disponible en el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=plQwxEmoPEY>

Una vez finalizado el video el docente propone una puesta en común a partir de las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es Geogebra?
2. ¿Por qué crees que puede ser importante utilizar Geogebra en la clase de matemáticas?

3. ¿Consideras que el programa Geogebra te puede ayudar a entender relaciones entre representaciones geométricas?
4. ¿Qué elementos de las matemáticas se logran reunir durante la ejecución del programa?
5. ¿Preferirías resolver situaciones en matemáticas con lápiz y papel que con Geogebra?
6. ¿Crees que con el uso de esta herramienta te podría ayudar a un buen desarrollo del pensamiento matemático?

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes se busca incentivar a que ellos reconozcan la importancia de utilizar el software Geogebra durante el desarrollo de la unidad didáctica como una herramienta que permite generar un ambiente dinámico de aprendizaje donde se pueden visualizar y comprender relaciones geométricas y algebraicas que posteriormente facilitarían lograr una experiencia en modelación y simulación.

### **Fase de desarrollo**

GeoGebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una *Vista Gráfica*, una, numérica, *Vista Algebraica* y además, una *Vista de Hoja de Cálculo*. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones), y en celdas de una hoja de cálculo. Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente.

Para el desarrollo de la guía de aprendizaje te proponemos realizar los siguientes momentos:

**Primer momento:** Abrir el programa Geogebra, el cual se encuentra como acceso directo en el escritorio del computador, indicado con el siguiente icono



Al abrir *GeoGebra* aparece una ventana en la cual se pueden identificar cuatro secciones: *Barra de herramientas*, *Vista algebraica*, *Vista gráfica* y *Campo de entrada*.

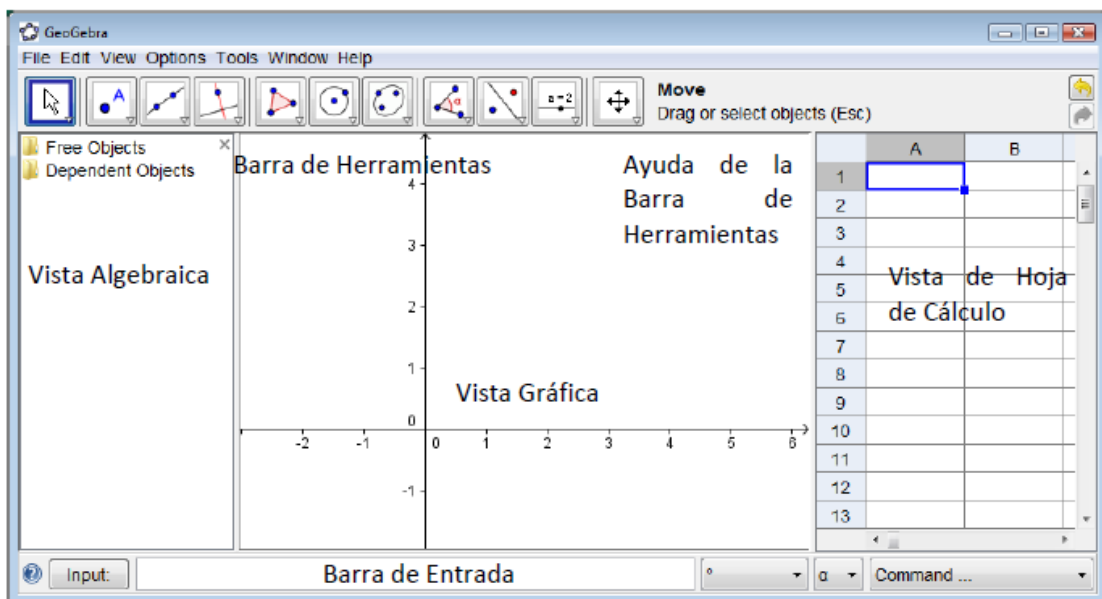


Figura 34. Vista inicial Geogebra

- **Barra de herramientas:** En ella aparecen los iconos, los cuales cada uno de ellos se activa al hacer clic con el mouse sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro.
- **Entrada:** Se encuentra en la parte inferior de la ventana, aquí se pueden realizar operaciones introduciendo los números o ecuaciones y los resultados se visualizan en la vista algebraica.

- **Vista Geométrica:** Aquí se realizan las construcciones geométricas. En esta vista se visualizan las gráficas que se ejecutan en la entrada.
- **Vista algebraica:** En esta vista encontramos las ecuaciones de los gráficos.

**Segundo momento:** Pasar el mouse por los iconos de la barra de herramientas y observar las opciones que brinda el menú de Geogebra. Con cada una de estas opciones o comandos pueden construirse figuras sobre la zona gráfica cuyas coordenadas o ecuaciones aparecen en la zona algebraica. A continuación se muestran algunas de las opciones que se despliegan del menú por lo que debes hacer un recorrido sobre cada una de ellas antes de empezar a realizar construcciones.

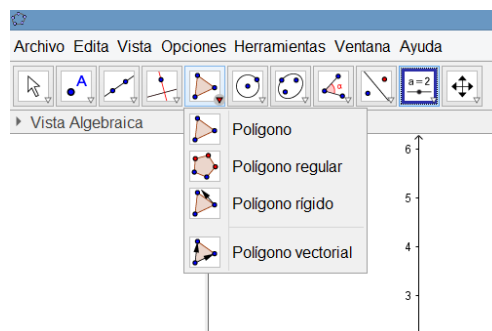
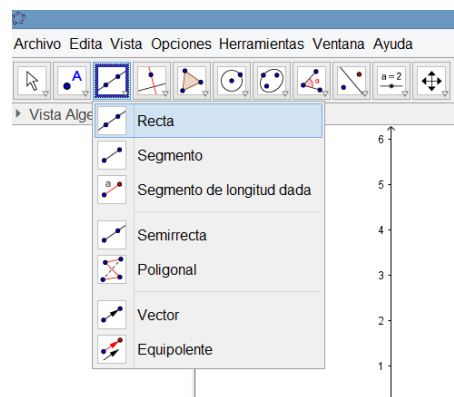
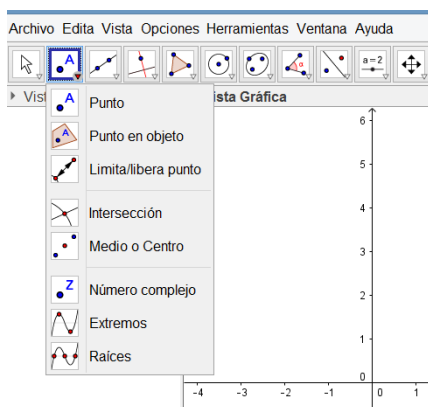
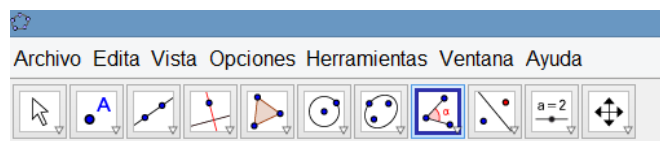


Figura 35. Opciones de menú Geogebra

**Tercer momento:** Es hora de empezar a explorar el software Geogebra. Para ello abre tu navegador de internet y copia el siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/F6F7SRbh#chapter/93683>

Este sitio corresponde a la primera parte de la serie interactiva “Introducción a Geogebra”. El mismo abarca las construcciones geométricas básicas e introduce algunas características elementales de GeoGebra, como la Barra de herramientas de la Vista gráfica, la Barra de navegación, el Protocolo de la construcción y la Barra de estilo.

Con el desarrollo de estas actividades de exploración el estudiante estará en capacidad de conocer el uso básico del programa Geogebra y debido a que la unidad didáctica contempla el uso de herramientas computacionales, en este caso se utilizará el software Geogebra para el desarrollo de la experiencia en simulación, por lo que se hace necesario capacitar a los estudiantes en el uso de dicho programa a través de esta guía interactiva dispuesta en el sitio web de Geogebra, la cual ofrece el manejo básico de las herramientas del software y construcciones geométricas sencillas.



**ANEXO 2**

**UNIDAD DIDÁCTICA**

**POR:**

**CARLOS ANDRÉS FLÓREZ ATEHÓRTUA**

**CARLOS ARTURO YEMAIL MERCADO**

**ASESORA:**

**SANDRA MARÍA QUINTERO CORREA**

**Magister en educación línea Ciencias Experimentales y Matemáticas**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNIVERSIDAD PONTIFICIA BOLIVARIANA**

**2017**

## INTRODUCCIÓN

El proceso de modelación matemática apoyado por el proceso de simulación necesita del esfuerzo y dedicación de los estudiantes para llevar a cabo el desarrollo de actividades que requieran de la destreza, el análisis, la observación y la representación a través de un modelo matemático que luego es simulado mediante la aplicación de algún software dinámico. Enfrentarse a situaciones de la vida real relacionadas con la modelación y la simulación son experiencias que permiten la construcción de modelos matemáticos representados a manera de función, pues a través de las funciones se pueden modelar distintas situaciones de la vida real, donde es posible describir, analizar conceptos, relaciones y magnitudes con el fin de predecir resultados.

Construir un modelo matemático implica la manipulación de conceptos aritméticos, algebraicos y geométricos, procedimiento que resulta riguroso en el estudiante pero que actualmente gracias a la aplicación de herramientas computacionales se crea un escenario con mayor motivación e interés para el alumno. Por tal motivo con el propósito de garantizar en el estudiante un aprendizaje significativo en el que se relacione las matemáticas con la tecnología se hace necesario crear una unidad didáctica que potencie el uso del software Geogebra para el logro de dicho aprendizaje. De esta manera, planificar una unidad didáctica que reúna las exigencias de la modelación con el uso apropiado de Geogebra conlleva a que los estudiantes puedan comprender de una forma clara los contenidos matemáticos y a darle un sentido a lo que aprenden.

La presente unidad didáctica contempla una serie de actividades sobre situaciones de área y volumen relacionadas con la modelación matemática y apoyada en el uso de herramientas TIC, la cual está dirigida a estudiantes de grado noveno cuyo propósito es analizar las situaciones que se le presentan para obtener un modelo matemático a partir de dicho estudio, modelo que toma la forma de una función y

lo aplica en el contexto de la situación problema para luego ser simulado con el software “Geogebra”. La intención con el desarrollo de ésta unidad es permitir en el estudiante la capacidad para resolver situaciones problema, específicamente aquellas que involucran procesos de modelación relacionados con las medidas de área y volumen a través de la aplicación de funciones y fijar el uso de competencias matemáticas a la luz del modelo obtenido, experiencia que resulta enriquecedora por lo que se propone en un ambiente interactivo con el programa Geogebra.

En el grado noveno básicamente se aborda el estudio de las funciones, sus características y componentes; pero comúnmente este estudio solo se remite a la representación y a un análisis superficial. Para abordar las funciones más allá del lápiz y el papel se presenta la simulación con el software Geogebra como un recurso didáctico que permite la manipulación de objetos y potencializa la representación dinámica de las funciones. A través del uso del software Geogebra también se dinamizará el desarrollo del proceso de modelación matemática mediante el estudio, comprensión, análisis y aplicación de situaciones reales específicamente aquellas que se relacionan con las medidas de área y volumen.

La unidad didáctica contempla cuatro fases, iniciándose con la exploración de saberes previos para finalizar con un trabajo de aplicación de los conocimientos aprendidos en ella. Para garantizar su buen desarrollo se hace necesario que los estudiantes posean absoluta comprensión acerca de lo que es una función, dominio y rango, conozca del tipo de funciones y su representación. Si el estudiante tiene pleno conocimiento de estos saberes, se augura el éxito en ella, dado que esta es una propuesta de aplicación de conocimientos en el análisis de situaciones problema sobre medidas de área y volumen.

## PLANIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD DOCENTE EN LA UNIDAD DIDÁCTICA

UNIDAD.	Modelación y simulación con Geogebra en situaciones de área y volumen con modelos de funciones.	
ESTRUCTURA CONCEPTUAL		
CONTENIDOS  DE  APRENDIZAJE	Conceptual	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conceptos previos sobre área y volumen.</li> <li>- Concepto de función y tipos de funciones (lineal, cuadrática y cúbica).</li> <li>- Modelación matemática.</li> </ul>
	Procedimental	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representar funciones en el software Geogebra.</li> <li>- Describir los elementos y características de la función lineal y cuadrática.</li> <li>- Interactuar y visualizar en tiempo real lo que ocurre en la variación de los parámetros de las funciones representadas con el software Geogebra.</li> <li>- Identificar funciones que modelan una determinada situación de la vida real en el que se emplean las medidas de área y volumen.</li> </ul>
	Actitudinal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover en el estudiante acciones de responsabilidad para hacer un trabajo cooperativo con sus demás compañeros.</li>   <li>- Reconocer la importancia que tiene llevar a cabo la realización de actividades propuestas en la unidad didáctica tanto de manera individual o grupal para el desarrollo de un aprendizaje significativo.</li> </ul>
		Diseñar una unidad didáctica apoyada en los procesos de modelación y simulación

OBJETIVOS	Objetivo General	con el software Geogebra, para que los estudiantes de noveno grado, a partir de una situación real que involucre medidas de área y volumen logren construir modelos de funciones.
	Objetivos específicos	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Reconocer los conceptos de las medidas de área y volumen, así como las características y elementos de las funciones de tipo lineal, cuadrática y cúbica que permitan adquirir nuevos aprendizajes.</li> <li>✓ Generar un ambiente dinámico de aprendizaje en el que mediante la modelación y la simulación a través del software Geogebra se logre el análisis y comprensión de situaciones sobre medidas de área y volumen.</li> <li>✓ Solucionar situaciones reales sobre medidas de área y volumen que impliquen la construcción de un modelo matemático representado por funciones.</li> </ul>
ESTÁDARES BÁSICOS DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICAS	<p><b>Pensamiento espacial y sistemas geométricos</b></p> <p>Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.</p> <p><b>Pensamiento métrico y sistemas de medidas.</b></p> <p>Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.</p>	

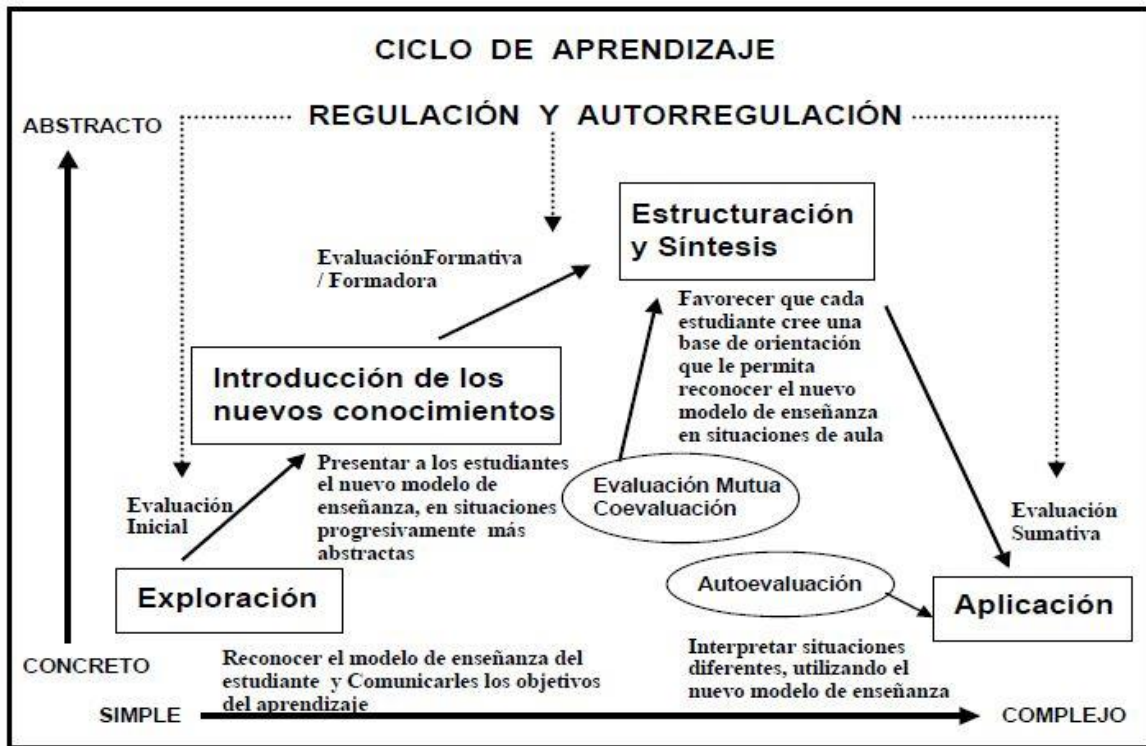
	<p><b>Pensamiento variacional</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan</li> <li>- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.</li> </ul>
APRENDIZAJES ESPERADOS	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Identifico las herramientas que ofrece el software Geogebra para realizar construcciones básicas elementales.</li> <li>- Reconozco los elementos característicos de las funciones lineales y cuadráticas a través de la representación en el software Geogebra.</li> <li>- Aplico los conocimientos referentes a las medidas de área y volumen y los conceptos relacionados con las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas en el análisis, solución y planteamiento de situaciones reales donde sea posible llevar a cabo procesos de modelación y simulación mediante la utilización del software Geogebra.</li> </ul>
GRADO AL QUE VA DIRIGIDO	Estudiantes de grado noveno de las Instituciones Educativas Piamonte del municipio de Cáceres y Ezequiel Sierra del municipio de Guarne.
TIEMPO O DURACIÓN	16 horas
MATERIALES	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Computador</li> <li>- Video Bean.</li> <li>- Fotocopias</li> <li>- Software Geogebra.</li> <li>- Videos.</li> <li>- Recursos web.</li> </ul>

## DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Las unidades didácticas constituyen una serie de actividades de aprendizaje organizadas de forma secuencial para planificar el proceso de enseñanza y aprendizaje en torno a un contenido o saber específico. En su programación se precisan los contenidos, objetivos y pautas metodológicas a tratar, los recursos y el tiempo o duración de las actividades propuestas en ella. Las unidades didácticas son guías de apoyo para los docentes y estudiantes en la medida en que contribuyen al desarrollo de un aprendizaje significativo basado en la resolución de problemas y a la formación de competencias en el estudiante.

Para Sanmartí (2000) “no hay recetas para algo tan complejo como es enseñar, aprender y evaluar”, es decir, las unidades didácticas no están sujetas a un formato en particular, los docentes son los encargados de decidir libremente como diseñar sus propias unidades didácticas para aplicarlas dentro del aula de clase, lo único en que deben coincidir son en los intereses de los estudiantes y el contexto en el que se encuentran para abrir paso a un aprendizaje significativo concretando los momentos didácticos en que ha de desarrollarse la planificación de la unidad.

El acontecer de esta unidad didáctica está enmarcado en los planteamientos sobre el ciclo de aprendizaje de Jorba y Sanmartí (1996), el cual se relaciona en el siguiente esquema:



Esquema del ciclo de aprendizaje de acuerdo con Jorba y Sanmarti (1996). Extraído de Aprender a enseñar ciencias: análisis de una propuesta para la formación inicial del profesorado de secundaria basado en la metacognición (pág.103)

A partir del esquema anterior sobre el ciclo de aprendizaje, se proponen cuatro fases, las mismas que se plantean para el desarrollo de esta unidad didáctica:

**1. Exploración:** Es la fase inicial que le permite al estudiante activar sus conocimientos previos, por lo que se proponen actividades de indagación que busquen captar su atención para que de esta manera logre tener un primer acercamiento al objeto de conocimiento que se quiere desarrollar. En este caso se pretende que el estudiante se interese por el estudio de las medidas de área y volumen y tener un primer acercamiento en el proceso de modelación matemática; esto ubica al estudiante en el objeto de estudio o contenido principal que se desarrolla en la unidad didáctica. En esta primera etapa se proponen dos actividades:



a. La primera actividad lleva por nombre “cuestionario inicial sobre medidas de área y volumen”, con el que se busca indagar el grado de conocimiento que los estudiantes tienen acerca de las medidas de área y volumen. Una vez que los estudiantes hayan dado respuesta a las preguntas se hace una socialización con el docente y los demás estudiantes del grupo donde se leen cada una de las respuestas para ir estableciendo una puesta en común con el objetivo de aclarar los conceptos involucrados en el cuestionario.

b. Ejercicios sobre modelación de funciones. Éstos consisten en resolver una serie de problemas cuya solución requieren de hallar una expresión matemática (función) que modele dicho problema.

**2. Introducción a nuevos conocimientos:** En esta fase se proponen actividades orientadas a la construcción del aprendizaje de los conceptos. En estas actividades los estudiantes serán guiados por el docente permitiendo que observen, comparen o relacionen, de manera que se vean abocados a interactuar con el material de estudio junto con sus compañeros y el docente, buscando construir conceptos más significativos. En esta fase se contempla introducir conceptos relacionados con el aprendizaje de funciones y su representación en el software Geogebra, además de reconocer las medidas de área y volumen de un cilindro y la simulación de su construcción y por último realizar el análisis de una situación sobre el volumen de una caja por medio de una función, la cual representa el modelo matemático en dicha situación. En esta segunda etapa se proponen las siguientes actividades:

a. Descubriendo medidas en formas cilíndricas. Esta actividad consiste en la construcción de un cilindro recto para reconocer las partes que lo componen para así expresar el área total y el volumen de este cuerpo geométrico y luego realizar una experiencia en simulación con el programa Geogebra que permita analizar las

variaciones que se presentan en el desarrollo de dicho cuerpo cuando cambian las medidas de su altura y radio.

b. Explorando funciones con Geogebra. Esta actividad consiste en una serie de prácticas en las que el estudiante representará funciones de tipo lineal y cuadrática en el software Geogebra, al igual que reconocerá en ellas características y elementos que las componen.

c. Análisis del volumen de una caja por medio de una función. Esta actividad corresponde a una situación de modelación matemática apoyada del proceso de simulación con el software Geogebra. En ella se presenta un problema donde se debe construir una caja sin tapa y el estudiante analizará la situación propuesta y comprenderá los cambios que suceden en la función que representa el volumen de la caja a medida que varían las medidas del largo y el ancho.

**3. Estructuración y síntesis de los nuevos conocimientos:** Luego de que el estudiante haya activado sus saberes previos en la fase de exploración e incorporado nueva información y nuevo conocimiento en la fase de introducción; se propone esta tercera fase donde el estudiante está en la construcción de los nuevos aprendizajes como consecuencia de la interrelación con el profesor y los estudiantes a través de un trabajo individual y grupal. Esta etapa se desarrolla con el fin de profundizar en lo referente a modelación matemática y simulación en el que se aplica lo aprendido sobre conceptos de funciones en una situación de la vida real.

En esta tercera etapa se propone la actividad “Elaborando cajas y construyendo funciones”, la cual consiste en el análisis de una situación de la vida real para que el estudiante logre identificar las funciones que modelan dicha situación. El estudiante a partir de la construcción de una serie de cajas construidas en hojas de papel debe analizar la variación de sus dimensiones, hallar el área y el volumen y luego del registro de dichos resultados en una tabla logre construir una

expresión a manera de función que se convierte en el modelo matemático de la situación y finalmente representar dichas funciones en el software Geogebra.

**4. Aplicación:** En esta fase el estudiante puede aplicar los conocimientos adquiridos en otras situaciones similares a las vistas en la fase anterior de tal forma que se le posibilite confrontar las experiencias adquiridas con nuevas situaciones. Además resulta de interés que comparen sus puntos de vista iniciales con los modelos finales para que sean capaces de identificar o reconocer su propio progreso de aprendizaje. Esta etapa debe propiciar además, que los estudiantes planteen otras situaciones que den cuenta de la "continuidad" de la reflexión de los conocimientos adquiridos, que sean capaces de utilizar sus propios lenguajes y representaciones puesto que este "último modelo explicativo" del conocimiento específico, es sólo un conocimiento provisional que nuevamente deberá "evolucionar" sobre la base de nuevas palabras, nuevas analogías, nuevas experiencias, etc.

## ACTIVIDADES DE EXPLORACIÓN

### ACTIVIDAD N° 1 – CUESTIONARIO INICIAL SOBRE MEDIDAS DE ÁREA Y VOLUMEN

**Objetivo:** Indagar por los saberes previos que tienen los estudiantes acerca de las medidas de área y volumen.

**Descripción:** A cada estudiante se le entrega el cuestionario para que de forma individual responda a las preguntas propuestas en él. Luego de terminar el cuestionario el docente propone una puesta en común, donde a medida que lea cada pregunta los estudiantes irán levantando la mano para contestar. El docente escribirá en el tablero las respuestas de los estudiantes como una forma de comparar los resultados y en las respuestas a cada pregunta el docente ofrecerá una explicación sobre los conceptos que intervienen en cada respuesta con el propósito de despejar dudas que puedan surgir.

**Duración:** 1 hora

**Recursos:**

- Fotocopia del cuestionario.
- Tablero.

## CUESTIONARIO INICIAL

Nombre: \_\_\_\_\_ Grado: \_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

El cuestionario que se presenta a continuación tiene el propósito de indagar el grado de conocimiento que tienes acerca de los conceptos relacionados con las medidas de área y volumen.

Responde a las preguntas:

1. ¿Qué es lo que se puede medir de un objeto?

---

---

---

2. ¿Qué entiendes por área?

---

---

---

3. Cuando te piden determinar el área de una figura o un objeto, ¿de qué forma lo harías?

---

---

---

---

4. ¿Qué entiendes por volumen?

---

---

---

---

5. ¿Para qué sirve conocer el volumen de los objetos?

---

---

---

---

6. ¿Cómo se halla el volumen de un cuerpo?

---

---

---

---

7. ¿Cuáles objetos o elementos de la vida cotidiana crees que tienen volumen y cuáles no?

---

---

---

---

8. ¿Qué relación se podría establecer entre el área y el volumen de un cuerpo?

---

---

---

---

9. ¿Es posible determinar una expresión matemática que permita relacionar el área de un objeto con alguna de sus dimensiones? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

10. ¿Podría una expresión matemática determinar el volumen de un objeto a partir de su altura? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

---

---

---





## ACTIVIDAD N° 2 – MODELACIÓN DE FUNCIONES

**Objetivo:** Plantear una expresión matemática (función) que modele la solución de un problema.

**Descripción:**

Los estudiantes se organizan en equipos de 2 integrantes y se les entrega una serie de problemas sencillos sobre modelación de funciones. El propósito de la actividad es resolver los problemas y presentar la solución de los mismos mediante una expresión matemática representada a través de una función. Antes de iniciar a resolver los problemas en la guía se presenta un ejercicio resuelto con la intención de que los estudiantes observen la manera en que se plantea la expresión matemática que modela la situación. El docente pasará por cada uno de los equipos para observar el trabajo que están realizando y despejar dudas que se puedan ir presentando en el momento. Mediante el desarrollo de esta actividad se busca que los estudiantes tengan un primer acercamiento al proceso de modelación, una vez resuelto los problemas, ellos expondrán ante el grupo la solución a la que llegaron en cada uno de los problemas y comparar los resultados.

**Duración:** 1 hora

**Recursos:**

- Fotocopia con los problemas de modelación de funciones.
- Hoja de papel y lápiz.

## GUÍA SOBRE PROBLEMAS DE MODELACIÓN DE FUNCIONES

Integrantes del equipo: \_\_\_\_\_

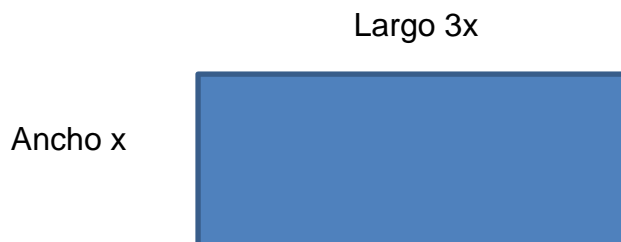
Fecha: \_\_\_\_\_

Grado: \_\_\_\_\_

A continuación se presentan una serie de ejercicios representativos de funciones modeladas de manera convencional. El propósito en cada uno de ellos consiste en hallar la expresión matemática que a manera de modelo matemático represente la solución del mismo.

### Ejercicio resuelto

La longitud de un rectángulo es tres veces su ancho. Encuentre una función que modele su área en términos de su ancho.



Solución

La fórmula para hallar el área de un rectángulo está dada por la expresión:

$$\text{Área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

Por lo que el área en función de  $x$  sería:

$$A(x) = 3x \cdot x = 3x^2$$

Ejercicio 1

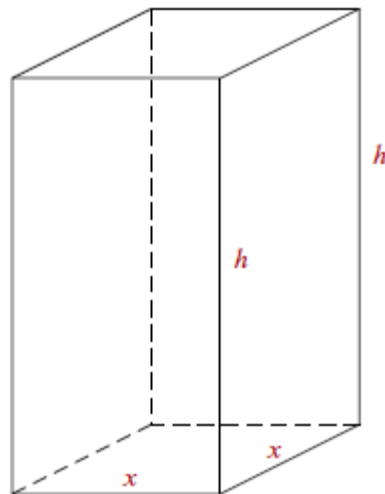
La altura de un cubo es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen en términos de su ancho.

Ejercicio 2

Un rectángulo tiene un perímetro de 20 cm. Encuentre una función que modele el área  $A$  en términos de la longitud  $x$  de uno de sus lados.

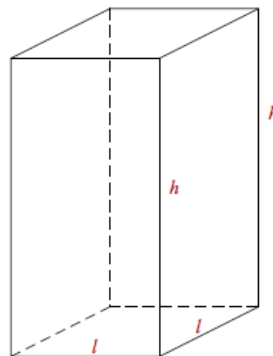
### Ejercicio 3

Una caja de caras laterales rectangulares sin tapa tiene su base cuadrada y un volumen de  $2 \text{ m}^3$ . Expresar el área de la caja como función de uno de los lados de la base.



### Ejercicio 4

Una caja de caras laterales rectangulares con base y tapa cuadradas tiene un área total de  $1\,200 \text{ cm}^2$ . Expresar el volumen de la caja como función de uno de los lados de la base.



## ACTIVIDADES DE INTRODUCCIÓN DE NUEVOS CONOCIMIENTOS

### ACTIVIDAD N° 1 – DESCUBRIENDO MEDIDAS EN FORMAS CILINDRICAS

**Objetivo:** Desarrollar procesos de solución en situaciones relacionadas con la forma, área de la superficie y volumen del cilindro apoyados en el software Geogebra.

**Descripción:** Esta guía propone la construcción de un cilindro recto con el propósito de introducir en los estudiantes conceptos relacionados con medidas de área y volumen y posteriormente desarrollar una experiencia en simulación mediante la construcción de un cilindro utilizando el software Geogebra, en el que los estudiantes logren observar los distintos tamaños que toma un cilindro cuando varía su altura y radio. Antes de llegar a la experiencia en simulación se parte con actividades de introducción con el fin de reconocer la forma que toma un cilindro y el procedimiento para determinar el área y volumen del mismo.

Las actividades 1.1 a 1.3 se realizan en forma grupal. Para ello se les pide a los estudiantes que se organicen en equipos de tres integrantes y se les hace entrega física del material a desarrollar.

En la actividad 1.1 los estudiantes a través de una serie de imágenes que se les presentan deben indicar cuáles corresponden a un cilindro y cuáles no y deben justificar su elección. Al finalizar el docente propone que se haga una socialización con los resultados obtenidos con el propósito de observar qué tanto lograron coincidir en las elecciones que hicieron.

En la actividad 1.2 los estudiantes deben armar un cilindro a partir de una plantilla que se les proporciona. Una vez armado el cilindro en los equipos, los estudiantes a través de un análisis a la figura determinaran cómo creen que se haya el área y volumen de un cilindro, anotarán sus apreciaciones y consignarán la fórmula que

dedujeron en el análisis completando la tabla propuesta en la guía. Una vez hecho esto, compartirán sus respuestas ante el grupo con el fin de establecer un consenso y por último el docente validará las respuestas y anotará en el tablero la fórmula correcta para que ellos la conozcan ofreciendo una explicación de cómo surge dicha fórmula y la registren en la casilla correspondiente de la tabla.

En la actividad 1.3 los estudiantes partiendo de la información sobre cómo hallar el área y volumen de un cilindro, resolverán una serie de situaciones planteadas en la guía, las cuales involucran este tema. Una vez resueltas estas dos situaciones, los equipos de trabajo expondrán la solución ante el grupo para validar sus respuestas con el docente.

Esta serie de actividades fueron tomadas del siguiente enlace:

[http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G\\_9/M/SM/SM\\_M\\_G09\\_U02\\_L01.pdf](http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G_9/M/SM/SM_M_G09_U02_L01.pdf)

La actividad 1.4 se realiza en forma individual, cada estudiante visitará el sitio web indicado en el que se presenta el desarrollo del área lateral, área total y volumen de un cilindro. A cada uno de ellos se le pide que observen lo que sucede y registren sus anotaciones de manera escrita y al finalizar se hace una exposición ante el grupo sobre lo que cada uno observó. El propósito es que ellos puedan analizar los cambios que se dan en el área y volumen de un cilindro así como el cambio de su tamaño cuando varían la medida de la altura y el radio.

Luego de esto, cada estudiante realizará la creación en el software Geogebra de un cilindro y de los deslizadores “altura” y “radio” con el propósito de mostrar la animación correspondiente de un cilindro cuando varían las medidas de la altura y radio. Para ello cada uno observará un video tutorial para tal fin y siguiendo las instrucciones en el video, ellos se darán a la tarea de construir el cilindro en el

programa Geogebra. El docente observará el trabajo realizado por cada estudiante y al finalizar expondrán el trabajo. La finalidad de esta actividad es que cada uno de ellos pueda tener una experiencia en simulación en el que logren manipular en un ambiente interactivo la creación de un objeto geométrico.

Finalmente, la actividad 1.5 consiste en resolver un problema donde se pide hallar el volumen de un cilindro y luego presentar la solución del mismo a través de una simulación en el software Geogebra.

**Duración:** 3 horas

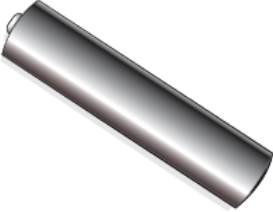



**Recursos:**

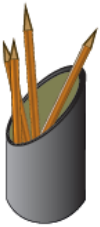

- Fotocopia de la guía de trabajo.
- Hoja de papel y lápiz.
- Tijeras, colbón, regla.
- Computador.

## GUIA DE APRENDIZAJE: DESCUBRIENDO MEDIDAS EN FORMAS CILINDRICAS

### Actividad 1.1

En nuestro entorno existen múltiples formas geométricas, que nos permiten realizar el estudio de las mismas. A continuación aparece una serie de imágenes, responde marcando con una X si corresponde a un cilindro o no y justifica la respuesta.

	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro? si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro? si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro? si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro? si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>

	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro?</p> <p>si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>
	<p>¿La imagen corresponde a un cilindro?</p> <p>si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/></p> <p>¿Por qué?</p> <hr/> <hr/> <hr/>

Ahora socialicen en el grupo los resultados obtenidos para determinar que tango pudieron coincidir en la elección.

**Actividad 1.2**

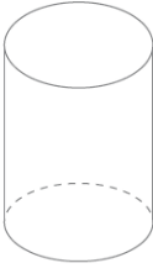
Para el desarrollo de esta actividad se deben contar con los siguientes elementos:

- Tijeras
- Pegante
- Regla

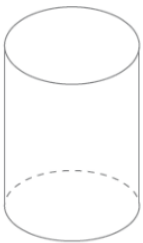
Recorta y arma las figuras del cilindro recto (Ver plantilla que se anexa)

Partiendo de la observación de la figura ya armada realiza un análisis para determinar el área del cilindro; para ello reúnete con dos compañeros y compartan sus apreciaciones sobre cómo creen que se debe hallar el área total de un cilindro y luego completen la siguiente tabla. Socialicen el consenso para validar la respuesta con el docente.



Señala las partes más importantes del cilindro	Análisis para determinar el área total del cilindro	Fórmula para hallar el área total del cilindro
		Fórmula seleccionada:
		Fórmula validada:

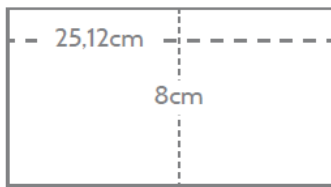
Ahora tomando la misma figura del cilindro, piensen y compartan entre ustedes acerca de la forma cómo creen que se determina el volumen de este cuerpo. Realicen las anotaciones pertinentes en la siguiente tabla y presenten el consenso al docente para validar la respuesta.

	Análisis para determinar el volumen del cilindro	Fórmula para hallar el volumen
		Fórmula seleccionada:
		Fórmula validada:

### Actividad 1.3

Partiendo de la información presentada determina el área total y el volumen de un cilindro recto.

Calcula el área total de un cilindro de base 4cm de radio y formado por un rectángulo de 25,12cm de ancho y de altura 8cm.

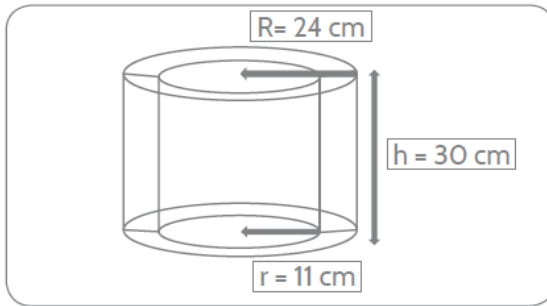


A large grid for calculations, consisting of 20 columns and 20 rows.

Ahora determina el volumen del cilindro

A large grid for calculations, consisting of 20 columns and 20 rows.

Observa la siguiente figura sobre un cilindro hueco y determine ¿Cuál es la fórmula para hallar el área de la base total?



¿Qué información inicial tenemos?

$R =$  \_\_\_\_\_, Radio de del cilindro exterior

$r =$  \_\_\_\_\_, Radio del cilindro interior

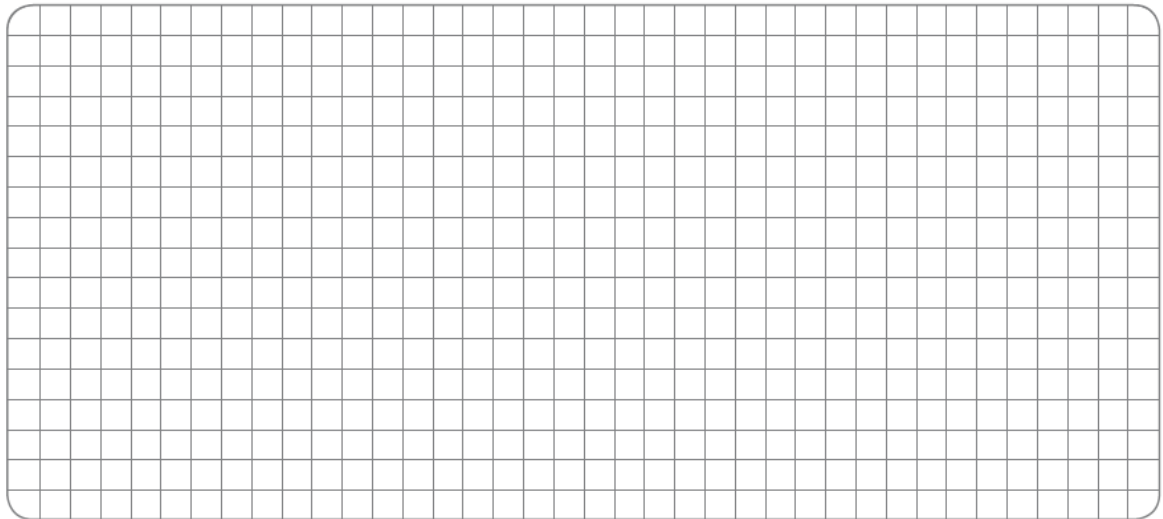
$h =$  \_\_\_\_\_, Altura del cilindro

¿Cuál es la fórmula del área del cilindro?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Si tienes dos áreas la del cilindro interior y el cilindro exterior, ¿Cómo calcularías el área total?



Teniendo el área de la base total ¿cómo determinarías el volumen?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

¿Qué datos nos falta por utilizar?

---

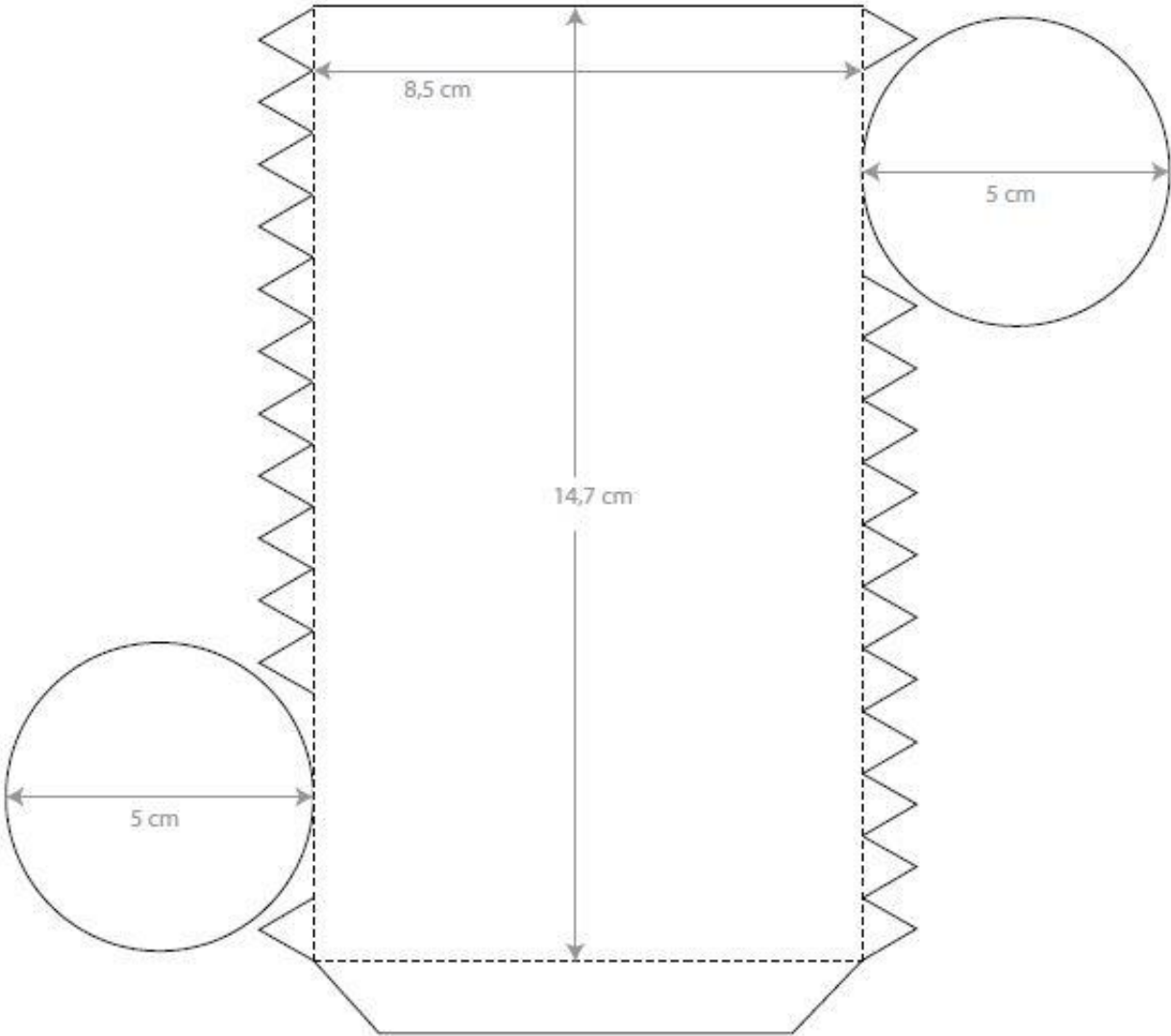
---

---

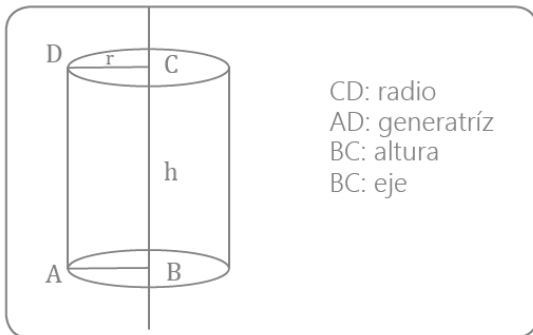
---

Anexo para la actividad 1

Plantilla cilindro recto



## PARA TENER PRESENTE



El cilindro consta de dos bases circulares y una superficie lateral, que al desarrollarse da lugar a un rectángulo. La distancia entre las bases es la altura del cilindro. Las rectas contenidas en la superficie lateral, perpendiculares a las bases, se llaman generatrices.

### Elementos del cilindro

**Perímetro:** es la línea que limita una figura plana.

**Área lateral:** Superficie de un cuerpo geométrico excluyendo las bases.

**Área total:** Superficie completa de la figura, es decir, el área lateral más el área de las bases de la figura.

### Área del cilindro

El área lateral del cilindro está determinada por el área de la región rectangular, cuyo largo corresponde al perímetro de su base, es decir a  $2 \pi r$ , y cuyo ancho es la medida de la altura del cilindro, o sea  $h$ .

Para calcular su área lateral se emplea la siguiente fórmula:

$$\text{Área lateral} = \text{perímetro de la base} \times \text{altura} \quad A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de las dos regiones circulares basales, obtenemos el área total del cilindro.

Para calcular su área total se emplea la siguiente fórmula:

$$\text{Área total} = \text{área lateral} + 2 \times \text{área de la base} \quad A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2A_{\text{base}}$$

Entonces  $A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$

Por lo tanto:  $A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h+r)$

### Volumen del cilindro

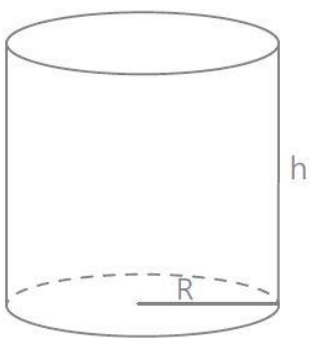
Para un cilindro circular, su volumen ( $V$ ) es igual al producto del área del círculo basal por su altura ( $h$ ).

Para calcular su volumen se emplea la siguiente fórmula:

**Volumen del cilindro = área de la base x altura es decir,**

$A_{Cilindro} = A_{base} \cdot h$

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

	Dibujo	Área	Volumen
Cilindro Recto	 <p>Figura 44. Cilindro recto</p>	$A_L = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$ $A_B = \pi \cdot R^2$ $A_T = A_L + 2 \cdot A_B$ $A_T = 2 \pi \cdot R \cdot (h + R)$	$V = A_B \cdot h$ $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$

### Actividad 1.4

Apreciado estudiante, copia y pega en tu navegador el siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/NnN97FSw>

La página web hace referencia al Desarrollo del cilindro y cálculo de Área lateral, Área total y Volumen.

Una vez te encuentras en el sitio describe lo que observas y anótalo sobre las siguientes líneas:

---

---

---

---

¿Qué sucede en las medidas del área lateral, el área total y el volumen del cilindro cuando mueves los deslizadores que corresponden a la altura y radio?

---

---

---

---

---

Bien, ahora observa el video disponible en el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=hhR7QhDIXPI>

El video corresponde a la construcción en el programa Geogebra de un cilindro a partir de la variación de su altura y radio. Observa detenidamente el video tutorial y sigue paso a paso para que en el programa Geogebra puedas desarrollar lo



representado en el video, y así logres realizar la simulación de un cilindro y la animación de los deslizadores “altura” y “radio”. Esta actividad la debes realizar tú mismo con el propósito de tener la experiencia en simulación de este cuerpo geométrico y observar cómo cambia el volumen del cilindro a medida que varían la altura y el radio. Finalizado el trabajo lo expones ante el grupo y el profesor.

### **ACTIVIDAD 1.5**

Resuelve el siguiente ejercicio y luego comprueba la solución realizando la simulación en el software Geogebra.

Calcular el área total y el volumen de un cilindro que tiene una altura de 2 metros y en su base un radio de 50 centímetros.

Al finalizar exponer el trabajo realizado ante sus compañeros y el profesor.

## **ACTIVIDAD N° 2 – EXPLORANDO FUNCIONES CON GEOGEBRA**

**Objetivo:** Reconocer las características y elementos que componen las funciones (lineal y cuadrática) a través de su representación en el software Geogebra.

**Descripción:** En la presente actividad se utilizará el software Geogebra para graficar y modelar funciones lineales y cuadráticas, que le permitan al estudiante a partir de los conocimientos previos que ya posee sobre el concepto de función y sobre este tipo de funciones construir nuevos conceptos relacionados con la importancia de realizar representaciones de funciones en el software Geogebra y modelar situaciones del entorno a partir de la visualización, análisis y transformaciones de las funciones sin tener que recurrir a la utilización del lápiz y papel.

Cada estudiante contará con un computador portátil para desarrollar la guía que se propone y seguirá paso a paso lo que ella contempla; el docente por su parte supervisa cada una de las actividades propuestas para brindar aclaraciones que sean pertinentes de hacer de los conceptos desarrollados en la guía o bien despejar dudas que puedan surgir en el momento. Al finalizar la serie de actividades cada estudiante expondrá ante el grupo los resultados del trabajo realizado.

**Tiempo estimado:** 3 horas de clase.

### **Recursos:**

- Guía de aprendizaje “Explorando funciones con Geogebra”
- Computador

## GUÍA DE APRENDIZAJE: EXPLORANDO FUNCIONES CON GEOGEBRA

### PRIMER MOMENTO

Objetivos de aprendizaje:

- ✓ Construir la función lineal en Geogebra e identificar sus características.
- ✓ Describir el comportamiento de la recta construida a partir de dos de sus puntos.
- ✓ Aplicar la función lineal en una situación presente en un contexto real.

#### Práctica 1 – Análisis y ejecución de la función lineal

1. Abrir la ventana del programa Geogebra y en la casilla que dice “Entrada” escribir la función  $f(x) = 5x$  y luego dar enter.

2. ¿Qué puedes decir con respecto a la gráfica de esta función?

---

---

---

---

3. Ahora, en la misma casilla de “Entrada” construye otra función pero esta vez cámbiale el signo al número que acompaña a la  $x$ .

$$F(x) = -5x.$$

4. ¿Qué puedes decir con respecto a la gráfica de esta nueva función?

---

---

---

---

5. ¿Qué características comunes tienen estas dos gráficas? ¿Qué diferencias?

---

---

---

---

6. Abrir una nueva ventana en Geogebra y trazar la función  $f(x) = 3x$

7. Haz clic en la casilla “Deslizador” y escoger la opción “Deslizador”.

8. Haz clic donde quieras que quede el deslizador y aparecerá un cuadro de diálogo y donde dice nombre, le escribes la letra m.

9. Luego, en la ventana de “vista algebraica” reemplazas el número que está acompañando a la  $x$  en la expresión de la función por la letra m.

10. Mueve el botón del deslizador y responde a la siguiente pregunta:

¿Qué ocurre con la gráfica de esta función?

---

---

---

---

11. Ahora haz clic en la casilla que dice “Recta que pasa por dos puntos” y traza la recta de tal manera que pase por el origen del plano.

12. Para calcular la pendiente de esa recta, haz clic en la casilla que dice “Ángulo” y selecciona la opción “Pendiente” y haz clic en uno de los puntos de la recta.

13. Mueve la recta de distintas maneras desde el punto donde está la representación de la pendiente. Responde las preguntas:

- ¿Qué sucede con la gráfica y con la pendiente?

---

---

---

- ¿Qué características comunes tienen estas dos gráficas con respecto a sus pendientes?

---

---

---

## Práctica 2 – Altura del nivel de agua en un recipiente en función del volumen

1. Llenamos de agua el recipiente de la figura, vaso a vaso, vertiendo cada vez 0,5 litros y midiendo después la altura que va alcanzando el nivel. Obtenemos la siguiente tabla:

volumen (ℓ)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
altura (cm)	3,5	4,8	5,7	6,5	7,2

↓

volumen (ℓ)	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
altura (cm)	7,8	8,3	8,8	9,3	9,7



Figura 36. Representación ejercicio 1 práctica 2

Indica

- a. Las magnitudes (variables) que se relacionan en la tabla
- b. Los centímetros que asciende el nivel con el contenido del primer vaso y con el del último. (Observa el recipiente y explica por qué los resultados son distintos.)
- c. Representa los pares volumen – altura, (0.5, 3.5), (1.0, 4.8), etc. Unes los puntos para obtener una gráfica. Realiza la representación en el software Geogebra.
- d. Realiza una breve explicación de la gráfica que obtuviste.

## SEGUNDO MOMENTO

Objetivos de aprendizaje:

- ✓ Identificar los elementos de una función cuadrática a partir de su gráfica y ecuación usando el software Geogebra.
- ✓ Interpretar los parámetros que intervienen en la fórmula de una función cuadrática usando el programa Geogebra.

### Práctica 1 – Representación de la función cuadrática

1. Utilizando el programa Geogebra, grafiquen las siguientes funciones

a.  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b.  $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

c.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$

2. Una vez graficadas, determinen los siguientes elementos: raíces de la función, el vértice, el eje de simetría, dominio y rango.

### Práctica 2 – Parámetros en la función cuadrática

1. Abrir el software Geogebra.
2. Estudien cómo se modifica el gráfico de una función cuadrática al variar los coeficientes de su fórmula escrita en forma polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para ello utilicen la herramienta  $\overset{a=2}{\rightleftarrows}$  se llama deslizador. Esta herramienta permite modificar el valor de un número. Coloquen tres deslizadores llamados **a**, **b** y **c**, respectivamente. Hagan que varíen, por ejemplo, desde -5 hasta 5.

3. Escriban la fórmula de la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  en el campo de entrada. Inmediatamente aparecerá el gráfico que corresponde a los valores de **a**, **b** y **c** que figuran en los deslizadores. Hagan que se vea la fórmula de la función junto al gráfico. Para ello, al hacer clic derecho sobre la gráfica aparece un recuadro en el que debes dar clic en propiedades. Luego en la pestaña Básico, activen Objeto Visible y Etiqueta Visible con la opción Nombre y Valor, como se muestra a continuación:

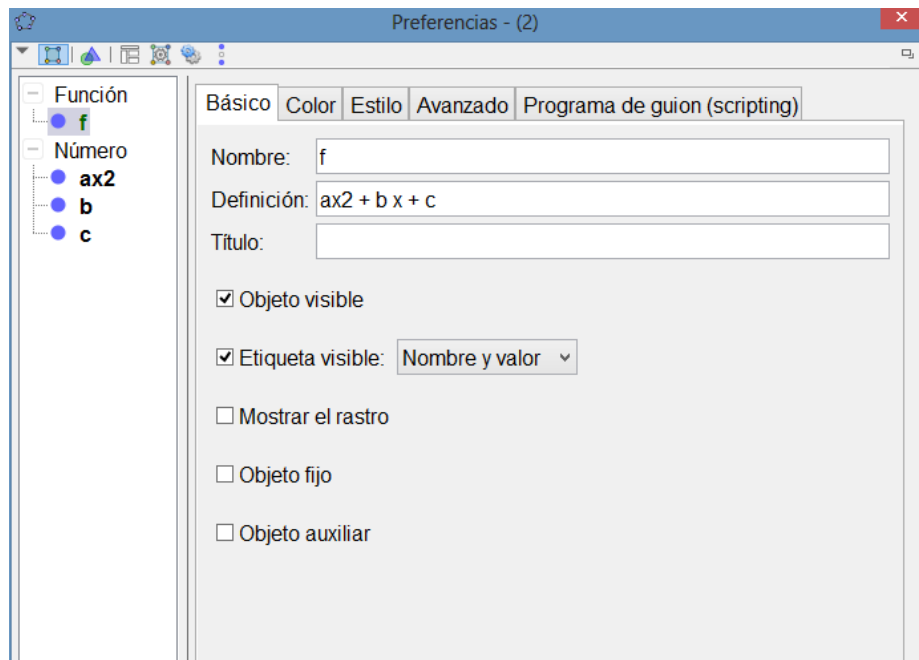


Figura 37. Opciones de grafica de función en Geogebra



En la misma ventana hacer clic en la pestaña Color y elijan uno de su agrado para el gráfico de la función. Si hacen clic en la pestaña Estilo podrán modificar el grosor y el estilo del trazo.

4. Ahora haga que aparezca el eje de simetría de la parábola. Para ello, escriba en el campo de entrada la ecuación de la recta  $x = -b / (2 * a)$ . Luego cámbienle el nombre (llámenla Eje) y elijan un color y un estilo de línea punteada que les guste. En este momento, ya están en condiciones de analizar qué papel juegan los coeficientes **a**, **b** y **c**.
5. Muevan el punto sobre el deslizador de **a** sin tocar los otros dos deslizadores; observen qué ocurre con el gráfico y respondan.

a) ¿Qué sucede a medida que el valor de **a** crece en valor absoluto?

---

---

---

---

b) ¿Cómo se relaciona el signo de **a** con la forma del gráfico?

---

---

---

---

6. Muevan el punto sobre el deslizador de **b** sin tocar los otros dos deslizadores; observen y respondan:

c) ¿Qué sucede al variar el valor de **b**?

---

---

---

7. Muevan el punto sobre el deslizador de **c** sin tocar los otros dos; observen y respondan:

d) ¿Qué ocurre al variar el valor de **c**?

---

---

---

### Práctica 3 – Área de un rectángulo

Abrir una nueva ventana en el software Geogebra para realizar la siguiente construcción:

- Construye la recta **a**:  $y = - (1/2)x + 2$ .
- Ubica un punto **A** sobre la recta.
- Traza la recta **b**, perpendicular al eje **x** que pase por **A**. Halla el punto **B**, intersección de la recta **b** con el eje **x**.
- Halla el punto **C**, intersección de los ejes **x** e **y**.
- Traza la recta **c**, perpendicular al eje **y** que pase por **A**. Halla el punto **D**, intersección de la recta **c** con el eje **x**.
- Construye el cuadrilátero **ABCD**.
- Ocultas las rectas **b** y **c**.
- Calcula el área del rectángulo.
- Mueve el punto **A** sobre la recta **a**, y observa como varía el área. (Recuerda que debe estar seleccionado el botón **Elige y mueve** de la barra de herramientas). Guarda este archivo como **Rectángulo 1**.

- j. Realiza el gráfico de la función que representa el área del rectángulo con **Geogebra**. Guarda el archivo como **Área máxima**.  
Indica el dominio que responde a las condiciones del problema.



### ACTIVIDAD N° 3 – ANÁLISIS DEL VOLUMEN DE UNA CAJA POR MEDIO DE UNA FUNCIÓN

**Objetivo:** Analizar los cambios que suceden en la gráfica de una función que representa el volumen de una caja cuando se le asignan distintos valores para las medidas del largo y el ancho.

#### **Descripción:**

Para el desarrollo de esta actividad cada estudiante contará con una guía de orientación propuesta por el docente y un archivo descargado del sitio web de Geogebra, el cual contiene la representación de una función, el dibujo de una lámina de cartón, los deslizadores a los cuales se les asignan distintas medidas para el largo y el ancho y la expresión para el volumen de la caja. Cada estudiante se da a la tarea de explorar la forma en que varía la gráfica de la función y la expresión del volumen cuando mueve los deslizadores, lo que le permitirá analizar de qué depende que varíe el volumen de la caja.

La actividad inicia con la lectura de un problema de aplicación sobre funciones.

*“Se tiene una lámina rectangular con cierto largo y ancho, con la cual se desea fabricar una caja sin tapa. Para fabricar la caja, es necesario realizar cortes cuadrados en cada una de las esquinas de la lámina, para así, doblando las esquinas y soldándolas se forme la caja”.*

Luego de leer la situación al estudiante se le proponen una serie de preguntas de exploración relacionadas con el tema antes de desarrollar la actividad propuesta. Después se le indica abrir el archivo de Geogebra que contiene la representación de la función y la expresión para el volumen de la caja y se le pide que le asigne valores a los deslizadores que llevan por nombre “ancho” y “largo”.

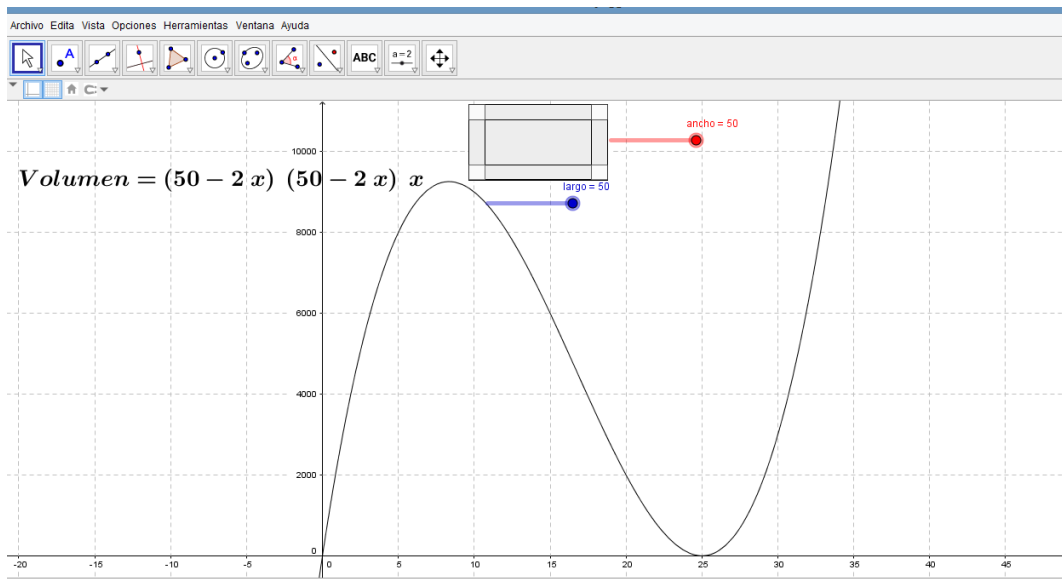


Figura 38. Gráfica de función en Geogebra

Luego de interactuar con la función representada en el software Geogebra y de responder a las preguntas de exploración, se pasa ahora al desarrollo de la siguiente actividad, la cual consiste en unas preguntas de acuerdo con la aplicación de la función que modela el volumen de la caja. Una vez que el estudiante termine de consignar sus respuestas en la guía de trabajo, se pasa a una discusión con el docente y los demás compañeros donde se analizarán las respuestas registradas y las apreciaciones que cada uno de ellos tuvieron sobre el trabajo realizado.

Esta actividad fue tomada del siguiente enlace:

<https://www.geogebra.org/m/SCbwCt35>

**Duración:** 1 hora

**Recursos:**

- Guía de estudio sobre el análisis del volumen de una caja por medio de una función.

- Archivo de Geogebra que representa la modelación del volumen de la caja y la simulación de la función del volumen de la misma.





## GUÍA DE TRABAJO: ANÁLISIS DEL VOLUMEN DE UNA CAJA POR MEDIO DE UNA FUNCIÓN

Apreciado estudiante, a continuación se presenta un problema de aplicación sobre funciones, en el que se analiza la variación del volumen de la caja sin tapa que se desea construir. Lee y contesta las preguntas que se te formulan en la presente guía.

### Situación a analizar:

Se tiene una lámina rectangular con cierto largo y ancho, con la cual se desea fabricar una caja sin tapa. Para fabricar la caja, es necesario realizar cortes cuadrados en cada una de las esquinas de la lámina, para así, doblando las esquinas y soldándolas se forme la caja.

### Primer momento

A continuación, se te plantean ciertas preguntas a las cuales deberás responder; son con la finalidad de guiarte para que logres realizar la actividad que se propone más adelante:

1. ¿Sabes cómo se calcula el volumen de una caja?

---

---

---

2. ¿De qué dimensión depende el tamaño de caja que se fabrica a partir de una lámina?

---

---

---

3. ¿El cuadro a cortar en cada esquina puede ser diferente para cada esquina?

---

---

---

---

4. ¿Cómo deben ser los cuadros que cortes en cada esquina?

---

---

---

5. Bien, ya se han cortado los cuadros de cada esquina, ¿Pueden esos cuadros tener cualquier medida? Explica tu respuesta.

---

---

---

6. ¿Qué pasaría si cortas cuadros muy grandes?

---

---

---

7. ¿El volumen dependerá del tamaño del cuadro que cortes en cada esquina?  
¿Por qué?

---

---

---

8. ¿Cómo puedes determinar qué dimensión debe tener el cuadro a cortar en las esquinas?

---

---

---

9. ¿Cómo tomarías lo anterior para obtener una fórmula para calcular el volumen de la caja que se fabricará con la lámina?

---

---

---

Ahora se pasa analizar qué ocurre en la gráfica del volumen cuando se le asignan diferentes valores a las medidas del largo y el ancho de la lámina. Para ello abre el archivo de Geogebra que lleva por nombre “Volumen de la caja”

10. Ya en la gráfica, ¿En el eje Y, qué variable del problema se está graficando?  
¿En el eje X, qué variable del problema se está graficando?

---

---

---

11. Con los deslizadores asigna diferentes medidas para la lámina con la que se formará la caja sin tapa. ¿Qué observas cuando cambias las medidas del largo y del ancho de la lámina?

---

---

---

### Segundo momento

Realiza en la aplicación lo que necesites para responder a las siguientes preguntas con su respectiva justificación:

1. ¿Qué pasa si al largo le asignas un valor de cero? ¿Se puede formar una caja? ¿Qué sucede con la gráfica?

---

---

---

---

---

---

---

2. ¿Qué pasa si al ancho le asignas el valor de cero? ¿Se puede formar una caja? ¿Qué sucede con la gráfica?

---

---

---

---

3. Si asignas un valor cualquiera tanto al largo como al ancho respectivamente, ¿Qué información logras obtener de la gráfica?

---

---

---

4. ¿Cómo varía el volumen de la caja con la altura de la caja?

---

---

---

Finalizado el desarrollo de estas preguntas se pasa ahora a la socialización de las respuestas con el docente y los demás estudiantes del grupo.

## ACTIVIDADES DE ESTRUCTURACIÓN Y SÍNTESIS DEL CONOCIMIENTO

### ACTIVIDAD - ELABORANDO CAJAS Y CONSTRUYENDO FUNCIONES

**Objetivo:** Construir un modelo matemático en forma de función a partir del análisis de una situación real apoyado en la simulación con el software Geogebra.

**Descripción:**

La actividad que se propone a continuación corresponde al taller “Elaborando cajas y construyendo funciones” diseñado por Jaqueline Cruz Huertas disponible en Cruz y Medina, (2013) con el propósito de implementar una estrategia de aprendizaje enriquecida por el uso de herramientas TIC, para que los estudiantes, a partir de una situación real, puedan identificar las funciones que modelan dicha situación. Aunque esta propuesta corresponde a los resultados de una aplicación en el marco de un proyecto de investigación dirigido a estudiantes de pregrado, se hace una adaptación del taller de tal forma que logre adecuarse al nivel de estudiantes de noveno grado.

Con la realización de este taller se busca que el estudiante a partir del estudio de una situación real, en este caso sobre la construcción de una serie de cajas en el que debe analizar las variaciones sobre sus dimensiones, el área y el volumen y luego a partir de estos datos identificar las funciones que modelan dichas variaciones, logre desarrollar una experiencia en modelación matemática apoyado en la simulación interactiva, específicamente en el uso del software Geogebra.

El taller contempla el planteamiento de la siguiente situación:

Imagínese que usted va a montar una industria de cajas sin tapa de diversos tamaños, elaboradas a partir de una lámina rectangular de acero inoxidable calibre 20. Ha hecho contrato con una empresa que le envía láminas de 17 cm de largo por 10 cm de ancho para la elaboración de las cajas, como se muestra en el gráfico:

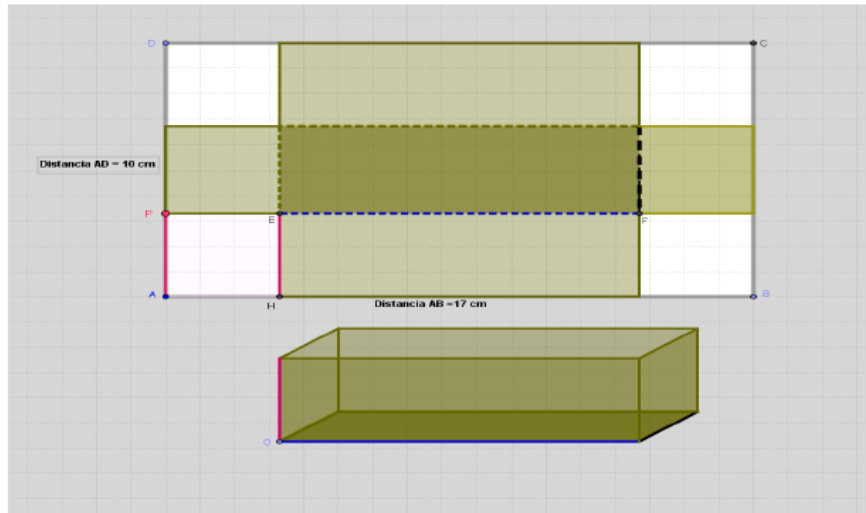


Figura 39. Representación gráfica de cajas

En este caso, los estudiantes a partir de seis rectángulos iguales, deben elaborar seis cajas diferentes, variando solamente la altura de la caja, por lo que se obtienen cajas de diferente tamaño, en el que varía el largo, el ancho, el área lateral sobre el ancho, el área lateral sobre el largo, el área de la base, el área total, el área del papel recortado y el volumen de las cajas. Los estudiantes deben medir las dimensiones de las cajas y calcular estos valores para llenar una tabla de datos. Utilizando los datos de las mediciones y el análisis del comportamiento de las distintas variables involucradas en el problema, los estudiantes deben identificar las funciones que modelan tales variaciones para después realizar la representación de dichas funciones en el software Geogebra.

Finalizado el taller se hace la exposición del trabajo realizado y se discuten en el grupo las conclusiones a las que llegaron los estudiantes con base en dicha experiencia.

**Tiempo:** 2 horas de clase

**Recursos:**

- Hojas de papel.
- Tijeras
- Lápiz
- Regla
- Computador
- Actividad propuesta: Elaborando cajas y construyendo funciones

Fuente:

<http://www.funciomaticas.com/#TallerCajas>



## ELABORANDO CAJAS Y CONSTRUYENDO FUNCIONES

Elaborado por: Jaqueline Cruz Huertas<sup>3</sup>

### Modelos y Funciones

Las funciones constituyen una herramienta potente en la modelación matemática. A través de las funciones se puede modelar matemáticamente diversas situaciones de la vida real, que permiten describir y analizar las relaciones entre magnitudes con el fin de prever los resultados, sin necesidad de hacer en cada momento cálculos que pueden resultar muy demorados o complicados.

Para elaborar un modelo matemático se deben abordar básicamente tres etapas:

1. *Construcción*, proceso en el que se convierte el objeto a lenguaje matemático.
2. *El análisis* o estudio del modelo confeccionado.
3. *La interpretación* de dicho análisis, donde se aplican los resultados del estudio al objeto del cual se partió.

### Situación problema:

Imagínese que usted va a montar una industria de cajas sin tapa de diversos tamaños, elaboradas a partir de una lámina rectangular de acero inoxidable calibre 20. Ha hecho contrato con una empresa que le envía láminas de 17 cm de largo por 10 cm de ancho para la elaboración de las cajas, como se muestra en el gráfico:

---

<sup>3</sup> Este taller es una adaptación de la versión original propuesto por la autora. Se hicieron algunas modificaciones para que pudiese ser aplicado en estudiantes de grado noveno.

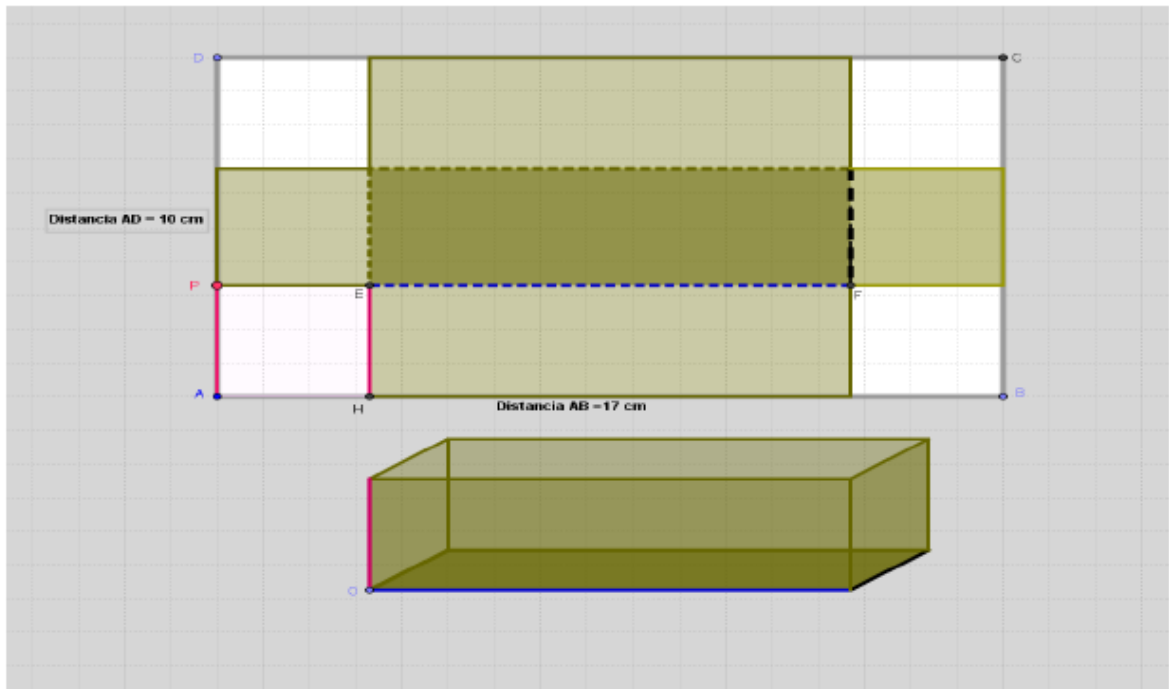


Figura 40. Representación gráfica de cajas

### Preámbulo

Esta parte consiste en observar la simulación en Geogebra de una lámina y la construcción de una caja en el que se puede ver las magnitudes que cambian cuando se mueve el deslizador “recorte”. Para ello abran el archivo de Geogebra que lleva por nombre “Modelación caja” y analiza lo que sucede con la lámina y la caja a medida que mueves la herramienta “recorte”

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué magnitudes cambian en las cajas?

---

---

---

---

2. Explorando el archivo anterior decidan cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

Si la longitud del lado de cada cuadrado recortado va aumentando...

- a) El área de la base de la caja va disminuyendo. \_\_\_\_\_
- b) El área de cada uno de los cuadrados recortados va aumentando. \_\_\_\_\_
- c) El área de cada una de las paredes va aumentando. \_\_\_\_\_
- d) El volumen de la caja va aumentando. \_\_\_\_\_

Justifiquen las elecciones anteriores.

---

---

---

---

---

---

---

### PRIMERA PARTE – Elaboración de cajas

Construya 6 rectángulos en papel de 17 cm. de largo por 10 cm. de ancho. Elabore con cada rectángulo, una **caja sin tapa** recortando un cuadrado de igual tamaño en cada una de las esquinas del rectángulo, **de forma que complete 6 cajas con diferente altura**, Las cajas deben tener las siguientes características: Dos de altura *mediana*, dos lo más *altas* posibles y dos lo más *bajas* posibles. Se recomienda trabajar con números enteros y decimales. Guarde los cuadrados que recortó en cada una de las cajas (desperdicio). No es necesario pegar las partes de la caja, además en estos modelos no se tendrán en cuenta pestañas.

### SEGUNDA PARTE

Tome las seis cajas que elaboró. Mida la altura (variable  $x$ ), el largo y el ancho de cada caja. Calcule los demás datos solicitados y regístrelos en la siguiente tabla.

Altura (x)	Largo	Ancho	Área Lateral sobre el largo	Área lateral sobre el ancho	Área de la base	Área Total de la caja	Área papel desperdicio	Volumen
x								

### TERCERA PARTE

1. Cómo puedes observar, todos los datos registrados en la tabla cambian de acuerdo a la variación de la altura. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la altura?
2. Construya una expresión matemática (función) que permita calcular los datos de las casillas correspondientes al área lateral sobre el largo, área lateral sobre el ancho, área de la base, área total de la caja y el volumen, conociendo el valor de la altura. Esto es que dependa del valor de  $x$ . Escríbala en la última fila de la tabla.
3. Abra la ventana del programa Geogebra y representa cada una de las expresiones construidas en la tabla, esto es:  
Función área lateral sobre el largo, función área lateral sobre el ancho, función área de la base, función área total y función del volumen.

4. Ahora ingresa en el siguiente enlace

<http://www.funcionmatics.com/#ModeloCaja>

Allí podrás interactuar y experimentar con el modelo de una caja y la simulación de las funciones, de tal forma que le permita observar y analizar con mayor detalle el problema planteado. Después realice un análisis de lo experimentado en la página web en el que describas la utilidad que tiene representar el modelo de una caja en 2D y 3D y las funciones en el software Geogebra.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

5. Finalmente, escriba en un párrafo su opinión con respecto al trabajo realizado en este taller. Respondiendo a la pregunta: ¿Considera que le ayudó en la comprensión y aplicación de las funciones en situaciones de la vida real?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

### ACTIVIDAD – MODELANDO FENÓMENOS REALES

**Objetivo:** Modelar una situación real del entorno que involucre medidas de área y volumen, donde el estudiante construya un modelo matemático que pueda expresarse por medio de una función con ayuda de Geogebra.

**Descripción:**

Se les pide a los estudiantes que se organicen en equipos de dos o tres integrantes proponiéndoles que busquen un fenómeno real de su entorno sobre medidas de área y volumen que se pueda representar por medio de una función lineal, cuadrática o cúbica y modelarlo gráfica y algebraicamente con ayuda del software Geogebra. Explicar paso a paso el procedimiento utilizado para la elaboración del modelo, argumentándolo desde un punto de vista matemático. Al finalizar cada equipo debe realizar una presentación del fenómeno real que modelaron a través de la elaboración de un trabajo escrito que contemple los siguientes ítems:

- El trabajo escrito debe contener la descripción del fenómeno real seleccionado, es decir, se debe enunciar el problema del cual se pretende resolver por medio de la construcción del modelo e identificar sus variables.
- Identificar el modelo construido, mencionar la expresión o función que modela la situación y realizar la representación en el software Geogebra.
- Describir los resultados que se permiten observar a partir de la ejecución del modelo.
- ¿Cuál es el tipo de gráfico que permite visualizar el modelo simulado en el software Geogebra?

- Escribir conclusiones del modelo implementado.

Finalmente, realizar la exposición del trabajo ante el grupo atendiendo a los ítems antes mencionados. Cada equipo puede utilizar carteleras o bien hacer una presentación en power point.

**Duración:** 4 horas de clase

**Recursos:**

- Computador e internet.
- Hojas, lápices, lapiceros, regla.
- Rastreo de información sobre situaciones de área y volumen.
- Cartulinas, marcadores.



## BIBLIOGRAFÍA

Cruz, J., & Medina, Y. (2013). Funciones en contexto. Una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva. *Revista S & T*, 11(26), 59 - 80.

Sanmartí, N. (2000). El diseño de unidades didácticas. En F. Perales, & P. Cañal , *Didáctica de las ciencias experimentales* (págs. 239 - 266). Ed. Marfil.

Sanmartí, N., & Jorba, J. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de evaluación continua. Propuestas didácticas para las áreas de ciencias naturales y matemáticas*. Barcelona: Ministerio de Educación y Cultura.