# Mediación Complementaria de GeoGebra y Material Concreto en los Procesos de Aprendizaje de las Identidades Trigonométricas Pitagóricas Fundamentales en Estudiantes de Décimo Grado de la IE Juan Pablo II

Edgar De Jesús García Ramos

Marcial Danilo Posada Ruíz

Universidad Pontificia Bolivariana

Facultad De Educación

Medellín

2022

Mediación Complementaria de GeoGebra y Material Concreto en los Procesos de Aprendizaje de las Identidades Trigonométricas Pitagóricas Fundamentales en Estudiantes de Décimo Grado de la IE Juan Pablo II

Edgar De Jesús García Ramos

Marcial Danilo Posada Ruíz

Trabajo de Grado para Optar por el Titulo de

Magíster en Educación

Asesor

Marcos Julio Solano Flórez

Universidad Pontificia Bolivariana

Facultad De Educación

Medellín

2022

Palmira, Valle del Cauca 13 de diciembre de 2022

Edgar de Jesús García Ramos y Marcial Danilo Posada Ruiz:

“Declaramos que este trabajo de grado no ha sido presentado con anterioridad para optar a un título, ya sea en igual forma o con variaciones, en esta o en cualquiera otra universidad”. Art. 92, parágrafo, Régimen Estudiantil de Formación Avanzada.

Firma del autor (es)

Marcial Posada Ruiz

**DEDICATORIA**

A nuestras amadas familias, parejas y sobre todo al todopoderoso Dios. Este trabajo es fruto de su inquebrantable apoyo, aliento y guía divina.

A nuestras amadas familias por creer en nosotros y por acompañarnos en este desafío. A nuestras amadas parejas por su incondicional amor y comprensión en los momentos de estrés. A Martín, ese amado hijo que llegó como bendición del cielo y fue la más grande motivación para alcanzar cualquier sueño. Y, sobre todo, a Dios por otorgarnos la fuerza, sabiduría y bendiciones para alcanzar esta meta que hace parte de nuestros más grandes sueños.

Este logro no hubiese sido posible sin ustedes.

*“Así alumbre vuestra luz delante de los hombres, para que vean vuestras buenas obras, y glorifiquen a vuestro padre que está en los cielos”*

*Mateo 5:16*

CONTENIDO

## Lista de Tablas

## Lista de Figuras

## Resumen

En el presente trabajo se exponen las principales características que tiene un proceso de aprendizaje mediado por el uso complementario de GeoGebra y material concreto, cuya finalidad es que los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II, construyan las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales y alcancen un aprendizaje significativo de las mismas.

En este sentido, este trabajo se presenta como una innovación didáctica en el campo de la trigonometría, para el aprendizaje de las identidades trigonométricas en contextos similares al de los estudiantes del colegio Juan Pablo II, ya que con el uso conjunto de material manipulativo físico y GeoGebra se logra estimular la motivación por aprender de los estudiantes, también, fortalecer el aprendizaje colaborativo y autónomo a partir de la interacción y manipulación física y digital de los objetos matemáticos, lo que significó el planteamiento de una metodología de aprendizaje distinta a la propuesta en el aprendizaje de la trigonometría, en la cual sólo no se enfatiza en las representaciones en registros algebraicos (tradicional), sino que se privilegia y destaca la importancia de visualizar, representar y realizar actividades de tratamiento y conversión de múltiples representaciones en diferentes registros de los objetos matemáticos como: el tabular, gráfico, numérico, lenguaje natural (escrito y oral) y el algebraico.

Finalmente, en el presente trabajo se muestran los resultados, análisis y conclusiones de aplicar un diagnóstico y tres hojas de trabajo siguiendo la metodología del diseño explicativo secuencial DEXPLIS. Por otra parte, las actividades aplicadas al grupo de estudiantes reflejan un rendimiento cuantitativo favorable de 89%, 69% y 89% en las hojas de trabajo I, II y III respectivamente, demostrando que estos alcanzaron en gran medida los objetivos de aprendizaje propuestos.

*Palabras clave:* procesos de aprendizaje, GeoGebra, material manipulativo, múltiples representaciones, mediación instrumental, identidades pitagóricas.

## Abstract

This paper presents the main characteristics of a learning process mediated by the complementary use of GeoGebra and concrete material, whose purpose was for tenth grade students of EI John Paul II to build the fundamental Pythagorean trigonometric identities and achieve significant learning from them.

In this sense, this work is presented as a didactic innovation in the field of trigonometry, for the learning of trigonometric identities in contexts similar to that of the students of the John Paul II school, since with the joint use of physical manipulative material and GeoGebra it was possible to stimulate the motivation to learn of the students, It was also possible to strengthen collaborative and autonomous learning from the interaction and physical and digital manipulation of mathematical objects, which meant the approach of a learning methodology different from the one proposed in the learning of traditional trigonometry, in which only representations in algebraic registers (traditional) are not emphasized. rather, the importance of visualizing, representing, and carrying out activities of treatment and conversion of multiple representations in different registers of mathematical objects such as tabular, graphic, numerical, natural language (written and oral) and algebraic is privileged and highlighted.

Finally, this paper shows the results, analysis, and conclusions of applying a diagnosis and three worksheets following the methodology of the sequential explanatory design DEXPLIS. On the other hand, the activities applied to the group of students showed a favorable quantitative performance of 89%, 69% and 89% in worksheets I, II and III respectively, demonstrating that they largely achieved the proposed learning objectives.


*Keywords:* learning processes, GeoGebra, manipulative material, multiple representations, instrumental mediation, Pythagorean identities.

# Introducción

Diversos estudios han expuesto que los docentes de secundaria privilegian en el área de la trigonometría procesos de memorización en un solo registro de representación, lo que a su vez genera un proceso puramente mecánico (sin significado), a pesar de contar con una variabilidad de herramientas potenciales para implementar. Aunque, si bien es cierto que dichas herramientas en colegios como la I. E. Juan Pablo II (generalmente digitales), por diferentes factores (una sala de sistemas, no hay acceso a los computadores, solo está disponible la sala de cómputo para el docente de informática entre otros) no siempre están a la mano y por tanto no pueden ser implementadas. Considerando esta situación, se plantea como propósito esencial del presente trabajo, Identificar las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II.

El documento está dividido en cinco capítulos: Problema de Investigación, Marco Referencial, Marco Conceptual, Resultados y Análisis y Conclusiones y Recomendaciones.

El primer Capítulo denominado Definición del Problema, tiene como propósito generar una contextualización y definir las preguntas que dieron origen a la investigación. En este capítulo se presentan cinco secciones: la contextualización, los antecedentes, la justificación, los objetivos y las preguntas de investigación.

En el segundo capítulo se estudian algunos referentes teóricos que sustentan el presente trabajo, tales como el uso de registros y múltiples sistemas de representaciones de los objetos matemáticos, la mediación instrumental y el material manipulativo (análogo y digital). Cabe mencionar que este marco referencial constituye un elemento clave para el diseño e implementación de los instrumentos, así como para interpretar los resultados obtenidos durante la aplicación de las actividades propuestas.

En el tercer capítulo se explican las etapas llevadas en el proceso de investigación que, comprende en líneas generales el diseño, rediseño e implementación del diagnóstico y las hojas de trabajo. Igualmente, se describen las condiciones de aplicación y la metodología de trabajo aplicada en el aula, en la que destaca de manera significativa una dinámica radicalmente diferente a la enseñanza tradicional. De esta manera, los estudiantes participan activamente en la construcción de su aprendizaje.

En el cuarto capítulo se analiza los datos obtenidos al aplicar cada instrumento: diagnóstico y tres hojas de trabajo. De igual forma, este estudio se hace siguiendo la metodología del diseño explicativo secuencial DEXPLIS, por lo que se emplean tablas para presentar la información, así como algunas evidencias compuestas por manuscritos de los estudiantes y extractos de varias entrevistas clínicas. Con base, al procesamiento de la información obtenida es posible afirmar que las actividades de aprendizaje aplicadas contribuyen a la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II.

Finalmente, en el último capítulo se da respuestas a las preguntas de investigación planteadas al inicio del presente trabajo. De estas respuestas se derivan algunas sugerencias, tanto para la instrucción como para futuras investigaciones.

# CAPITULO I

## 1. Problema de investigación

### 1.1. Planteamiento del Problema

> Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real; por eso, la geometría debería integrarse, cuando sea posible, con otras áreas. Las representaciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano pueden servir para conectar la geometría y el álgebra. Herramientas como un programa informático de geometría dinámica capacitan para modelizar la variedad de representaciones gráficas de las razones trigonométricas de ángulos de diferentes amplitudes y para tener una experiencia interactiva con ellas. (Fiallo, 2011, p. 52).

El planteamiento del problema del presente escrito podemos describirlo con base en la unión de dos grandes problemáticas específicas: i) las necesidades, recursos, el contexto y oportunidades de mejora para los estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II, en los procesos de aprendizaje asociados a las identidades trigonométricas fundamentales, y ii) la deficiencia en la enseñanza de las ciencias matemáticas en la Educación Media, particularmente de la trigonometría.

Así, respecto a la primera problemática asociada a las necesidades, recursos, el contexto y oportunidades de mejora para los estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II, en los procesos de aprendizaje referentes a las identidades trigonométricas fundamentales, es importante destacar que aunque en el campo de la pedagogía, la educación y las matemáticas, diferentes autores como Hurrell (2020), Cortés (2019), Wassie & Zergaw (2019), Urrutia & Loyola & Marín (2019), Azevedo & Alves (2019), Braz & Teixeira & Oliveira (2019), Posada & García (2019), Zamorano & Cortés & Herrera (2019), Kamber & Takaci (2018), Dockenforff (2018), Parada (2017), UNESCO (2016), Viganó & Lima (2016), Solanilla (2015), Sander & Heib (2014), Matta (2014), Fiallo (2011 y 2014), Inán (2013), Herrera (2013), Runza (2013), García y Benítez (2010), De Oteyza (2001), Cassany (2000) lo han mencionado y muestran muchas alternativas y metodologías novedosas que facilitan los procesos de aprendizaje mediante la implementación de tecnología y software educativo; la realidad del colegio Juan Pablo II (al igual que muchas otras IE públicas de Colombia), es que los recursos tecnológicos que posee son limitados y escasos. Además, la prioridad sobre su uso en las clases de ciencias y, en especial en las clases de matemáticas son bajas, debido a que son pocos equipos (una sola sala de sistemas) para muchos estudiantes, normalmente tienen la prioridad en disponibilidad para el profesor de tecnología e informática y en otras ocasiones por los docentes del SENA, encargados del acompañamiento (en paralelo a la media académica) de las carreras técnicas que realizan los estudiantes de décimo y undécimo de la institución. En consecuencia, la primera problemática concreta y especifica del presente trabajo radica en buscar, identificar e implementar alternativas metodológicas que faciliten el aprendizaje de la trigonometría de los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II, cuando resulta imposible implementar exclusivamente las metodologías y recursos tecnológicos que ya han sido validados (por los autores mencionados anteriormente) como herramientas potentes para los procesos de aprendizaje.

Así, respecto a la segunda problemática, en la Educación Básica o Media de Colombia, la enseñanza y aprendizaje de las ciencias exactas, en particular, de las matemáticas, es bastante compleja por lo que siempre existirán oportunidades de mejora. Respecto a lo anterior, autores como MEN (2018), OECD (2020) y Posada & García (2019) evidencian esta realidad educativa: bajo rendimiento escolar, bajos resultados en las pruebas estandarizadas, altos índices de reprobación, deserción escolar, desmotivación hacia el estudio de las matemáticas, dificultades en la formación de los profesores, actitud negativa frente al estudio de la disciplina, el poco uso de aplicaciones a otras áreas del conocimiento y de las tecnologías, entre otras.

En el campo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en secundaria, en gran medida los profesores tienden a preferir las representaciones algebraicas de los objetos matemáticos sobre otro tipo de representaciones (numéricas, gráficas y lenguaje natural); ya sea por facilidad o conveniencia en el manejo conceptual, a través de una forma particular de presentación, o de acuerdo a las creencias que el docente tiene sobre las matemáticas y las formas en cómo estas se enseñan y se aprenden. En este sentido, autores como Duval R., 2006, García, M. y Benítez, A., 2010, D`Amore 2016 & Posada & García (2019) y organizaciones reconocidas en el mundo como la UNESCO (2016) y la OECD (2010) sugieren que los estudiantes conozcan y dominen diferentes tipos de sistemas de representación de objetos matemáticos para que puedan comprenderlos y, lo que es más importante, transferir ideas de un sistema de representación a otro con gran habilidad. Así, se destaca que el uso de diversos sistemas semióticos de representación facilita los procesos cognitivos relacionados con los procesos de formación del conocimiento matemático en los estudiantes (que está relacionado con parte del objeto de estudio de la presente investigación).

> Todo acceso a los objetos matemáticos (números, funciones, ecuaciones…) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve. (Duval, 2004, p. 14).

Duval (2004) afirma que un sistema de representación semiótica es un sistema de signos cuya función fundamental es la de *Comunicación*; aunque también favorece el *entendimiento* y la *mediación* con los objetos matemáticos. Consecuentemente, es fundamental y de vital importancia poder diagnosticar en los estudiantes la habilidad que poseen para usar y movilizarse entre diferentes registros de representación de los objetos matemáticos, mediante el estudio y análisis en la forma de proceder y pensar la solución para un problema. En este sentido; es importante que, dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los maestros promuevan la coordinación y movilización en varios registros de representación semiótica, donde resulte indispensable distinguir el objeto en cada una de sus representaciones y no confundirlo con estas (D'Amore, 2006). En resumen, la construcción del conocimiento y de los objetos matemáticos (abstractos) está estrechamente vinculada con la capacidad y/o habilidad que tienen los estudiantes para representarlos, comunicarlos, usarlos y movilizarlos entre diferentes registros y sistemas de representación, en la resolución de problemas.

> Quienes creen que saber matemáticas es conocer de memoria muchos procedimientos útiles para resolver ejercicios piensan, mayoritariamente, que un problema matemático es un ejercicio asignado por el profesor para saber si el estudiante ha aprendido una definición, una fórmula o un procedimiento. (Gamboa, 2016, p. 21).

Así, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Posada & García (2019) afirman que “la mayoría de los docentes inconscientemente se fían de la capacidad de memorización de los estudiantes, los consideran capaces de memorizar símbolos, definiciones, fórmulas, teoremas, tablas de multiplicar, procesos mecánicos para la resolución de sistemas ecuaciones, entre otros” (p.20). Por otra parte, Mora, D. (2003) señala que “debemos abandonar la idea de que los conceptos matemáticos duraderos son aquellos que se aprenden de memoria; por el contrario, el ser humano recuerda con mayor frecuencia y facilidad las ideas que él ha elaborado por sus propios medios” (p.186). No obstante, un aprendizaje fundamentado en procesos memorísticos tiene ventajas y desventajas, por un lado (ventajas) la memorización facilita el rápido tratamiento del conocimiento, y por otro lado (desventajas), los procesos memorísticos suelen carecer de sentido y significado, lo cual limitaría la capacidad de los estudiantes para transferir el conocimiento y darle una adecuada aplicación, en contextos diferentes al que inicialmente fue memorizado (el aprendizaje significativo).

A continuación, se exponen algunas características del aprendizaje significativo y del aprendizaje memorístico, definido por Ausubel (1983).

**Tabla 1.**

Aprendizaje Significativo y Memorístico

| **Aprendizaje Significativo** | **Aprendizaje Memorístico** |
|---|---|
| • Los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno. | • Los nuevos conocimientos se incorporan en forma arbitraria en la estructura cognitiva del alumno |
| • El alumno relaciona deliberadamente los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos | • El alumno no realiza un esfuerzo para integrar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos. |
| • El alumno quiere aprender aquello que se le presenta porque lo considera valioso. | • El alumno no quiere aprender, pues no concede valor a los contenidos presentados por el profesor |

**Fuente:** Ausubel (1983)

El aprendizaje significativo depende de los conocimientos previos, para que la nueva información sea almacenada en la estructura cognitiva; aprendemos los conceptos a través de redes conceptuales/mapas conceptuales. En otras palabras, el aprendizaje significativo se opone al memorístico, porque vincula los conceptos que aprendemos con los que ya habíamos aprendido.

Ahora, particularizando en el aprendizaje de la trigonometría, Posada & García (2019), Fiallo (2011) y Garcés & Montaluisa & Salas (2018) resaltan y critican la excesiva relevancia que se le suele otorgar a los procesos cognitivos fundamentados principalmente en el uso de la memoria, donde se evidencia la exclusión y poca habilidad para movilizar entre algunos registros y sistemas semióticos de representación de los objetos matemáticos. También, Van Hiele (1957), menciona como uno de los principales problemas en el aprendizaje de la trigonometría es el enfoque y carácter algebraico que se le otorga como consecuencia del uso excesivo de fórmulas, símbolos, operaciones y propiedades abstractas. Además, Cortés (2019), plantea en su trabajo la necesidad de orientar a los docentes desde los mismos currículos acerca de que el saber matemático no sólo debe estar orientado en hallar algoritmos o al seguimiento de pasos, sino desde las diferentes representaciones que puede tomar un objeto matemático, ya que éstas son el mayor complemento y la base fundamental para la comprensión de situaciones problema que lo ponen de cara a la actividad cognitiva de conversión.

Lo anterior, no es un secreto, la experiencia empírica también evidencia que en el aula los docentes privilegian los sistemas de representación algebraicos, sobre los numéricos y los geométricos (que también son formas de representación externas de los objetos matemáticos); lo cual, influye de buena forma en la necesidad de optar por la memorización, como herramienta “facilitadora” de los procesos de aprendizaje del estudiante. Como ejemplos, se pueden mencionar, la memorización por parte de los estudiantes de la identidad fundamental de la trigonometría (identidad pitagórica) y la memorización mediante mnemotecnias, de las definiciones de las funciones trigonométricas dentro de un triángulo rectángulo (entre los estudiantes, son muy populares las mnemotecnias CO-CA-CO-CA-H-H y SOH-CAH-TOA).

> Markel (1982), Goldin (1983), Fi (2003) y Brown (2006) plantean que la trigonometría en el plano coordenado es un tema difícil para los estudiantes y que es muy poco lo que se ha hecho para investigar los motivos de dichas dificultades. Hay muchos factores que podrían estar involucrados. Uno de estos problemas radica en que la trigonometría es un tema complicado e interconectado que lleva a que los estudiantes tengan que estar cambiando las definiciones dadas para las razones trigonométricas de acuerdo con el enfoque y contexto planteado. (Fiallo, 2011; p. 45).

Una problemática adicional en el aprendizaje de las matemáticas, y en especial de la trigonometría, es la falta de coherencia, aprehensión y transversalidad entre los saberes previos para el aprendizaje de la trigonometría que se trabajan en grados anteriores en las asignaturas de Álgebra y Geometría, puesto que los estudiantes no logran establecer una relación (cambio de registro) entre las temáticas que en ellas se abordan (principalmente no pueden establecer relación entre el teorema de Pitágoras y las identidades pitagóricas). En este sentido, Espino, G. González, M. & González, J. (2018, p. 1586) afirman que “uno de los problemas que subsisten en la educación matemática ha sido que las diferentes disciplinas se han enfocado en trabajar de manera aislada, dejando de lado el trabajo sobre la transversalidad de contenidos". En muchos casos, durante el proceso de aprendizaje del álgebra los estudiantes logran desarrollar una capacidad de tratamiento de términos y expresiones algorítmicas que respeten ciertos axiomas y propiedades fundamentales de las ciencias matemáticas, pero que carecen totalmente de un sentido y visualización geométrica, por lo que se les dificulta tratar de reinterpretar los objetos matemáticos (objeto de estudio de interés) al cambiar de un registro o lenguaje algebraico y variacional, a un lenguaje con sentido métrico y espacial.

En consecuencia, se observa implícitamente que, en el aprendizaje del álgebra y el tratamiento algorítmico, privilegiar el uso de los procesos memorísticos para el tratamiento mecánico de los objetos matemáticos sobre el sentido y entendimiento mismo de tales objetos, dificulta la tarea de interpretar los objetos en diferentes registros de representación semiótica, especialmente la mecanización algebraica sin sentido dificulta la interpretación de los algoritmos desde el punto de vista de la Geometría (Kieran, 2018). Por ejemplo; la expresión $x^2$ (en el campo del álgebra y de la aritmética) es interpretada por la mayoría de los estudiantes como un simple número Real cualesquiera que se eleva a la segunda potencia, y difícilmente es analizada desde el punto de vista geométrico como el área (medida en dos dimensiones) de una figura plana (cuadrado) donde además de resultar importante la parte numérica (magnitud), también adquiere relevancia la parte métrica con las unidades de medida (metros cuadrados, kilómetros cuadrados, centímetros cuadrados, etc.).

Así, es claro precisar que hasta el momento se ha identificado una de las tantas problemáticas en los procesos de aprendizaje de la trigonometría y particularmente de las identidades pitagóricas, la dificultad para cambiar los objetos matemáticos de un registro algebraico a un registro geométrico. En este sentido, también resulta pertinente señalar que la dificultad en el cambio de registro también se da inversamente (dificultad para cambiar de un registro geométrico a uno algebraico). Por tanto, se debe recordar que el registro geométrico es siempre muy amigable para los estudiantes porque posee un enorme poder de visualización.

> Los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas se definen, se conectan, se representan y se demuestran de diversas formas, involucrando conocimientos numéricos, geométricos, métricos, algebraicos y analíticos, por lo que se necesita de un tratamiento didáctico que permita que los estudiantes vean

las conexiones entre conceptos, procesos y relaciones mediante las diferentes formas de representación. (Fiallo, 2011; p. 50).

Por otra parte, al indagar en el campo de la geometría (en los aprendizajes y saberes previos que son necesarios para el aprendizaje de la trigonometría) se evidencia que, en las temáticas como semejanza, triángulos (especialmente rectángulos), áreas de figuras planas (cuadrados), circunferencias y el teorema de Pitágoras, la mayoría de los estudiantes alcanzan poca comprensión desde el registro geométrico de estos objetos matemáticos, porque en la mayoría de los establecimientos educativos del país se abordan desde un registro netamente algebraico. Por ejemplo; el caso del teorema de Pitágoras, el cual los educandos inusualmente entienden como la relación entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. Por el contrario, ellos lo entienden como una simple expresión algebraica que relaciona los catetos con la hipotenusa $h^2=a^2+b^2$.

… la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, debida a la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas: como razones entre los lados del triángulo rectángulo, como coordenadas del círculo goniométrico o trigonométrico, como distancias, y como funciones. (Fiallo, 2011; p.1).

Finalmente, como una posible solución a los dos grandes problemas y obstáculos mencionados anteriormente, este trabajo de grado en su desarrollo trata de responder principalmente; ¿Cuáles son las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción e identificación de las identidades trigonométricas fundamentales por parte de estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II?, a partir de la aplicación de una propuesta didáctica propia (material concreto) y de instrumentos y recursos tecnológicos ya validados por otros autores.

## 1.2. Preguntas Orientadoras.

### 1.2.1. Pregunta central.

¿Cuáles son las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción e identificación de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales por parte de estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II?

### 1.2.2. Preguntas auxiliares.

¿Cómo se concibe una estrategia didáctica para implementar actividades de aprendizaje en el aula que utilicen en conjunto, actividades diseñadas en material concreto (propias de los autores) y GeoGebra (validadas por otros autores) para que los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II logren construir e identificar las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales?

¿Qué resultados arroja la aplicación de una estrategia didáctica que permita fortalecer las múltiples representaciones de las identidades pitagóricas fundamentales en los estudiantes del grado décimo de la IE Juan Pablo II, usando GeoGebra y material concreto de forma conjunta? [1]

¿Qué ventajas y desventajas se obtienen, del uso conjunto de material concreto y de GeoGebra en la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, luego de la aplicación de una estrategia didáctica en estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II?

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Identificar las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II.

### 1.3.2. Objetivos específicos

Definir y diseñar una estrategia didáctica para implementar actividades de aprendizaje en el aula que utilicen en conjunto, actividades en material concreto (autoría propia) y GeoGebra (validado por otros autores) para que los estudiantes de décimo

---

[1] **GeoGebra.** Es un programa matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades. Esta aplicación gratuita y multiplataforma te permite interactuar dinámicamente con la geometría, el álgebra y el cálculo numérico. Su creador, Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas. Definición tomada de https://www.ecured.cu/GeoGebra.

grado de la IE Juan Pablo II logren construir e identificar las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales.

Aplicar una estrategia didáctica que permita fortalecer las múltiples representaciones de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en los estudiantes del grado décimo de la IE Juan Pablo II, usando GeoGebra y material concreto de forma conjunta.

Analizar las ventajas y desventajas del uso conjunto de material concreto y de GeoGebra en la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, luego de la aplicación de una estrategia didáctica en estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II.

### 1.4. Justificación

Las matemáticas a través de la historia se han visto involucradas en todos los acontecimientos evolutivos de la humanidad. Existen “huellas” de ellas en cada una de las grandes comunidades y civilizaciones enmarcadas en la historia (egipcios, Babilonios, Chinos etc.) que evidencian su gran importancia y utilidad tanto en el pasado como en la actualidad (Delgado & Brenes, 2018). Pero, a pesar de ser una disciplina que ha sido utilizada desde la antigüedad, se creería que por ser nosotros predecesores de estas civilizaciones, no debería existir ningún problema en su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas, ha sido y sigue siendo un gran obstáculo para los estudiantes, quedando demostrado en los altos índices de reprobación y bajos porcentajes de acierto en pruebas estandarizadas, tanto nacionales como internacionales (ENLACE - Evaluación Nacional del logro académico en Centros escolares, TIMSS - Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias –, ICFES - El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior y PISA – Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos, etc.).

Teniendo en cuenta los aspectos planteados anteriormente, cabe mencionar que en la actualidad existen diversos factores, que impiden de una u otra forma el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, ya sea por dificultades, errores y obstáculos, presentes en el aula de clase; o por el hecho de que aún se evidencian docentes en la educación (básica, media y superior) inclinados hacia una clase tradicional, en la cual no se incorporan metodologías distintas, no usan las tecnologías a pesar de los resultados de investigación favorables alrededor de estas, los métodos pedagógicos son inapropiados y no hacen uso de diferentes sistemas de representación para enseñar un mismo objeto (matemático).

Entonces, el aprendizaje mediante procesos de memorización sin sentido y sin significado se convierten en uno de los factores más comunes de encontrar en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

> Una de las dificultades que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas, es la poca aplicabilidad asignada a los conceptos. Los procesos de enseñanza, ya sea por falta de tiempo, de conocimiento, de interés o por alguna otra razón, en la mayoría de los casos están relacionados únicamente con las definiciones pertinentes y los algoritmos seguidos para su cálculo dejando de lado la amplia e importante aplicabilidad de los mismos, llevando a un proceso puramente mecánico que fácilmente puede ser olvidado. (Runza, 2013, p. 1)

En este sentido, el presente trabajo pretende a través de la mediación de material concreto (recursos o elementos de autoría propia utilizados por el docente en el salón de clases para transmitir un contenido educativo a partir de la manipulación tangible por parte de los estudiantes; permitiéndoles aprender por medio de la experiencia con dichos recursos, que son de fácil uso, llamativos y con relación directa con la temática) y GeoGebra (software matemático dinámico validado por otros autores), implementar y desarrollar actividades significativas de aprendizaje en la educación matemática, centrado en que los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II sean capaces de comprender y construir las principales identidades trigonométricas, utilizando diferentes registros semióticos de representación, en este caso, gráficos y numéricos, por su sencillez y porque los estudiantes pueden particularizar, visualizar y encontrar regularidades para construir generalizaciones y abstracciones.

Esto último, es un aspecto de mucha importancia para el presente trabajo puesto que, de las indagaciones realizadas en torno al aprendizaje y enseñanza de las identidades trigonométricas, no se encontraron investigaciones en la cual se involucre la implementación (al tiempo) de ambos recursos (digital y físico), pero sí se encontró resultados positivos al integrar GeoGebra en las matemáticas al igual que material concreto.

Por otra parte, las tecnologías dentro del contexto educativo buscan ayudar a mejorar la enseñanza y el aprendizaje dentro de las aulas de clases, a través de su implementación por medio de herramientas (software) que permitan dicha mejoría, un ejemplo de ello es el trabajo de Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019), en el cual se puede evidenciar que software dinámicos como GeoGebra tienen la ventaja de inspirar a los estudiantes hacia su aprendizaje y, por lo tanto, de mejorar su rendimiento académico, además de ser una elección inteligente y crucial en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. Respecto a lo anterior, otros autores como Azevedo, Italândia & Alves, Francisco (2019), Braz, Lúcia & Teixeira de Castro, Gustavo & Oliveira, Patrick. (2019) y también le atribuyen aspectos positivos a su uso en cuanto a las representaciones dinámicas que permiten abstraer ideas y conceptos regularmente incomprensibles en las clases tradicionales (representaciones estáticas).

Además, Fowler et al (2019) hace mención de como el uso correcto de las herramientas digitales pueden ayudar en la promulgación de las competencias al proporcionar espacios de aprendizaje dinámicos en los que los estudiantes pueden resolver problemas espaciales de forma independiente o colaborativa con fluidez, ampliar su comprensión de conceptos geométricos y explicar su razonamiento. En el aprendizaje espacial esto es especialmente importante ya que la tecnología permite a los estudiantes encontrar conceptos que son difíciles o imposibles de mostrar en situaciones de la vida real.

Por todo lo anteriormente mencionado, es que a través del uso simultáneo de dichos recursos se busca obtener un resultado significativo en la enseñanza y aprendizaje de las identidades trigonométricas, entendiendo que estas tienen mucha importancia curricular en Colombia y en el mundo, puesto que a partir de ella se abordan los límites, derivadas e integrales de las funciones trigonométricas.

En resumen, la pertinencia del presente trabajo radica en analizar la complementariedad de material concreto y GeoGebra, y los beneficios que puede traer consigo la implementación de material concreto (autoría propia), en los procesos de aprendizaje de estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II asociados a la trigonometría, que por su contexto y escasa dotación tecnológica del colegio se hace complicado implementar estrategias y metodologías que involucren de forma exclusiva o frecuente sólo recursos tecnológicos ya validados que faciliten el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales.

En consecuencia, la justificación del presente trabajo no radica en mostrar o validar los recursos tecnológicos como favorables en los procesos de aprendizaje asociados a la trigonometría (que por cierto, ya han sido validados y ampliamente documentados por muchos autores anteriormente mencionados, quienes han demostrado los grandes beneficios de la implementación de tecnología educativa en la educación matemática en general), tampoco pretende determinar o afirmar que el material concreto (de autoría propia) es menos o más favorable para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que los recursos tecnológicos, su finalidad y sentido consiste en analizar cómo en un contexto particular como el de la IE Juan Pablo II (donde los estudiantes en general no pueden acceder en la clase de matemáticas de forma constante a computadoras, tablets o recursos tecnológicos potentes que faciliten sus procesos de aprendizaje de la trigonometría), la implementación de estrategias y recursos poco usuales como el material concreto que de forma mediada con el uso complementario de material digital (GeoGebra), pueden favorecer los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales en los estudiantes de grado décimo de esta institución educativa en particular..

## 1.5. Contexto

A continuación, presentaremos una breve descripción de la institución educativa Juan Pablo II, lo cual nos permitirá tener un panorama más amplio de las condiciones sociales, políticas, económicas y culturales de la comunidad educativa en general (en particular, las condiciones de los estudiantes).

### 1.5.1. Descripción del colegio

**Colegio:** Institución Educativa Juan Pablo II. **Código DANE:** 176520003054. **Código ICFES Diurno(colegio):** 118414. **Sede:** Juan Pablo II (Principal). **Zona:** Urbana. **Municipio - Departamento:** Palmira – Valle del Cauca. **ETC:** Palmira. **Dirección:** Calle 47 # 40-03. **Sector:** Oficial. **Calendario:** A. **Teléfono:** 2879949. **Email:** iejuanpabloll@sempalmira.gov.co

La Institución Educativa Juan Pablo II es un colegio católico público reconocido en la ciudad de Palmira, por formar y conducir estudiantes, hacia la excelencia académica, con énfasis en media técnica comercial (además, próximamente será el único colegio en el Valle del Cauca con énfasis en media técnica en arte). Los estudiantes de la institución en su mayoría son de estrato socioeconómico de clase baja o media-baja, puesto que el colegio se encuentra en uno de los barrios más populares de Palmira que enfrenta muchos problemas sociales en torno a la inseguridad y el uso y expendio de sustancias psicoactivas. Además, es importante mencionar que la institución posee tres sedes (de la cual una se encuentra en sector rural y dos en el sector urbano) y que la sede donde se realizará la implementación de las actividades es la principal, que se encuentra en sector urbano, de fácil acceso y que cuenta con jornada diurna, tarde y nocturna por ciclos (que busca servir de servicio social a los estudiantes que por diferentes situaciones sociales, políticas, económicas y académicas no pueden o pudieron realizar sus estudios en las jornadas tradicionales).

No obstante, a pesar de las dificultades anteriormente descritas en la que viven la mayoría de los sujetos que conforman la comunidad educativa, los estudiantes de la institución se caracterizan por ser capaz de sentir y dar amor, de transformar su realidad a partir de lo aprendido en su vida diaria y en el campo laboral, por tener sentido de pertenecía que les permite ser autónomos y esforzarse continuamente por el progreso y mejoramiento de sus condiciones físicas, académicas, culturales, científicas y sociales de su comunidad; ya que la institución busca formarlos con la capacidad para gestionar sus emociones, fundado en la autocrítica y así favorecer sus relaciones interpersonales, también para ser libres para tomar decisiones basadas en el amor, el respeto y la responsabilidad consigo mismo y con otros.

También, es importante destacar que los estudiantes de la institución se caracterizan por su alto nivel de liderazgo y capacidad para trabajar en equipo y con creatividad para resolver problemas; lo que se ve reflejado en la excelencia académica de sus estudiantes que posicionan a la institución como el 5° mejor establecimiento educativo oficial de la ciudad, entre las 27 IE de carácter oficial que hay en Palmira; lo anterior se afirma con base en los resultados de las pruebas Saber 11° que realiza el MEN de forma anual y que permiten que la institución en la clasificación de Planteles sea Categoría A. Así, los valores que promueven los directivos y docentes de la institución es el ser honesto, responsable, creativo, activo y cumplidor; lo cual es coherente con su excelencia académica. Finalmente, y no menos importante es importante mencionar que por temas de protocolos de bioseguridad durante los picos más altos de la pandemia, los salones de estudiantes por su cantidad se habían dividido en dos grupos equilibrados numéricamente, que asistían a la IE en la modalidad de alternancia (una semana presencial, una semana en casa).

Además, en postpandemia se ha dificultado (hasta hace muy poco), hacer uso con normalidad (para la práctica) de la sala de sistemas que posee la institución porque está en proceso de mantenimiento, ya que en plena época de pandemia y de clases virtuales la institución prestó con permiso de la secretaria de educación, los computadores portátiles y tabletas que tenía a su disposición a los estudiantes que no dispusieran de al menos un celular y/o dispositivo electrónico, que les permitiera mantener comunicación ya sea vía WhatsApp, Gmail, Google Meet, entre otros canales virtuales con sus docentes (no todos los estudiantes que no contaban con este tipo de dispositivos pudieron acceder a los que prestaba la institución, ya que tampoco contaba con gran cantidad de ellos; en su mayoría los estudiantes debían trabajar con guías).

En consecuencia, se evidencia las dificultades que los estudiantes en general de la IE Juan Pablo II tuvieron que afrontar en sus procesos de aprendizaje en plena época de pandemia, lo cual significó en muchos casos un bajo aprendizaje significativo y apropiación de conocimientos básicos, con que los estudiantes eran promovidos al siguiente grado, una realidad de la mayoría de los establecimientos educativos del país en esa época.

### 1.5.2. Resultados Históricos (prueba 2019-4, 2020-4 y 2021-4) del examen Saber 11°, Pertenecientes a la I.E Juan Pablo II.

Comparando los resultados generales del Saber 11° a nivel nacional de las pruebas 2019-4, 2020-4 y 2021-4 con el reporte de los resultados históricos obtenidos por la I.E Juan Pablo II (sede principal) en los mismos periodos y con los resultados de otros establecimientos educativos de la entidad territorial certificada (ETC), se obtienen las siguientes estadísticas (para los años 2019, 2020 y 2021, en la I.E Juan Pablo II se encontraban matriculados 62, 56 y 71 estudiantes en grado undécimo respectivamente y presentaron la prueba 59 estudiantes en el 2019, 53 en el 2020 y 69 en el 2021).

**Tabla 2.**

Resultados generales; promedio del puntaje global y desviación estándar de las pruebas 2019-4, 2020-4 y 2021-4 para la sede principal de la IE Juan Pablo II, Colombia, Las Entidades Territoriales Certificadas (ETC), colegios oficiales urbanos y privados de las ETC.

| | Puntaje Global | | | Desviación Estándar | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2019-4** | **2020-4** | **2021-4** | **2019-4** | **2020-4** | **2019-4** |
| Sede principal | 287 | 272 | 294 | 41 | 39 | 50 |
| Colombia | 253 | 252 | 250 | 50 | 39 | 50 |
| ETC | 274 | 271 | 266 | 50 | 48 | 50 |
| Oficiales urbanos ETC | 282 | 276 | 270 | 49 | 43 | 47 |
| Oficiales rurales ETC | 244 | 248 | 247 | 43 | 40 | 42 |

| | Puntaje Global | | | Desviación Estándar | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2019-4** | **2020-4** | **2021-4** | **2019-4** | **2020-4** | **2019-4** |
| Privados ETC | 267 | 266 | 265 | 52 | 38 | 45 |

***Fuente**: Adaptación, a partir de los resultados de la prueba saber 11º reportados por el ICFES (2021).*

Contrastando los resultados históricos de la prueba de Matemáticas Saber 11° del establecimiento educativo, con los resultados nacionales y los de otras instituciones pertenecientes a la ETC, en los periodos 2019-4, 2020-4 y 2021-4, se tiene que:

**Tabla 3.**

Resultados históricos de la prueba de matemáticas; promedio del puntaje y desviación estándar de las pruebas 2019-4, 2020-4 y 2021-4 para la sede principal de la IE Juan Pablo II, Colombia, Las Entidades Territoriales Certificadas (ETC), colegios oficiales urbanos y privados de las ETC.

| | Promedio Matemáticas | | | Desviación Estándar | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **2019-4** | **2020-4** | **2021-4** | **2019-4** | **2020-4** | **2021-4** |
| Sede principal | 60 | 55 | 60 | 9 | 10 | 12 |
| Colombia | 52 | 52 | 51 | 12 | 11 | 11 |
| ETC | 56 | 56 | 54 | 11 | 10 | 11 |
| Oficiales Urbanos ETC | 58 | 56 | 55 | 11 | 10 | 11 |
| Oficiales rurales ETC | 51 | 52 | 50 | 10 | 10 | 11 |
| Privados ETC | 54 | 54 | 53 | 12 | 9 | 10 |

***Fuente**: Adaptación, a partir de los resultados de la prueba saber 11º reportados por el ICFES (2021).*

La Tabla 2 y 3, tratan de vislumbrar una oportunidad de mejora para homogenizar a los resultados en la prueba saber de la IE, comparado su rendimiento con otros establecimientos educativos certificados de la región y la nación, en especial en el área de matemáticas. Aunque es cierto que directamente la temática de las identidades pitagóricas (trigonométricas) no influirá en gran medida en los resultados de

Matemáticas de la IE en la prueba Saber, se pretende sembrar una semilla que muestre una metodología de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a través de las múltiples representaciones, en un ambiente mediado de forma conjunta por material concreto y GeoGebra, que pueda ayudar al fortalecimiento y desarrollo del pensamiento matemático, y en el largo plazo esa metodología de enseñanza permita mejorar los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba.

# CAPITULO II

## 2.1. Estado de la cuestión

La revisión académica realizada en el estado de la cuestión facilitará al lector identificar y diferenciar las diversas tendencias, trabajos de grado, artículos de revista y otras contribuciones que ya se han realizado y que tienen relación directa con el objetivo principal del presente trabajo de grado y el objeto matemático de interés, permitiendo la identificación de vacíos investigativos. Por tanto, se mostrarán algunos aportes de investigaciones que se han realizado en este campo de las matemáticas, abordando desde un contexto internacional, nacional y local.

### 2.1.1. Contexto internacional

En el ámbito internacional existe una amplia cantidad de investigaciones, artículos de revista, tesis de maestría y doctorales que abordan al detalle las bondades existentes en el uso de la tecnología, material manipulable y de las múltiples representaciones, en la enseñanza de las matemáticas. Particularmente, relacionado con la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas fundamentales (pitagóricas), se encuentran diversos trabajos de autores que abordan esta temática. A continuación, se hace una breve descripción y caracterización de algunos trabajos previos que están relacionados con los procesos de aprendizaje, las identidades trigonométricas, el uso de material concreto manipulativo y de material digital que son de interés para el presente trabajo y que permiten identificar puntos de comparación y vacíos investigativos.

Ahora bien, autores como Figueiredo (2010) estudian la obtención de diferentes tipos de representaciones en la estructura cognitiva (representaciones internas) de los estudiantes al abordar conceptos asociados a la trigonometría; en este trabajo se utilizó material digital y propio diseñado por los autores, pero su contenido se centró en conceptos nucleares de la trigonometría y en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Además, Inan (2013) analiza los efectos del enfoque de aprendizaje constructivista en los niveles de aprendizaje de los estudiantes en la trigonometría y su postura frente a las matemáticas en contraste con los métodos de enseñanza tradicionales; en este trabajo se utilizó material didáctico y como técnica de recolección de datos el modelo de grupo control pretest/posttest, pero su contenido se centró sólo en la trigonometría básica y aunque aborda tanto los procesos de aprendizaje y enseñanza, su enfoque principal son los procesos de enseñanza en la trigonometría.

También, en Sander & Heiß (2014), se comparan tres versiones diferentes de un programa de aprendizaje sobre trigonometría, una versión no interactiva (CG) controlada por programa, una versión interactiva que induce conflictos (EG 1) y una interactiva que se suponía que reducía la ocurrencia de un conflicto cognitivo. con respecto a la solución del problema central (EG 2); este trabajo se centra principalmente en los procesos de aprendizaje de la trigonometría básica haciendo uso exclusivo de materiales digitales, usando una metodología constructivista de resolución de problemas.

Adicionalmente, Viganó & Lima (2016) presentan una investigación en Educación Matemática que expone propuesta pedagógica diferenciada para el estudio de la Trigonometría, desarrollada a partir de concepciones constructivistas, el aprendizaje significativo y con base en las teorías del aprendizaje de Ausubel y Vygotsky; este trabajo se centra principalmente en el aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas por medio del uso de las múltiples representaciones de los objetos matemáticos y de diversos registros semióticos de representación haciendo uso de materiales concretos manipulables y digitales.

Del mismo modo, Kamber & Takaci (2018), presentan una investigación sobre algunos aspectos problemáticos que tienen los estudiantes de secundaria en el aprendizaje de la trigonometría; este trabajo se centra en demostrar que las dificultades en el aprendizaje de la trigonometría están asociadas a los algoritmo y ecuaciones principalmente (registro y representaciones algebraicas) haciendo uso de cuestionarios para recopilar información.

Asimismo, Guamán & Malán (2019) exponen un trabajo enfocado más a mejorar los procesos de enseñanza de la trigonometría, pero a nivel universitario (precálculo), en el que presentan una propuesta escrita (guía) o secuencia didáctica de actividades ya diseñadas que contiene actividades con material concreto manipulable pero que se limita a construir conceptos matemáticos asociados a la construcción de líneas trigonométricas, de las razones y funciones seno, coseno y tangente.

Igualmente, Azevedo & Alves (2019) sistematizan una experiencia que consistió en dos clases prácticas que involucraron la enseñanza de trigonometría y el uso del software GeoGebra, donde dichas prácticas tenían como objetivo revisar y profundizar conceptos matemáticos a partir de la construcción de gráficas trigonométricas y resolución de problemas utilizando exclusivamente el software GeoGebra. En resumen, su trabajo sistematiza y expone su experiencia argumentando a favor de la inclusión de materiales digitales interactivos que permiten favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría por medio de un tipo de registro y representaciones semióticas gráficas construidas en GeoGebra.

De la misma manera, Braz & Texeira & Oliveira (2019) presentan una propuesta en la que estudian algunas propiedades y características de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente como dominio, rango, periodicidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, a partir de sus gráficas a partir de un enfoque didáctico que se fundamenta en el uso de GeoGebra como material didáctico digital; en este trabajo los resultados mostraron que el uso del software GeoGebra contribuyó significativamente a la comprensión de los conceptos involucrados, además del desarrollo del razonamiento y la argumentación de los estudiantes.

Por su parte, Zamorano et al. (2019) evidencian dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría a nivel de educación secundaria y superior fundamentado en la poca comprensión conceptual y significativa de los objetos matemáticos; por lo que apoyados en estudios que sustentan y demuestran el impacto positivo de las tecnologías digitales en los procesos de aprendizaje de los estudiantes proponen las ventajas que conlleva el aprendizaje de los conceptos trigonométricos básicos (razones y funciones) por medio de una interfaz de usuario tangible (TUI) que permite a los estudiantes interactuar con información digital a través de un medio tangible.

De los autores anteriormente enunciados, se destacan el trabajo de Viganó & Lima (2016), quienes presentan en su artículo una investigación en Educación Matemática que promueve una propuesta pedagógica para el estudio de la trigonometría a partir de las concepciones constructivistas (al igual que Inan, 2013) y teorías del aprendizaje de Ausubel y Vygotsky. Además, sobresale la contribución de Azevedo & Alves (2019), puesto que en su artículo presentan un relato de experiencia que consistió en dos clases prácticas que involucran la enseñanza de trigonometría y el uso del software GeoGebra. Dichas prácticas tenían como objetivo revisar y profundizar conceptos matemáticos a partir de la construcción y resolución de problemas utilizando dicho software de geometría dinámica. Además, cabe destacar que el material concreto a pesar de ser un método utilizado dentro de la enseñanza tradicional, específicamente en la trigonometría no presenta una alta implementación (se privilegia más la representación algebraica y memorización), pero en trabajos como el de Inan (2013) podemos observar aspectos positivos de llevar a cabo una clase de trigonometría a partir del empleo de material concreto el cual permite enseñar a partir del uso de otros sistemas de representación.

Adicionalmente, es preciso mencionar los trabajos de González (2018) y Hurrell (2020), en los cuales se enfatiza la importancia del material manipulable (concreto) para el desarrollo y fortalecimiento del pensamiento métrico y espacial; puesto que permite a los estudiantes desarrollar más fácilmente la competencia de razonamiento al manipular, ver y tocar representaciones tangibles de los objetos matemáticos abstractos. Aunque dichos trabajos se realizaron sobre un objeto matemáticos diferente al campo de estudio de la trigonometría, existen investigaciones como la de Urrutia & Marín (2019) en la que se diseñó y validó una interfaz tangible para la enseñanza-aprendizaje de conceptos básicos de trigonometría (la interfaz alberga una experiencia pedagógica que privilegia la exploración a través de la manipulación física y fomenta el aprendizaje intuitivo y colaborativo). Además, es importante mencionar el artículo realizado por Dockendorff & Solar (2018), puesto que aquí presentan un estudio de casos que investiga el impacto de la integración de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en las habilidades de visualización de las matemáticas y los programas de formación inicial de profesores; también se identifican algunas características que tiene el uso dinámico del software GeoGebra en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y el impacto de su uso en las concepciones de los maestros (también observado en Sánchez, 2010) sobre la forma en cómo se enseña y se aprenden las matemáticas (la visualización y los diferentes registros de representación de los objetos se presentan como una competencia básica asociada al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas).

En síntesis, en cada uno de los trabajos revisados hasta el momento se evidencia el uso de al menos una las siguientes herramientas: **softwares dinámicos** (principalmente GeoGebra) y **material manipulable**; donde los distintos autores, simplemente enfatizaban en solo una de ellas: Sander, E., & Heiß, A. (2014) y Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012), Braz, Lúcia & Teixeira de Castro, Gustavo & Oliveira, Patrick. (2019), Urrutia & Marín (2019), Viganó & Lima (2016), Sánchez, A. (2010), Hurrel, D (2020), entre otros). Sin embargo, en trabajos como Urrutia, Loyola & Marín (2019) y Zamorano, Cortés & Herrera (2019) se hace uso de las herramientas tecnológicas y de material manipulable, en dichos trabajos su objetivo no radica el car caracterizar la mediación de estas dos herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que solamente se enfocan en analizar y describir las habilidades desarrolladas y fortalecidas por los estudiantes mediante la mediación de la implementación de material concreto.

Para concluir, a partir de todo lo anteriormente mencionado en el contexto internacional del estado del arte se puede afirmar que las tecnologías y materiales digitales (por ejemplo; GeoGebra) y los materiales concretos manipulativos, son muy utilizados para el aprendizaje de las matemáticas y particularmente de la trigonometría. No obstante, en lo referente al objeto matemático de estudio del presente trabajo se observa que en el contexto internacional no existen investigaciones, trabajos o artículos que usen material concreto manipulativo para favorecer el aprendizaje de las identidades trigonométricas (sólo a las razones o funciones trigonométricas). En efecto, se identifica un vacío investigativo.

### 2.1.2. Contexto nacional

En el ámbito nacional, destacan las contribuciones realizadas por Enrique Fiallo (doctor en didáctica de las matemáticas), quien es docente investigador en la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia). Sus aportes principalmente en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría mediante la mediación de software dinámico (GeoGebra y Cabri Geometry) son de reconocimiento e interés internacional dentro de la comunidad docente de las matemáticas. Así, su tesis de doctorado Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica (2011), constituye uno de los referentes teóricos más importantes del presente escrito, puesto que el objetivo principal de este estudio es el de proveer información al campo de la educación matemática, con la finalidad de refinar la comprensión de los procesos de aprendizaje asociados a la demostración, dentro del ámbito de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría dinámica. Mas aún, Fiallo (2011) expone los beneficios de un diseño, implementación y evaluación de una propuesta o guía de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría digital dinámico. En este trabajo se enfatiza en el uso de sistemas de geometría dinámica (SGD) como innovación didáctica para el diseño de actividades que incluyan visualización, conceptualización, exploración conceptual, procesos de conjetura y procesos de demostración formal de las razones, ecuaciones e identidades trigonométricas; que favorezcan el aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos a los estudiantes.

Además, en Fiallo & Parada (2014), aunque abordan el cálculo diferencial y no la trigonometría, se logra evidenciar sugerencias puntuales respecto a una posible forma de implementar y usar GeoGebra en el aula, que favorezca y facilite los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Por otra parte, en el ámbito nacional también existen otros referentes importantes que estudian la mediación del uso de la tecnología y de las múltiples representaciones, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunos de estos son Matta (2014), Runza (2013), Herrera (2013), Solanilla (2015) y González (2018); los cuales tienen en común la implementación y diseño de herramientas tecnológicas y software dinámico para fortalecer dichos procesos en el campo de las matemáticas en general (en Runza (2013) se diseñan actividades de geometría dinámica para la enseñanza de la trigonometría, desde una perspectiva histórica).

Particularmente Matta (2014), presenta y aplica una propuesta didáctica para favorecer los procesos de enseñanza – aprendizaje de las razones trigonométricas (y conceptos básicos asociados) en estudiantes de secundaria usando material digital diseñado en GeoGebra; concluyendo que la propuesta didáctica que se puso en práctica facilitó tanto el proceso de enseñanza al docente, como de aprendizaje a los estudiantes, en donde la observación directa y la manipulación digital de los elementos (representaciones gráficas) de las construcciones realizadas con el software, permitieron abstraer ideas y conceptos regularmente incomprensibles con representaciones estáticas, contribuyendo de buena manera a la formación adecuada de representaciones internas en la mente de los estudiantes que los acercaran a una mayor comprensión de los objetos matemáticos.

Por otro lado, es necesario profundizar un poco sobre el trabajo de González (2018) ya que en este estudio se involucran la mediación de dos herramientas: material manipulativo y tecnología. Sin embargo, cabe resaltar que el contexto del estudio está centrado en fortalecer la visualización espacial (geometría) en estudiantes del grado quinto de primaria y no en trigonometría (en estudiantes de grado décimo). Así, dicha investigación de maestría nos describe los beneficios, el desarrollo y fortalecimiento de las habilidades del pensamiento espacial a través de la implementación de ambas herramientas. Pero, a pesar de que el trabajo de González (2018) está estrictamente centrado en un ámbito netamente Geométrico y no en nuestro tema matemático de interés, es importante resaltar que Weber, 2005 (citado en Urrutia, F. Z., Loyola, C. C., & Marín, M. H., 2019, p. 152) menciona que el razonamiento geométrico, algebraico y gráfico están vinculados en la trigonometría. Lo cual, es de vital importancia saber que el uso de material concreto y tecnología aportan aspectos positivos al aprendizaje de los estudiantes desde la geometría, convirtiéndose este en un punto a favor para la enseñanza de la trigonometría.

Aunque, en Fiallo (2011) se aborde la temática de la trigonometría y también se estudie la mediación conjunta de estas dos herramientas; el objetivo principal de esta tesis de doctorado es analizar y caracterizar solamente la mediación de la herramienta tecnológica (software dinámico de GeoGebra), la implementación de material manipulable solo se emplea en el diseño y aplicación de la prueba diagnóstica del estudio, con la que se verifican el estado de los saberes previos (mínimos) que deben tener los estudiantes antes de abordar la trigonometría; es decir, el material manipulable sólo se usa en el diagnóstico y no en la enseñanza de la trigonometría.

En conclusión, los trabajos anteriormente presentados presentan amplios estudios en el campo de la trigonometría y la mediación de GeoGebra con material manipulativo, pero al igual que los referentes internacionales no se evidencia una implementación consciente de estas dos herramientas dentro de un solo trabajo (al menos en el campo de la trigonometría, puntualmente las identidades trigonométricas). Así, la mayor parte de los referentes, como por ejemplo en Fiallo (2011), muestran solamente el uso de la mediación tecnológica (actividades diseñadas en GeoGebra) para facilitar los procesos de aprendizaje, mediante la exploración y presentación del contenido matemático desde diferentes sistemas y/o registros de representación semiótica, sin tener en cuenta o hacer uso de material concreto.

### 2.1.3. Contexto local

En la búsqueda de investigaciones enfocadas en el ámbito educativo del municipio de Palmira, Valle del Cauca, se ha tornado algo difícil puesto que encontrar trabajos que hagan referencia al campo de estudio de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, mediada por material manipulable o software dinámico, están escasos.

De hecho, el único trabajo que presenta características pertinentes para el presente trabajo es una literatura encontrada donde se destaca el trabajo realizado por García & Posada “Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Identidades Pitagóricas, Vinculadas a la Implementación de GeoGebra en la Clase de Matemáticas” (2019), donde se expone una innovación didáctica inmersa en un proceso de enseñanza y aprendizaje que promueve el uso de múltiples representaciones; con la finalidad de propiciar la construcción de las identidades pitagóricas con la medicación de software dinámico (GeoGebra). En este sentido, se incita a los estudiantes de décimo grado al desarrollo de procesos como la visualización, la conjetura, el uso de múltiples representaciones, la argumentación, el razonamiento y comunicación de las ideas matemáticas.

En este trabajo también se evidencia mediación de material concreto en las actividades que fueron diseñadas y aplicadas, pero al igual que en Fiallo (2011), la mediación e implementación se limita exclusivamente a la prueba diagnóstica (que busca evaluar los aprendizajes previos, particularmente el teorema de Pitágoras). Aun así, en dicho trabajo se logra un aprendizaje significativo de los objetos matemáticos (Teorema de Pitágoras, áreas e identidades trigonométricas entre otros) involucrados en la investigación.

En conclusión; la revisión bibliográfica realizada para el estado de la cuestión en los diferentes contextos por medio de la exploración de artículos, publicaciones de revistas, trabajos de grado y tesis doctorales presentadas anteriormente, permiten establecer tendencias y vacíos investigativos que soportan y justifican la pertinencia del presente trabajo. Aunque en el contexto internacional, nacional y local existe la tendencia de utilizar la tecnología y demás materiales digitales (debido a sus ventajas) tanto para el aprendizaje de las razones, las funciones y las identidades trigonométricas, se observa la inexistencia de estudios que implementen el material concreto manipulativo para el aprendizaje o la enseñanza particularmente de las identidades trigonométricas pitagóricas; cabe aclarar que si existen materiales concretos manipulativos diseñados para estudiar las razones y las funciones trigonométricas, pero no para las identidades trigonométricas fundamentales. En consecuencia, tampoco existe un estudio que use material concreto manipulativo junto a materiales elaborados con tecnologías digitales para el estudio de las ventajas y desventajas que estos tienen en los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales. Así, la construcción de material concreto manipulable en el presente trabajo puede considerarse una posible innovación didáctica en el área.

## 2.2. Marco Teórico.

En este apartado del marco referencial se presenta el objeto matemático y los procesos de aprendizaje asociados a este, también se muestran los referentes teóricos que sustentan la presente investigación, como lo son la teoría en el uso de las múltiples representaciones, la mediación instrumental, las características del material concreto manipulable y de GeoGebra (analógico y digital). Además, es importante mencionar que el marco conceptual es el elemento central para la construcción de los instrumentos didácticos que serán diseñados a lo largo del trabajo.

### 2.2.1. Objeto Matemático (Identidades Trigonométricas Pitagóricas)

Antes de iniciar la exposición del objeto matemático en cuestión, es importante realizar brevemente una diferencia conceptual entre los términos ecuación e identidad. Así, ayuda la definición sobre el concepto de ecuación que realizan Fernández & Molina (2018), afirmando que "una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas (letras, números y operaciones) que se verifica para ciertos valores de las letras" (p.154). Por otra parte, en lo que concierne al concepto de identidad Fernández & Molina (2018) también nos da claridad al afirmar que: "una ecuación identidad (normalmente llamada una identidad) es aquella que es cierta para cualquier valor de las variables" (p.153). En este sentido, se pueden entender las identidades trigonométricas como un caso particular de las ecuaciones (trigonométricas), que relacionan las razones o funciones trigonométricas y siempre son ciertas para cualquier valor que se le asigne a variable y/o incógnita (que se caracteriza por ser de tipo angular) mientras esta pertenezca al dominio de la función.

Por otra parte, es necesario mencionar que identidades trigonométricas existen muchas, las cuales se pueden derivar u obtener como resultado de la manipulación y/o mezcla de una serie de identidades particulares que son conocidas como Identidades Trigonométricas Fundamentales. Así, dentro de las identidades trigonométricas fundamentales se pueden catalogar o distinguir tres tipos:

**Identidades del Cociente:** plantean una equivalencia fraccionaria de las razones trigonométricas tangente y cotangente en términos del seno y coseno.

**Identidades Recíprocas:** plantean una identidad proveniente de la manipulación entre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente junto a su recíproco correspondiente cosecante, secante y cotangente.

**Identidades Pitagóricas:** son aquellas obtenidas a partir de la aplicación del teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas.

A continuación, en la siguiente tabla se resumen y exponen las ocho identidades trigonométricas fundamentales clasificadas entre identidades del cociente, reciprocas y pitagóricas.

**Tabla 4.**

Clasificación de las identidades trigonométricas fundamentales

| Identidades Trigonométricas Fundamentales | | |
|---|---|---|
| **Recíproca** | **Cociente** | **Pitagóricas** |
| $\operatorname{sen} x * \csc x = 1$ | $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ | $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ |
| $\cos x * \sec x = 1$ | $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ | $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ |
| $\tan x * \cot x = 1$ | - | $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ |

**Fuente:** Elaboración Propia

A manera de conclusión, se hace necesario explicitar que el objeto matemático de estudio y de principal interés está asociado a las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales. Por otra parte, para interés del lector las demostraciones de las identidades trigonométricas pitagóricas se consignarán en el Anexo D.

### 2.2.2. Didáctica de las matemáticas en la enseñanza de la trigonometría.

La didáctica de las matemáticas se centra en cómo se enseñan y aprenden las matemáticas, así como en la investigación de métodos, técnicas y estrategias que favorezcan dicho proceso (Godino J., 2010). Las identidades trigonométricas fundamentales son relaciones que involucran las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) y se consideran esenciales para el estudio de la trigonometría y sus aplicaciones. Por tanto, se abordarán los enfoques y estrategias didácticas para enseñar las identidades trigonométricas fundamentales.

Existen diversos enfoques didácticos en la enseñanza de las matemáticas, y en particular, en la enseñanza de la trigonometría, que en relación con el presente trabajo clasificamos en dos categorías principales: el enfoque tradicional y el constructivista.

- El enfoque tradicional en la enseñanza de la trigonometría pone énfasis en la memorización y el aprendizaje de fórmulas y funciones (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, p. 182). Aunque este método ha sido "efectivo" en el pasado, puesto que consiste en la enseñanza de fórmulas y propiedades a través de ejemplos y ejercicios resueltos por el docente, actualmente enfrenta críticas por su falta de contextualización y enfoque en el razonamiento (NCTM, 2000, p. 21). Frente a esto, los enfoques modernos promueven el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, integrando la trigonometría en situaciones reales y aplicaciones prácticas (Stigler & Hiebert, 2009, p. 107).

- Enfoque constructivista: Este enfoque pone énfasis en que los estudiantes construyan su propio conocimiento a través de la interacción con el entorno y la reflexión sobre sus experiencias (Von Glasersfeld, 1995, p. 18). Para la enseñanza de las identidades trigonométricas, los educadores pueden diseñar actividades que permitan a los alumnos explorar y descubrir las relaciones matemáticas por sí mismos, promoviendo el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, ayudando a los estudiantes a comprender conceptos y relaciones clave de manera significativa, en lugar de simplemente transmitirles las fórmulas y propiedades (Clements & Battista, 1990, pp. 34-35).

En conclusión, el enfoque constructivista es la mejor opción para la enseñanza de la trigonometría, ya que promueve un aprendizaje significativo y duradero al fomentar la construcción activa del conocimiento y la reflexión. A diferencia del método tradicional, que puede resultar en un aprendizaje superficial. Además, este enfoque desarrolla habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos en sus futuras carreras y en la vida cotidiana. Por tanto, el enfoque constructivista es más efectivo y relevante en la educación matemática contemporánea.

Por otro lado, Las estrategias didácticas para enseñar las identidades trigonométricas fundamentales incluyen el uso de representaciones múltiples, la exploración de patrones y trabajo colaborativo (NCTM, 2000, Mason, 2008 y Johnson & Johnson, 2018). Estas estrategias pueden aplicarse en conjunto con el enfoque constructivo mencionado anteriormente para diseñar actividades y lecciones efectivas en la enseñanza de las identidades trigonométricas.

- **Representaciones múltiples**: Utilizar distintas representaciones, fomenta un aprendizaje significativo de conceptos matemáticos al permitir el tránsito por distintas perspectivas (Goldin, 2018) como gráficas, tablas, fórmulas y situaciones concretas. Además, estas representaciones permiten en los estudiantes la comprensión, la conexión y la construcción de conceptos en la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 2000, p.25). Por ejemplo, al introducir la identidad fundamental sen2 (x) + cos2(x) = 1, se pueden emplear representaciones geométricas en el círculo unitario y representaciones algebraicas para ilustrar y justificar la identidad. Aunque cabe resaltar que estas estrategias se retoman más adelante de una manera detallada y profunda, enfocada en las investigaciones realizadas por Raymond Duval y D´Amore.

- **Exploración de patrones**: Los patrones y regularidades en las matemáticas pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda de las identidades trigonométricas y sus propiedades, puesto que, promueve el pensamiento lógico y analítico, el razonamiento inductivo y la capacidad de generalización en los estudiantes (Mason, 2008, p. 13). Esta estrategia busca que los alumnos identifiquen, analicen y formulen conjeturas sobre patrones en diversos contextos matemáticos, favoreciendo así la construcción de conocimiento. Por ejemplo, al investigar las propiedades de simetría y periodicidad de las funciones trigonométricas, los estudiantes pueden descubrir las relaciones entre las funciones y las identidades trigonométricas asociadas.
- **Trabajo colaborativo**: La enseñanza de las identidades trigonométricas también se ve favorecida por la incorporación de actividades colaborativas. Trabajar en grupo permite a los estudiantes compartir sus ideas, razonamientos y estrategias, lo que enriquece su conocimiento y fomenta la construcción colectiva del conocimiento (Johnson & Johnson, 2018, p. 62). Además, las actividades colaborativas promueven la comunicación matemática, la argumentación y la reflexión crítica entre los estudiantes, lo que contribuye al desarrollo de habilidades esenciales para el aprendizaje de las matemáticas.

En conclusión, la didáctica de las matemáticas en la enseñanza de las identidades trigonométricas fundamentales puede abordarse a través de enfoques y estrategias que promuevan la construcción del conocimiento, la conexión de conceptos y la resolución de problemas significativos. Las combinaciones de estos elementos en los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas facilitan una comprensión profunda y duradera de los conceptos fundamentales.

### 2.2.3. Material didáctico

En el trabajo de Valenzuela (2012) se evidencia una definición explicita a partir de la mirada de diferentes autores (Carretero, Coriat y Nieto (1995)) alrededor del material didáctico, generando la distinción entre material didactico y recurso, en el cual se indica

> … que los recursos son todos aquellos materiales no diseñados específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, como la tiza,

> el pizarrón, papel, diapositivas, entre otros; en cambio, el material didáctico es diseñado con un fin educativo, aunque un buen material didáctico trasciende la intención original y se le puede dar otros usos. (p. 23).

Sin embargo, dicha distinción conlleva a pensarse los recursos como aquellos elementos inmersos en el aula de clases (tangible y digital), utilizados por el docente y estudiantes como medios para desarrollar los procesos formativos, y por otro lado los materiales didácticos como aquellos elementos elaborados, modificados o implementados con un fin educativo. Es decir, desde la mirada de Cascallana (1988) (citado en Valenzuela 2012, p. 24), la cual está centrada particularmente en las matemáticas, los recursos se ven reflejados en las características que subyacen en los materiales no estructurados y en cambio los materiales didácticos en los estructurados. Por lo tanto, desde esta mirada abordaremos dos tipos de materiales presentes en la educación contemporánea como lo son: el concreto manipulativo y el tecnológico digital.

#### 2.2.3.1. Material concreto manipulativo

el material manipulativo tiene influencia directa en los procesos cognitivos y de aprendizaje de los estudiantes al ser herramientas que dependiendo de su uso facilitan el aprendizaje significativo y la construcción del conocimiento de los objetos matemáticos (en particular de los trigonométricos). En este sentido, el material concreto manipulativo es según Rodríguez (2014)

> Todo objeto físico tangible, diseñado con un fin didáctico o que pueda ser usado con un fin didáctico por su capacidad de representar conceptos matemáticos, que o bien el alumno pueda tocar directamente con sus manos e intervenir sobre él haciendo modificaciones, o bien sea capaz de transmitir ideas y estructuras matemáticas intangibles mediante la experiencia dirigida. (p. 15).

También, autores como Alsina, Burgués & Fortuny (1988) entienden el material manipulativo como “todos los objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos matemáticos” (p. 18). Además, Valenzuela (2012) lo define como “todos aquellos objetos físicos tangibles diseñados con un fin didáctico (estructurado), que el alumno pueda tocar directamente con sus manos, además de tener la posibilidad de intervenir sobre ellos haciendo modificaciones” (p. 24).

Por otra parte, Cascallana (1988) se refiere a la palabra manipulativa en el contexto del aprendizaje de las matemáticas, como aquellos materiales que permiten al estudiante la construcción y adquisición de los conceptos matemáticos, mediante la observación, operación, manipulación y comprobación. Además, Cascallana clasifica y diferencia los materiales entre estructurados y No estructurados, entendiendo que los estructurados son aquellos materiales manipulativos diseñados especialmente para la enseñanza de las matemáticas y, los no estructurados son aquellos materiales manipulativos que pueden usarse para el aprendizaje sin ser necesariamente diseñados para fines matemáticos (por ejemplo; un juguete o juegos).

Por tanto, el material concreto manipulable es un material didáctico que permite a los estudiantes interactuar con objetos físicos (tangram, geoplano, bloques de base diez, regletas de Cuisenaire) para explorar conceptos matemáticos de manera activa y participativa (Godino et al., 2004. P. 131). En el caso de la trigonometría, el material concreto manipulable ayuda a los estudiantes a comprender conceptos abstractos, como razones trigonométricas, ángulos y funciones trigonométricas, de manera más intuitiva y visual.

Sin embargo, autores como Sánchez y Casas (1998), Rodríguez (2014), González (2010) y Valenzuela (2012) describe que el uso de material concreto manipulable es crucial en la educación matemática por varias razones:

- Facilita la comprensión de conceptos abstractos: Los materiales manipulables permiten a los estudiantes visualizar y experimentar con conceptos matemáticos de manera concreta, lo que les ayuda a construir una base sólida para el aprendizaje de conceptos más avanzados y abstractos.
- Estimula el pensamiento crítico y la resolución de problemas: Al trabajar con materiales manipulables, los estudiantes pueden explorar diferentes estrategias y enfoques para resolver problemas matemáticos, lo que fomenta el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas.
- Motiva y aumenta el interés por las matemáticas: El uso de materiales manipulables hace que el aprendizaje de las matemáticas sea más atractivo y divertido para los estudiantes, lo que puede aumentar su motivación e interés en la materia.
- Favorece el aprendizaje colaborativo: Los materiales manipulables pueden utilizarse en actividades de grupo, lo que fomenta la cooperación, la comunicación y el intercambio de ideas entre los estudiantes.

Igualmente, estos mismos autores mencionan algunas de las limitaciones o precauciones a la hora de su implementación.

- Seleccionar materiales adecuados: Es importante elegir materiales manipulables que sean apropiados para el nivel de habilidad y comprensión de los estudiantes y que estén alineados con los objetivos de aprendizaje de la lección.
- Integrar los materiales manipulables en la enseñanza: Los maestros deben planificar y diseñar actividades que incorporen el uso de materiales manipulables para ayudar a los estudiantes a abordar conceptos matemáticos y resolver problemas de manera efectiva.
- Por último y no menos importante, es lo abordado por Godino et al (2004), al mencionar que:

> Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con "polígonos" o "poliedros" de plástico), en cierta forma "manipulamos" y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figúrales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales… (p. 138).

En conclusión, el material concreto manipulable es una herramienta valiosa en la educación matemática que, cuando se utiliza de manera efectiva, puede mejorar significativamente el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Es fundamental que los docentes estén capacitados y cuenten con los recursos necesarios para implementar de manera adecuada y adaptativa en el aula, teniendo en cuenta las necesidades individuales de los estudiantes y la secuenciación lógica del currículo. Además, es importante abordar los desafíos asociados con el uso del material concreto manipulativo, como la dependencia de los estudiantes en estos materiales y la falta de capacitación de los docentes, para garantizar un enfoque equilibrado y efectivo en la enseñanza de las matemáticas.

#### 2.2.3.2. Tecnología digital.

A lo largo de los años, la incorporación de la tecnología digital en la educación matemática ha sido un tema de interés en la investigación. Diversos autores han abordado el impacto de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, y cómo estas herramientas pueden mejorar la experiencia educativa de los estudiantes. Puesto que, ofrece varias ventajas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Según Godino et al (2004), la tecnología puede mejorar la comprensión de conceptos matemáticos al permitir a los estudiantes explorar ideas y visualizar conceptos abstractos de manera más clara (p. 143). Además, la tecnología digital facilita el aprendizaje personalizado, ya que puede adaptarse a las necesidades individuales de cada estudiante y proporcionar retroalimentación en tiempo real (Clements, 2002, p. 174).

Sin embargo, la incorporación de la tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas también presenta ciertos desafíos. Uno de los principales problemas es la falta de acceso a tecnologías y recursos digitales para todos los estudiantes, lo que puede generar desigualdades en la calidad de la educación (Warschauer & Matuchniak, 2010, p. 179). Por lo cual, conlleva a otras dificultades como la falta de familiaridad con software y dado el caso en el que se logre un acercamiento a este, ocasiona que el espacio de tiempo (limitado) permitido se invierta en el aprendizaje de la manipulación del software (Godino et al., 2004, p 142).

En resumen, la tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas ofrece ventajas significativas y presenta desafíos únicos. Su implementación exitosa depende de un enfoque pedagógico adecuado, la capacitación de los docentes y el acceso a recursos y tecnologías apropiados, puesto que existe gran variedad de materiales tecnológicos digitales enfocadas en el campo educativo (estructurados) como por ejemplo GeoGebra. en el campo de las matemáticas.

### 2.2.4. Mediación Instrumental

> Las implicaciones de los nuevos descubrimientos son sorprendentes. Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento y la expresión dentro de la literatura, la filosofía y la ciencia, y aun en el discurso oral entre personas que saben leer, no son estrictamente inherentes a la existencia humana como tal, sino que se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana. Hemos tenido que corregir nuestra comprensión de la identidad humana. (Ong, Walter. 1987, p. 11).

Durante los dos últimos millones de años hemos vivido las tres mayores transiciones cognitivas de la humanidad, la primera transformación fue marcada por el cambio que llevo de la memoria a la fase mimética, la segunda enmarcada en la oralidad y, finalmente la tercera que está asociada a las representaciones externas, la cual permitió a nuestra especie desarrollar nuevos sistemas de representación de la realidad, permitiendo al hombre acceder a nuevos niveles de percepción y concepción de la misma (nuevo conocimiento), todo ligado sustancialmente a la memoria. Asimismo, se puede decir que todo el proceso evolutivo, de aprendizaje y de construcción de conocimiento realizado por nuestra especie ha sido (al menos en una parte), consecuencia directa de estas tres transiciones principalmente; aunque también de las situaciones, experiencias y de la creación de herramientas (por parte del hombre) con propósitos premeditados que alteraron en cierta forma nuestra “estructura” cognitiva, es decir; la adaptación al mundo exterior a través de “nuevos órganos” que permitieron acceder a nuevos conocimientos.

En este sentido, la construcción y avance del conocimiento (particularmente de las ciencias), de acuerdo con Moreno (2002) está directamente ligado al uso las herramientas, entendiendo estas como una parte integral inherente en las prácticas humanas y que como instrumentos de mediación han emergido y se han desarrollado en diversos contextos históricos, políticos, económicos y culturales (p. 83). En consecuencia, es imposible desligar el conocimiento en sí mismo de las herramientas (como instrumento); por ejemplo, en el campo de la ciencia, los grandes descubrimientos realizados han sido producto de la mediación instrumental que ha proporcionado el microscopio, tales como el descubrimiento de la neurona que es la estructura básica del sistema nervioso, la identificación del Alzheimer, el virus del papiloma humano (como causa del cáncer de cuello uterino), las aplicaciones del grafeno en la electrónica y el desarrollo de la súper resolución que permitió diseñar nuevos microscopios (más potentes) que revolucionaron el mundo científico y fueron el factor clave para la obtención de más de 30 premios Nobel. Así, la construcción y avance del conocimiento no es independiente de la herramienta, he aquí el significado de lo que implica la mediación instrumental; de acuerdo con Moreno (2002) “La simbiosis entre el conocimiento generado y los instrumentos es total” (p. 83).

Por otra parte, es importante mencionar que dentro del rol que desempeña la mediación instrumental en la construcción del conocimiento, Moreno (2002) identifica que las herramientas pueden mediar instrumentalmente en forma de amplificación del conocimiento o de reorganización conceptual; para explicar él utiliza dos metáforas:

> La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización sugiere pensar en un microscopio. Con el

> microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo. (2002, p. 85).

Así, es claro que una herramienta podría permitir a un estudiante realizar una amplificación y/o reorganización conceptual del conocimiento a nivel cognitivo; por un lado, como afirma Moreno (2002) la herramienta usada como proceso de amplificación del conocimiento no modificará su pensamiento; ésta sólo lo complementará (p. 85); por otro lado, la misma herramienta podría permitirle al estudiante realizar una reorganización del conocimiento modificando radicalmente su pensamiento, aquí entonces la herramienta se convierte en instrumento.

Por ejemplo: un estudiante puede usar una calculadora para realizar una operación de división de un número natural entre uno decimal que sea mayor a 0 y menor que 1, del cual ya conoce el resultado; en este caso, la calculadora no modifica su pensamiento, solo lo complementa y puede interpretarse como una mera herramienta auxiliar de su cognición que sirve para validar lo que ya sabe. Sin embargo, si el estudiante utiliza de forma continua la calculadora, este uso puede desembocar en modificaciones del pensamiento y cambios a nivel cognitivo asociados en estrategias de solución y comprensión del problema; así, el pensamiento (en este caso matemático) del estudiante es modificado por la presencia de la herramienta (calculadora), que ahora se ha convertido en un instrumento, puesto que su uso conlleva a efectos de reorganización conceptual. En consecuencia, se pueden evidenciar dos aspectos: primero, la reorganización no puede separarse de la amplificación (Moreno, 2002, p. 85) y, segundo, desde los procesos de amplificación, se puede llegar a la reorganización conceptual.

Por otra parte, el material manipulativo tiene influencia directa en los procesos cognitivos y de aprendizaje de los estudiantes al ser herramientas que dependiendo de su uso facilitan el aprendizaje significativo y la construcción del conocimiento de los objetos matemáticos (en particular de los trigonométricos).

Así, dadas las anteriores definiciones, en el presente trabajo se entenderá como material manipulativo a aquellos recursos y materiales didácticos (estructurados y no estructurados) que puedan ser utilizados por los estudiantes como herramientas de mediación, facilitando los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante procesos de amplificación y reorganización conceptual del conocimiento. Por tanto, cabe destacar que GeoGebra y el material concreto que serán usados en el presente trabajo, son dos tipos de material manipulativo, siendo GeoGebra un material manipulativo estructurado de tipo digital y el material concreto un material manipulativo estructurado de tipo físico y tangible.

En conclusión, será muy importante para el propósito del presente trabajo tener en cuenta las ventajas y desventajas que se pueden presentar a la hora de implementar actividades en GeoGebra y Material Concreto, con la finalidad de diseñar actividades con materiales manipulativos estructurados que faciliten la mediación del estudiante con el aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales.

### 2.2.5. Representaciones, registros y múltiples sistemas de representaciones de los objetos matemáticos.

> Un objeto es cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo. Pero, un objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas. (D´Amore, 2006, p.181).

En el campo de la Educación Matemática, se ha utilizado el término “representación” para referirse a las diversas formas de ilustrar, describir o comunicar objetos matemáticos. Particularmente, Goldin & Janvier (1998) afirman que este término se relaciona con un “constructo matemático formal, o sistema de constructos, que pueden representar situaciones a través de símbolos o sistemas de símbolos y que generalmente satisfacen ciertos axiomas o se adaptan a definiciones precisas, incluyendo constructos matemáticos” (p.1).

Asimismo, Duval (2004) afirma que “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación” (p. 25). En este sentido, podría afirmarse que toda movilización de conocimiento que un sujeto pueda realizar tuvo que ser producto de una actividad de representación. Además, de acuerdo con Goldin & Janvier (1998) la representación se asocia a “una configuración cognitiva interna individual, o un sistema de tales configuraciones, que se deduce a partir de actuaciones o introspección, y que describen aspectos de los procesos de pensamiento matemático y de resolución de problemas” (p.1).

En resumen, dentro del presente trabajo el término “representación” se concibe como la manera en que se pueden comunicar y representar los conceptos y objetos matemáticos mediante el uso de diversos lenguajes, símbolos y sistemas de símbolos, En este sentido, la “representación” es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (particularmente de la trigonometría), ya que permite a los estudiantes comprender y comunicar ideas matemáticas abstractas de manera más concreta y accesible. Por tanto, es labor de los docentes de matemáticas fomentar la capacidad de los estudiantes para interpretar, crear y usar diferentes formas de representación (adecuadas) de los objetos matemáticos las cuales faciliten la comprensión de dicho objeto; teniendo en cuenta que la elección de una representación (adecuada) depende del propósito y el contexto, así como de las habilidades y preferencias de los estudiantes; y que una elección de representaciones (inadecuadas), pueden dificultar los procesos de aprendizaje. Ahora bien, las representaciones en el ámbito del aprendizaje y la cognición se pueden clasificar en dos tipos fundamentales: las representaciones externas y las representaciones internas.

Por una parte, las representaciones externas se refieren a aquellas representaciones que se sitúan por fuera de la mente (cognición) del individuo y se utilizan principalmente para comunicar, expresar o ilustrar conceptos, percepciones, ideas y relaciones en el entorno externo. Estas representaciones pueden ser gráficas, simbólicas, tabulares, numéricas, algebraicas, verbales, geométricas, concretas, entre otras.

En consecuencia, las representaciones externas son esenciales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, particularmente de la trigonometría porque permiten a los estudiantes y profesores intercambiar y discutir ideas, resolver problemas y explorar conceptos desde múltiples perspectivas (registros de representación) las cuales permitan alcanzar la construcción de los conceptos matemáticos y los objetivos de aprendizaje.

En efecto, un maestro de trigonometría puede utilizar una representación externa, como un gráfico en el pizarrón o en algún medio tecnológico que grafique (como GeoGebra), para exponer a los estudiantes cómo una función sinusoidal de la forma $f(t) = A * \ sin(\omega t + \varphi)$ se representa en un sistema de coordenadas cartesianas, de esta forma los estudiantes pueden visualizar la forma de la función, identificar características clave, como los puntos de intersección con los ejes, los máximos y mínimos (relativos y absolutos), dominio, rango, periodo, amplitud, frecuencia y discutir cómo cambian en el tiempo estas características cuando se modifican los coeficientes $A, \omega$ y $\varphi$ de la función.

Por otra parte, las representaciones internas (también conocidas como representaciones mentales o cognitivas), son aquellas que acontecen dentro de la mente del individuo y primordialmente facilitan el procesamiento, almacenamiento y recuperación de información y datos (conocimiento). De esta forma, las representaciones internas resultan ser construcciones mentales que los individuos crean y utilizan para comprender y organizar su conocimiento y experiencias. Además, resulta importante mencionar que este tipo de representaciones son susceptibles de ser influenciadas por las representaciones externas con las que pueda interactuar un individuo, y que la manera es cómo estás pueden influenciar a diferentes individuos es única y diferente para cada uno, aunque estos estén expuestos a las mismas representaciones ya que la forma en como las interpretan depende de experiencias previas y de formas individualistas de pensar (concepciones propias).

En definitiva, las representaciones internas son indispensables sobre todo para los procesos de aprendizaje de las matemáticas, particularmente de la trigonometría porque permiten a los estudiantes construir una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos (razones e identidades trigonométricas), desarrollar habilidades metacognitivas, facilitar la retención y recuperación de información, y promover la transferencia de conocimientos al relacionarlos con sus experiencias previas y conocimientos existentes permitiendo la asimilación de nuevos conceptos y habilidades.

Además, las representaciones internas también juegan un rol importante en el desarrollo de habilidades metacognitivas, ya que permiten a los estudiantes reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje y pensamiento matemático, siendo la metacognición es esencial para identificar superar y corregir errores, así como para monitorear y ajustar las estrategias de resolución de problemas. Como ejemplo de una representación interna en el campo de la trigonometría, se puede pensar en la visualización mental que un estudiante hace de la circunferencia trigonométrica unitaria y cómo relaciona las funciones trigonométricas seno y coseno con las coordenadas cartesianas (x, y) sobre un punto en la circunferencia. De esta forma, el estudiante puede construir una imagen (representación) mental de una circunferencia de radio la unidad, centrada en el origen de un plano cartesiano, para posteriormente imaginar un ángulo α (en radianes o grados) formado al hacer girar en sentido antihorario un segmento desde el origen (comenzando en el eje x positivo) hasta un punto sobre la circunferencia de coordenadas (x, y). Así, la representación interna del estudiante podría incluir asociar las funciones trigonométricas seno y coseno con las coordenadas cartesianas (x, y), concibiendo la magnitud de la abscisa y la ordenada como equivalentes a las magnitudes de Cos (α) y Sen (α), respectivamente. Finalmente, esta representación interna permite al estudiante comprender y aplicar las relaciones trigonométricas en problemas que involucran el círculo unitario.

A manera de conclusión de lo anteriormente mencionado sobre las representaciones externas e internas, en la educación matemática y particularmente en el aprendizaje de la trigonometría estas representaciones son cruciales en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, es importante que se diferencien las representaciones del objeto o concepto matemático. Por ejemplo, Duval (1991) menciona que los números, las funciones y las rectas son objetos matemáticos; no deben confundirse con escrituras decimales o fraccionarias del valor de su magnitud de medida, los símbolos, los gráficos y las gráficas que puedan usarse para representarlos. De este modo, se puede identificar una dificultad en el aprendizaje de conceptos y objetos matemáticos, que el mismo Duval menciona una paradoja (1993) donde afirma que "de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, de otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (p.38). Por lo anterior, se puede establecer una paradoja circular en los procesos de aprendizaje ligados a los objetos matemáticos, particularmente los pertenecientes a la trigonometría, entendiendo esto como la imposibilidad o dificultad de acceder directamente a los objetos matemáticos sin hacer uso de representaciones semióticas o sin confundirlos con estas representaciones. Asimismo, D´Amore. et al. (2006) al mencionar que "creo que se deben distinguir dos tipologías de objetos en el ámbito de la creación de la competencia matemática (aprendizaje matemático): el objeto matemático mismo y el objeto lingüístico que lo expresa" (p.21), y Radford (2005) al preguntarse ¿cómo llegamos a conocer los objetos generales, dado que no tenemos acceso a éstos sino a través de representaciones que nosotros mismos nos hacemos de ellos?" (p. 195), demuestran un punto de vista en común con Duval.

> Los conceptos matemáticos no son objetos reales y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y para llevarlo a cabo resulta importante tener en cuenta que las mismas no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se distingue el objeto matemático (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.) no puede haber comprensión en matemática. (Oviedo & Kanashiro, 2012, p. 30).

En este sentido, Duval (1993) afirma que como requisito para alcanzar una adecuada construcción conceptual de los contenidos y objetos matemáticos se debe ser capaz de representarlos en más de un registro de representación semiótica, entendiendo estos registros como las diferentes formas o sistemas en los que se pueden representar conceptos matemáticos. Estos registros permiten a los estudiantes y profesores abordar y comprender los conceptos desde múltiples perspectivas, lo que facilita la construcción de un conocimiento más profundo y significativo en matemáticas, particularmente en trigonometría.

> Se establece entre dos objetos matemáticos (ostensivos o no ostensivos) una función semiótica cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, uno de ellos se pone en el lugar del otro o uno es usado por otro. (D'Amore & Godino, 2006, p. 30).

Algunos de los registros de representación más comunes son:

- Registro gráfico de representación: es el uso de gráficos, diagramas o figuras para ilustrar conceptos matemáticos, como funciones, relaciones o datos. Por ejemplo, una gráfica de una función sinusoidal en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Registro algebraico de representación: utiliza símbolos, letras y números para representar relaciones matemáticas y ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ o la ecuación de la identidad pitagórica fundamental $Sen^2\ (x) + Cos^2\ (x) = 1$.
- Registro numérico y tabular de representación: involucra el uso de números y/o tablas para describir cantidades o relaciones. Por ejemplo, una tabla de valores, una lista o conjunto de números que representen las soluciones de una identidad trigonométrica.
- Registro verbal o lingüístico de representación: es la descripción de conceptos matemáticos y relaciones mediante palabras y lenguaje natural. Por ejemplo, que un estudiante explique con palabras que la identidad pitagórica fundamental $Sen^2\ (x) + Cos^2\ (x) = 1$, es una deducción del aplicar el teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo particular formado en una circunferencia de radio unitario.
- Registro de representación concreta o manipulativa: consiste en el uso de objetos físicos o materiales manipulativos para representar conceptos matemáticos, como bloques de base diez, materiales en origami, ábacos y tangram. Además, es necesario precisar que este tipo de registro es de principal interés para los objetivos del presente trabajo, puesto que de acuerdo con Becker y Selter (1996) los materiales concretos como representaciones externas, facilitan la comprensión y los procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos ayudando a los estudiantes a construir representaciones internas propias. En consecuencia, es indispensable que el material concreto presentado sea preciso, adecuado, bien diseñado y que no permita al estudiante construir representaciones internas inadecuadas ocasionando dificultades de

comprensión del objeto matemático en su proceso de aprendizaje. Por ejemplo, durante el proceso de interacción con un material concreto o manipulable, puede acontecer que un estudiante construya representaciones internas asociadas directamente al material concreto en sí, y no representaciones de la estructura o concepto matemático que dicho material desea comunicar.

De esta manera, la noción de representación semiótica planteada por Duval (2004) requiere la consideración de diferentes sistemas de representación para la enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos y de un proceso cognitivo que permita movilizar las representaciones semiótica de un sistema de representación a otro. Ahora bien, Duval (1998) afirma que un sistema semiótico puede considerarse un registro de representación siempre y cuando permita la identificación de una representación, y dentro de esa representación se pueda realizar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión.

Así, la primera actividad cognitiva de tratamiento se refiere a la transformación de una representación dentro del mismo registro en la cual se formuló (la cual depende de las características de cada registro), Por ejemplo: en clase geometría el profesor le solicita a un estudiante que haga gráfico que represente un triángulo rectángulo (cualesquiera) en el segundo cuadrante del plano cartesiano y que luego le aplique dos operaciones gráficas; inicialmente debe realizar una operación traslación del triángulo al primer cuadrante y posteriormente debe rotar el triángulo 45° al rededor del vértice donde se forma el ángulo de 90°. Así, al final de realizar las operaciones gráficas, la representación gráfica obtenida del triángulo rectángulo es equivalente a la representación gráfica construida inicialmente. Este ejemplo de tratamiento ilustra cómo los estudiantes pueden trabajar dentro de un registro de representación específica (en este caso, el gráfico) para resolver un problema matemático sin cambiar a otro registro.

Asimismo, la segunda actividad cognitiva de conversión se refiere a la transformación de la representación inicial en otra representación (distinta) dentro de otro registro o sistema de representación, la cual se caracteriza por conservar la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Por ejemplo: supongamos un docente en clase de trigonometría pide a sus estudiantes que grafiquen la siguiente función $f(x) = 6 * \; sen(2x - \pi)$, teniendo en cuenta que su periodo es π radianes, su punto máximo y mínimo son respectivamente $3\pi/2$ y $5\pi/4$, su desfase es $\pi/2$ y la grafican en un plano cartesiano en el intervalo $\left|\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right|$, al finalizar dicha gráfica se obtiene una representación de este objeto matemático (función) en un registro de representación diferente al algebraico.

Sin embargo, en el anterior ejemplo se evidencia lo siguiente: de acuerdo con Duval (2004) “la característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto” (p. 45), y en el ejemplo anterior al pasar la función de una representación algebraica a una gráfica de forma adecuada (proceso de conversión), se conserva la referencia al mismo objeto matemático a pesar de que son dos representaciones distintas en registros distintos. No obstante, debido a las singularidades y características de las representaciones externas realizadas en cada uno de los registros (en este caso, algebraico y gráfico), el concepto matemático (la función) en cada registro particular, permite evidenciar algunos aspectos y contenidos diversos que la otra representación en el otro registro no permite o facilita. En efecto, la función en su representación algebraica $f(x) = 6 * \; sen(2x - \pi)$ no permitiría que sea tan sencillo determinar sus raíces; es decir, los valores de x para los cuales la función da cero. En cambio, si la función está en su representación gráfica en el plano cartesiano, se podrían observar directamente sus intercepciones con el eje x, lo que permitiría deducir las raíces o ceros de la función de una forma más rápida y sencilla.

Finalmente, es importante precisar que en el campo de las matemáticas y particularmente en la trigonometría, existen muchos registros de representación de los objetos matemáticos que favorecen los procesos de aprendizaje de esta, tales como lenguaje común, lenguaje numérico, lenguaje algebraico, lenguaje gráfico y visual y lenguaje tabular, entre otros; los cuales ofrecen perspectivas, significados y contenidos diferentes que permiten construir representaciones internas cognitivas de los conceptos matemáticos. Así, de acuerdo con las definiciones de Duval anteriormente mencionadas, para la adquisición del conocimiento de los objetos matemáticos (particularmente en este caso, de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales) es necesario representar los objetos matemáticos en más de un registro de representación semiótico, pero esto no es una tarea natural para los estudiantes y es una de las mayores dificultades en el aprendizaje para la comprensión de los objetos matemáticos. De hecho, esta idea se fundamenta en D´Amore (2006) al afirmar que” sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad” (p. 192). Así, relacionado con los objetivos del presente trabajo será indispensable lograr diseñar materiales concretos manipulables y digitales que faciliten los procesos de aprendizaje del estudiante asociados a la trigonometría, mediante el uso de múltiples representaciones y diversos registros semióticos para la resolución de problemas.

# CAPITULO III

En este capítulo se determina y explica el tipo de metodología mixta de investigación que se va a utilizar en el presente trabajo (Diseño Explicativo Secuencial-DEXPLIS), además se detallan los procedimientos, técnicas, actividades y demás estrategias que se usan en el trabajo práctico y aplicativo en cada una de las actividades. También se exponen las características, validación, objetivos y contenido de los instrumentos de recolección de los datos cuantitativos y cualitativos que serán el eje central de análisis del siguiente capítulo del presente trabajo de grado.

## 3.1. Diseño Metodológico

Una de las características principales de un trabajo de investigación en cualquier campo, es el formalismo y rigor con el que se realiza; por tanto, la determinación de un método teórico de diseño, recopilación, análisis y exposición de los datos y resultados obtenidos facilita ordenar y sistematizar los conocimientos en beneficio de alcanzar los objetivos de investigación planteados. En efecto, el diseño metodológico del presente proyecto de investigación se fundamentó para dar respuesta a la pregunta central de investigación: ¿Cuáles son las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción e identificación de las identidades trigonométricas por parte de estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II? En este sentido, se estudia los beneficios del uso de la tecnología y el material concreto para un contexto especifico (teniendo en cuenta las limitaciones de los diferentes tipos de recursos) de los estudiantes de un colegio oficial de la ciudad de Palmira, Valle del Cauca.

De acuerdo con Hernández et al. (2014), un enfoque cuantitativo de la investigación involucra un conjunto de procesos secuenciales y rigurosos para la recolección de datos con la finalidad de probar el o las teorías que son objeto de investigación, con base en la medición y la estadística. En contraparte, el enfoque cualitativo de investigación se caracteriza por usar la recolección y análisis de los datos como herramientas que permitan refinar los interrogantes planteados en el proceso de la investigación y determinar cuáles son los más importantes.

En conclusión, se puede determinar una diferencia sustancial entre ambos enfoques de investigación, pues mientras el enfoque cuantitativo busca acotar y delimitar intencionalmente la información con base en los objetivos de estudio e investigaciones previas, el enfoque cualitativo busca ampliar la información fijándose principalmente en sus propios datos con el objetivo de consolidar unas creencias propias y originales respecto al objeto de investigación. No obstante, es importante aclarar que el enfoque cualitativo no es mejor o peor que el enfoque cuantitativo y viceversa, Hernández et al. (2014) nos dicen que: “ambos son muy valiosos y han servido para dar notables aportaciones al avance del conocimiento. Ninguno es intrínsecamente mejor que el otro, sólo constituyen diferentes aproximaciones al estudio de un fenómeno” (p.15).

Adicional a los dos enfoques de investigación descritos anteriormente, existe un tercer enfoque de tipo mixto, que implica igualmente una rigurosa labor de recolección, análisis, integración e inferencias de los datos cuantitativos y cualitativos. Desde el punto de vista de Johnson y Onwuegbuzie (2004), se entiende el método mixto como “(…) el tipo de estudio donde el investigador combina o mezcla diversas técnicas de investigación, métodos, enfoques, conceptos o lenguaje cuantitativo o cualitativo en un solo estudio” (p. 17). Ahora bien, aunque autores como Guba (citado en Chen 2006) quien menciona que algunos defensores de los métodos cualitativos y cuantitativos puros ven estos dos enfoques como incompatibles en cuanto a argumentos y técnicas, por lo que afirman que la mezcla de ambos métodos no constituye un aporte significativo a los objetivos de investigación (p.75), a su vez existen otros autores como Johnson & Onwuegbuzie (citados en Chen 2006) quienes evidencian la existencia de puntos de convergencia entre los enfoques cualitativos y cuantitativos de investigación, además mencionan que la mezcla de ambos, en ciertos casos, pueden mejorar la calidad del estudio, siendo este de mayor impacto (p.75).

> “Instead, perhaps it would be more justifiable and less controversial at this time to call mixed methods a “method use” paradigm to reflect this current situation. The advantage for such advocacy includes: First, it would reduce unnecessary conflicts between mixed methods advocates and qualitative or quantitative methods advocates. Second, it points out a great need for systematically developing mixed method “use” strategies as well as establishing its own standards and criteria for assessing the method use. Third, it highlights the ultimate goal of mixed methods research as being to develop its own unique methods. When mixed methods research has its own body of unique methods, we could then move mixed methods from a “method use” paradigm to a “method” paradigm” (Chen, 2006, p. 82).

De manera semejante, Hernández et al. (2014) piensan que “la meta de la investigación mixta no es reemplazar a la investigación cuantitativa ni a la investigación cualitativa, sino utilizar las fortalezas de ambos tipos de indagación, combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades potenciales” (p. 32). En consecuencia, esta investigación asume un enfoque de tipo mixto, aspirando a caracterizar los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas en secundaria del colegio Juan Pablo II con el uso complementario de recursos análogos (material concreto) y digitales (GeoGebra), en tanto quiere comprender como dicha complementariedad afecta el desarrollo del desempeño de los estudiantes a través de la inclusión de ambos recursos en el proceso de aprendizaje. Es decir, el proyecto permite observar el papel que desempeñan al desarrollarlos de forma conjunta en la construcción de las identidades trigonométricas en un ambiente con acceso limitado a los recursos digitales.

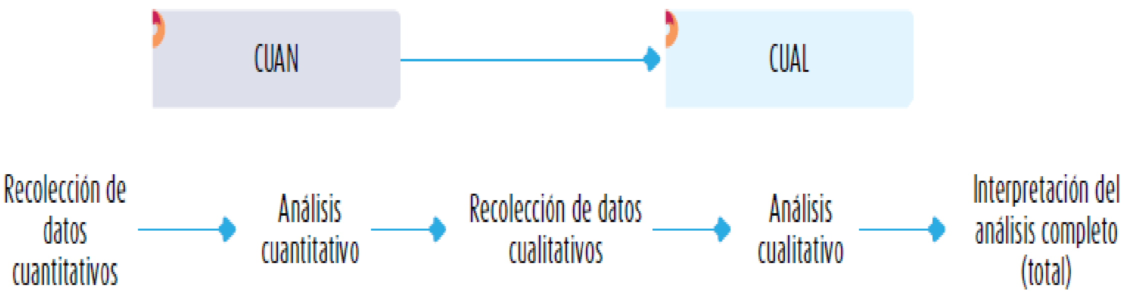
Asimismo, Lieber y Weisner 2010 (citados en Hernández et al. 2014), afirman que “la decisión de emplear los métodos mixtos sólo es apropiada cuando se agrega valor al estudio en comparación con utilizar un único enfoque, porque regularmente implica la necesidad de mayores recursos económicos, de involucramiento de más personas, conocimientos y tiempo” (p. 536). Así, la metodología de investigación mixta se hace la más adecuada por la complejidad en la naturaleza del objetivo central de la presente investigación, ya que permiten abordar y relacionar la realidad objetiva (enfoque cuantitativo) y la realidad subjetiva (enfoque cualitativo) presente en el contexto educativo. Respecto a lo anterior, Hernández et al. (2014), entienden la realidad objetiva asociada a los problemas de investigación, como aquello que está relacionado con lo tangible, lo que se puede ver, medir y tocar y la realidad subjetiva como una composición de diferentes realidades que se pueden percibir a partir de las interacciones, relaciones, experiencias y vivencias de los sujetos que involucran emociones, deseos, nociones y sentimientos, es decir; esta realidad se asocia con la parte intangible (p. 536).

Todavía cabe señalar que la metodología de investigación mixta se puede clasificar de forma general dependiendo del énfasis o prioridad que se le asigne al enfoque cualitativo y cuantitativo dentro de la investigación, ya sea porque exista un predominio de un enfoque sobre otro, o si se les asigna el mismo estatus a ambos dentro del estudio. Por ejemplo, algunos de los diseños mixtos que hacen parte de esta clasificación son el diseño exploratorio secuencial (DEXPLOS), el diseño explicativo secuencial (DEXPLIS), el diseño transformativo secuencial (DITRAS), el diseño de triangulación concurrente (DITRIAC), el diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC), el diseño de anidado concurrente de varios niveles (DIACNIV), el diseño transformativo concurrente (DISTRAC) y el diseño de integración múltiple (DIM), en cada uno de ellos se le asigna una determinada relevancia a los métodos cualitativos y cualitativos, además de que se definen ciertos parámetros guía para la recopilación y análisis de la información. En el presente trabajo no pretendemos definir cada uno de estos diseños metodológicos mixtos, sólo nos centraremos en definir y entender brevemente el diseño explicativo secuencial (DEXPLIS) que será la guía metodológica que usaremos para la recolección, análisis, tratamiento e interpretación de los datos del estudio.

En cuanto al diseño explicativo secuencial (DEXPLIS), este se caracteriza por inicialmente realizar la recopilación, evaluación y análisis de los datos cuantitativos, para posteriormente realizar de manera análoga lo propio con los datos cualitativos. En este sentido, se logra identificar en este diseño una primera fase donde se prioriza lo cuantitativo, y una segunda fase donde se enfatiza en lo cualitativo a partir de lo obtenido en lo cuantitativo, por lo que, de acuerdo con Hernández et al. (2014), "la mezcla mixta de este diseño ocurre cuando los resultados cuantitativos iniciales informan a la recolección de los datos cualitativos" (p. 554). De tal modo, podemos entender que uno de los usos de los resultados y datos cualitativos obtenidos es ayudar a mejorar la interpretación, tratamiento y análisis de la información cuantitativa.

**Figura 1.**

Esquema Diseño Explicativo Secuencial (DEXPLIS).




Fuente: Tomado de Metodología de la Investigación (p. 554) Hernández et al., 2014. Mc Graw Hill Education.

En definitiva, el esquema anterior muestra la estructura general metodológica que se adoptará en el presente trabajo. A continuación, se procede a definir los elementos claves del método DEXPLIS, como lo son la población y/o muestra y las herramientas de recolección y análisis de los datos cuantitativos y/o cualitativos.

## 3.2. Población y Muestra

La Institución Educativa Juan Pablo II cuenta con tres sedes, incluyendo la principal y un total aproximado de 1000 estudiantes, entre las jornadas diurna y tarde con modalidad comercial y en arte (única institución en el Valle del Cauca con modalidad en arte) y jornada nocturna (modalidad académica). Actualmente, en la institución hay tres grados décimos de aproximadamente 35 estudiantes cada uno, es decir una población total en este grado de 105 estudiantes. La propuesta de intervención se realizará a los 35 estudiantes del grado 10°2, adolescentes cuyas edades oscilan entre los 14 y 17 años.

Por otra parte, la selección entre los décimos del salón 10°2 para la aplicación de la propuesta, fue realizada por el docente de matemáticas (trigonometría), ya que considera (a criterio personal y empírico) que es el grupo de estudiantes entre los décimos que mayores dificultades han tenido históricamente en el aprendizaje de las matemáticas y, por tanto, son susceptibles de una mayor oportunidad de mejora. Lo anterior, no es un dato menor, sino que resultará de mucha relevancia para la interpretación y análisis de los datos.

## 3.3. Técnicas de Recolección de Datos

Las técnicas de recolección de datos hacen parte de las decisiones y elecciones que debe tomar el investigador, de acuerdo con Hernández et al. (2014) este “debe decidir los tipos específicos de datos cuantitativos y cualitativos que habrán de ser recolectados, esto se prefigura y plasma en la propuesta” (p. 569). En el caso de los datos cualitativos, con anterioridad no se puede decir a ciencia cierta qué tipo de datos se obtendrán; sin embargo, en el proceso de recolección de datos, independientemente de que sean datos cuantitativos o cualitativos siempre se puede definir el tipo de datos que serán registrados y por medio de qué instrumentos, herramientas y/o técnicas se realizará ese registro.

Para la recolección de los datos que permitan dar respuesta a las preguntas de investigación en función de los objetos de investigación y las interacciones e intermediarios que buscan generar el aprendizaje de las identidades trigonométricas, se hace uso de los siguientes instrumentos, herramientas y/o técnicas de registro que tienen en cuenta el diseño explicativo secuencial (DEXPLIS) esquematizado en la Figura 1:

- ✓ **Prueba diagnóstica (individual):** su objetivo es identificar las fortalezas y debilidades en los saberes previos del estudiante, por lo cual se diseña un instrumento de evaluación de conocimientos, basado en ejercicios con preguntas abiertas (solución de problemas), en un formato online haciendo uso de los formularios de Google.

  La prueba diagnóstica servirá como una herramienta de recolección de datos cuantitativos. Además, se utilizará una versión adaptada de la prueba diagnóstica utilizada por Feria (2019) en el trabajo de maestría titulado *Diseño de una estrategia didáctica en contribución al aprendizaje de las identidades trigonométricas mediado por la tecnología para favorecer su aprendizaje significativo crítico.*
- ✓ **Hojas de trabajo (grupal):** la propuesta de intervención consta de tres hojas de trabajo y/o actividades secuenciales, donde se desarrollan elementos conceptuales y procedimentales de la temática a través de múltiples representaciones, mediados por material concreto y GeoGebra, las cuales, presentan varias preguntas y apartados para que los estudiantes respondan de manera escrita.

  Las hojas de trabajo servirán como una herramienta de evaluación y recolección de datos cuantitativos. Además, las hojas de trabajo y actividades de la propuesta de intervención serán adaptaciones de otros trabajos importantes que involucran las TIC (particularmente GeoGebra), en la enseñanza de la trigonometría, combinadas a propuestas propias y complementarias de material concreto.
- ✓ **Entrevistas clínicas:** son un instrumento de recolección de datos (principalmente datos cualitativos) que busca identificar la reflexión sobre los acontecimientos en las diferentes sesiones de intervención (prueba diagnóstica y hojas de trabajo), donde se podrá determinar aspectos positivos o en su defecto de mejora en la metodología, llevándose a cabo con estudiantes que durante la aplicación presentan desempeños particulares e interesantes. Este tipo de entrevistas es una combinación diferentes modelos de entrevistas, principalmente las entrevistas estructuradas (preguntas cerradas), las semiestructuradas (combina preguntas cerradas y abiertas) y las abiertas (no contiene preguntas cerradas).

El concepto de entrevista clínica es complejo de entender y definir, por lo que en el presente trabajo nos apoyaremos en las definiciones de Maccoby y Maccoby (1954), quienes la definen como "un intercambio verbal, cara a cara, entre dos o más personas, una de las cuales, el entrevistador, intenta obtener información de la otra u otras personas" (pp. 449), y Symonds (1931) quien la define como un método “para reunir datos durante una consulta privada o reunión; donde una persona, que se dirige al entrevistador, cuenta su historia, da su versión de los hechos o responde a las preguntas relacionadas con el problema estudiado con la encuesta emprendida” (pp. 180).

- ✓ **Notas de campo:** es un registro que realizarán los investigadores de forma continua durante toda la propuesta de intervención con los estudiantes, su uso permitirá registrar principalmente datos cualitativos (aunque también cuantitativos, en menor medida) de los acontecimientos y/o situaciones que se vayan dando. Las notas que aquí se registrarán pueden ser características o descripciones literales de los hechos que observan los investigadores, aunque también pueden ser interpretaciones o comentarios (personales) sobre esas observaciones. La UDLA (2006) recomienda para la elaboración de las notas de campo que estas se limiten al contexto espacio-tiempo que se desea estudiar y se diferencien muy claramente las notas que realizan una descripción objetiva de los hechos, de las notas que presentan (una descripción subjetiva) valoraciones, comentarios o interpretaciones propios de los investigadores (pp. 53).

A continuación, se describe el desarrollo por etapas de cada una de las actividades que se implementaran en la investigación.

**Tabla 5.**

Etapas desarrolladas para la implementación de la práctica.

| Etapas | Descripción de acciones concretas |
|---|---|
| **Diseño y aplicación de prueba diagnóstica** | Análisis de la actividad realizada por Feria Torres, E. (2019) y adaptarla al objeto de la investigación, depurar y modificar algunos elementos.<br>Redacción de la encuesta de diagnóstico.<br>Revisión de expertos<br>Realización de ajustes a la prueba. |

| Etapas | Descripción de acciones concretas |
|---|---|
| | Análisis de los resultados obtenidos. |
| Diseño de hoja de trabajo | Diseño de hoja de trabajo 1 para fortalecer las deficiencias presentadas en la prueba diagnóstica.<br>Diseño del recurso concreto y digital (hojas de trabajo 2 y 3), en las distintas representaciones de acuerdo con las herramientas que cada una ofrece para el desarrollo de la propuesta. |
| Exploración y recolección de datos | Revisión de expertos<br>Aplicación del recurso al grupo experimental.<br>Fase de formalización y socialización<br>Elaboración de entrevistas clínicas. |
| Análisis de resultados | Cualitativo (Formas de solución que dan los estudiantes)<br>Cuantitativo (correcto, incorrecto y no contesto) |

**Fuente**: Elaboración Propia

## 3.4. Cronograma de Actividades.

A continuación, se presenta el cronograma de las actividades de recolección de datos del presente trabajo, el cual contiene información sobre la fecha de aplicación y el tiempo de duración de cada actividad.

**Tabla 6.**

Cronograma de Actividades.

| Fecha de Aplicación | Actividad | Tiempo |
|---|---|---|
| 04/05/2022 | Prueba Diagnóstica | 50 minutos |
| 13/05/2022 | Hoja de Trabajo No.1 | 100 minutos |
| 18/05/2022 | Hoja de Trabajo No. 2 | 120 minutos |
| 27/05/2022 | Hoja de Trabajo No. 3 | 100 minutos |

**Fuente:** Elaboración Propia.

# CAPITULO IV

En este capítulo se analizan y discuten los resultados obtenidos en cada una de las actividades que integran las propuestas de aplicación siguiendo el modelo explicativo secuencial DEXPLIS descrito en la metodología. Así, la investigación presenta un estudio cuantitativo y otro cualitativo (mixto), ambos importantes para estimar el progreso y habilidad de los estudiantes en el aprendizaje de las identidades trigonométricas fundamentales.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en primer lugar, se presentan los resultados del diagnóstico y, en segundo lugar, se analizan los resultados de cada una de las tres hojas de trabajo implementadas. En todos los casos, la información es presentada, organizada y esquematizada en tablas y gráficas, y, además, se incluyen algunas evidencias de las respuestas y/o justificaciones de los estudiantes a las actividades planteadas.

Finalmente, se realiza un análisis comparativo de los resultados del diagnóstico y de las hojas de trabajo para tratar de vislumbrar el impacto de la propuesta del presente trabajo, así como la pertinencia de las actividades y del uso complementario de material análogo y digital.

## 4.1. Resultados y análisis de la intervención

### 4.1.1. Análisis del diagnóstico

En este apartado se describen las características sobresalientes del instrumento de diagnóstico, y por medio del análisis de algunas temáticas que incluye, se ejemplifican los recursos, estrategias y representaciones que se involucran en su resolución. Además, se hace referencia a los aspectos que se pretenden identificar, tales como la concepción, percepción y uso de recursos presentes acerca del teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

También, se puntualizan los objetivos de la actividad diagnostica, las condiciones de aplicación, el análisis cuantitativo y cualitativo. De lo anterior, se origina una sucesión de comentarios finales, siguiendo la metodología del diseño explicativo secuencial (DEXPLIS).

#### 4.1.1.1. Presentación de la actividad diagnostica.

La actividad diagnostica se compone de 4 temáticas (Tabla 8 y 9), la cual, permite explorar las nociones que tienen los estudiantes con relación al significado sobre el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas y los tipos de representación que utilizan en la resolución de cada una de las problemáticas planteadas. Para lograr este propósito, es preciso mencionar que cada una de las temáticas tiene una finalidad esencial, por lo que se pueden agrupar de la siguiente manera:

- ✓ preguntas 1, 2, 3, 7 y 8. Este bloque integra preguntas que exploran los conceptos presentes en el estudiante acerca de las características del triángulo rectángulo y las razones trigonométricas.
- ✓ preguntas 4, 6 y 9. La idea es indagar el impacto que tiene el tamaño, la posición, la forma en la toma de decisiones en la solución de problemas de geometría.
- ✓ Preguntas 4, 5, 6 y 9. Se trata de indagar si los estudiantes conocen o no las propiedades de los ángulos internos de un triángulo y del triángulo rectángulo a partir de sus lados (catetos e hipotenusa) o ángulos (razones trigonométricas).

#### 4.1.1.2. Objetivo.

Una de las finalidades del diagnóstico es reconocer las falencias, dificultades y concepciones erróneas que presentan los estudiantes en torno a propiedades, características y componentes alrededor de las matemáticas. En concordancia con esto, y con la propuesta del presente trabajo, es sumamente importante que en el diagnostico se identifiquen las ideas previas de los estudiantes con relación al teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. De igual forma, los resultados del diagnóstico se convierten en primer lugar, en un referente para el diseño de las hojas de trabajo y, en segundo lugar, constituye los parámetros de referencia para observar el impacto del trabajo realizado en el aprendizaje de los estudiantes.

#### 4.1.1.3. Condiciones de aplicación.

En cada una de las preguntas consignadas en la prueba diagnóstica, se dejó un espacio adecuado para que los estudiantes plasmaran sus respuestas, sin embargo, se enfatizó en ello al momento de exponer las instrucciones para responder el “cuestionario”.

La actividad se contestó de manera individual, en un tiempo de 50 minutos, y fue aplicada a un grupo de décimo grado, el cual está formado por 11 hombres (40,7%) y 16 mujeres (59,3%) con edades que oscilan entre los 14 y los 17 años. Respecto a lo anterior, es importante precisar que, aunque en el grado hay matriculados 35 estudiantes, la actividad diagnóstica sólo se pudo realizar con 27 estudiantes del grado ya que los 8 estudiantes restantes fueron solicitados por el colegio para otra actividad.

#### 4.1.1.4. Resultados cuantitativos

La siguiente tabla evidencia los resultados generales obtenidos por los 27 estudiantes de grado decimo en la prueba diagnóstica.

**Tabla 7.**

Resultados de la prueba diagnóstica.

| **Estudiante** | Pregunta No. | | | | | | | | | Total | Promedio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **No.** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | - | - |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 56% |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 33% |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 44% |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 44% |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 56% |
| 6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 33% |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 44% |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 7 | 78% |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 6 | 67% |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 33% |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 7 | 78% |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | 56% |
| 13 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 67% |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 7 | 78% |
| 15 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 7 | 78% |
| 16 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 22% |
| 17 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 33% |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 44% |

| Estudiante No. | Pregunta No. | | | | | | | | | Total | Promedio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | - | - |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 56% |
| 20 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | 56% |
| 21 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 56% |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 8 | 89% |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 56% |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 56% |
| 25 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 33% |
| 26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 33% |
| 27 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 | 44% |
| Total | 23 | 11 | 21 | 14 | 9 | 3 | 15 | 16 | 16 | - | - |
| Promedio | 85% | 41% | 78% | 52% | 33% | 11% | 56% | 59% | 59% | 4,74 | 53% |

En términos generales, se puede concluir que las preguntas que más porcentaje de estudiantes respondieron incorrectamente son la 5 y 6 con un promedio de 33% y 11% y un equivalente a 18 y 24 estudiantes respectivamente, a pesar de que el rendimiento es aceptable (53%).

Para ilustrar lo anterior, a continuación, se realiza un análisis de acuerdo con la agrupación de las preguntas según la temática a la que se hace referencia en la siguiente tabla.

**Tabla 8.**

Exploración de conceptos previos sobre triángulo rectángulo y razones trigonométricas.

| Preguntas | Temáticas | $\bar{C}$ | $\%\bar{C}$ | $\bar{I}$ | $\%\bar{I}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1, 2 y 3 | Triangulo rectángulo | 18 | 66,7% | 9 | 33,3% |
| 7 y 8 | Razones trigonométricas | 16 | 59,3% | 11 | 40,7% |
| Promedio Total | | 17 | 63,0% | 10 | 37,0% |

*Nota*: $\bar{C}: promedio\ de\ correctas\ y\ \bar{I}: promedio\ de\ incorrectas$

Teniendo en cuenta la información de las tablas 7 y 8, la respuesta de la pregunta 1, el 85% respondió correctamente demostrando la claridad que presentan para definir un triángulo rectángulo en lenguaje natural. En la pregunta 2, el 41% sabe la denominación de los lados de un triángulo rectángulo. En la pregunta 3, el 78% conoce cuál es el triángulo utilizado para el teorema de Pitágoras. Por tanto, a partir de las 3 preguntas anteriores se concluye que en promedio el 66,7% de los estudiantes son capaces de definir e ilustrar las características del triángulo rectángulo.

Por otro lado, en la pregunta 7, el 56% tiene claridad en definir la razón trigonométrica. Y en la pregunta 8, el 59% conocen las diferentes razones trigonométricas. Por esta razón, en promedio el 59,3% de los estudiantes entienden y representan algebraicamente las razones trigonométricas.

**Tabla 9.**

Exploración de atributos (espacial y métrico) y propiedades.

| Preguntas | Temáticas | $\bar{C}$ | $\%\bar{C}$ | $\bar{I}$ | $\%\bar{I}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | Ángulos internos del triangulo | 14 | 51,8% | 13 | 48,2% |
| 5 y 6 | Teorema de Pitágoras | 6 | 22,2% | 21 | 77,8% |
| 9 | Razones trigonométricas | 16 | 59,3% | 11 | 40,7% |
| Promedio total | | 12 | 44,4% | 15 | 55,6% |

*Nota*: $\bar{C}$: $promedio\ de\ correctas\ y\ \bar{I}$: $promedio\ de\ incorrectas$

En la tabla 9, la respuesta de la pregunta 4, el 51,8% de los estudiantes conocen la ley de la suma de los ángulos internos de un triángulo. En la pregunta 5, el 33% saben representar gráficamente el teorema de Pitágoras. En la pregunta 6, el 11% identifica el método a utilizar ante un problema en contexto del teorema de Pitágoras. Por tanto, ante las dos últimas preguntas (5 y 6), existe un indicador de interpretación y solución bajo, puesto que, en promedio el 77,8% de los estudiantes contestaron de forma incorrecta.

Por otra parte, En la pregunta 9, el 59,3% identifica correctamente las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo no convencional.

#### 4.1.1.5. Resultados cualitativos.

La información cualitativa es indispensable abordarla en la investigación, puesto que, los datos cuantitativos no son suficientes para un estudio detallado. Por tal razón, las representaciones proporcionadas por los estudiantes a cada uno de los problemas planteados en el diagnostico se analizarán categóricamente según la agrupación a la que pertenecen (tabla 8 y 9).

Por lo anterior, en las respuestas dadas por los estudiantes se observa que estos lo hacen a partir de diferentes representaciones como: Grafico, Lenguaje natural y algebraico, aunque en algunos casos presentan la combinación de representaciones (grafico – lenguaje natural, algebraico – gráfico y algebraico – lenguaje natural).

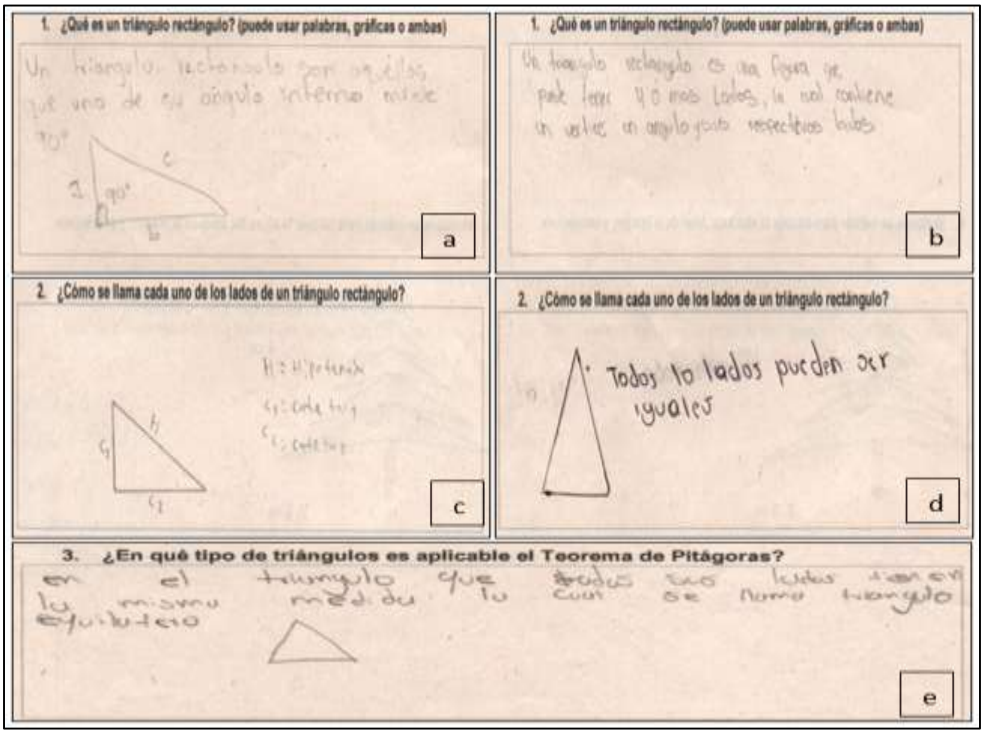
Por tanto, particularmente en la agrupación de la temática triangulo rectángulo (tabla 8), se evidencia que los estudiantes tienen mayor inclinación por la representación en el lenguaje natural y en el gráfico, aunque en las respuestas presentadas de forma gráfica presentan menor cantidad de incorrectas para los que decidieron utilizar este tipo de representación. No obstante, cabe resaltar que aquellos estudiantes que lo realizaron de forma correcta presentaron el triángulo en la forma convencional (un cateto horizontal y el otro cateto vertical).

Igualmente, existe una inclinación muy baja de parte de los estudiantes hacia respuestas que involucren el uso de dos o más representaciones, en este caso, en promedio la quinta parte utilizo la combinación de lenguaje natural – grafico en las preguntas del 1 al 3.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de los tipos de representación utilizados por los estudiantes.

**Figura 2.**

Respuestas a preguntas 1, 2 y 3 (prueba diagnóstica)

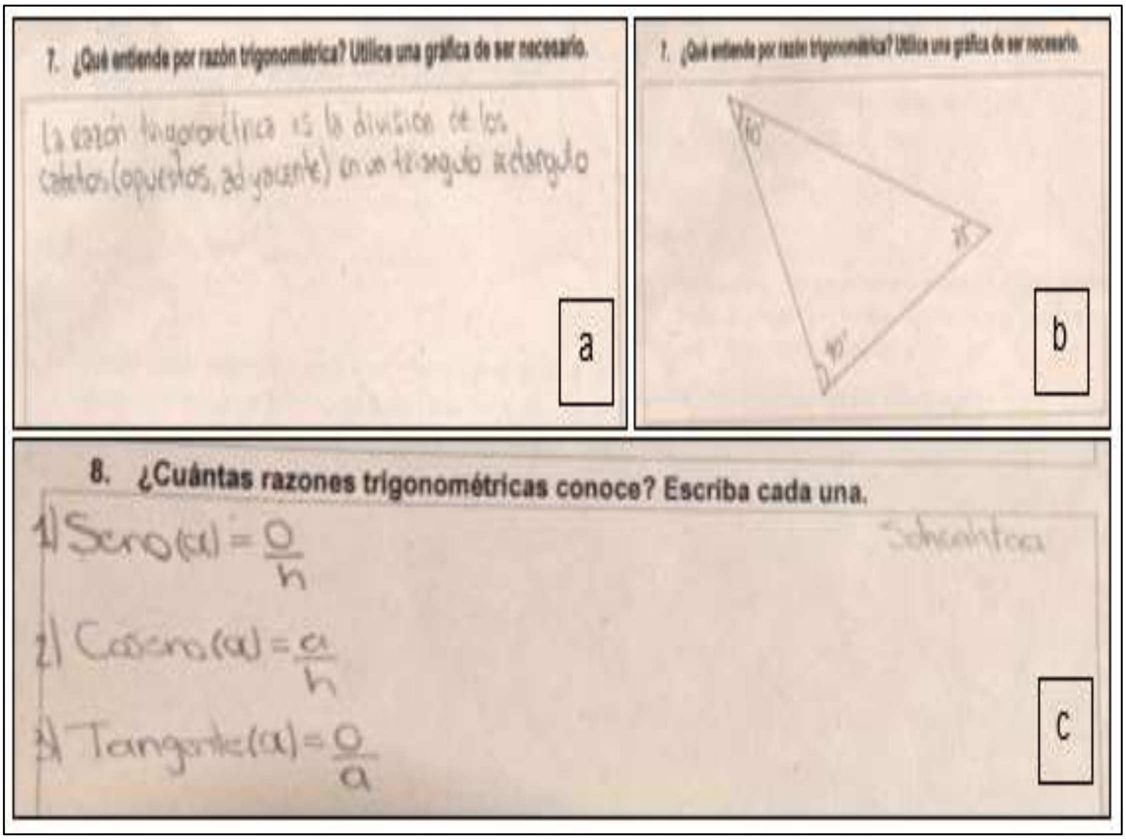



Nota: respuestas correctas (a y c) de los estudiantes No. 20 y 22 e incorrectas (b, d y e) de los estudiantes No. 17, 26 y 3 respectivamente, acerca del triángulo rectángulo.

Por otro lado, en la agrupación de razones trigonométricas de la tabla 8, la mayor parte de los estudiantes exceptuando solo uno, utilizaron una sola representación (lenguaje natural) para responder las preguntas, aun cuando una de ellas (pregunta 7), les indicaba que podían hacer uso de una gráfica para dar respuesta (Anexo 1), y el estudiante que lo realizo de manera gráfica, lo hizo incorrectamente. Sin embargo, aquellos que presentaron las respuestas de forma correcta tienen claridad en los conceptos básicos de las razones trigonométricas.

**Figura 3.**

Respuestas a preguntas 7 y 8 (prueba diagnóstica)

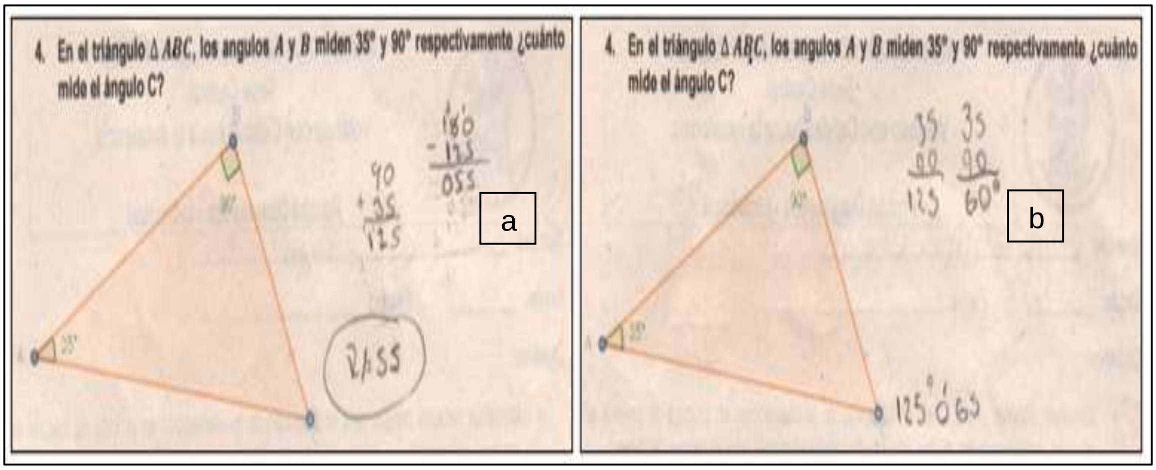



Nota: respuestas correctas (a y c) de los estudiantes No. 15 y No.1, respectivamente. Y, respuesta incorrecta (b) del estudiante No. 12 acerca de las razones trigonométricas.

Por otra parte, en las agrupaciones de la tabla 9, primeramente, en la temática de ángulos internos del triángulo, se evidencia que las respuestas se realizan de forma numérica (Figura 4), haciendo uso de dos de las operaciones básicas (suma y resta), en la que algunos estudiantes plasmaron los procesos en la hoja de respuesta, demostrando el 51,8% que tiene claridad de la ley de la medida de los ángulos internos de un triángulo, sin embargo, no todos plasmaron el proceso, pero si daban la respuesta correcta.

**Figura 4.**

Respuesta a pregunta 4 (prueba diagnóstica)




Nota: respuesta correcta (a) del estudiante No. 24 e incorrecta (b) del estudiante No. 13 respectivamente, acerca de la medida de los ángulos internos del triángulo.

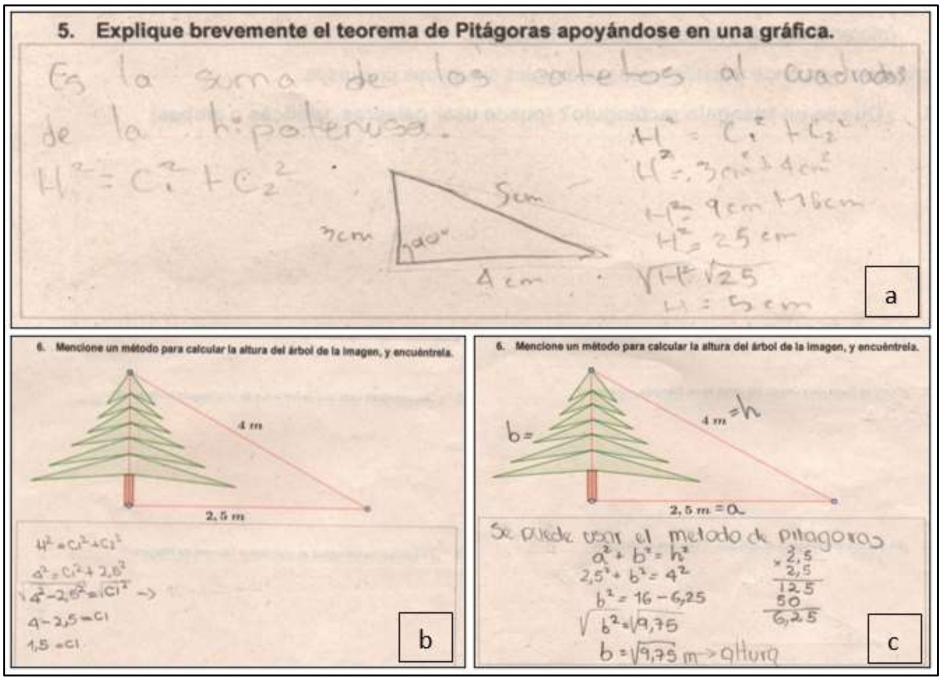
En cambio, los estudiantes que contestaron incorrectamente demostraron tener un pensamiento equivoco de dicha ley, ya que, algunos estudiantes contemplaban la idea de que un mismo ángulo puede tener 2 medidas diferentes, o que a partir de la resta de los ángulos dados (anexo 1 – pregunta 4), se obtiene el ángulo restante, de igual manera con la suma.

Continuamos con la agrupación del teorema de Pitágoras en la cual se logra observar el uso de más de un tipo de registro de representación, al punto de que uno de los estudiante (N.º 20) hizo uso de 3 ellos (grafico, natural y algebraico), evidenciándose claridad conceptual del teorema de Pitágoras (pregunta 5), el cual, se reafirma dicha claridad al ser uno de los que respondió la pregunta 6, la cual, presenta el mayor número de respuestas incorrectas, encontrándose dificultades en aspectos algebraicos y numéricos (pregunta 6), como el mal uso de propiedades de los números reales (uniforme y radicales) y a su vez, una inadecuada Interpretación de jerarquías de operaciones (figura 5).

Por tanto, es evidente que los estudiantes a pesar de que algunos conocen el teorema de Pitágoras, al momento de resolver una situación problema, tienden a presentar este tipo de dificultades y además se evidencia una memorización de la formula, pero no saben hacer uso de ella ante una situación que amerite su utilización.

**Figura 5.**

Respuestas a preguntas 5 y 6 (prueba diagnóstica)

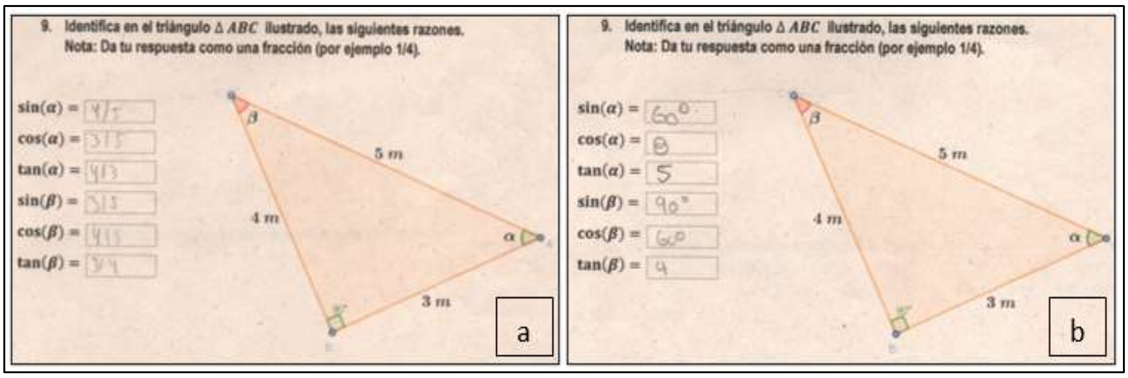



Nota: respuesta correcta (a y c) del estudiante No. 20 y 13 e incorrecta (b) del estudiante No. 14 respectivamente, acerca del teorema de Pitágoras.

Y, por último, la temática razones trigonométricas (tabla 9), se evidencia una correcta identificación de las razones a partir de un triángulo rectángulo no convencional, de tal manera, que plasman las respuesta a partir de los ángulos sugeridos para su posterior razón, sin embargo, los estudiantes que plasmaron una incorrecta solución, interpretaban el resultado de las razones como una medida angular, a pesar de que en el enunciado de la pregunta (anexo 1), se les indicara que se respondiera en un numero fraccionario.

**Figura 6.**

Respuesta a la pregunta 9 (prueba diagnóstica)




Nota: respuesta correcta (a) del estudiante No. 22 e incorrecta (b) del estudiante No. 3 respectivamente, acerca de las razones trigonométricas.

#### 4.1.1.6. Comentarios Finales

Con la aplicación del diagnóstico fue posible identificar algunas dificultades y concepciones erróneas que tienen los estudiantes de décimo grado, alrededor del concepto de triangulo rectángulo, teorema de Pitágoras, ángulos internos del triángulo y razones trigonométricas. Entre los resultados encontrados se pueden mencionar los siguientes:

- ✓ La mayoría de los estudiantes (81,5%) mostró una gran inclinación por la representación en lenguaje natural y muy pocas respuestas que presentaran una conversión simultanea de representaciones (algebraico, grafico, lenguaje natural y numérico entre otros), lo cual repercute en gran medida al momento de argumentar una respuesta o procedimiento de solución.
- ✓ La mayoría de los estudiantes presentaron dificultad para comunicar correctamente e implementar el teorema de Pitágoras, pero, llama la atención que hayan presentado un número mayor de respuestas correctas en las preguntas de razones trigonométrica, cuando en ambas, se trabaja con triángulos rectángulos y tienen presentes el identificar los lados que lo componen (catetos e hipotenusa).
- ✓ Es evidente que los estudiantes reconocen que son conceptos trabajados en anteriores grados (entrevista Estudiante No 22 y No 18), al mencionar que se “acordaban de algunas” “me confundí en una” y “estaban bloqueados”. Lo cual, son conceptos que carecen un aprendizaje significativo.

### 4.1.2. Análisis de las hojas de trabajo.

En este apartado se describen las características de cada una de las hojas de trabajo aplicadas, así como los propósitos, condiciones de aplicación y resultados del análisis cuantitativo y cualitativo correspondientes. Por último, se presentan algunos comentarios finales de cada una de las actividades implementadas.

Es necesario mencionar que, en términos generales, las hojas de trabajo comparten un mismo diseño, en cuanto a la conformación grupal (3 estudiantes) para contestar las actividades plasmadas. Y, la integración del uso de material concreto y tecnología se enfoca de manera combinada e individualmente. Es decir, La primera hoja de trabajo, se contestan con el uso de material concreto y de tecnología; la segunda con el apoyo de material concreto. Y, la tercera, se aplicó mediante el uso de la tecnología.

En lo relativo a las condiciones de aplicación, en el tercer capítulo del presente trabajo se hizo una descripción detallada al respecto, sin embargo, resulta conveniente retomarlo en este apartado en forma general.

#### 4.1.2.1. Hoja de trabajo I.

##### 4.1.2.1.1. Presentación de la actividad.

El desarrollo de las actividades requiere que los estudiantes construyan el concepto del teorema de Pitágoras. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se les brinda un material recortable y unas instrucciones para que a través de este último logren armar una especie de rompecabezas, buscando generar una comprensión significativa sobre dicho teorema, a partir de una conjetura elaborada por los estudiantes respecto a lo acontecido en la elaboración del rompecabezas.

Posterior a ello, se realiza una actividad de exploración en GeoGebra, para observar a partir de otros registros de representación el teorema de Pitágoras, con la intención de conjeturar iniciando desde la comprobación de n-casos.

##### 4.1.2.1.2. Objetivo.

En el diagnóstico, al plantear dos preguntas respecto al teorema de Pitágoras, propuesto en la hoja de trabajo I, se obtuvo un resultado sumamente bajo de respuestas correctas (22.2%). Esto fue consecuencia de un escaso conocimiento significativo de conceptos, así como una memorización de la formula, pero con la dificultad de no saber hacer uso de ella ante una situación problema que amerite su utilización. Esta situación propició la necesidad de aplicar una actividad que permitiera el aprendizaje significativo a partir del proceso de elaboración de conjeturas, en un contexto geométrico. Además, se busca reforzar y afianzar saberes prerrequisito (Teorema de Pitágoras), indispensables para la comprensión y aprendizaje de las identidades trigonométricas, utilizando diferentes registros de representación.

#### 4.1.2.1.3. Condiciones de aplicación.

La hoja de trabajo se aplicó en grupo de tres estudiantes (la idea es fomentar la discusión de las nociones matemáticas involucradas) en una sesión de dos horas-clase (100 minutos en total) y se dividió en dos partes: la primera se contestó en el salón de clases haciendo uso de material concreto; la segunda se llevó a cabo en el centro de cómputo y fue resuelta con el apoyo de la tecnología computacional.

En lo referente a las características generales de la hoja de trabajo, ésta contiene la elaboración de un "rompecabezas", preguntas abiertas con espacios para justificar cada una de las respuestas y una tabla de recolección de datos. Es decir, se incluye una tabla en la que se deben escribir la variabilidad de medidas paralelamente al identificarlos en una gráfica, así como también conjeturar de acuerdo con el contexto del problema planteado.

Finalmente, se cerró con la presentación de las ideas relevantes por parte del docente, con el propósito de formalizar el conocimiento a partir de la explicación de los conceptos estudiados en la clase.

#### 4.1.2.1.4. Resultados cuantitativos.

La siguiente tabla evidencia los resultados generales obtenidos por los 9 grupos de estudiantes de grado decimo en la primera hoja de trabajo I.

**Tabla 10.**

Resultados hoja de trabajo I.

| Grupo No. | Estudiantes No. | Preguntas No. | | | | Total | Promedio (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Material concreto | | GeoGebra | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | - | - |
| 1 | 1, 2 y 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| 2 | 4, 5 y 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| 3 | 7, 8 y 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| 4 | 10, 11 y 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| 5 | 13, 14 y 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| 6 | 16, 17 y 18 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 75 |
| 7 | 19, 20 y 21 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 75 |
| 8 | 22, 23 y 24 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 50 |
| 9 | 25, 26 y 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 100 |
| Total | | 9 | 8 | 9 | 6 | - | - |
| Promedio | | 100% | 89% | 100% | 67% | 3,56 | 89% |

En términos generales, se puede concluir que la pregunta que más porcentaje de grupos de estudiantes respondió incorrectamente es la 4, con un porcentaje de 33% y un equivalente a 3 grupos de estudiantes, a pesar de que el rendimiento es alto (89%).

Tal como se puede apreciar, en el trabajo realizado con material concreto, en la primera actividad (Anexo B) de recortar, armar y pegar los polígonos sobre el cuadrilátero que tiene como lado la hipotenusa, los 9 grupos de estudiantes (100%) logro culminar correctamente la actividad, al sobreponer en su totalidad los polígonos.

Las preguntas 2 y 4, se puede decir de manera general que, en promedio el 78% de los 9 grupos de estudiantes, a partir de una situación específica, logran redactar de manera correcta una conjetura con respecto a indicios y observaciones. En cambio, el 22,2% presenta dificultades para expresar sus conjeturas.

Finalmente, en la actividad 3 el 100% de los grupos, completa y anota los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, a partir de la manipulación y movilización de los deslizadores en GeoGebra, para determinar diferentes medidas sobre los lados (catetos e hipotenusa) de dicho triangulo.

#### 4.1.2.1.5. Resultados cualitativos.

A continuación, se muestran algunas evidencias del trabajo realizado en el salón de clases con material concreto y posterior a ello, el trabajo realizado en la sala de cómputo con el software dinámico GeoGebra. Sin embargo, cabe aclarar que las imágenes plasmadas en este trabajo, solo refleja directamente las actividades realizadas, y así, salvaguardar la identidad de los estudiantes.

**Figura 7.**

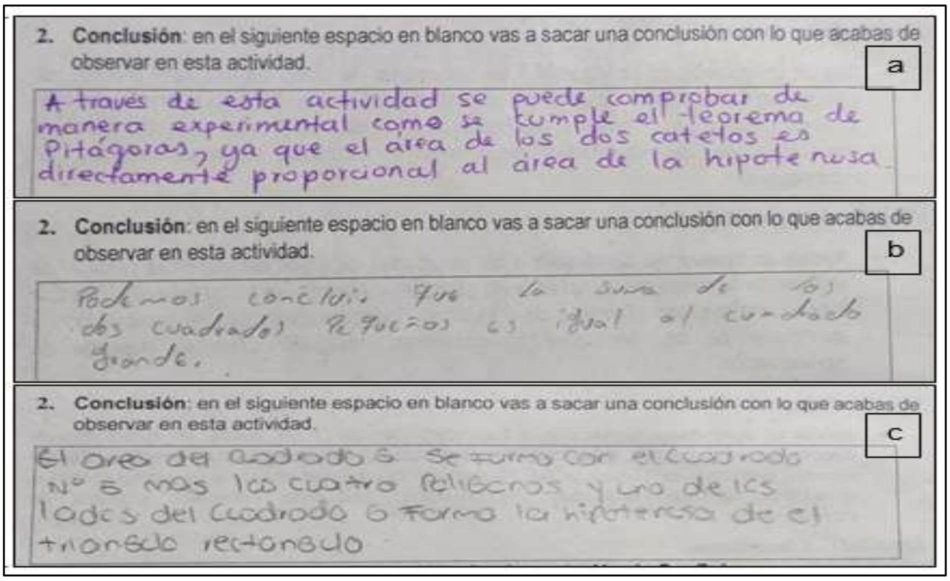
Trabajo de los estudiantes hoja de trabajo I (actividad 1)

En la actividad 1, el 100% de los grupos conformados por estudiantes logro recortar con tijeras dos polígonos regulares constituidos por los catetos, el cual uno de ellos, se dividía en cuatro polígonos irregulares (Anexo B). Después, sobre el cuadrado que tiene como lado la hipotenusa, superpusieron los polígonos recortados a tal punto que encajaran en su totalidad todas las “piezas” (Figura 7).

Sin embargo, en la pregunta 2, el grupo 8 conformado por los estudiantes (22, 23 y 24) no logro comunicar acertadamente lo realizado en la actividad 1, por tratar de plasmar una correcta conjetura de lo realizado, pasaron por alto términos que no pueden ser confundidos como lo son la longitud y el área (figura 8a), a pesar de sobreentenderse la intención de lo que querían plasmar. En cambio, los estudiantes que obtuvieron una correcta conjetura (lenguaje natural) de lo acontecido en la actividad 1, no todos, a pesar de usar el mismo registro de representación plasmaron sus respuestas de la misma manera, ya que, grupos como por ejemplo el 5 respondieron a partir de la noción de medidas y tamaños de los polígonos cuadrados, otros (33,3%) como el grupo 3, lo hacían a partir de la distinción numérica que tenía cada uno de los polígonos (Figura 8) y otros grupos (44,4%), lo hicieron a partir de la noción de catetos al cuadrado e hipotenusa al cuadrado.

**Figura 8.**

Respuesta a pregunta 2 (hoja de trabajo I).


2. **Conclusión**: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.

a

A través de esta actividad se puede comprobar de manera experimental como se cumple el teorema de Pitágoras, ya que el área de los dos catetos es directamente proporcional al área de la hipotenusa

2. **Conclusión**: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.

b

Podemos concluir que la suma de los dos cuadrados pequeños es igual al cuadrado grande.

2. **Conclusión**: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.

c

El area del cuadrado 6 se formo con el cuadrado Nº 5 mas los cuatro poligonos y uno de los lados del cuadrado 6 formo la hipotenusa de el triangulo rectangulo

Nota: respuesta incorrecta (a) del grupo No. 8 y correctas (b y c) del grupo de estudiantes No. 3 y 5 respectivamente, acerca de el teorema de Pitágoras.

En la actividad 3, el 100% de los grupos conformados por estudiantes logro generar a partir de los deslizadores (GeoGebra), medidas diferentes para los lados conformados por un triángulo rectángulo, permitiendo visualizar el cambio en las áreas de los cuadrados cuyos lados pertenecían a dicho triangulo y a su vez, diligenciaban la información exigida en la tabla de datos (Figura 10) para cada una de las medidas generadas (figura 9).

**Figura 9.**

Trabajo de los estudiantes en la sala de cómputo (Hoja de trabajo I).

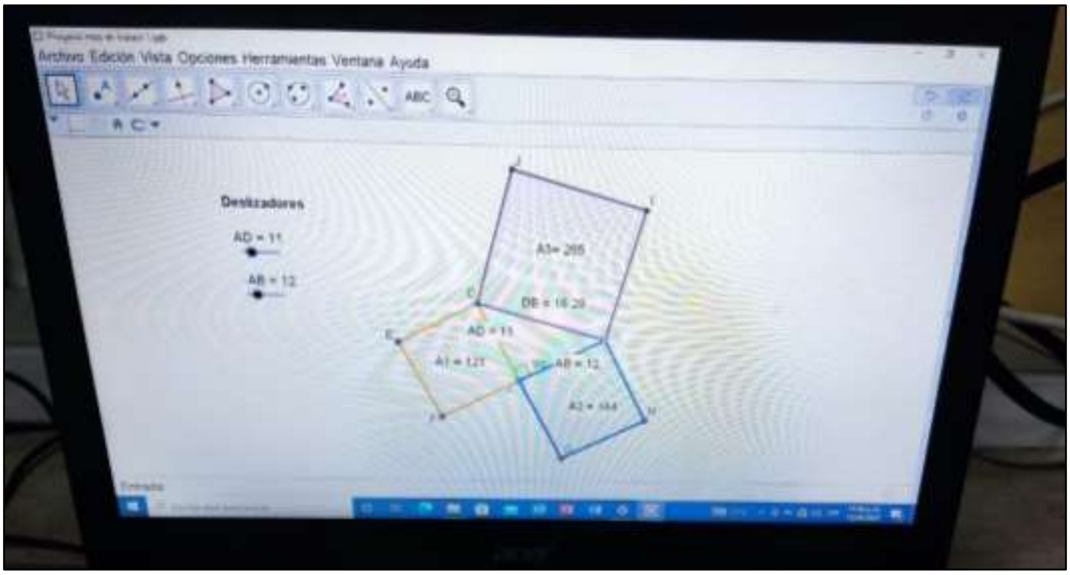
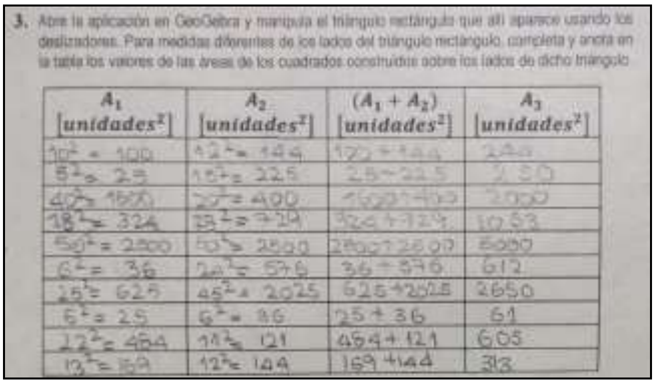



**Figura 10.**

Respuesta a la pregunta 3, por el grupo 5 (Hoja de trabajo I).



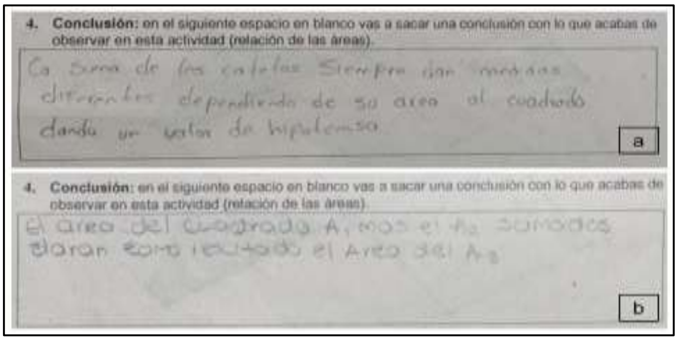
3. Abre la aplicación en GeoGebra y manipula el triángulo rectángulo que allí aparece usando los deslizadores. Para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, completa y anota en la tabla los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de dicho triángulo

| $A_1$ [$unidades^2$] | $A_2$ [$unidades^2$] | $(A_1 + A_2)$ [$unidades^2$] | $A_3$ [$unidades^2$] |
|---|---|---|---|
| $10^2 = 100$ | $12^2 = 144$ | $100 + 144$ | 244 |
| $5^2 = 25$ | $15^2 = 225$ | $25 + 225$ | 250 |
| $40^2 = 1600$ | $20^2 = 400$ | $1600 + 400$ | 2000 |
| $18^2 = 324$ | $27^2 = 729$ | $324 + 729$ | 1053 |
| $50^2 = 2500$ | $50^2 = 2500$ | $2500 + 2500$ | 5000 |
| $6^2 = 36$ | $24^2 = 576$ | $36 + 576$ | 612 |
| $25^2 = 625$ | $45^2 = 2025$ | $625 + 2025$ | 2650 |
| $5^2 = 25$ | $6^2 = 36$ | $25 + 36$ | 61 |
| $22^2 = 484$ | $11^2 = 121$ | $484 + 121$ | 605 |
| $13^2 = 169$ | $12^2 = 144$ | $169 + 144$ | 313 |

En la pregunta 4, podemos observar en las respuestas de los grupos conformados por los estudiantes que contestaron correctamente (67%), referirse no solo a los cuadrados, si no a nociones como áreas para definir lo acontecido en GeoGebra, permitiendo el registro numérico, tabular y gráfico, denotar una expresión mucho más formalizada que, guarda una mayor correspondencia con el teorema de Pitágoras. A pesar de ello, el 33%, no logro expresar adecuadamente una conjetura que diera cuenta de lo realizado, puesto que, se generó la dificultad de plasmar en lenguaje natural aquello que con la herramienta les era fácil argumentar (figura 11b).

**Figura 11.**

Respuestas pregunta 4 (hoja de trabajo I).



4. **Conclusión:** en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad (relación de las áreas).

La suma de los catetos siempre dan medidas diferentes dependiendo de su area al cuadrado dando un valor de hipotenusa

a

4. **Conclusión:** en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad (relación de las áreas).

El area del cuadrado A, mas el A2 sumados daran como resultado el Area del A3

b

Nota: respuesta incorrecta (a) del grupo de estudiantes No. 7 y correcta (b) del grupo de estudiantes No. 5, acerca de el teorema de Pitágoras.

#### 4.1.2.1.6. Comentarios finales.

En la aplicación de la primera hoja de trabajo se obtuvieron progresos significativos del (78%) en comparación a lo acontecido en la prueba diagnóstica, que en su mayoría (77,8%) de los estudiantes no comprendían el teorema de Pitágoras. La explicación de este impacto se debe a los siguientes factores:

- ✓ La participación por parte de los estudiantes, propició el proceso de construcción de este conocimiento, al realizar actividades (recortar, pegar, armar, visualizar, medir y conjeturar) que despiertan el interés de los estudiantes y los lleva a establecer roles más activos en el proceso de aprendizaje del teorema de Pitágoras.
- ✓ Los estudiantes deben construir el concepto matemático presente en la actividad y eso genera una expectativa y una sorpresa frente al conocimiento. En este proceso los estudiantes trabajan de manera individual y posteriormente socializan lo aprendido con sus compañeros y con el profesor.
- ✓ El uso de diferentes registros de representación (grafico, tabular, numérico entre otros) permite emerger el conocimiento a partir de la articulación, porque, el recortar, armar, pegar, medir, visualizar y hallar un patrón, hace que el conocimiento matemático sea tangible y que las construcciones realizadas con este método sean significativas para el estudiante; De esto último, lo podemos ver plasmado en las palabras de los mismos estudiantes como la entrevista del No 18. cuando resalta la importancia del uso de diferentes registros para comprender un concepto cuando menciona “fue

muy didáctica y diferente a las demás cosas que suelen poner. Que solamente toda teoría y no poner graficas para explicar".

**4.1.2.2. Hoja de trabajo II**

En este apartado se describen las características sobresalientes de la hoja de trabajo II, y por medio del análisis de las actividades con material concreto que incluye, se ejemplifican los recursos, estrategias y representaciones que se involucran en su resolución; además de describir la influencia que tiene en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. También, se puntualizan los objetivos de la segunda hoja de trabajo, las condiciones de aplicación, el análisis cuantitativo y cualitativo. De lo anterior, se origina una sucesión de comentarios finales, siguiendo la metodología del diseño explicativo secuencial (DEXPLIS).

**4.1.2.2.1. Presentación de la hoja de trabajo II**

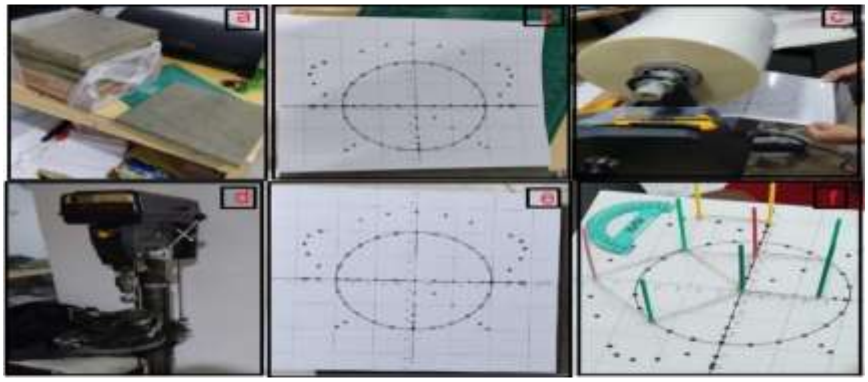
En la actividad de la hoja de trabajo II se trabaja específicamente con la primera identidad trigonométrica pitagórica, en la cual se presentan situaciones de manipulación con material concreto a manera de intervención exploratoria.

Así, el material concreto diseñado para las actividades es de autoría propia y, consiste en una tabla trigonométrica (construida en madera) que tiene impreso y plastificado en uno de sus lados un círculo trigonométrico de radio 1cm sobre un plano cartesiano, todo ampliado en escala de 8:1 como se muestra en la Figura 12. Además, sobre el perímetro de la circunferencia y ciertos puntos específicos del plano cartesiano había unos orificios sobre los cuales se deben insertar unos palitos (similares en tamaño y grosor a unos palos de bombón) para formar con gomas o cauchos triángulos rectángulos inscritos en la circunferencia trigonométrica, de tal forma que para cualquier triángulo rectángulo que se desee formar, uno de sus vértices siempre esté fijo sobre el centro de la circunferencia, otro de sus vértices siempre este ubicado sobre la circunferencia y el otro vértice este ubicado sobre el eje x horizontal al interior de la circunferencia.

Posteriormente, se hacía uso nuevamente de los palitos y de las gomas o cauchos sobre los lados del triángulo rectángulo formado, para construir esta vez cuadrados sobre los lados de cada triángulo rectángulo (sobre el cateto horizontal, el cateto vertical y la hipotenusa). Finalmente, con ayuda de un transportador y una regla especial (ampliada en escala de 8:1) se realizaban algunas medidas de los valores relacionados con uno de los ángulos internos del triángulo (particularmente el que se formaba en el vértice que estaba ubicado en el centro de la circunferencia), y de los lados del triángulo y de los cuadrados formados, los cuales debían registrarse en tablas.

**Figura 12.**

Ilustración del proceso de construcción propia del material concreto utilizado como herramienta mediadora en el aprendizaje de la primera identidad trigonométrica pitagórica fundamental.




En el collage de la figura 12, la imagen a. muestra el tipo de madera utilizado (madera MDF de alta calidad) con medidas de ancho, largo y grosor de 30cm x 30cm x 1,5cm, respectivamente, la imagen b. muestra el circulo trigonométrico impreso en papel adhesivo a escala ampliada 8cm x 1 cm y a color, la imagen c. muestra el proceso de plastificación del papel impreso con el circulo trigonométrico, la imagen d. muestra el taladro de columna o fijo en mesa utilizado para realizar algunas perforaciones a precisión sobre la madera MDF, la imagen e. muestra la tabla o material concreto terminado con la impresión plastificada pegada y los orificios abiertos a precisión y la imagen f. muestra la aplicación y puesta en práctica del material concreto diseñado.

Adicional al uso de material concreto, la hoja de trabajo II constaba de una guía en papel que contenía 6 preguntas o actividades cortas, cuyo propósito era mediar el uso del material físico manipulable con la construcción de los objetos matemáticos (en la mente de los estudiantes) asociados a los procesos de aprendizaje de la primera identidad trigonométrica pitagórica fundamental. En este sentido, cada una de las preguntas o actividades tienen una intencionalidad pedagógica descrita a continuación:

- ✓ Las preguntas 1 y 4 implicaban poner a prueba las habilidades de los estudiantes para recolectar y compilar información en tablas esquematizadas, uso de instrumentos de medición (regla especial y transportador) y realización de operaciones aritméticas para el cálculo de las razones trigonométricas de seno y coseno y el cálculo de áreas cuadrados; todo a partir del uso de material concreto.

- ✓ Las preguntas 2, 3 y 5 ponían a prueba las habilidades de análisis, observación, interpretación, indagación y conjetura de los estudiantes, al proponer preguntas de exploración que requerían que los estudiantes analizaran y debatieran profundamente sobre la información recolectada y compilada en las tablas de las preguntas 1 y 4, con la finalidad de que alcanzarán la construcción de la primera identidad trigonométrica.
- ✓ La pregunta 6 indagaba sobre la interpretación y aprendizaje significativo adquirido por los estudiantes de la primera identidad trigonométrica pitagórica fundamental durante la actividad con material concreto en la hoja de trabajo II, mediante el cambio de sistemas de registro de representación de la información.

#### 4.1.2.2.2. Objetivo.

La finalidad de la hoja de trabajo II es realizar una intervención exploratoria que presente a los estudiantes retos de aprendizaje significativo, mediante el planteamiento y solución de situaciones de manipulación con material estructurado y concreto con la intencionalidad de propiciar en ellos procesos de conjeturas vinculadas a la primera identidad trigonométrica.

#### 4.1.2.2.3. Condiciones de aplicación.

En cada una de las preguntas y actividades consignadas en la hoja de trabajo II, se dejó un espacio adecuado para que los estudiantes plasmaran sus respuestas en lenguaje natural y/o en tablas esquematizadas; sin embargo, se enfatizó en ello al momento de exponer las instrucciones para responder las actividades con ayuda del material concreto.

La actividad se contestó de manera grupal (grupos de tres integrantes, conformados por los mismos integrantes que trabajaron en la hoja de trabajo 1), en un tiempo de 120 minutos, y fue aplicada a un grupo de décimo grado, el cual está formado por 11 hombres (40,7%) y 16 mujeres (59,3%) con edades que oscilan entre los 14 y los 17 años.

#### 4.1.2.2.4. Resultados cuantitativos

La siguiente tabla evidencia los resultados generales obtenidos por los 9 grupos de estudiantes de grado decimo en la segunda hoja de trabajo.

**Tabla 11.**

Resultados de la hoja de trabajo II.

| Grupo No. | Estudiantes No. | Pregunta No. | | | | | | Total | Promedio (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | - | - |
| 1 | 1, 2 y 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 2 | 4, 5 y 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 3 | 7, 8 y 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 33 |
| 4 | 10, 11 y 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| 5 | 13, 14 y 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | 16, 17 y 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| 7 | 19, 20 y 21 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 67 |
| 8 | 22, 23 y 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| 9 | 25, 26 y 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| Total | | 9 | 8 | 8 | 7 | 2 | 3 | - | - |
| Promedio | | 100% | 89% | 89% | 78% | 22% | 33% | 4,11 | 69% |

En términos generales, se puede concluir que las preguntas que más porcentaje de grupos de estudiantes respondieron incorrectamente son la 5 y 6 con un promedio de 78% y 67%, equivalente a 7 y 6 grupos de estudiantes respectivamente, a pesar de que el rendimiento promedio es aceptable (69%). Por otra parte, las preguntas que más grupos de estudiantes respondieron correctamente son las preguntas 1, 2 y 3 con un promedio de 100%, 89% y 89%, que equivale a 9 y 8 grupos de estudiantes respectivamente. Así, para ilustrar lo anterior se realiza un análisis de acuerdo con la agrupación de las preguntas según la intencionalidad pedagógica a la que se hace referencia en la siguiente tabla.

**Tabla 12.**

Clasificación de las preguntas y/o actividades de la hoja de trabajo II

| Preguntas | Categoría | $\bar{C}$ | $\%\bar{C}$ | $\bar{I}$ | $\%\bar{I}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 y 4 | Actividades con Material Concreto | 16 | 89 | 2 | 11 |
| 2, 3 y 5 | Conjeturar | 18 | 67 | 9 | 33 |

| Preguntas | Categoría | $\bar{C}$ | $\%\bar{C}$ | $\bar{I}$ | $\%\bar{I}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Múltiples Representaciones | 3 | 33 | 6 | 67 |
| Promedio Total | | 12 | 63 | 6 | 37 |

*Nota*: $\bar{C}$: *promedio de correctas y* $\bar{I}$: *promedio de incorrectas*

En la tabla 12**,** se puede observar que las respuestas dadas por los grupos de estudiantes en la actividad con material concreto, el 89% lo hicieron correctamente demostrando altas habilidades para recolectar y compilar información en tablas esquematizadas, para usar instrumentos de medición (regla especial y transportador) y realizar operaciones aritméticas con los datos recolectados para el cálculo de las razones trigonométricas de seno y coseno y el cálculo de áreas cuadradas. Además, de las respuestas dadas a las preguntas 2, 3 y 5, el 67% de los grupos pudo concluir y conjeturar adecuadamente aspectos relevantes asociados a la primera identidad trigonométrica fundamental.

Por otra parte, la pregunta 6 fue contestada por el 67% de los grupos de estudiantes de forma incorrecta, evidenciando que la mayoría tuvieron dificultades para concluir la interpretación de la primera identidad trigonométrica Pitagórica fundamental utilizando otros registros de representación de los objetos matemáticos (como lo son las representaciones simbólicas) diferentes a las representaciones en tablas esquematizadas y lenguaje natural escrito.

#### 4.1.2.2.5. Resultados cualitativos

El análisis cualitativo de la hoja de trabajo II es fundamental para el objetivo principal del presente trabajo, ya que dentro de las actividades y/o recursos que se utilizaron en las intervenciones con los estudiantes los resultados de esta hoja de trabajo será la que principalmente permita analizar y determinar los alcances, beneficios y desventajas del uso de material concreto para los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas. En consecuencia, se hace indispensable profundizar y reflexionar un poco más allá de las cifras obtenidas en los resultados cuantitativos para la presente hoja de trabajo, lo que implica realizar una revisión al detalle de las evidencias fotográficas tomadas, de los apuntes en notas de campo realizados durante la intervención y análisis de las respuestas dadas por los grupos de estudiantes a cada una de las preguntas y/o actividades planteadas.

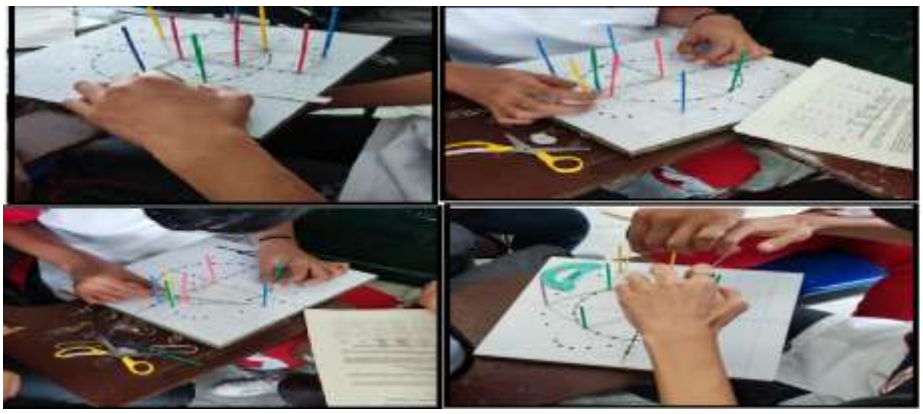
En este sentido, al revisar los apuntes de las notas de campo relacionados con las observaciones acerca de las reacciones producidas en los grupos de estudiantes al inicio de la actividad con material concreto, se observó que muchas fueron de asombro y/o confusión debido a que normalmente no estaban acostumbrados a utilizar este tipo de materiales manipulables físicos en la clase de matemáticas; tanto así que durante los primeros 10 – 15 minutos de la actividad con el material concreto se evidenció que al menos 6 de los 9 grupos de estudiantes tuvieron dificultades para iniciar con las construcciones geométricas que debían hacer con ayuda del material concreto (tabla trigonométrica), ya que no estaban acostumbrados a este tipo de manipulación física de los objetos matemáticos.

Sin embargo, los grupos de estudiantes después de ese tiempo de asimilación e interacción con el material, fueron capaces de realizar las construcciones geométricas físicas en el círculo trigonométrico dadas en las instrucciones, tomar las medidas requeridas en la construcción haciendo uso de la regla ampliada a escala 8cm : 1cm y el transportador y, finalmente consignar toda esa información en tablas esquematizadas (aquí se observa una trazabilidad y cambio de registro entre el sistema o registro de representación de los objetos matemáticos gráfico y tabular, ya que los estudiantes eran capaces de comunicar correctamente lo aprendido en un registro gráfico en forma de representación tabular sin inconvenientes).

A continuación, en la figura 13 se muestra como algunos de los grupos de estudiantes interactúan y utilizan el circulo trigonométrico para realizar las construcciones geométricas solicitadas, para posteriormente con ayuda de la regla especial y el transportador recolectar las medidas de las construcciones que luego les permitirán diligenciar las tablas de las preguntas 1 y 4 de la hoja de trabajo II.

**Figura 13.**

Collage de imágenes que evidencian el uso del círculo trigonométrico por parte de los estudiantes (material concreto).



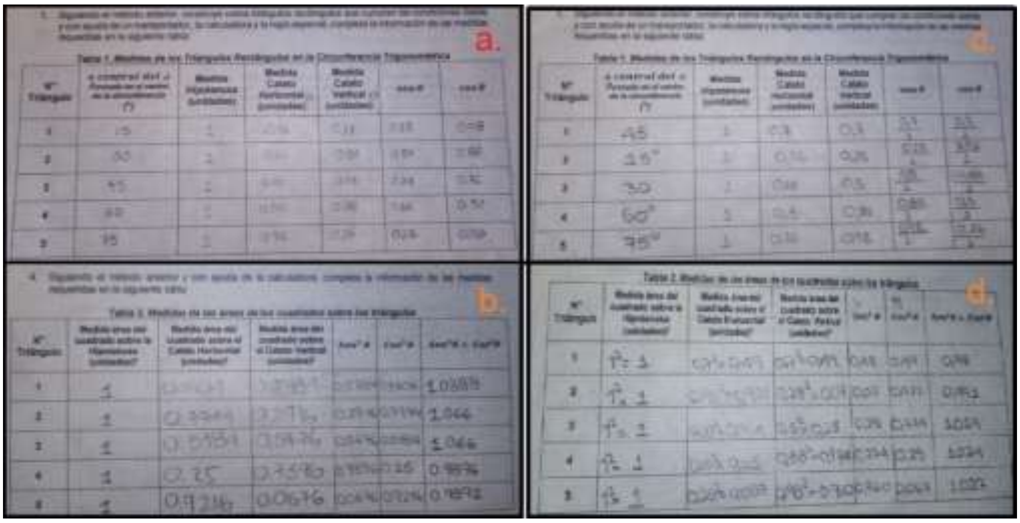
Por otro lado, de manera simultánea a la construcción de las figuras geométricas por parte de los grupos de estudiantes en la tabla trigonométrica, estos debían realizar mediciones de longitud, ángulo y áreas sobre dichas construcciones y consignar los valores obtenidos en las tablas de las actividades 1 y 4 de la hoja de trabajo II. Así pues, dentro de las notas de campo realizadas durante la intervención con material concreto, se tomó apuntes respecto a una situación muy particular que sucedió entre algunos estudiantes de diferentes grupos, ya que al finalizar la consignación de medidas en las tablas de las actividades 1 y 4 algunos trataron de intercambiar información con otros grupos para poder comparar si habían obtenido respuestas iguales y de esta forma tratar de validar sus respuestas; pero, para sorpresa de estos se encontraron que casi todos los grupos habían obtenido y consignado respuestas “diferentes” en las tablas, por lo que su pensamiento inicial fue mencionar que seguro les había quedado algo mal.

A causa de esto, particularmente los grupos de estudiantes 4 y 5 decidieron reconstruir las figuras y tomar de nuevo las medidas correspondientes a longitudes, ángulos y áreas para sorpresa de que al repetirlas obtuvieron de nuevo los mismos resultados que en la medición inicial. Sin embargo, el estudiante 11 perteneciente al grupo 4 al revisar y comparar al detalle las respuestas de su grupo y el grupo 5, pudo darse cuenta que las diferencias consistían en pequeñas diferencias decimales debida en su mayoría por discrepancias en las aproximaciones numéricas utilizadas, pero que al dejar de lado la no exactitud de igualdad en las respuestas, al compararlas se daba cuenta que eran muy similares y diferían en promedio por una cifra en las centésimas y otras veces en las milésimas de los números decimales obtenidos. Así, el estudiante 11 pudo dar claridad a su grupo y al grupo 5 de que sus cálculos y procedimientos estaban bien y que lo único que diferían eran en la exactitud de aproximación usada para algunas medidas y procedimientos aritméticos realizados.

A continuación, en la figura 14 se muestran los datos consignados en las tablas de la actividad 1 y 4 de la hoja de trabajo II, por los grupos 4 y 5 donde se logra evidenciar lo anteriormente mencionado. Además, la figura 14, a y b corresponden a las respuestas del grupo 4, mientras que c y d corresponden a las respuestas del grupo 5 dadas para la respuesta de las tablas de las actividades 1 y 4 respectivamente.

**Figura 14.**

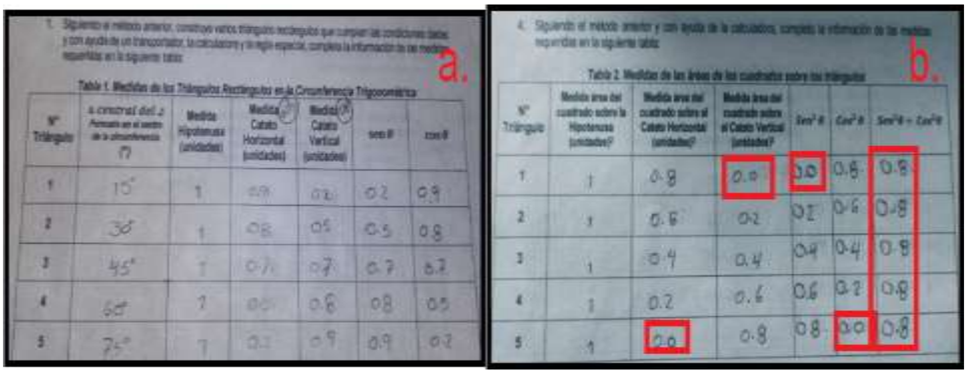
Datos recolectados correctamente en las tablas de las actividades 1 y 4 de la hoja de trabajo II, por los grupos de estudiantes 4 y 5.




Así pues, al comparar las respuestas dadas por los grupos 4 y 5 aunque no son exactamente iguales, ambas son correctas y difieren en aproximación decimal. Ahora bien, aunque esto parezca un detalle menor y los resultados cuantitativos correspondientes al trabajo con material concreto mostraran un panorama más que favorable con apenas un rendimiento desfavorable del 11%, se pudo determinar con base en lo anterior que los dos grupos que contestaron equivocadamente en la actividad de la tabla 4, realmente realizaron buena manipulación del material concreto y recolectaron medidas correctas; sin embargo, al revisar al detalle los valores que consignaron en la tabla esquematizada se pudo determinar que la dificultad de la equivocación radicó en problemas con la cantidad de cifras significativas usadas en la aproximación decimal y dificultades con el concepto de unidad y noción de la medida al cambiar de un registro métrico espacial a uno tabular.

**Figura 15**.

Respuestas recolectadas de las actividades 1 y 4 por el grupo de estudiantes 3.



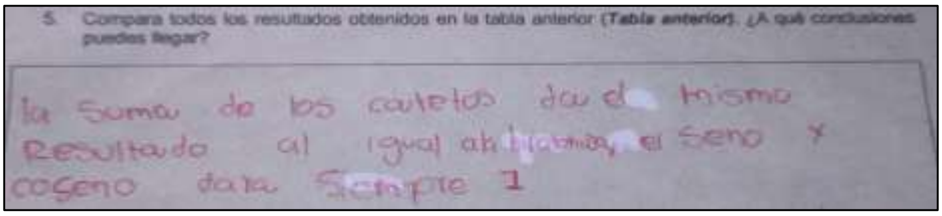
En la figura 15 se puede ver en a. y b. las respuestas que recolectaron el grupo de estudiantes 3 de las actividades 1 y 4 respectivamente de la hoja de trabajo II. Por un lado, al analizar las respuestas dadas por el grupo en la actividad 1 se evidencia que prefieren utilizar los valores de las medidas recolectadas en el círculo trigonométrico con aproximación en una cifra significativa decimal, por lo que a la hora de determinar los valores de seno y coseno del ángulo central estos difieren en su mayoría de forma leve con los valores reales y exactos, por lo que pudiera parecer que su metodología de aproximación es correcta.

No obstante, al analizar las respuestas dadas por el mismo grupo en la actividad 4 (dependientes de los datos recolectados en la actividad 1), se observa que la metodología de aproximación utilizada a una sola cifra significativa decimal ocasionó problemas para la adecuada realización de la actividad. Así, en la figura 15.b se identifica concretamente en los recuadros resaltados en color rojo que: i) los estudiantes realizan aproximaciones por defecto conduciéndolos a errores significativos que se convertirían en obstáculos para el aprendizaje del objeto matemático en cuestión; ii) al momento de registrar las mediciones realizadas físicamente en la tabla, hubo pérdida total de la noción y el concepto de unidad de medida al realizar el cambio en el sistema de representación, por lo que al realizar los cálculos de área en la tabla 4 con la información de la tabla 1 se llegó a resultados numéricos que no tenían sentido de acuerdo con lo realizado con material concreto. Lo anterior, es sustentado en la misma información suministrada por los estudiantes del grupo 3 durante la fase de socialización y formalización del objeto matemático (realizada al final de la actividad, de acuerdo con la planeación descrita en la metodología), pues dentro de las explicaciones que daban los estudiantes para sus respuestas estos afirmaron que el cálculo de la magnitud de algunas de las áreas de los cuadrados construidos no les daban exactamente 0,0 como compilaron en la tabla de la actividad 4 (ver figura 15.b) sino que obtenían valores como 0,04 unidades cuadradas y al desear aproximarlo por defecto a sólo una cifra decimal después de la coma quitaban el número 4 que les daba en las centésimas sin dimensionar que realmente la magnitud del área de algo que habían medido físicamente (polígonos cuadrados en la tabla trigonométrica) no podía dar como resultado cero.

En lo concerniente a las respuestas dadas por los grupos de estudiantes a las preguntas 2, 3 y 5 en las que se debe lograr dar una conjetura de acuerdo con los resultados compilados en las tablas de las preguntas 1 y 4, se evidenció tanto en las respuestas escritas como en la fase de socialización y formalización del objeto matemático que, en algunos casos los grupos de estudiantes que contestaron incorrectamente si tenían ideas acertadas sobre las conjeturas que debían realizar, pero a la hora de escribirlo o redactarlo en lenguaje natural no eran capaces de redactar la idea de manera que correspondiera con sus ideas (intencionalidad comunicativa) debido a que no usaban los términos correctos para referirse a determinadas figuras geométricas o características específicas de estas. Por ejemplo, en la figura 16 se muestra la respuesta a la pregunta 5 de la hoja de trabajo II dada por el grupo 9, la cual fue contabilizada como incorrecta dentro del análisis cuantitativo debido a que técnicamente lo que se escribió no es válido; sin embargo, durante la etapa de socialización y formalización del objeto matemático en cuestión al final de la aplicación de la hoja de trabajo II, los estudiantes del grupo 9 manifestaron y explicaron correctamente de forma verbal lo que intentaron decir en la conjetura, lo cual si resultaba válido y correcto a diferencia de la respuesta escrita dada inicialmente.

**Figura 16.**

Respuesta incorrecta daba por el grupo 9 respecto a la pregunta 5 de la hoja de trabajo II.




En la figura anterior, se puede evidenciar que técnicamente la respuesta dada es incorrecta. A pesar de esto, durante la fase de socialización y formalización del objeto matemático el grupo 9 explicó que cuando escribieron “la suma de los catetos da el mismo resultado al igual a la hipotenusa” se referían a que al sumar las magnitudes de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos darían igual resultado que el cuadrado construido sobre la hipotenusa (según lo reforzado y trabajado en la hoja de trabajo I), y que cuando escribieron “… el seno y coseno dará siempre 1” se referían al valor del seno y coseno cuadrado, ya que a partir de lo consignado en la tabla 4 de la hoja de trabajo II lograron identificar que estás medidas correspondían con las de las áreas de los cuadrados mencionados anteriormente.

En conclusión, las dificultades en los procesos de aprendizaje para la comprensión y entendimiento de la primera identidad pitagórica fundamental por parte de los estudiantes radica (en cierta parte) en la poca habilidad que tienen para comunicar su conocimiento matemático en un sistema de representación que sea diferente al sistema de representación algebraico (sistema tradicional); a esta misma conclusión se llega al analizar las respuestas dadas en la pregunta 6 por parte de los grupos, evidenciando dificultades para establecer conversiones de un registro en lenguaje natural escrito a otro registro algebraico y viceversa.

#### 4.1.2.2.6. Comentarios finales

Durante la implementación y análisis de los resultados obtenidos con la hoja de trabajo II de forma cuantitativa y cualitativa, se destacan los siguientes aspectos.

- ✓ Los resultados obtenidos por los estudiantes en general con la hoja de trabajo II (construida alrededor del material concreto diseñado con autoría propia), fueron favorables ya que en promedio se obtuvo un rendimiento porcentual del 69% en las actividades de recolección de datos en tablas esquematizadas y escritura o formulación de conjeturas. Además, como dato particular en las actividades 1 y 4 de la hoja de trabajo II que estaban ligadas directamente al uso e interacción de los estudiantes con el material concreto (tabla trigonométrica), los resultados cuantitativos reflejaron un rendimiento mucho más favorable obteniendo en promedio un 89% del rendimiento grupal.
- ✓ Las dificultades obtenidas por los estudiantes que conjeturaron de forma incorrecta son consecuencia directa de: i) no están acostumbrados a utilizar registros o sistemas de representación diferentes al registro algebraico, el cual es muy utilizado dentro de la enseñanza tradicional de las matemáticas en la educación media, ii) consecuencia de lo anterior, tienen dificultades para realizar conversiones de representaciones de un tipo de registro a otro; particularmente entre registros tabulares, algebraicos y el lenguaje natural escrito. Todo lo anterior se puede reflejar como conclusiones directas del análisis cualitativo.
- ✓ Aunque es cierto que los resultados obtenidos con el material concreto fueron aceptables, también es una realidad que en este caso el uso de material concreto (aunque con mejores resultados que la metodología de enseñanza tradicional de las matemáticas) tenía algunas limitantes en cuanto a la mediación instrumental que ofrecía con el objeto matemático de la primera identidad trigonométrica fundamental, puesto que el material diseñado y de autoría propia sólo permitía la comprobación de la primera identidad para un número limitado de casos (aunque no corto), por lo cual, el proceso de formulación de conjeturas resulta un factor complementario fundamental al

uso de material concreto, para los procesos de aprendizaje ligados a la construcción del conocimiento de las identidades por parte de los estudiantes.

- ✓ Ahora bien, respecto a las construcciones geométricas realizadas sobre la tabla trigonométrica (material concreto) por parte de los estudiantes, cabe destacar que a pesar de la falta de una instrucción relacionada con el cuadrante en que debía construirse el triángulo rectángulo al interior de la circunferencia unitaria, todos los grupos de estudiantes lo construyeron en el primer cuadrante del plano, aunque en los demás cuadrantes también fuese posible.
- ✓ El uso del material concreto en la hoja de trabajo No 2, logró un impacto positivo en los participantes, y esto lo podemos evidenciar en las entrevistas realizadas a los estudiantes No 2 y 16 (anexo f), al indicar como se puede aprender a partir del uso de herramientas análogas, sin necesidad de que el docente se vea como el poseedor del concepto y simplemente lo “transfiera” a través de una explicación directa que el estudiante plasma en sus cuadernos, a lo que ellos llaman “monotonía” o “lo usual” generándose un método tradicional, Es decir, los diferentes registros de representación implementados permitieron captar el interés y en palabras de estudiante N0. 2 “a ¿Cómo aprender?”, aspecto que se puede ver como un aprendizaje a partir de la mediación con el objeto.

#### 4.1.2.3. Hoja de trabajo III

##### 4.1.2.3.1. Presentación de la hoja de trabajo III

En la actividad de la hoja de trabajo III se trabaja específicamente con la segunda identidad trigonométrica pitagórica, en la cual se presentan situaciones de manipulación con tecnología digital (GeoGebra) a manera de intervención exploratoria.

Así, el aplicativo digital diseñado para las actividades es de autoría propia y, consiste en un triángulo rectángulo con uno de sus catetos tangente y otro cateto colineal con el eje x (radio circunferencia), además, la hipotenusa secante a un punto de una circunferencia que tiene uno de sus vértices (formando un ángulo agudo con el cateto colineal) en el centro de dicha circunferencia. Igualmente, dicho ángulo y los catetos pueden ser modificados (magnitud) a través de unos deslizadores que permitían variar las magnitudes de los lados conformados por el triángulo rectángulo con sus respectivos cuadrados. Sin embargo, los aplicativos se dividían en dos partes: el primero, permitía tener modificaciones en el ángulo, en la hipotenusa y en uno de los catetos. Y el segundo, permitía todo lo anterior y además agregar cambios en el cateto colineal con eje x (radio de la circunferencia).

Posteriormente, se realiza una toma de medidas de acuerdo con las variaciones que se realicen tanto en el primer y segundo aplicativo y se registran en una tabla de datos correspondiente a cada aplicación con la intención de identificar un patrón en los datos y así, lograr conjeturarlo.

#### 4.1.2.3.2. Objetivo.

La finalidad de la hoja de trabajo III es realizar una intervención exploratoria con GeoGebra, que presente a los estudiantes retos de aprendizaje significativo, mediante el planteamiento y solución de situaciones de manipulación de herramientas digitales, con la intencionalidad de propiciar en ellos procesos de conjeturas vinculadas a la segunda identidad trigonométrica.

#### 4.1.2.3.3. Condiciones de aplicación.

Al igual, que en la hoja de trabajo II, se dejó un espacio adecuado para que los estudiantes plasmaran sus respuestas en lenguaje natural y/o en tablas esquematizadas; sin embargo, se enfatizó en ello al momento de exponer las instrucciones para responder las actividades con ayuda de material digital.

La actividad se contestó de manera grupal (grupos de tres integrantes, conformados por los mismos integrantes que trabajaron en la hoja de trabajo I y II), en un tiempo de 100 minutos, y fue aplicada al grupo experimental, el cual está formado por 11 hombres (40,7%) y 16 mujeres (59,3%) del grado 10, con edades que oscilan entre los 14 y los 17 años.

#### 4.1.2.3.4. Resultados cuantitativos

La siguiente tabla evidencia los resultados generales obtenidos por los 9 grupos de estudiantes de grado decimo en la tercera hoja de trabajo.

**Tabla 13.**

Resultados de la hoja de trabajo II.

| Grupo No. | Estudiantes No. | Pregunta No. | | | | | Total | Promedio (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | - | - |
| 1 | 1, 2 y 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 2 | 4, 5 y 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 80 |
| 3 | 7, 8 y 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 4 | 10, 11 y 12 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 60 |
| 5 | 13, 14 y 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 6 | 16, 17 y 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 7 | 19, 20 y 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 80 |
| 8 | 22, 23 y 24 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 60 |
| 9 | 25, 26 y 27 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 80 |
| Total | | 9 | 7 | 9 | 6 | 7 | - | - |
| Promedio | | 100% | 78% | 100% | 67% | 78% | 4,22 | 89% |

En términos generales, se puede concluir que en la pregunta que más porcentaje de grupos de estudiantes respondió incorrectamente es la 4 con un promedio de 67%, que equivale a 3 grupos de estudiantes, a pesar de que el rendimiento promedio es alto (89%). Por otra parte, las preguntas que más grupos de estudiantes respondieron correctamente son las preguntas 1, 3 y 2, 5 con un promedio de 100% y 78%, que equivale a 9 y 7 grupos de estudiantes respectivamente. Así, para ilustrar lo anterior se realiza un análisis de acuerdo con la agrupación de las preguntas según la intencionalidad pedagógica a la que se hace referencia en la siguiente tabla.

**Tabla 14.**

Clasificación de las preguntas y/o actividades de la hoja de trabajo III

| Preguntas | Categoría | $\bar{C}$ | $\%\bar{C}$ | $\bar{I}$ | $\%\bar{I}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 y 3 | Actividades con Material Digital | 18 | 100 | 0 | 0 |
| 2, 4 y 5 | Conjeturar | 20 | 74,1 | 7 | 25,9 |
| Promedio Total | | 19 | 87 | 3 | 13 |

*Nota*: $\bar{C}: promedio\ de\ correctas\ y\ \bar{I}: promedio\ de\ incorrectas$

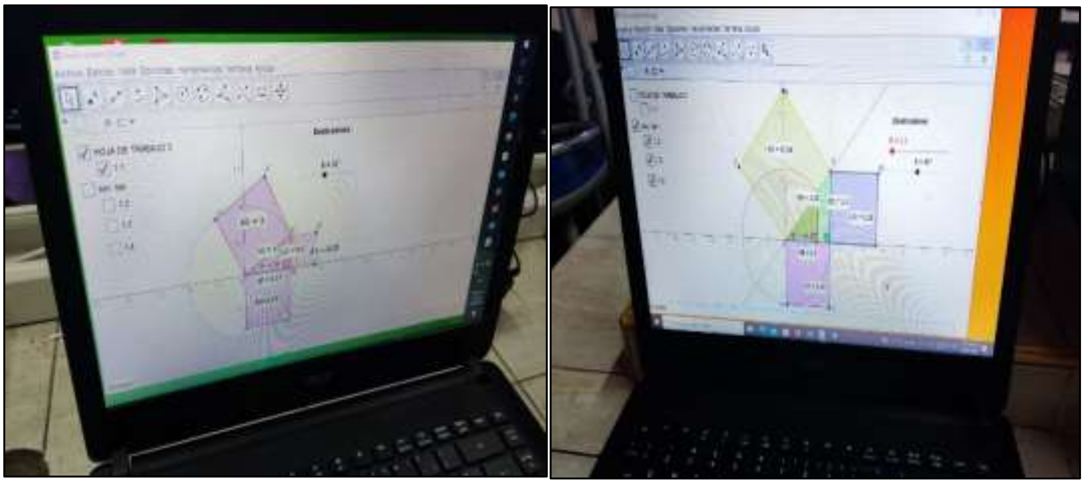
En la tabla 14**,** se puede observar en la agrupación de material digital que las respuestas dadas por los grupos conformados por los estudiantes fue del 100%, es decir, lo hicieron correctamente demostrando altas habilidades para recolectar y compilar información en tablas esquematizadas, para manipular los diferentes deslizadores y visualizar las medidas generadas, para posteriormente realizar operaciones aritméticas con los datos recolectados para el cálculo de las razones trigonométricas de tangente y secante, asimismo el cálculo de las áreas cuadradas. Sin embargo, en las respuestas dadas a las preguntas 2, 4 y 5 se obtuvo que el 74,1% de los grupos pudo concluir y conjeturar adecuadamente aspectos relevantes asociados a la segunda identidad trigonométrica fundamental, respecto al análisis de información consignada por los grupos en las tablas esquematizadas, utilizando el lenguaje natural (escrito).

**4.1.2.3.5. Resultados cualitativos.**

La información cualitativa es indispensable abordarla en la investigación, puesto que, los datos cuantitativos no son suficientes para un estudio detallado. Por tal razón, las representaciones proporcionadas por los estudiantes a cada uno de los problemas planteados en la hoja de trabajo III, se analizarán categóricamente según la agrupación a la que pertenecen (tabla 13). A continuación, se muestran algunas evidencias del trabajo realizado en la sala de cómputo con el material digital (GeoGebra). Sin embargo, cabe aclarar que las imágenes plasmadas en este trabajo, solo reflejan directamente las actividades realizadas, y así, salvaguardar la identidad de los estudiantes.

**Figura 17.**

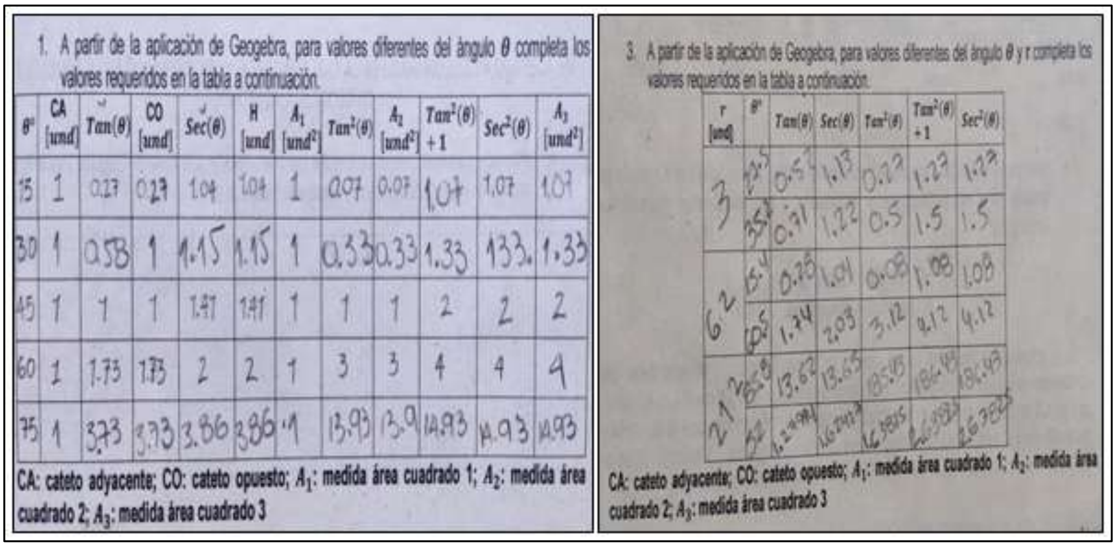
Trabajo de los estudiantes hoja de trabajo II (actividad 1 y 3).



Por tanto, particularmente en la agrupación de material digital (tabla 17), se evidencia que los grupos de estudiantes conformados, logró (100%) a partir de las aplicaciones en GeoGebra, consignar en su totalidad en una tabla esquematizada, diferentes valores de catetos, hipotenusa, áreas de los cuadrados formados por dichos lados, ángulos y simultáneamente la secante y la tangente del ángulo, sus respectivos cuadrados y la suma de ellos (Figura 18). Sin embargo, como dato curioso, los estudiantes a pesar de tener vía libre para movilizar el triángulo rectángulo en la aplicación continuaban realizando todas las medidas en el primer cuadrante, al igual, que lo sucedido en la hoja de trabajo II con el material concreto.

**Figura 18.**

Datos recolectados correctamente en las tablas de las actividades 1 y 3 de la hoja de trabajo III, por los grupos de estudiantes 6 y 2 respectivamente.



1. A partir de la aplicación de Geogebra, para valores diferentes del ángulo $\theta$ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

| $\theta°$ | CA [und] | $Tan(\theta)$ | CO [und] | $Sec(\theta)$ | H [und] | $A_1$ [und²] | $Tan^2(\theta)$ | $A_2$ [und²] | $Tan^2(\theta)+1$ | $Sec^2(\theta)$ | $A_3$ [und²] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 0.27 | 0.27 | 1.04 | 1.04 | 1 | 0.07 | 0.07 | 1.07 | 1.07 | 1.07 |
| 30 | 1 | 0.58 | 1 | 1.15 | 1.15 | 1 | 0.33 | 0.33 | 1.33 | 1.33. | 1.33 |
| 45 | 1 | 1 | 1 | 1.41 | 1.41 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 60 | 1 | 1.73 | 1.73 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 75 | 1 | 3.73 | 3.73 | 3.86 | 3.86 | 1 | 13.93 | 13.9 | 14.93 | 14.93 | 14.93 |

CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; $A_1$: medida área cuadrado 1; $A_2$: medida área cuadrado 2; $A_3$: medida área cuadrado 3

3. A partir de la aplicación de Geogebra, para valores diferentes del ángulo $\theta$ y r completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

| r [und] | $\theta°$ | $Tan(\theta)$ | $Sec(\theta)$ | $Tan^2(\theta)$ | $Tan^2(\theta)+1$ | $Sec^2(\theta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 27.5 | 0.52 | 1.13 | 0.27 | 1.27 | 1.27 |
| | 35 | 0.71 | 1.22 | 0.5 | 1.5 | 1.5 |
| 6.2 | 15.4 | 0.28 | 1.04 | 0.08 | 1.08 | 1.08 |
| | 60.5 | 1.74 | 2.03 | 3.12 | 4.12 | 4.12 |
| 21.2 | 85.8 | 13.62 | 13.65 | 185.5 | 186.49 | 186.49 |
| | 89 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |

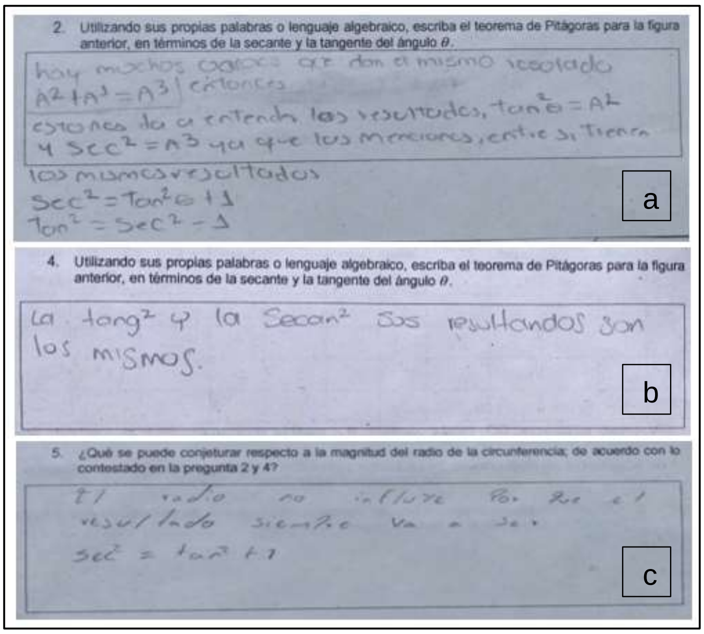
CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; $A_1$: medida área cuadrado 1; $A_2$: medida área cuadrado 2; $A_3$: medida área cuadrado 3

Lo anterior descrito, dio paso a los grupos de estudiantes para realizar las conjeturas de acuerdo a los datos registrados en las tablas esquematizadas, logrando en promedio el 74,1%, dar cuenta del fenómeno gráfico y numérico (GeoGebra y tablas esquematizadas), acerca de la segunda identidad trigonométrica, plasmando respuestas de manera algebraica y en lenguaje natural, aspectos relevantes como la identificación de un patrón numérico que daba como resultado la segunda identidad pitagórica, además, algunos grupos (33,3 %) construyeron otra identidad (Figura 19a) a partir de los datos organizados en las tablas, demostrando, una movilización cognitiva significativa, puesto que, fueron más allá de la intencionalidad de las preguntas de conjetura.

Aunque, cabe resaltar que los grupos que no lograron contestar adecuadamente, fue a causa de pasar por alto información relevante ante lo registrado y visualizado, ya que omitir símbolos o expresiones matemáticas cambia información en la codificación del mensaje que se quiere expresar, a pesar de que esos grupos (figura 19b) de estudiantes al momento de la socialización lo hacían de manera correcta.

**Figura 19.**

Respuestas de las preguntas 2, 4 y 5 de la hoja de trabajo III.




Nota: Respuesta correctas (a y c) de los grupos No. 1 y 3, respectivamente, además respuesta incorrecta (b) del grupo No. 4.

Finalmente, los grupos de estudiantes construyeron una conjetura más generalizada de la identidad trabajada, utilizando palabras como siempre, no influye, no afecta y a pesar de que varía entre otros, como una forma para dar cuenta de que el radio puede tener valores diferentes, pero la identidad se conserva (Figura 19c).

#### 4.1.2.2.1. Comentarios finales.

Los resultados obtenidos en esta hoja de trabajo son satisfactorios, a pesar de continuar manifestándose aspectos erróneos asociados a dificultades para realizar conversiones de representaciones de un tipo de registro a otro. Además, a pesar de haber mencionado en la formalización de la hoja de trabajo II, lo de hacer uso de otros cuadrantes para lograr generar una visualización no convencional, con todo y eso, los grupos de estudiantes siguieron registrando datos pero esta vez en un contexto digital en el primer cuadrante, a lo que, indagando sobre ello se llegaba a la conclusión que hacerlo a través de otros cuadrantes simplemente "complicaría" un poco la visual presente en el aplicativo de GeoGebra al cambiar de posición los lados del triángulo.

No obstante, lo anterior, en la dinámica de la clase permitió fomentar la discusión de las ideas y la confrontación de resultados, coadyuvando con ello en el desarrollo de concebir que un objeto a pesar de cambiar su posición, la características y propiedades se siguen conservando.

# CAPITULO V

## 5. Conclusiones y recomendaciones

En el siguiente capítulo se exponen las conclusiones y recomendaciones finales del presente trabajo. En este sentido, el capítulo estará dividido en dos partes: en la primera, se contestarán las preguntas de investigación (central y especificas) a modo de conclusión y, en la segunda, se realizarán una serie de recomendaciones finales que surgieron como parte del proceso y análisis de las actividades implementadas en el trabajo actual y no fueron inicialmente consideradas en el estudio.

### 5.1. Conclusiones y recomendaciones

#### 5.1.1. Respuesta a la Pregunta Central del estudio

¿Qué identifica las principales características que tiene un proceso de aprendizaje con la mediación complementaria de GeoGebra y material concreto, que contribuyan a la construcción e identificación de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales por parte de estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II?

Durante la implementación complementaria de material concreto, GeoGebra y las hojas de trabajo se identificó algunas características importantes que favorecen el aprendizaje de la trigonometría y que permitieron particularmente la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II, entre estas se destaca la dinámica y capacidad de interacción que permitían los materiales manipulables (concreto y GeoGebra) entre el objeto matemático y los estudiantes, ya que esto es algo muy poco inusual en la enseñanza de las matemáticas a este nivel, donde las representaciones de los objetos matemáticos normalmente se registran en representaciones algebraicas, lo cual es muy característico de la enseñanza tradicional.

En consecuencia, se podría mencionar también como otra característica el hecho de que el uso de material concreto y GeoGebra resulta ser una innovación didáctica en el campo de las matemáticas, incentivando a los estudiantes al encender una pequeña chispa de motivación y logrando una ruptura con la metodología tradicional que les puede resultar poco atractiva, intangible y en ocasiones descontextualizada. En este sentido, no se pretende afirmar que el uso conjunto de material concreto y GeoGebra es la “mejor” innovación para favorecer los procesos de aprendizaje en matemáticas (solución a todos los problemas del aprendizaje de la trigonometría), simplemente se trata de dar a entender que a pesar de que es una innovación más, particularmente está en el contexto de los estudiantes del colegio Juan Pablo II (teniendo en cuenta todas las limitaciones en acceso a recursos) y dio resultados que fueron muy favorables para alcanzar los objetivos de aprendizaje asociados a la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, todo esto sustentado en las opiniones de los estudiantes recolectadas de las entrevistas clínicas, los comentarios finales del análisis de resultados, las notas de campo y sobre todo en el buen desempeño (cuantitativo) de los estudiantes, obteniendo un rendimiento de 89%, 69% y 89% en las hojas de trabajo I, II y III respectivamente.

También, se destaca la formulación de actividades en equipos que promovía el aprendizaje colaborativo, en el que a partir de la interacción entre pares los estudiantes pueden intercambiar ideas, inquietudes, certezas y opiniones y, de esta manera alcanzar objetivos de aprendizaje de forma conjunta. Es decir, en un grupo un estudiante alcanzaba su objetivo de aprendizaje siempre y cuando todos los involucrados en el grupo también lo alcanzaran.

Por otra parte, se destaca también como característica la formulación de preguntas guías consignadas en las hojas de trabajo, las cuales mediaban, regulaban y direccionaban el uso que los estudiantes hacían del material concreto y de GeoGebra, con el objetivo de establecer un objetivo de aprendizaje claro y específico para cada actividad exploratoria. Así, las preguntas orientadoras consignadas en las hojas de trabajo deben tener dos rasgos distintivos: el primero, es que permitan la menor intervención posible del docente, esto con el objetivo de fortalecer el aprendizaje autónomo a través del material manipulable, y la segunda es que algunas de las preguntas se formularan de tal modo que promovieran los procesos de conjetura y comprobación, con la finalidad de que el estudiante accediera al conocimiento matemático por sus propios medios, producto de habilidades superiores del pensamiento y la interacción con los materiales manipulables que representaban física o digitalmente los objetos matemáticos.

Finalmente, se puede mencionar otra característica principal, el hecho de que independientemente los materiales implementados, sean manipulativos digitales o concretos, estos favorezcan y permitan a los estudiantes realizar y visualizar múltiples representaciones de los objetos matemáticos en diversos sistemas y registros semióticos. Lo anterior, con el propósito de que los estudiantes de la IE Juan Pablo II puedan acceder a niveles de comprensión superiores, a partir de múltiples procesos de "amplificación" del objeto matemático que mediados por las herramientas (material concreto y GeoGebra), finalmente los conlleven a realizar procesos cognitivos de reorganización conceptual.

### 5.1.2. Respuestas a las Preguntas Auxiliares del Estudio

#### 5.1.2.1. Respuesta a la Primera Pregunta Auxiliar del Estudio

¿Qué define una estrategia didáctica para implementar actividades de aprendizaje en el aula que utilicen en conjunto, actividades diseñadas en material concreto (propias de los autores) y GeoGebra (validadas por otros autores) para que los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II logren construir e identificar las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales?

A partir de la experiencia adquirida durante la aplicación y análisis de los resultados de las actividades en el presente trabajo, se puede afirmar que una adecuada estrategia didáctica que implemente de forma conjunta el uso de material concreto y de GeoGebra para el aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas se debe caracterizar en primer lugar, por ser coherente con el contexto de la IE y de los estudiantes, además de tener en cuenta la planificación curricular, es decir, tener un objetivo de aprendizaje concreto sin desconocer las limitantes del contexto; en el caso del presente trabajo, el objetivo de aprendizaje estaba directamente ligado al aprendizaje significativo de las identidades pitagóricas por parte de los estudiantes de la IE Juan Pablo II.

En segundo lugar, se deben caracterizar por demostrar desde los procesos de enseñanza una planificación consciente, reflexiva, sistémica y bien estructurada, acorde con el objetivo o propósito de aprendizaje; además, toda esta planificación se debe evidenciar a partir de los métodos, técnicas y actividades que se planteen en el aula a los estudiantes. Por ejemplo, en el presente trabajo la estrategia didáctica implementada para favorecer los procesos de aprendizaje asociados de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales se caracterizó por promover el aprendizaje colaborativo y autónomo (en grupos de tres estudiantes), utilizando como técnica aprendizaje, el planteamiento de situaciones problemas que requieren una solución y de formulación de preguntas a modo de conjetura; todo consignado en una hoja de trabajo, la cual regulaba, estructuraba, concientizaba y mediaba las actividades que los estudiantes debían realizar con ayuda de material concreto y GeoGebra para alcanzar el objetivo de aprendizaje.

Por último y no menos importante, una estrategia didáctica en la cual se implemente actividades de aprendizaje en el aula que utilicen en conjunto, actividades diseñadas en material concreto (propias de los autores) y GeoGebra con la finalidad de alcanzar un aprendizaje significativo de las identidades pitagóricas trigonométricas fundamentales, se debe caracterizar por promover la interacción entre el objeto matemático y los estudiantes inmiscuidos o involucrados, dotar de sentido (en contexto) al objeto matemático para los estudiantes que desean aprender, promover estrategias de autoevaluación, coevaluación y evaluación formativa y finalmente y muy importante, ser estrategias que despierten el interés y motivación por aprender. Lo anterior, fue un factor fundamental en la estrategia didáctica que se usó para obtener en términos generales, resultados cuantitativos y cualitativos favorables en el presente trabajo, los cuales evidenciaron la facilitación en los procesos de aprendizaje asociados a las identidades pitagóricas en los estudiantes de la IE Juan Pablo II.

#### 5.1.1.2. Respuestas a la Segunda Pregunta Auxiliar del Estudio

¿Qué resultados arroja la aplicación de una estrategia didáctica que permita fortalecer las múltiples representaciones de las identidades pitagóricas fundamentales en los estudiantes del grado décimo de la IE Juan Pablo II, usando GeoGebra y material concreto de forma conjunta**?**

Con base en el análisis de los resultados (cualitativos y cuantitativos) correspondientes a la aplicación de las actividades exploratorias en cada una de las hojas de trabajo diseñadas en el presente estudio, se concluye que el uso de forma conjunta de material concreto y GeoGebra como estrategia didáctica, favorece los procesos de aprendizaje de los estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II asociados a las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, debido a que la diversidad de los materiales manipulativos usados permitió a los estudiantes estudiar el objeto matemático en cuestión, desde diferentes registros y sistemas de representación, además de requerir y permitir la realización de actividades cognitivas superiores de conversión entre diferentes registros de representación (tabulares, gráficos, numéricos, métricos, espaciales y algebraicos). Lo anterior, se evidencia y se respalda con claridad en los resultados cuantitativos obtenidos en las actividades aplicadas, las cuales muestran un rendimiento favorable del 89%, 69% y 89% en las hojas de trabajo I, II y III respectivamente.

De igual manera, el uso de material concreto y GeoGebra basado en el uso de las múltiples representaciones despertó en los estudiantes de la IE Juan Pablo II interés y motivación por el aprendizaje de las matemáticas y de la trigonometría en particular (tal cual como quedó consignado en los comentarios finales de la hoja de trabajo I y las entrevistas clínicas en el Anexo F); de ahí el hecho que esta mediación instrumental complementaria les permitiera alcanzar una mayor profundización conceptual en la temática de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales. Además, la actividad cognitiva de representar y convertir las representaciones del mismo objeto matemático en diferentes registros por medio de la exploración con el material manipulativo (concreto y GeoGebra), generó una cercanía con el concepto permitiendo a los estudiantes alcanzar un aprendizaje significativo.

Ahora bien, se hace necesario mencionar que, aunque el aprendizaje significativo alcanzado por los estudiantes es en gran medida consecuencia de la mediación instrumental que el material concreto y GeoGebra permiten al estudiante con el objeto matemático; también es importante destacar que estos materiales manipulativos por si solos no hubiesen logrado que los estudiantes de la IE Juan Pablo II alcanzaran un profundo conocimiento del objeto matemático, por lo que además de resaltar la importancia de la mediación instrumental de estos materiales manipulativos (herramientas) en el aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, también es fundamental resaltar el papel que desempeñaron las preguntas consignadas en cada una de las hojas de trabajo que se caracterizaron por ser estructuradas, direccionadas, específicas, y además sirvieron de guía y mediación en la tríada conformada por el estudiante, las herramientas (material concreto y GeoGebra) y el objeto matemático.

A manera de conclusión, se puede afirmar que no sólo el uso complementario de material concreto y GeoGebra favoreció y fortaleció las múltiples representaciones de las identidades pitagóricas fundamentales, también influyeron las preguntas estructuradas a manera de conjetura que se consignaron en cada una de las hojas de trabajo, las cuales buscaban delimitar y dirigir las actividades cognitivas, de exploración, interacción y uso que los estudiantes realizaban sobre el material manipulativo. Así, en relación con las metáforas de amplificación y reorganización conceptual que plantea Moreno (2002), y que fueron definidas y explicadas a detalle en el marco conceptual del presente trabajo, se evidenció en las intervenciones que el material manipulativo usado de forma complementaria permitió a los estudiantes en una primera fase “amplificar” el objeto matemático a partir de facilitar las representaciones casi que simultaneas y múltiples de dicho objeto; pero al final, fueron las preguntas (diseñadas en las hojas de trabajo) estructuradas a manera de conjetura quienes en una segunda fase permitieron alcanzar en los estudiantes la “reorganización conceptual” de las identidades trigonométricas fundamentales, evidenciando un proceso de pensamiento complejo o actividad cognitiva superior mediante conversiones o cambios de registro de las representaciones del objeto matemático.

#### 5.1.1.3. Respuestas a la Tercera Pregunta Auxiliar del Estudio

¿Qué ventajas y desventajas se obtienen, del uso conjunto de material concreto y de GeoGebra en la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales, luego de la aplicación de una estrategia didáctica en estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II?

Inicialmente, respecto a las ventajas del uso conjunto de material concreto y GeoGebra, se logró evidenciar en la fase de implementación y análisis de las actividades que facilita y favorece los procesos de aprendizaje y la construcción del objeto matemático en la mente del estudiante, el aprendizaje significativo a través de las múltiples representaciones de los objetos matemáticos, el aprendizaje autónomo, las habilidades de autogestión y de manejo del tiempo. Además, el material manipulable utilizado de forma complementaria (GeoGebra y concreto) junto con las preguntas mediadoras y estructuradas de las hojas de trabajo, ejercieron un rol mediador entre el estudiante y el objeto matemático (identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales).

En este sentido, la utilidad del uso de GeoGebra y material concreto en las actividades aplicadas, no fue restringida a la mera comprobación y refuerzo de temas ya “aprendidos” o vistos, como fue el caso de las actividades con recortables y en GeoGebra diseñadas en la hoja de trabajo I para fortalecer las debilidades alrededor del teorema de Pitágoras (evidenciadas en el diagnostico aplicado a los estudiantes); sino que también su utilidad principal radicó en ser usadas como herramientas de exploración e interacción para que los estudiantes pudieran construir nuevos conocimientos de forma autónoma (las identidades trigonométricas Pitagóricas fundamentales) mediante la escritura y planteamiento de conjeturas guiados por preguntas estructuradas en las hojas de trabajo. Además, esta metodología de aprendizaje para la trigonometría significó una forma diferente a la que normalmente se ofrece desde la enseñanza tradicional de las matemáticas y en especial de la trigonometría. En consecuencia, esto influyó positivamente en la motivación, prejuicios e interés por su propio aprendizaje, en los estudiantes de la IE Juan Pablo II, lo cual está sustentado a partir del análisis cualitativo de cada una de las hojas de trabajo y de la información recolectada en las notas de campo y en las entrevistas clínicas realizadas a los estudiantes. Un ejemplo claro de ello es lo mencionado por el estudiante No. 22 (anexo f, entrevista # 2), al indicar que la tecnología y el material concreto las ve como una buena opción, para salir de lo tradicional, porque a través de las actividades se aprende a ¿Cómo aprender? y, a tener el conocimiento de manera diferente. Por tanto, el estudiante resalto la importancia de ambas herramientas y deja ver una necesidad de implementar en la institución en las clases de matemáticas métodos significativos de aprendizaje.

Finalmente, adicional y complementario a lo anteriormente mencionado, hay que afirmar como ventaja que el uso adecuado y conjunto de material concreto y GeoGebra permite alcanzar en menos tiempo y de una forma más dinámica los objetivos de aprendizaje en matemáticas.

Por otra parte, respecto a las desventajas del uso conjunto de material concreto y GeoGebra en la construcción de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales hay que mencionar que la planeación de actividades requiere de la inversión de mucho tiempo por parte del docente. Así, en el caso del uso de material concreto a este nivel (trigonometría de grado décimo), los materiales ya diseñados son casi inexistentes, costosos y poco productivos por lo cual en el presente trabajo se tuvo que diseñar un material concreto manipulable de autoría propia, lo cual requirió de la inversión de mucho tiempo en el diseño y materialización de la idea. Aunque, es importante mencionar que al estar elaborado en madera MDF la vida útil del material concreto diseñado puede variar entre 5 y 10 años, o hasta ampliarse su utilidad en un margen de 10 a 15 años si se cuida de buena forma la madera; por tanto, la relación costo – beneficio (en años de utilidad) es rentable, pero será difícil que la inversión salga del bolsillo de los maestros (lo cual no debería suceder) o de las IE oficiales públicas.

Ahora bien, en lo que concierne al uso de GeoGebra durante la aplicación de las actividades que están asociadas al aprendizaje de las identidades pitagóricas trigonométricas fundamentales, se puede destacar como desventaja el hecho de que requieren una amplia preparación y estudio del docente para el dominio de la herramienta (sólo se hace énfasis en el dominio de la herramienta, porque en general GeoGebra Online posee muchos recursos construidos ya listos para implementarse).

Aunque, la principal desventaja (desde el punto de vista de los autores) radica en que GeoGebra no favorece el trabajo colaborativo, puesto que es un software que está diseñado para que una misma aplicación o recurso sólo se pueda modificar o usar desde un solo computador a la vez, lo que conlleva a que, en un grupo en tiempo real, sólo pueda estar un estudiante manipulando la aplicación y los demás queden relegados a observar y contribuir de forma indirecta (sin manipulación sobre el objeto matemático representado de forma digital).

Por último, en este apartado también es importante mencionar que bajo ninguna circunstancia con lo anteriormente dicho o en los objetivos del presente trabajo se pretende hacer alusión o referencia a que el material concreto es una herramienta más potente que GeoGebra; por el contrario, aquí se considera que los materiales digitales como este último tienen más bondades y facilidades para los procesos de aprendizaje en matemáticas, al permitir realizar movilizaciones y operaciones sobre los objetos matemáticos de una forma más rápida, dinámica y eficiente. No obstante, dentro del contexto particular de los estudiantes de grado décimo de la IE Juan Pablo II, existe un acceso limitado a herramientas computacionales por lo que el material concreto resultó en este caso ser un excelente complemento al material digital para fortalecer los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas con una estrategia didáctica basada en la innovación y el fortalecimiento de las múltiples representaciones.

## 5.2. Recomendaciones Finales.

A continuación, a partir de la experiencia obtenida con los datos recolectados cuantitativa y cualitativamente durante todo el proceso de implementación y análisis de las actividades del presente estudio, se realizan las siguientes sugerencias o recomendaciones finales:

Para los profesores; sobre todo para aquellos que aún no se animan por diversos factores a implementar recursos digitales en el aula en la enseñanza de las matemáticas en general (siempre y cuando sea posible, y su uso tenga una intencionalidad pedagógica bien definida, es decir un objetivo de aprendizaje), se recomienda inicialmente empezar a implementar actividades ya prediseñadas en software matemáticos como GeoGebra o simuladores interactivos como PhET, las cuales sólo requieran de pequeñas adaptaciones para poder ser llevadas al aula de clase. Lo anterior, es planteado con dos objetivos: el primero es que los docentes puedan ir comprobando paulatinamente los alcances de la tecnología en el campo educativo, se acostumbren a los cambios y dominen la herramienta, estableciendo en el proceso de adaptación un contraste entre las ventajas y desventajas de su uso en la enseñanza de las matemáticas, lo cual les permita reflexionar sobre sus prácticas pedagógicas y docente; el segundo, es porque al empezar por primera vez a implementar recursos y herramientas digitales en el aula de clases, se puede generar bastante desgaste y requerir de bastante inversión de tiempo por parte del docente, ya que si no se cuenta con el suficiente dominio sobre las herramientas para diseñar actividades desde cero, puede resultar un proceso bastante tedioso para el maestro.

También se recomienda la implementación de material manipulativo concreto en la enseñanza de las matemáticas durante la educación media particularmente (grado décimo y undécimo), sobre todo en aquellos colegios donde utilizar de forma constante recursos tecnológicos digitales para el aprendizaje de las matemáticas es muy complicado por factores sociales y económicos, a pesar de vivir actualmente en la llamada era de la tecnología, la información, la comunicación, el internet y la globalización. Además, respecto a los materiales manipulativos concretos se recomienda al docente evaluar la relación costo-beneficio, entendiendo el beneficio como lo favorable del material a los procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos y el costo, como el valor monetario, de tiempo y esfuerzo que pueda requerir sus diseño o materialización.

Por otra parte, para futuros investigadores se recomienda realizar un trabajo similar o igual, pero que, en este caso, el enfoque del objetivo central se aborde desde el punto de vista de los procesos de enseñanza, ya que en el presente trabajo la mediación complementaria de material concreto y GeoGebra para la construcción de las identidades trigonométricas se aborda fundamentalmente desde el aprendizaje (estudiantes) y no desde la enseñanza (docente).

Finalmente, como sugerencia para los investigadores y docentes en general, se recomienda reflexionar sobre la idea de que las herramientas por si solas no garantizaran el éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es necesario establecer actividades estructuradas con una metodología que regule y medie la relación entre la tríada: conocimiento, herramienta y estudiante. En este sentido, puede afirmarse que a pesar de que una herramienta pueda tener más bondades o beneficios que otra, si la actividad planteada no está bien estructurada no se van a alcanzar los objetivos de aprendizaje, sin importar que sea un recurso o herramienta digital o un material manipulativo concreto. Así, se recomienda a los investigadores y docentes que el uso de herramientas mediadoras para el aprendizaje de las matemáticas en general se adapte y elija atendiendo al contexto y a las realidades de los estudiantes, como fue el caso de los materiales manipulativos concretos y digitales utilizados en el presente trabajo.

**Referencias**


Ausubel, D., Novak., J, D., y Hanesian, H. (1983). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Alsina, C; Burgués, C y Fortuny, J. M.ª (1988) Materiales para construir la Geometría. Editorial Síntesis nº 11. ISBN: 84-7738-011-2

Azevedo, I. & Alves, F. (2019). Trigonometría e suas aplicações no GeoGebra: aulas experimentais com alunos do ensino médio. TANGRAM - Revista de Educação Matemática. 2. 102-115. 10.30612/tangram. v2i2.8335

Braz, Lúcia & Teixeira de Castro, Gustavo & Oliveira, Patrick. (2019). O GeoGebra no estudo das funções trigonométricas: uma experiência em um minicurso com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657. 8. 71-85. 10.23925/2237-9657. 2019.v8i1p071-085.

Cascallana, M. T. (1988). Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid, Santillana

Chen, H. T. (2006). A theory-driven evaluation perspective on mixed methods research. Research in the Schools, 13(1), 75-83. Recuperado de: http://www.unm.edu/~marivera/522%20Chen%20posted%20readings/Chen_Theory%20Driven%20Perspective%20Mixed%20Methods%20Research.pdf

Clements, D. H. (2002). Computers in early childhood mathematics. Contemporary Issues in Early Childhood, 3(2), 160-181.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1990). Constructivist learning and teaching. Arithmetic Teacher, 38(1), 34-35.

Cortés, M (2019). Las representaciones semióticas en la enseñanza de las ecuaciones lineales. Trabajo de grado para optar por el título de Maestría en Educación. Universidad Santiago de Cali - seccional Cali. Recuperado de https://repository.usc.edu.co/bitstream/20.500.12421/862/1/LAS%20REPRESENTACIONES%20SEMI%C3%93TICAS.pdf

D’Amore. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En Radford, L. y D’Amore, B. (eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. Relime, 9(4), pp. 177-196.

D’Amore B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. Duval, R. & Saenz Ludlow, A. (2016). Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Universidad

Distrital Francisco José de Caldas. 237-254. ISBN: 978-958-8972-31-2; e-ISBN: 978-958-8972-32-9.

D´Amore, Bruno (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, núm. Esp, 2006, pp. 177-195. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 1665-2436. https://www.redalyc.org/pdf/335/33509909.pdf

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. La matematica e la sua didattica, 1, 7-36.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B, 1,11-40.

Delgado, F. & Brenes, J. (2018). *Matemática en las civilizaciones: aritmética y álgebra en el antiguo Egipto y Babilonia.* En Serna, Luis Arturo; Pages, Daniela (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 373-378). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dockendorff, M., & Solar, H. (2018). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(1), 66–84.

Duval, R. *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Peter Lang, 1995a.

Duval, R. 2004. Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. La gaceta de la real sociedad matemática española RSME, Vol. 9.1 (2006), (pp. 143–168). recuperado de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546

Espino, G. & González, M. & González, J. (2018) La transversalidad: un acercamiento a la matemática desde las ciencias naturales y sociales. Clame: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 31. No. 2. Sección 4: el pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional. p.1584-1592.

Feria Torres, E. (2019). Diseño de una estrategia didáctica en contribución al aprendizaje de las identidades t trigonométricas mediado por la tecnología para favorecer su aprendizaje significativo crítico. Facultad de Ciencias.

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2018). Ejemplos y definiciones de ecuaciones: una ventana hacia el conocimiento conceptual de estudiantes de secundaria. PNA, 12(3), 147-172.

Fiallo, J (2011). Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. *Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas. Valencia, España.*

Fiallo, J. & Parada, S.E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. Revista Científica. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. ISSN 0124-2253

Figueiredo, A.M. (2010). Estructura cognitiva y conceptos nucleares en la enseñanza/aprendizaje de la trigonometría: Estudio comparativo realizado con alumnos del 10º al 12º curso de Enseñanza Secundaria mediante la aplicación de diferentes metodologías. (Tesis doctoral). Universidad de Extremadura: Badajoz.

Fowler, S., O'Keeffe, L., Cutting, C., & Leonard, S. (2019). *The Mathematics Proficiencies: A Doorway into Spatial Thinking*.

Garcés & Montaluisa & Salas. (2018). El aprendizaje significativo y su relación con los estilos de aprendizaje. Revista Digital ANALES de la Universidad Central del Ecuador. Volumen 1, año 2018.

García, M. y Benítez, A. (2010, noviembre). Relación entre representaciones de un concepto matemático con apoyo de tecnologías digitales. XII Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. D. F., México.

Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Godino, Juan & Ruiz, Francisco & Roa, R & Cid, E & Batanero, Carmen & Font, Vicenç. (2004). Didáctica de la matemática para maestros. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática da Universidade de Granada.

Goldin, G.A. (2018). Mathematical Representations. In: Lerman, S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/978-3-319-77487-9_103-4

Goldin, G. A., and Janvier, C. (1998). Representations and psychology of mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, V17, N1, pp. 1- 4.

González, C. (2018). Uso de material manipulativo y tecnológico para fortalecer habilidades de visualización espacial en niños de quinto grado. https://repository.unab.edu.co/handle/20.500.12749/2553

Guamán Coraisaca, J. C., & Malán Saravia, X. A. (2019-08-07). Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca (Bachelor's thesis). Retrieved from http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/33307

Herrera, H. (2013) Enseñanza de los conceptos básicos de la trigonometría mediante el uso de tecnología informática. Maestría thesis, Universidad Nacional de Colombia.

*Hernández, R. & Fernández, C. & Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación. Sexta Edición. McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. México. ISBN: 978-1-4562-2396-0.*

Hurrell, D. (2020). The shape of reasoning: Using geometry to promote the reasoning proficiency strand. Australian Primary Mathematics Classroom, 25(4), 21-24.

Inan, C. (2013). Influence of the Constructivist Learning Approach on Students' Levels of Learning Trigonometry and on Their Attitudes Towards Mathematics. Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımının Öğrencilerin Trigonometriyi Öğrenme Düzeylerine ve Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi., 28(3), 219-234. Education Research Complete.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2021). Reporte de resultados de la prueba Saber 11°, 2021-II. Bogotá, Colombia.

Johnson D, Johnson R (2018) Cooperative learning: the foundation for active learning. In: Active learning - beyond the future. IntechOpen, London

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. Educational Researcher, 33(7), 14-26.

Kamber, D., & Takaci, D. (2018). On problematic aspects in learning trigonometry. International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 49(2), 161-175. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846

Kieran C. (2018) Enseñanza y aprendizaje de álgebra. En: Lerman S. (eds) Enciclopedia de Educación Matemática. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_6-5

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press. https://nap.nationalacademies.org/read/9822/chapter/8

Lieber, E. y Weisner, T. S. (2010). Meeting the practical challenges of mixed methods research. En A. Tashakkori y Ch. Teddlie (Eds.), Handbook of mixed methods in social and behavioral research (pp. 559-579). Thousand Oaks, CA, EE. UU.: SAGE

Maccoby, Eleanor E. and Nathan Maccoby (1954), "The Interview: A Tool of Social Science," Handbook of social psychology, 1, 449-87.

Mason, J. (2008). Thinking Mathematically (2nd ed.). Pearson.

Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Proyecto incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia. (2002). Ministerio de Educación Nacional Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media, Colombia Pág. 81-86. http://www.mineducacion.gov.co/documentos/alldocs.asp?it=87&s=1&id=29

Matta, N, (2014). GeoGebra como herramienta para la enseñanza de razones trigonométricas en grado décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza. Universidad Nacional de Colombia, facultad de ciencias, departamento de física, sede Bogotá. Trabajo de grado para obtener el título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Mora, Castor David. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de Pedagogía, 24(70), 181-272. Recuperado en 22 de marzo de 2021, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es.

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.

OECD (2020), Colombia descripción general del sistema educativo. GPS educativo: el mundo de la educación a tu alcance. Recuperado de https://gpseducation.oecd.org/CountryProfile?plotter=h5&primaryCountry=COL &treshold=5&topic=EO

OECD (2010), Estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en PISA, PISA, Publicaciones de la OCDE, París, https://doi.org/10.1787/9789264039520-en.

Ong, Walter J. (1987). Oralidad y Escritura: Tecnologías de la palabra. (A. scherp, Trans). Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1982).

Oviedo, L. & Kanashiro, A. (2012). Los Registros Semióticos de Representación en Matemática. Revista Aula Universitaria 13, pp. 29 a 36. Recuperado de: https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/AulaUniversitaria/article/view/4112

Parada, D. (2017) Enseñanza de la trigonometría, ¿una deuda pendiente? Recuperado de: https://revista.elarcondeclio.com.ar/ensenanza-de-la-trigonometria-una-deuda-pendiente/.

Posada Ruiz, M y García Ramos, E. (2019.). Procesos de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de GeoGebra en la clase de matemáticas. Universidad del Valle.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. La matematica e la sua didattica, 2, 191-213.

Rodríguez, D. (2014). Utilización de materiales manipulativos en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos del currículo de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Valladolid, España.

Runza, *G.* (2013). Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas. *Universidad Nacional de Colombia, facultad de ciencias, departamento de matemáticas, sede Bogotá.* Trabajo de grado para obtener el título de *Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.*

Sánchez, A. (2010). Estrategias didácticas para el aprendizaje de los contenidos de trigonometría empleando las TICs. Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa, (31), a130. https://doi.org/10.21556/edutec.2010.31.443

Sander, E., & Heiß, A. (2014). Interactive Computer-Supported Learning in Mathematics: A Comparison of Three Learning Programs on Trigonometry. Journal of Educational Computing Research, 50(1), 45-65. Education Research Complete.

Solanilla, O. (2015). Implementación de herramientas didácticas y tecnológicas para mejorar el nivel de aprendizaje de la trigonometría. Universidad del Tolima. Recuperado de: http://repository.ut.edu.co/handle/001/1785.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2009). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. Simon and Schuster.

Symonds, P. M. (1931). Needed research in diagnosing personality and conduct. The Journal of Educational Research, 24:3, 175-187, DOI: 10.1080/00220671.1931.10880196

UDLA (2016). Guía para orientar la evaluación educativa en UDLA. Guías para la Apropiación Curricular del Modelo Educativo Universidad de Las Américas.

Santiago de Chile. ISBN 978-956-8695-04-0. pp. 53- 54. Recuperado de: https://docencia.udla.cl/wp-content/uploads/sites/60/2019/11/guia-para-orientar-evaluacion-educativa.pdf

Urrutia, F. Z., Loyola, C. C., & Marín, M. H. (2019). A Tangible User Interface to Facilitate Learning of Trigonometry. International Journal of Emerging Technologies in Learning, 14(23), 152-164. https://doi.org/10.3991/ijet.v14i23.11433

UNESCO (2016). Aportes para la Enseñanza de las matemáticas. Santiago de Chile: OREALC. versión electrónica, número de catálogo 0000244855. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000244855

Valenzuela, M. (2012). Uso de Materiales Didácticos Manipulativos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. (Tesis de maestría). Universidad de Granada. Granada, España.

Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Viganó, V., & Lima, I. (2016). Aprendizagem significativa de Trigonometria. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática. 1. 10.35819/remat2015v1i2id1255.

Von Glasersfeld, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. Routledge.

Warschauer, M., & Matuchniak, T. (2010). New technology and digital worlds: Analyzing evidence of equity in access, use, and outcomes. Review of Research in Education, 34(1), 179-225.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019). Some of the potential affordances, challenges, and limitations of using GeoGebra in mathematics education. ("Key Problems of Complex Topics in Mathematics as ... - Science education") Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15(8). Scopus. https://doi.org/10.29333/ejmste/108436

Zamorano, F., Cortés, C., y Herrera, M. (2019). Una interfaz de usuario tangible para facilitar el aprendizaje de trigonometría. Revista internacional de tecnologías emergentes en el aprendizaje (IJET), 14 (23), págs. 152-164. doi: http://dx.doi.org/10.3991/ijet.v14i23.11433

Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student achievement in teaching of trigonometry. ("The effect of dynamic mathematics software GeoGebra on student ...") World Conference on

Learning, Teaching & Administration - 2011, 31, 183-187. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038

# ANEXOS

**ANEXO A.** Prueba Diagnóstica, versión adaptada de la prueba diagnóstica utilizada por Feria (2019) en el trabajo de maestría titulado Diseño de una estrategia didáctica en contribución al aprendizaje de las identidades trigonométricas mediado por la tecnología para favorecer su aprendizaje significativo crítico.

| | |
|---|---|
| | **INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN PABLO II**<br>**Sede Central**<br>**Volando con Calidad hacia la excelencia**<br><br>**Prueba Diagnóstica** |

**Nombre:** ________________________________________________

**Grado:** __________ **Fecha:** ___________________________

**Objetivo:**

- Identificar saberes previos para el desarrollo de la intervención en procura de mejorar el proceso de aprendizaje de las identidades trigonométricas con el apoyo de tecnología (material digital) y material concreto (análogo).

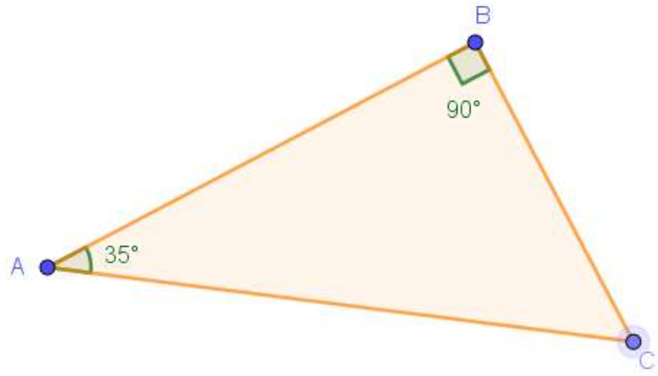
**Descripción**

1. **¿Qué es un triángulo rectángulo? defínalo utilizando una gráfica.**

2. **¿Cómo se llama cada uno de los de un triángulo rectángulo?**

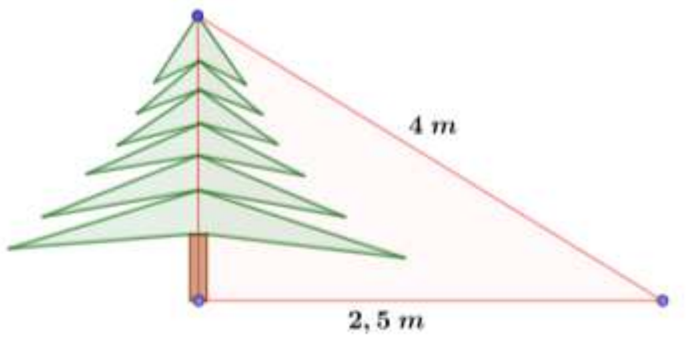
3. **¿En qué tipo de triángulos es aplicable el Teorema de Pitágoras?**

4. **En el triángulo $\Delta ABC$, los angulos $A$ y $B$ miden 35° y 90° respectivamente ¿cuánto mide el ángulo C?**




5. **Explique brevemente el teorema de Pitágoras apoyándose en una gráfica.**

6. **Menciono un método para calcular la altura del árbol de la imagen.**

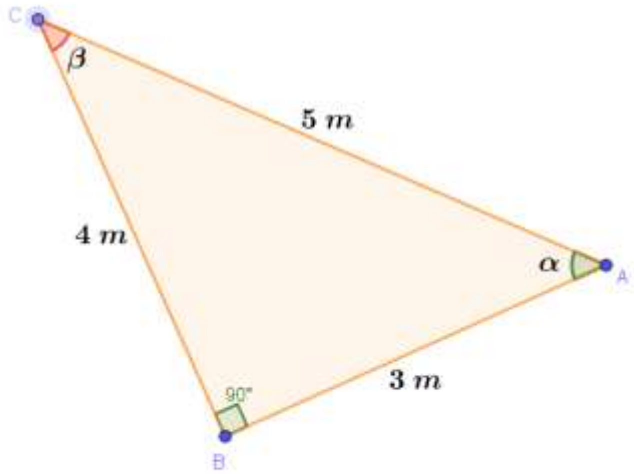



7. **¿Qué entiende por razón trigonométrica? Utilice una gráfica de ser**

8. **¿Cuántas razones trigonométricas existen? Escribe cada una.**

9. **Identifica en el triángulo $\Delta\,ABC$ ilustrado las siguientes razones.**
   **Nota: Da tu respuesta como una fracción (por ejemplo 1/4).**

$\sin(\alpha) =$
$\cos(\alpha) =$
$\tan(\alpha) =$
$\sin(\beta) =$
$\cos(\beta) =$
$\tan(\beta) =$



**ANEXO B.** Hoja de Trabajo I, versión adaptada de la actividad de exploración con material concreto propuesto por García & Posada (2019), en su trabajo titulado *Procesos de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de GeoGebra en la clase de matemáticas.*

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN PABLO II**
**Sede Central**
**Volando con Calidad hacia la excelencia**

**Hoja de Trabajo I**

**Nombre:** _______________________________________________

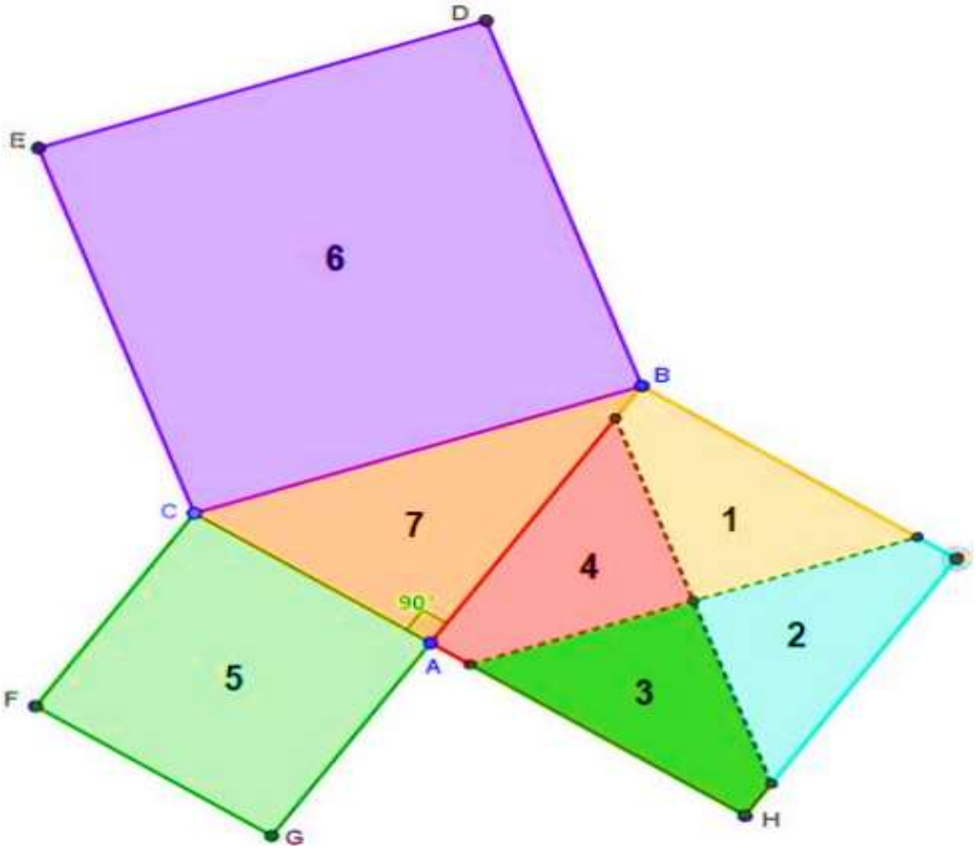
**Grado:** __________ **Fecha:** ___________________________

**Objetivo de aprendizaje:**

- Aportar un aprendizaje significativo en los estudiantes de grado décimo en el proceso de elaboración de conjeturas, en un contexto geométrico. Además, se busca reforzar y afianzar saberes prerrequisito (Teorema de Pitágoras), indispensables para la comprensión y aprendizaje de las identidades trigonométricas, utilizando diferentes registros de representación

**Actividad con recortables**

Sea el triángulo ABC rectángulo, sobre sus lados se construyen cuadrados como muestra la figura. Uno de los cuadrados se subdividió en cuatro polígonos nombrados del 1 al 4.




1. **Sigue las siguientes instrucciones para recortar y armar:** utiliza tijeras y pegante en barra para realizar el siguiente procedimiento sobre la figura anterior (ten cuidado al usar las tijeras, para evitar lastimarte a ti o tus compañeros).

- ✓ Siguiendo las líneas punteadas, recortar los polígonos nombrados con los números 1, 2, 3 y 4. ✓ Recortar el cuadrado nombrado con el número 5.
- ✓ Con los cinco polígonos recortados anteriormente, armarán un rompecabezas para completar el cuadrado (6), que se encuentra sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.
- ✓ Cuando se arme el rompecabezas, pegar las partes para dejarlas fijas en su posición.

2. **Conclusión**: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.

| |
|---|
| |

**Actividad de Exploración: implementación de GeoGebra.**

3. Abre la aplicación en GeoGebra y manipula el triángulo rectángulo que allí aparece usando los deslizadores. Para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, completa y anota en la tabla los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de dicho triángulo.

| $A_1$ $[unidades^2]$ | $A_2$ $[unidades^2]$ | $(A_1 + A_2)$ $[unidades^2]$ | $A_3$ $[unidades^2]$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

4. **Conclusión:** en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad (relación de las áreas).

| |
|---|
| |

**ANEXO C.** Hoja de Trabajo 2, creación propia de material concreto y digital para trabajar de forma complementaria la primera identidad trigonométrica o identidad fundamental.

| | INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN PABLO II<br>Sede Central<br>Volando con Calidad hacia la excelencia<br><br>Hoja de trabajo No. 2 |
|---|---|

**Nombre:** ________________________________________________

**Grado:** __________ **Fecha:** ___________________________

**Objetivo:**

- Intervención exploratoria, que presenta situaciones de manipulación concreta y digital con la intención de generar en el estudiante conjeturas vinculadas a la primera identidad trigonométrica fundamental.

**Descripción:** con ayuda de la tabla trigonométrica, palitos de madera, cauchos o gomas elásticas, calculadora, regla especial y lápiz; realiza, completa y responde a cada una de las preguntas que se encuentran en el siguiente proceso.

## Hoja de trabajo No. 2

### Identidad trigonométrica fundamental

Utiliza los palitos de madera con los cauchos e insértalos en los orificios de la tabla de madera con el circulo trigonométrico, para formar triángulos rectángulos inscritos en este, de tal forma que para cualquier triángulo rectángulo que se desee formar, uno de sus vértices siempre esté fijo sobre el centro de la circunferencia, otro de sus vértices siempre este ubicado sobre la circunferencia y el otro vértice este ubicado sobre el eje x horizontal al interior de la circunferencia.

1. Siguiendo el método anterior, construye varios triángulos rectángulos que cumplan las condiciones dadas y con ayuda de un transportador, la calculadora y la regla especial, completa la información de las medidas requeridas en la siguiente tabla:

***Tabla 1. Medidas de los Triángulos Rectángulos en la Circunferencia Trigonométrica***

| **N. ° Triángulo** | $\measuredangle$ ***central del*** $\triangle$ *Formado en el centro de la circunferencia (°)* | **Medida Hipotenusa (unidades)** | **Medida Cateto Horizontal (unidades)** | **Medida Cateto Vertical (unidades)** | $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta}$ | $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | | | | | | |
| **4** | | | | | | |
| **5** | | | | | | |

2. Realiza la medición del radio de la circunferencia trigonométrica que se encuentra sobre la tabla de madera, con ayuda de la regla especial. Compara el resultado con la medida de la hipotenusa de los triángulos registrados en la ***Tabla 1***. Redacta una conclusión sobre lo anterior.

3. Compara las medidas obtenidas del cateto horizontal, el cateto vertical, el valor del seno y coseno del ángulo $\boldsymbol{\theta}$**,** para cada uno de los triángulos que registraste en la ***Tabla 1***. ¿Qué logras observar al respecto? Redacta una conclusión.

Sobre cada uno de los triángulos rectángulos construidos para completar la información de la ***Tabla 1.*** Utiliza de nuevo los palitos de madera y los cauchos sobre la tabla de madera con el circulo trigonométrico, para construir esta vez cuadrados sobre los lados de cada triángulo rectángulo (sobre el cateto horizontal, el cateto vertical y la hipotenusa).

4. Siguiendo el método anterior y con ayuda de la calculadora, completa la información de las medidas requeridas en la siguiente tabla:

***Tabla 2. Medidas de las áreas de los cuadrados sobre los triángulos***

| **N. ° Triángulo** | **Medida área del cuadrado sobre la Hipotenusa (unidades)²** | **Medida área del cuadrado sobre el Cateto Horizontal (unidades)²** | **Medida área del cuadrado sobre el Cateto Vertical (unidades)²** | $Sen^2\,\theta$ | $Cos^2\,\theta$ | $Sen^2\theta + Cos^2\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | | | | | | |
| **4** | | | | | | |
| **5** | | | | | | |

5. Compara todos los resultados obtenidos en la tabla anterior (***Tabla anterior)***. ¿A qué conclusiones puedes llegar?

6. ¿Qué idea te puedes hacer de la identidad fundamental $\boldsymbol{Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1}$ para entenderla de una forma más sencilla, de acuerdo con todo lo realizado anteriormente?

**ANEXO D.** Hoja de Trabajo 3, versión adaptada de la actividad digital diseñada por García & Posada (2019), en su trabajo titulado *Procesos de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de GeoGebra en la clase de matemáticas.*

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN PABLO II**
**Sede Central**
**Volando con Calidad hacia la excelencia**

**Hoja de trabajo No. 2**

**Hoja de trabajo III**
**Exploración III: identidad**

Abre la aplicación de GeoGebra con el nombre de “Circulo Unitario II”, ahí encontrarás una construcción geométrica que contiene una circunferencia de radio unitario $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{und})$ y en su interior, un triángulo rectángulo (ver figura, en la aplicación). También, se muestran la medida de los catetos y la hipotenusa, y la construcción de cuadrados sobre cada lado del triángulo. La aplicación posee un deslizador para cambiar la medida del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ (ángulo interno del triángulo rectángulo).

1. A partir de la aplicación de GeoGebra, para valores diferentes del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

| $\boldsymbol{\theta}°$ | **CA** $[\boldsymbol{und}]$ | $\boldsymbol{Tan}(\boldsymbol{\theta})$ | **CO** $[\boldsymbol{und}]$ | $\boldsymbol{Sec}(\boldsymbol{\theta})$ | **H** $[\boldsymbol{und}]$ | $\boldsymbol{A_1}$ $[\boldsymbol{und^2}]$ | $\boldsymbol{Tan^2}(\boldsymbol{\theta})$ | $\boldsymbol{A_2}$ $[\boldsymbol{und^2}]$ | $\boldsymbol{Tan^2}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{1}$ | $\boldsymbol{Sec^2}(\boldsymbol{\theta})$ | $\boldsymbol{A_3}$ $[\boldsymbol{und^2}]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | ‘ | | | | | |

**CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; $A_1$: medida área cuadrado 1; $A_2$: medida área cuadrado 2; $A_3$: medida área cuadrado 3**

**DE ACUERDO CON LO REGISTRADO EN LA TABLA ANTERIOR Y LO OBSERVADO EN LA APLICACIÓN DE GEOGEBRA, RESPONDE**

2. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de la secante y la tangente del ángulo $\theta$.

Abre la aplicación de GeoGebra con el nombre de “Generalización II”, ahí encontrarás una construcción geométrica que contiene una circunferencia de radio **r** y un triángulo rectángulo (ver figura, en la aplicación). También, se muestran la medida de los catetos y la hipotenusa, y la construcción de cuadrados sobre cada lado del triángulo. La aplicación posee un deslizador para cambiar la medida del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ (ángulo interno del triángulo rectángulo) y la medida del radio.

3. A partir de la aplicación de GeoGebra, para valores diferentes del ángulo $\boldsymbol{\theta}$ y **r** completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

| $\boldsymbol{r}$ **[und]** | $\boldsymbol{\theta}°$ | $\boldsymbol{Tan(\theta)}$ | $\boldsymbol{Sec(\theta)}$ | $\boldsymbol{Tan^2(\theta)}$ | $\boldsymbol{Tan^2(\theta)+1}$ | $\boldsymbol{Sec^2(\theta)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

**CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; $A_1$: medida área cuadrado 1; $A_2$: medida área cuadrado 2; $A_3$: medida área cuadrado 3**

**DE ACUERDO CON LO REGISTRADO EN LA TABLA ANTERIOR Y LO OBSERVADO EN LA APLICACIÓN DE GEOGEBRA, RESPONDE**

4. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de la secante y la tangente del ángulo $\theta$.

5. ¿Qué se puede conjeturar respecto a la magnitud del radio de la circunferencia; de acuerdo con lo contestado en la pregunta 2 y 4?

**ANEXO E.** Demostraciones de dos de las tres identidades trigonométricas pitagóricas, tomadas de García & Posada (2019), en su trabajo titulado *Procesos de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de GeoGebra en la clase de matemáticas.* La identidad $\mathbf{1 + cot^2\theta = csc^2\theta}$ se deja como ejercicio de indagación al lector.

**Demostración de la identidad pitagórica $\mathbf{Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1}$**

Sea la circunferencia $C$ de centro $O$ y radio $r \in R^+$ y sea $A$ un punto en el plano de coordenadas $(x, y) \in C$; donde $(x, y) \in RxR$. Sea $B$ el punto de intercepción de la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto $A$, formando el triángulo rectángulo $\Delta ABO$, con catetos $|y| \equiv d(A, B)$ y $|x| \equiv d(O, B)$ y medida de hipotenusa igual a $r \equiv d(O, A)$. Sea $\theta$, el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto sobre el eje x del $\Delta ABO$. De acuerdo con la definición de las funciones Seno y Coseno, como razones de los lados de un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$Sen\,\theta = \frac{|y|}{r}\ ,\ \ Cos\,\theta = \frac{|x|}{r} \qquad [1]$$

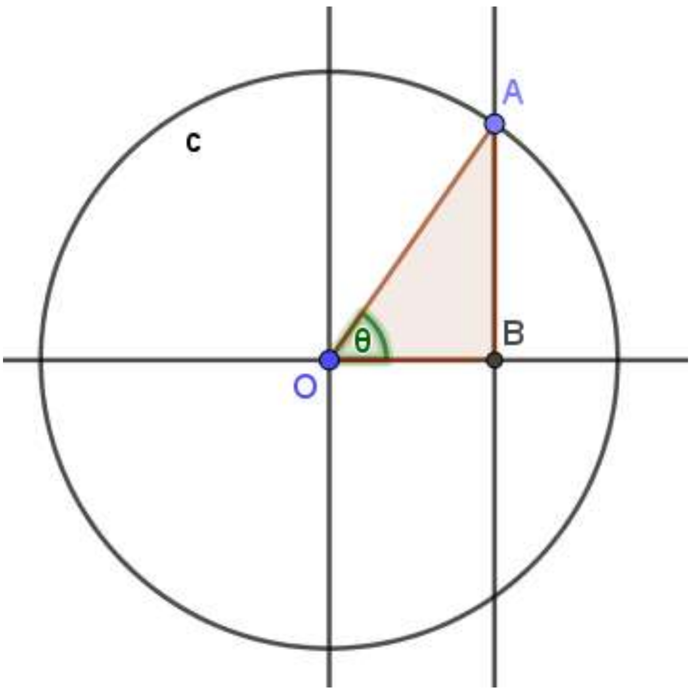



*Figura 1.a.* Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I)

Despejando $x$ e $y$, de las ecuaciones anteriores en [1] se tiene:

$$r * Sen\,\theta = |y|\,,\ \ r * Cos\,\theta = \ |x| \quad [2]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo, se puede aplicar el teorema de Pitágoras obteniendo:

$$|x|^2 + |y|^2 = r^2 \qquad\qquad [3]$$

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas de $[2]$, en $[3]$ se obtiene:

$$(r * Sen\,\theta)^2 + (r * Cos\,\theta)^2 = r^2$$

$$r^2 * Sen^2\theta + \ r^2 * Cos^2\theta \ = r^2$$

$$r^2(Sen^2\theta + \ Cos^2\theta\,) = r^2$$

$$(Sen^2\theta + \ Cos^2\theta\,) = \frac{r^2}{r^2}\,, \quad r \in R^+$$

En Consecuencia: $\boldsymbol{Sen^2\theta + \ Cos^2\theta = 1}$

**Demostración de la identidad pitagórica $\boldsymbol{1 + \ Tan^2\theta = Sec^2\theta}$**

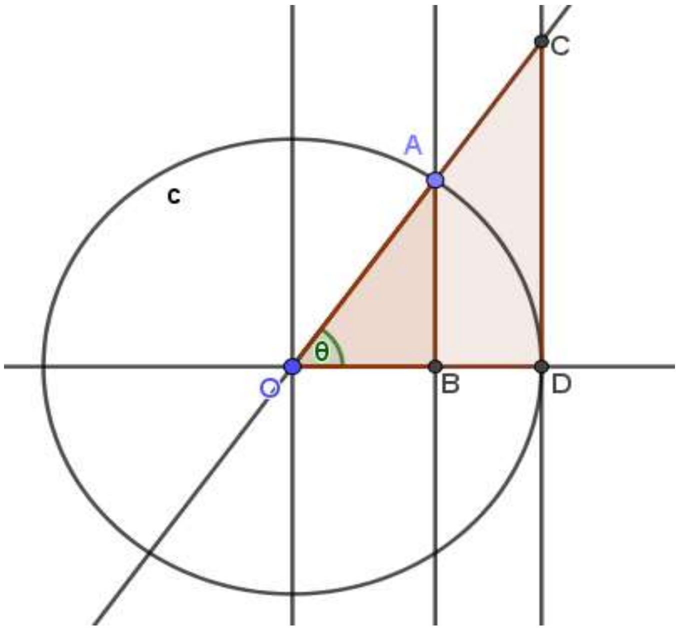



*Figura 1. b.* Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, construcción diseñada sobre el cuadrante I)

Sea la circunferencia $C$ de centro $O$ y radio $r \in R^{+}$ y sea $A$ un punto en el plano de coordenadas $(x, y) \in C$; donde $(x, y) \in RxR$. Sea $B$ el punto de intercepción de la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto $A$, formando el triángulo rectángulo $\Delta ABO$, con catetos $|y| \equiv d(A, B)$ y $|x| \equiv d(O, B)$ y medida de hipotenusa igual a $r \equiv d(O, A)$. Sea la recta $\overleftrightarrow{CD}$, tangente a la circunferencia $C$ en el punto D. Sea C un punto en el plano de coordenadas $(x^{*}, y^{*}) \in RxR$, tal que C es el punto de intercepción de la recta $\overleftrightarrow{CD}$ y la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Sea el triángulo rectángulo $\Delta CDO$, formado por el eje x y las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{OA}$; con catetos $|y^{*}| \equiv d(C, D)$ y $|x^{*}| \equiv d(O, D) \equiv r$ y medida de hipotenusa igual a $h \equiv d(O, C)$. Sea $\theta$, el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto sobre el eje x del $\Delta ABO$ (el ángulo $\theta$, es compartido por los triángulos rectángulos $\Delta ABO$ y $\Delta CDO$).

Como los triángulos $\Delta ABO$ y $\Delta CDO$ son semejantes; se tiene que:

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|y^{*}|}{r}, \qquad \frac{r}{|x|} = \frac{h}{|x^{*}|} = \frac{h}{r} \qquad [4]$$

Despejando $|y^{*}|$ de $[4]$, se tiene que:

$$r * \frac{|y|}{|x|} = |y^{*}| \qquad [5]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo $\Delta CDO$, se puede aplicar el teorema de Pitágoras obteniendo:

$$|y^{*}|^{2} + r^{2} = h^{2} \qquad [6]$$

Sustituyendo la ecuación obtenida de $[5]$, en $[6]$ se obtiene:

$$\left(r * \frac{|y|}{|x|}\right)^{2} + r^{2} = h^{2}$$

$$r^{2} * \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{2} + r^{2} = h^{2}$$

$$r^{2} * \left[\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{2} + 1\right] = h^{2}$$

$$\left[\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^{2} + 1\right] = \frac{h^{2}}{r^{2}}, \qquad r \epsilon \mathbb{R}^{+}$$

$$\left(\frac{|y|}{|x|}\right)^2 + 1 = \left(\frac{h}{r}\right)^2 \qquad [7]$$

Por otra parte, utilizando lo obtenido en $[4]$ y aplicando la definición de las funciones Tangente y Secante, como razones de los lados de un triángulo rectángulo, se tiene para el ángulo $\theta$ que:

$$Tan\,\theta = \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y^*|}{r}\,, \qquad Sec\,\theta = \frac{r}{|x|} = \frac{h}{|x^*|} = \frac{h}{r} \qquad [8]$$

Sustituyendo $[8]$ en $[7]$ se obtiene:

$$(Tan\,\theta)^2 + 1 = (Sec\,\theta)^2$$

En Consecuencia: $\boldsymbol{Tan^2\theta + 1 = +Sec^2\theta}$.

**ANEXO F.** Entrevistas clínicas a los estudiantes de la institución Educativa Juan Pablo II, sobre la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo, implementadas en el presente trabajo. Sin embargo, La identidad del estudiante es guardada y se identifica a partir del número consignado en el diagnostico (tabla 7).

**Entrevista # 1**

Docente: Bueno, buenas tardes. “estudiante No. 24”. El día de hoy, ¡pues! te voy a hacer una serie de preguntas respecto, ¡pues! a cada una de las actividades que se llevaron a cabo, ¡ehh! te pregunto, ¿qué tal te parecieron las actividades?

Estudiante No 24: Estuvieron bastante entretenidas, la verdad. Me gustó la manera en la que… te… se ejecutó con los estudiantes.

Docente: OK. Sí, sí de pronto tú tuvieras que escoger de una de las actividades que tú consideres que fue la que más te aporto a ti en cuanto a aprendizaje. ¿Cuál dirías que fue esa?

Estudiante No 24: La primera

Docente: ¡la primera!, la de la del rompecabezas, ¿Por qué te gustó más esa?

Estudiante No. 24: Como entendí mucho más el tema y fue algo más didáctico, fue como una actividad divertida

Docente: Ok, ¿antes de pronto habían trabajado de esa manera, algo parecido o es primera vez?

Estudiante No. 24: en este año no hemos trabajado de esa manera

Docente: Ok, digamos en ese caso, ya que decidas escoger como la parte del material concreto, lo manipulable. ¿Creerías que en ese caso es más favorable trabajar de esa forma o con tecnología?

Estudiante No. 24: Creo que es más favorable, didáctico.

Docente: ¿didáctico?

Estudiante No. 24: material en mano. Creo que como que te enfoca más en lo que se quiere lograr.

Docente: OK. ¡ehh! Bueno ya, Para finalizar, ¿dirías que al final del curso ¡ehh! terminas cómo empezaste o realmente te llevas un aprendizaje a partir de todo lo que se hizo?

Estudiante No. 24: me llevo un aprendizaje. La verdad fue bastante entretenido y divertido.

Docente: Ok, vale, muchas gracias.

**Entrevista # 2**

Docente: Bueno, buenas tardes, “Estudiante No.2”, bueno el día de hoy, pues te voy a hacer una serie de preguntas respecto, pues a cada una de las actividades que se llevaron a cabo, ¡vale!, entonces te pregunto, ¿qué tal te parecieron las actividades?

Estudiante No. 2: Me parecieron muy bien, ya que nos deja muy en claro el tema del teorema de Pitágoras, los temas de la hipotenusa, coseno y todo eso, ya que, con la prueba diagnóstica que nos hicieron al principio, pues la mayoría no se acordaba y referente a que fue pasando las actividades nos dejaban más en claro.

Docente: OK. Si de pronto tuvieras que escoger de alguna de las actividades que más te hayan gustado, o que de pronto pienses que fue con la que más aprendiste. ¿cuál dirías que fue esa?

Estudiante No. 2: Con la de los palitos, en… con la de los cauchitos, ya que, nos enseña cómo más medir precisamente y hacer los cálculos y es como un proceso más diferente a lo normal que hacemos usualmente.

Docente: Entonces, en ese caso, dirías que, ¡bueno! ¿trabajar de pronto manipulando las cosas es mucho mejor que trabajar con tecnología?

Estudiante No. 2: pues las dos cosas yo las veo como una buena opción, ya para salir de lo usual que uno ve todos los días. “Que es como copiar y la explicación”, ya que uno aprende a ¿cómo aprender? y a tener el conocimiento de manera diferente.

Docente: Vale, vale, muchas gracias.

**Entrevista # 3**

Docente: Buenos días. “estudiante No. 25”, ¿cómo estás?

Estudiante No. 25: Muy bien, ¿y usted?,

Docente: bien, bien gracias. “Estudiante No. 25”, hemos estado, pues, atentos a la forma en cómo has resuelto, has trabajado ciertas preguntas de esta actividad con recortables y esta actividad, la hoja de trabajo 1 y nos interesa mucho, que tú nos digas ¿qué te ayuda a comprender esa actividad?

Estudiante No. 25: Pues la actividad me pareció muy dinámica, me parece que es más fácil entender que las formas tradicionales con las que enseñan en los colegios.

Docente: ¡Vale! ¿Qué conclusiones has podido tú llegar, ya en el caso concreto, pues de las actividades a las que has llegado, a las conclusiones que has llegado tú mismo, por lo que has observado, el trabajado autónomamente?

Estudiante No. 25: Es que es muy curiosa la…, los las áreas que suman dos áreas diferentes y de un mismo cuadrado que estén opuesto entre si.

Docente: ¿sabías que eso estaba -antes de la actividad- Sabías que eso estaba ligado al teorema de Pitágoras?

Estudiante No. 25: No, la verdad. No, no sabía que eso estaba ligado,

Docente: pero ya lo has entendido bien y te queda, te queda claro.

Estudiante No. 25: Si, ya después de la actividad que hicimos me queda claro cómo funciona,

Docente: pero, entonces ¿qué fue lo que te ayudó a facilitar este aprendizaje? ¿El recurso con los recortables, oh que situación fue lo que le ayudó a comprender este momento?

Estudiante No. 25: si, los recursos y la aplicación me pareció muy cómoda que solo moviendo la ahí las estes, dieran los datos exactos de la de las áreas (se refería al rompecabezas).

Docente: Listo, vale, te agradezco muchísimo por todo.

**Entrevista # 4**

Docente: Muy Buenos días “Estudiante No. 18”, ¿cómo estás?

Estudiante No. 18: Bien, gracias

Docente: eh bueno “estudiante No. 18”, con mi compañero hemos decidido escogerte para realizarte unas pequeñas preguntas, porque nos pareció muy interesante el trabajo que estaba realizando durante las dos primeras actividades que hemos hecho hasta el momento. Entonces, la primera de ellas fue el diagnóstico. Quiero que seas y me comentes un poquito y seas totalmente sincera. ¿Cómo te sentiste en esa primera actividad diagnóstico?, donde apenas llegaste en la mañana, enteraste de lo que íbamos a trabajar y tenías que enfrentarte a esa prueba escrita, ¿qué sentiste? ¿Te sentiste bien mal?

Estudiante No. 18: pues la mayoría de gente, más que ellos tenían bloqueados (no se entiende bien). Porque hace rato no los veía, pero, o sea, miraba la pregunta y me acordaba de algunas cosas, aunque las últimas partes sí fueron más difíciles. Pero después de que ustedes explicaron, pues uno, se dio cuenta que son cosas sencillas.

Docente: ¡vale! después de que hicimos la explicación de esa primera parte, te quedó todo claro, o sea, ya la institucionalización en la que te mostramos cuáles eran las respuestas junto al lado de todos los compañeros, ¿si te quedo, si te quedaron claros los conceptos?

Estudiante No. 18: si todos quedaron claros, me pareció que explicaron muy bien.

Docente: perfecto, y ahora pasemos a la segunda actividad con los recortables. ¿Qué te pareció esa actividad con los recortables?

Estudiante No. 18: Pues, fue muy didáctica, o sea, diferente a las demás cosas que suelen poner. Que solamente toda teoría y no poner gráficas para explicar.

Docente: listo, ¿qué conclusión te permitió llegar esa, esa actividad con los recortables, esa actividad gráfica?

Estudiante No. 18: mmm…, de que, o sea, se acomodan las cosas de que en la matemática casi todo, o sea, todo tiene congruencia.

Docente: todo tiene congruencia. Eso, esa esa gráfica, ¿con qué tema tenía relación?

Estudiante No. 18: con el teorema de Pitágoras

Docente: y tú antes de de esta actividad. ¿Sabías que las áreas de que se construyen sobre los cuadrados de los catetos tenían relación con el cuadrado de la hipotenusa? hablando en términos de área.

Estudiante No 18: No, no lo tenía claro

Docente: Y, ahora de la última actividad que hicimos, que fue con la de GeoGebra, la que ustedes tenían que completar los valores de la tabla, ¿qué te pareció esa actividad?

Estudiante No. 18: Pues fue demasiado buena. Porque complementó el tema que usted ya estaban explicando desde un principio, incluso la actividad diagnóstica.

Docente: listo, que. Siendo totalmente sincera y franca, ¿cuál te pareció mejor, la actividad con los recortables o la actividad en GeoGebra?

Estudiante No. 18: mmm…, Los recortables.

Docente: ¡los recortables! ¿Por qué?

Estudiante no. 18: porque me gusta más lo didáctico.

Docente: ¡Le gusta más lo didáctico!, lo tangible, que tú puedas manipular las cosas. ¿Entiendes más? ¿Así de esa forma?

Estudiante no 18: Si.

Docente: Vale, te agradezco muchísimo. Eso es todo. Gracias “estudiante No 18”.

**Entrevista # 5**

Docente: Muy buenas tardes, nos encontramos con “Estudiante No 16”, ¿cómo estás?

Estudiante No 16: Bien gracias a Dios.

Docente: me alegra “Estudiante No. 16”. Me gustaría hacerte algunas preguntas de acuerdo a lo que estuviste trabajando, nos pareció pues que tenías unas participaciones y algunas observaciones bastante cercanas, Entonces me gustaría, pues enfatizar un poco más en cuanto a las percepciones sobre el trabajo. Me gustaría primero preguntarte sobre las dos últimas actividades: la actividad en la tabla, si la tabla, el círculo trigonométrico, los palitos y la actividad que realizamos con GeoGebra, la de llenar los cuadros. ¿Cuál de las dos te gustó más? y ¿por qué?

Estudiante No. 16: verdaderamente me gustó más la, la de la tabla que, que me lleva a pensar mucho más sobre cómo poner o ¿cómo? ¿Cómo poner los triángulos? o ya, llevar como más, como más a fondo de lo que tengo que hacer,

Docente: listo, porque, digamos sientes que de pronto la de tecnología no te cautivó tanto, comparada con la otra.

Estudiante No. 16: Me causó, no, no digamos muchísima dificultad, pero sí un poquito como en comprender de lo que tenía, de lo que tenía que hacer

Docente: ¿Crees que eso esté asociado de pronto? Porque en la parte de la tabla podían manipular, en cambio, la otra simplemente era copiar valores numéricos.

Estudiante No. 16: exactamente.

Encontrarás algún sentido listo. Entiendo algo que pronto quieras mencionar. Te parezca relevante lo que hayas hecho de las prácticas del día de hoy.

Estudiante No 16: Que en la tabla sale uno más de la monotonía, que todo el tiempo uno está calculando y escribiendo todo el tiempo, mientras que en la tabla uno manipulaba las, manipulada la tabla organizada los palitos, y eso.

Docente: vale, muchísimas gracias.

Estudiante No. 16: Gracias.

**Entrevista # 6**

Docente: Hola, Buenos días, Estudiante No., ¿cómo estás?

Estudiante No. 22: Buenos días, muy bien ¿y tú?

Docente: muy bien, gracias, bueno, Estudiante No. , me interesa mucho, realizarte unas preguntas de acuerdo, a lo que, pues, con mi compañero pudimos observar lo que trabajabas, entonces me interesa mucho las opiniones que tienes al respecto de las actividades que hemos hecho hasta el momento: las dos primeras actividades. me gustaría preguntarte por la primera, la actividad de diagnóstico, ¿qué sentiste inicialmente cuando te pasaron esa esa primera actividad Diagnóstica?

Estudiante No. 22: La verdad me pareció bacana porque, pues yo ya tenía conocimiento acerca de eso y como tengo tan buena retentiva, eh recientemente estábamos en eso en Trigonometría, volviendo a retomar eso, y entonces, la primera pregunta me pareció que es algo fácil, ya después se iba complicando, aunque hubo una en la que yo sabía, pero me confundí. Entonces, Pues….

Docente: Claro, entiendo, y en la parte en la que socializamos, institucionalizamos esas respuestas, trabajamos, socializamos las respuestas ya como grupo después de recoger, te quedó, sirvió para dar claridad de las cosas, confirmar ¿o no te sirvió esa última parte?

Estudiante No. 22: la verdad sí, porque tenía por ejemplo dudas acerca de. De desde los temas que estábamos viendo y que estamos volviendo a retomar ya que yo confundí algunos conceptos y entonces ahí me quedaron bastante claros, vale, perfecto.

Docente: Bueno, ahora te voy a hacer unas pregunticas de la segunda actividad de recortables y lo que trabajamos con el Apple de GeoGebra, ehh ¿qué te parecieron esas actividades?

Estudiante No. 22: Pues bacano porque al ser más lúdicas como que nos motiva a hacerlas y a presentarlas, y así en cierta forma, nos explica más gráficamente cómo, cómo funciona el, el teorema de Pitágoras

Docente: ¿qué te pareció la actividad con recortables? ¿qué conclusión pudiste obtener con lo con la actividad de los recortables?

Estudiante No.22: pues que, que no solamente se, se aplica en la teoría, sino que también a la hora de realizarlo de esta manera, se puede sacar la conclusión de que, las áreas concuerdan, junto con el concepto

Docente: antes de esta actividad, ¿tú sabías que las áreas construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo eran iguales, o sea, tenían relación con el teorema de Pitágoras?

Estudiante: Sí, sí, ya lo sabía.

Docente: listo, perfecto, super bueno. Y una última preguntita, si comparas el material que hemos usado de pronto con GeoGebra digital, con lo de los recortables, en esta última actividad, ¿cuál te gustó más y por qué?

Estudiante No. 22: pues, me pareció interesante la primera, pues al recordar conceptos, pero la segunda, cómo es, cómo era grupal, pues entre todos como apoyar y entre todos sacar conceptos y todo lo que lo que recordamos me pareció bastante agradable el recortable

Docente: vale perfecto, muchas gracias, vale que estés bien.

Estudiante No. 22: A ti, gracias.